



UNIONE EUROPEA
Fondo Sociale Europeo



REPUBBLICA
ITALIANA



REGIONE CALABRIA

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA



UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Dipartimento di FISICA

Scuola di Dottorato ARCHIMEDE

Indirizzo: Scienza e Tecnologia dei Sistemi Complessi

Con il contributo di

Commissione Europea – FSE – Regione Calabria

CICLO XXVII

Dinamica di Network Complessi di Oscillatori

Settore Scientifico Disciplinare MAT/07

Direttore: Ch.mo Prof. Pietro Pantano

Supervisore: Ch.mo Prof. Pietro Pantano

Dottorando: Dott. Francesco Chiaravalloti

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA



Dinamica di Network Complessi di Oscillatori

Indice

Introduzione	4
Caos e complessità	5
1.1 Sincronizzazione di sistemi caotici	5
1.2 Accoppiamento su reti complesse	9
2. Circuiti caotici memresistivi	13
2.1 Il memristor	13
2.2 Circuiti caotici memresistivi	17
3. Coppia di circuiti collegati in modo diffusivo	27
3.1 Descrizione del modello	27
3.2 Risultati Numerici I: condizioni iniziali C-C	28
3.3 Risultati Numerici II: condizioni iniziali C-S	37
3.4 Risultati Numerici III: altre condizioni iniziali	44
3.5 Confronto con il circuito di Chua	49
4. Circuiti collegati in modo diffusivo	54
4.1 Descrizione del modello	54
4.2 Condizioni iniziali I: circuito centrale con condizioni iniziali non nulle	56
4.3 Condizioni iniziali II: condizioni iniziali random	72
4.4 Anello diffusivo di circuiti di Chua	82
5. Circuiti collegati in modo sequenziale	88
5.1 Descrizione del modello	88
5.2 Risultati numerici 1: circuito di Chua memresistivo	89
5.3 Risultati numerici 2: circuito di Chua	108
6. Sincronizzabilità su reti scale-free	119
6.1 Il modello di Kuramoto	119
6.2 Sincronizzabilità di oscillatori di Kuramoto su rete scale-free	121
7. Conclusioni e futuri sviluppi	134
Bibliografia	138

Introduzione

L'argomento di ricerca affrontato durante il percorso di Dottorato si colloca nell'ambito degli studi sul caos e della teoria della complessità. Esso ha riguardato l'analisi, tramite simulazioni numeriche, della dinamica collettiva di oscillatori caotici accoppiati su geometrie varie. Tale tematica è di grande interesse in campi che vanno dalla fisica, alla chimica, alla biologia, in quanto i sistemi di oscillatori non-lineari accoppiati sono in grado di produrre una grande varietà di comportamenti quali, ad esempio, sincronizzazione, formazione di onde, strutture dissipative, ecc., e costituiscono pertanto un valido strumento per la modellazione e l'interpretazione di molti fenomeni e processi.

I sistemi caotici utilizzati sono stati il cosiddetto circuito di Chua, e una sua variante contenente un memristor, un componente circuitale innovativo dotato di memoria, in grado di produrre dinamiche caotiche all'interno di appositi circuiti. In generale, i sistemi con memristor risultano oggetto di numerose e recenti ricerche che ne sottolineano le potenzialità sia in ambito tecnologico, sia per la modellazione dei processi cognitivi e del funzionamento del cervello.

Gli studi condotti si sono concentrati, in particolare, sui fenomeni di sincronizzazione ed emergenza di questo tipo di sistemi caotici disposti su geometrie circolari con diversi schemi di accoppiamento.

È poi stato affrontato il problema della sincronizzazione su reti complesse. In tal caso, visto il grande numero di sistemi coinvolti e la topologia estremamente eterogenea degli accoppiamenti reciproci, si è passati al cosiddetto oscillatore di Kuramoto, che semplifica il quadro fenomenologico prodotto, concentrandosi sostanzialmente sull'insorgenza dello stato di sincronizzazione globale del sistema all'aumentare dell'accoppiamento tra gli oscillatori. È stata quindi studiata numericamente la dinamica di una rete di 1000 oscillatori di Kuramoto con una topologia di tipo *scale free*. In particolare, è stata esaminata la possibilità di forzare o perturbare lo stato di sincronizzazione tramite l'introduzione di opportuni nodi forzanti (pacemaker).

La tesi è organizzata come segue. Nel Capitolo 1 sono richiamati i concetti teorici essenziali sulla sincronizzazione caotica e le nozioni basilari sulle reti complesse. Nel Capitolo 2, dopo aver introdotto le caratteristiche del memristor, si passa alla presentazione del circuito memresistivo adoperato per le simulazioni. I principali risultati originali ottenuti, parte dei quali sono stati oggetto di pubblicazioni scientifiche, sono quindi illustrati nei capitoli successivi. Si comincia, nel Capitolo 3, con lo studio di una coppia di circuiti memresistivi accoppiati, generalizzando poi il tutto al caso di un anello di tali circuiti accoppiati simmetricamente tramite un resistore come descritto nel Capitolo 4. Nel Capitolo 5, invece, sono mostrati i risultati ottenuti nel caso di un diverso tipo di collegamento dei circuiti che risulta non simmetrico rispetto alla sequenza dei circuiti stessi. Nella sezione 6 si passa poi allo studio della sincronizzabilità di oscillatori di Kuramoto, proponendo un approccio "macroscopico" del problema del controllo di reti complesse. Infine, nella sezione 7 sono riassunti i principali risultati ottenuti e indicate alcuni possibili ulteriori sviluppi.

1. Caos e complessità

Nel presente capitolo vengono richiamati i concetti generali e il linguaggio dei sistemi caotici e della loro sincronizzazione. Nonostante, infatti, il concetto stesso di sistema caotico sembrerebbe contraddire tale possibilità, anche nel caso di accoppiamenti tra oscillatori caotici possono aversi fenomeni di sincronizzazione, sia indotta che spontanea. Quest'ultima è quella maggiormente interessante in una visione volta a cogliere i comportamenti emergenti dei sistemi complessi. Spesso, infatti, gruppi di sistemi caotici interagenti costituiscono un sistema complesso in grado di manifestare fenomeni spontanei di auto-organizzazione. Vengono infine introdotti i concetti basilari delle reti complesse e presentato il problema della sincronizzabilità su tali geometrie.

1.1 Sincronizzazione di sistemi caotici

Il termine “caos deterministico” fa riferimento alla proprietà di alcuni sistemi dinamici, anche semplici, di dare origine ad un comportamento che risulta, a tutti gli effetti pratici, indistinguibile da un processo aleatorio. In effetti i sistemi non lineari, anche se governati da leggi deterministiche, possono manifestare comportamenti imprevedibilmente complicati, sfuggendo così al controllo e alla previsione. Il caos deterministico può dunque essere definito come un “comportamento stocastico che si verifica in un sistema deterministico” [152] o, equivalentemente, come un'evoluzione temporale con un'estrema sensibilità alle condizioni iniziali [144]. Di fatto, il carattere aleatorio latente nel comportamento di alcuni sistemi dinamici risiede nei termini non lineari delle equazioni, in grado proprio di amplificare le conseguenze di piccole variazioni sulle condizioni iniziali o sui parametri del sistema. Da un punto di vista concettuale, se la precisione sulla misura e sul calcolo potesse essere infinita il comportamento caotico non ci sarebbe, in quanto una legge matematica è di per sé deterministica [32,125], ma a tutti i fini pratici la dinamica di un sistema caotico è imprevedibile pur se descritta da un'equazione deterministica.

Ciò implica che, anche considerando due sistemi caotici identici, una piccola differenza sulle condizioni iniziali crescerà esponenzialmente nel tempo dando origine a traiettorie completamente diverse. Conseguentemente, il concetto di sincronizzazione applicato ai sistemi caotici appare a prima vista contraddittorio. Tuttavia, anche per questi sistemi si può avere qualche forma di sincronizzazione, che va però intesa in un'accezione più ampia rispetto alla semplice coincidenza e sovrapposizione delle traiettorie. Quest'ultima rappresenta, infatti, la forma sicuramente più forte di sincronizzazione che si può avere, ma tra segnali caotici possono risultare significative anche forme più deboli di correlazione. Con il termine di sincronizzazione caotica, infatti, si intende un processo per il quale due o più sistemi caotici interagenti accordano una qualche proprietà del loro moto su un comportamento comune [131,25], che può andare dalla perfetta coincidenza delle dinamiche, all'esistenza di una qualche relazione tra esse. In generale, infatti, a

seconda della tipologia dei sistemi caotici, identici o meno, e dell'intensità dell'accoppiamento, esistono diversi tipi di sincronizzazione caotica [25,128,138]. Ad esempio, nel caso di sistemi identici, descritti cioè dagli stessi valori dei parametri, si può avere l'usuale sincronizzazione completa (*Complete Synchronization* - SC), con l'uguaglianza delle traiettorie [128,129,65]. Una forma più debole di sincronizzazione, che si produce anche per sistemi non identici, è invece la sincronizzazione di fase (*Phase Synchronization* - PS), nella quale le oscillazioni dei segnali risultano in fase ma le ampiezze rimangono scorrelate [10-12, 21]. Quando, invece, si ha una corrispondenza tra i segnali dei due sistemi a meno di una differenza di fase costante, si parla di *Lag Synchronizations* (LG) [139,142] o anche *Rhythm Synchronization* (RS) [56].

Una situazione più generale è poi quella rappresentata dalla cosiddetta sincronizzazione generalizzata (*Generalized Synchronization* - GS), che estende il concetto di sincronizzazione tra due sistemi accoppiati, identici o meno, individuando una relazione funzionale tra le traiettorie dei sistemi [92,146,186].

Può inoltre capitare che uno stato di sincronizzazione caotica venga momentaneamente meno per poi ricomporsi successivamente, dando così luogo al cosiddetto fenomeno dell'intermittenza [24,142,191,79].

L'espressione "sincronizzazione caotica" racchiude dunque un fenomenologia piuttosto ampia e, d'altra parte, costituisce una tematica fondamentale all'interno delle ricerche sulla dinamica dei sistemi non-lineari. Oltre che da un punto di vista teorico, gli studi sulla sincronizzazione caotica sono di grande importanza anche per le possibili applicazioni tecnologiche, ad esempio nel campo della crittografia e delle cosiddette *secure communications* [53,55,71,96,105,156,181,187]. Più in generale, il fenomeno della sincronizzazione caotica si presenta in molti sistemi e, ad esempio, è stata investigata, teoricamente e sperimentalmente, anche nel caso di circuiti elettrici accoppiati [36,76,145,162,177], reazioni chimiche [79,99,126] e sistemi ottici [100,115,126]. La sincronizzazione tra oscillatori caotici gioca un ruolo fondamentale anche in molti fenomeni biologici [68,115,117,137] e in particolare nelle dinamiche neuronali [57,74,122].

Un aspetto molto importante di cui tenere conto riguarda il tipo di accoppiamento tra i due sistemi caotici, ovvero il modo in cui questi interagiscono. È infatti possibile distinguere tra due configurazioni in grado di portare a sincronizzazione [25,189]: accoppiamento unidirezionale, detto anche *master-slave*, e accoppiamento bidirezionale.

Nel primo caso, uno dei due sistemi, il *master*, è come fosse isolato e segue liberamente la propria dinamica, mentre l'altro sistema, lo *slave*, viene invece forzato a seguire una data funzione della dinamica del master. Si parla quindi di sincronizzazione indotta, o forzata.

È questo il tipo di schema adottato inizialmente negli studi sulla sincronizzazione caotica. Sin dai primi lavori in questo campo, infatti, si è cercato di determinare le possibili modalità di accoppiamento unidirezionale in grado di garantire la stabilità dello stato di sincronizzazione [91,128,129]. Uno schema molto studiato è quello proposto da Pecora e Carroll [128,129] nella forma (1.1), dove $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $\mathbf{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_m)$ e $\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, \dots, w_m)$ rappresentano le variabili di stato dei sistemi che evolvono secondo rispettive funzioni \mathbf{f} , \mathbf{g} e \mathbf{h} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \right\}, \text{master} \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \left. \right\}, \text{slave}$$

In particolare, si nota che l'evoluzione dello *slave* è guidata del segnale \mathbf{u} che rappresenta una componente forzante per il sistema (*driving signal*).

Qualora sia possibile descrivere la dinamica di due sistemi caotici accoppiati col formalismo (1), allora si riesce a determinare la stabilità di un'eventuale stato di sincronizzazione studiando, ad esempio, gli esponenti di Lyapunov dello *slave* quando è forzato dal segnale guida \mathbf{u} [128,129]. Questo metodo è stato ad esempio utilizzato, ad esempio, per la sincronizzazione di sistemi di Lorenz [151].

Come è evidente, tale approccio al problema della sincronizzazione è largamente influenzato dal punto di vista tipico della teoria del controllo dei sistemi dinamici non lineari [88,94]. All'interno di questo contesto sono stati proposti vari metodi per il controllo del caos e per forzare lo stato di sincronizzazione [34,37,39,63].

D'altra parte, due sistemi caotici interagenti possono raggiungere anche spontaneamente una condizione di sincronizzazione. Nel caso di accoppiamento bidirezionale, infatti, i due sistemi si influenzano reciprocamente ed è possibile che accordino le proprie dinamiche sino ad arrivare ad uno stato di auto-sincronizzazione che si configura, quindi, come un fenomeno emergente. È questa, ad esempio, una situazione che occorre tipicamente in fisiologia, ad es. tra ritmo cardiaco e respiratorio [25,26]. In generale, quello della sincronizzazione spontanea è un fenomeno che si ritrova in vari contesti, che vanno dalla fisica alla biologia e alle scienze sociali [110].

Questi due schemi di collegamento, unidirezionale e bidirezionale, risultano profondamente diversi tra loro e non sono in alcun modo riconducibili ad un unico formalismo [25].

Un tipo di collegamento bidirezionale molto studiato è il cosiddetto accoppiamento diffusivo, nel quale il termine di mutua interazione è proporzionale alla differenza tra gli stati dei sistemi. Nel caso di due sistemi identici accoppiati su tutte le variabili di stato $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_d)$, la cui dinamica è descritta dalla funzione $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, l'accoppiamento diffusivo ha la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= F(\mathbf{x}_1) + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= F(\mathbf{x}_2) + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove $\mathbf{S} = (s_{ij})_{d \times d}$ è una matrice che determina l'intensità e le modalità dell'accoppiamento. Solitamente, per questo tipo di accoppiamento, all'aumentare dei coefficienti della matrice \mathbf{S} si ha una transizione ad una dinamica sincronizzata [30,73]. Ad esempio, nel caso semplificato in cui:

$$\mathbf{S} = s\mathbb{I} \quad , \quad (1.3)$$

ovvero quando ogni variabile di stato di un sistema è accoppiata in modo proporzionale alla sua differenza rispetto all'omologa variabile dell'altro sistema, lo stato di sincronizzazione risulta stabile per $s > \frac{1}{2} \lambda_F$, dove λ_F è l'esponente di Lyapunov più grande associato al singolo sistema [25,64].

Lo schema di accoppiamento (1.2) può essere esteso al caso di più sistemi caotici interagenti, la cui dinamica rappresenta una tematica di grande interesse e molto studiata in diversi contesti. Oltre a fenomeni di sincronizzazione [103,143,148,159], gruppi di oscillatori non-lineari accoppiati sono in grado di produrre diverse tipologie di comportamenti spontanei quali, ad esempio, onde di varia natura [78,111,112,132,149] e la formazione di strutture spazio-temporali coerenti [60,66,67,124,195]. In particolare, la formazione di pattern si configura come un fenomeno emergente dovuto all'interazione dei singoli oscillatori. In effetti, tipico dei sistemi complessi, di sistemi, cioè, composti da più unità "elementari" in mutua interazione tra loro secondo leggi locali, è l'emergenza di strutture coerenti non banali che si manifestano a scale spazio-temporali più grandi di quella delle singole parti del sistema. Tale auto-rganizzazione emergente, che è una delle caratteristiche fondamentali della complessità, non è imposta dall'esterno ma risulta essere una proprietà globale del sistema nel suo insieme. Essa deriva spontaneamente dalla dinamica non lineare dei suoi singoli costituenti, e non è dunque neppure riconducibile, banalmente, alla mera somma estensiva delle proprietà di questi ultimi. Un sistema complesso, quindi, pur essendo costituito di parti, possiede caratteristiche che le singole parti separatamente non hanno, e manifesta la capacità di dar luogo spontaneamente a comportamenti altamente organizzati, che a loro volta possono retroagire sulle proprietà e i comportamenti delle parti. La complessità va dunque intesa come "irriducibilità, molteplicità, circolarità" [193], e in molti casi gruppi di sistemi caotici interagenti si comportano come un sistema complesso in grado di produrre auto-organizzazione.

Proprio in virtù della gran varietà di comportamenti a cui possono dar luogo, i sistemi formati da gruppi di oscillatori non-lineari accoppiati costituiscono un valido paradigma interpretativo per la modellazione e la descrizione di molti processi, in campi che vanno dalla fisica, alla chimica, alla biologia. Esempi tipici si ritrovano negli studi sull'accoppiamento di laser [75,163], reattori chimici [95,160], giunzioni *Josephson* [52,72], così come nella caratterizzazione dei comportamenti di sistemi economici [192] ed ecologici [23]. Inoltre, gruppi di dinamiche oscillanti interagenti sono frequenti nei sistemi biologici [117] e i risultati delle ricerche sul comportamento cooperativo di sistemi caotici accoppiati svolgono un ruolo sostanziale per la comprensione delle dinamiche che sottendono, ad esempio, l'attività cardiaca e del sistema nervoso, o le oscillazioni neuronali nel cervello [31,70,108,180].

Grazie alla loro capacità di produrre pattern complessi, gli insiemi di oscillatori non-lineari interagenti sono di grande interesse in biologia e neurofisiologia anche per la modellazione dei circuiti neurali che presiedono all'attuazione di dinamiche ritmiche quali la respirazione o la digestione [62,81]. Tali circuiti neurali, detti *Central Pattern Generators* (CPG), controllano i muscoli coinvolti nell'espletamento di ben determinate funzioni attraverso segnali che consistono in pattern oscillanti di vario tipo [90]. Si comprende, allora, come opportuni gruppi di oscillatori non-lineari interagenti costituiscano un utile modello delle connessioni sinaptiche tra i neuroni che costituiscono i CPG [93], oltre a fornire spunti per la generazione di segnali

finalizzati a tecniche di controllo automatico di dispositivi artificiali [4,147].

In particolare, configurazioni di oscillatori accoppiati su geometrie ad anello risultano di grande interesse in neuroscienza e medicina [47,59,157], e fungono da struttura base per l'implementazione di modelli di CPG utili, ad esempio, per emulare il processo di locomozione [46,48,69].

1.2 Accoppiamento su reti complesse

Per estendere l'accoppiamento diffusivo (1.2) al caso di gruppi di sistemi caotici mutuamente interagenti, è utile descrivere la configurazione geometrica complessiva tramite una rete, ovvero un grafo bidirezionale.

Da un punto di vista matematico, un grafo bidirezionale $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ è formato da un insieme di valori ordinati $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, rappresentanti i nodi del grafo, e da un insieme \mathcal{L} contenente coppie non ordinate di elementi di \mathcal{N} che identificano gli archi (o link) del grafo congiungenti i nodi delle diverse coppie. Equivalentemente, un grafo bidirezionale formato da N nodi può essere descritto da una matrice di adiacenza $\mathbf{C} = (c_{ij})_{N \times N}$, con $c_{ij} = c_{ji} = 1$ se i sistemi i e j risultano tra loro collegati, mentre $c_{ij} = c_{ji} = 0$ in caso contrario. Si definisce grado di un nodo il numero k di archi che lo collegano direttamente ad altrettanti nodi, che costituiscono pertanto il suo vicinato.

Nel caso di un gran gruppo di sistemi caotici accoppiati, è allora possibile far riferimento al formalismo dei grafi visualizzando i singoli oscillatori come nodi di una rete, più o meno complessa, i cui archi individuano i sistemi direttamente interconnessi [26].

Definendo una matrice di accoppiamento $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ uguale alla matrice di adiacenza \mathbf{C} (cioè: $a_{ij} = c_{ij}$, per $i \neq j$), tranne che per gli elementi diagonali così definiti:

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} \quad (1.4)$$

una possibile estensione del formalismo (1.2) al caso di N oscillatori può essere dato dalla seguente espressione:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = F(\mathbf{x}_i) + s \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j, \quad (1.5)$$

dove s rappresenta l'intensità dell'accoppiamento e $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ è una matrice costante, di valori 0 e 1, che lega le variabili su cui avviene l'accoppiamento.

Ad esempio, nel caso in cui $\mathbf{\Gamma}$ sia una matrice diagonale: $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, si ha un accoppiamento che avviene su ogni equazione di un sistema attraverso le corrispondenti variabili dei sistemi ad esso accoppiati, e la (1.5) rappresenta dunque una estensione del caso (1.3).

Se, invece, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d)$ con $\gamma_l = 0$ per $l \neq i$, l'accoppiamento si ha solamente sulla i^a equazione

del sistema, tramite la i^a variabile. Imponendo, senza perdita di generalità, $l = 1$, le equazioni per l' i^o sistema del cluster diventano in tal caso:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= f_1(\mathbf{x}_i) + s \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot x_{j1} \\ \dot{x}_{i2} &= f_2(\mathbf{x}_i) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{id} &= f_d(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Riguardo l'aspetto geometrico, nel caso di una configurazione ad anello, detta anche "di vicinato", la matrice di adiacenza del grafo corrispondente è:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

da cui si deduce la seguente matrice di accoppiamento:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 1 & \dots & & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

In generale, il formalismo (5) rappresenta una situazione molto studiata [97,106,107,170], e tentativi sono stati fatti per caratterizzare eventuali stati di sincronizzazione in funzione sia delle proprietà del singolo sistema, definito da una sua dinamica propria F , sia della topologia dell'accoppiamento descritta dalla matrice \mathbf{A} [26]. Risultati di rilievo, in questo campo, sono rappresentati, ad esempio, dalla cosiddetta congettura di Wu e Chua [172,182,183], che lega la stabilità dello stato di sincronizzazione agli autovalori della matrice di accoppiamento \mathbf{A} , o dal più generale metodo detto *Master Stability Function* [130] che fa uso degli esponenti di Lyapunov.

Tali metodi, comunque, congetturali o che riescono a fornire spesso condizioni solo sufficienti per la sincronizzabilità [127], non danno molte informazioni sul comportamento del cluster quando non si ha sincronizzazione, e non consentono dunque di ottenere indicazioni esaustive sugli eventuali fenomeni di emergenza e auto-organizzazione.

Oltre tutto, molti metodi risultano di difficile o impossibile applicabilità nel caso di geometrie di accoppiamento fortemente irregolari e complesse [11]. Se, infatti, nei primi studi condotti per indagare il comportamento di un gran numero di oscillatori sono state prese in considerazione geometrie regolari [154,121], negli ultimi anni la ricerca si è concentrata sulle cosiddette reti complesse, ovvero reti di grandi dimensioni con connessioni irregolari [5,26,169].

Le reti complesse risultano difatti onnipresenti sia in natura sia nelle realizzazioni artificiali. Esempi di reti complesse naturali possono essere, ad esempio, i legami all'interno di una catena alimentare di un ecosistema, l'insieme delle connessioni neurali del cervello o l'insieme delle reazioni chimiche che danno luogo ad un processo metabolico [84]. Così come reti complesse si ritrovano, ad esempio, anche nella distribuzione dei router di internet o delle pagine del *World Wide Web* [3] o nella struttura di vari tipi di legami sociali [175]. Le ricerche si sono allora concentrate sull'individuazione delle caratteristiche comuni all'interno di un panorama così variegato.

Ciò che distingue una rete regolare da una rete random è, sostanzialmente, la distribuzione di grado $P(k)$, definita come la probabilità che un nodo abbia grado k . Le strutture regolari, infatti, hanno una distribuzione di grado costante (ad esempio, i nodi di un reticolo regolare bidimensionale a maglie quadrate hanno tutti grado 4). Un'altra quantità che descrive importanti proprietà di un grafo è il cosiddetto cammino medio ℓ , ovvero il numero minimo di archi che separano, mediamente, due qualsiasi nodi scelti a caso (se d_{ij} indica il numero di archi lungo un cammino minimo che porta dal nodo i al nodo j , allora $\ell = \langle d_{ij} \rangle$, dove la media è fatta rispetto a tutte le possibili coppie di nodi).

Uno dei primi modelli di network complesso è stato quello di rete random, proposto da Erdős e Rényi (ER), nel quale, dati N nodi, ad ogni coppia viene assegnato un arco in modo casuale secondo una certa probabilità p [58]. Si ottiene in tal modo un grafo con circa $p \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ archi e risulta che, se la probabilità p è maggiore di una data soglia $p_c \sim \frac{\ln(N)}{N}$, un grafo random risulterà, mediamente, connesso, ovvero formerà una struttura unica. La distribuzione di grado ha una forma poissoniana [28] e, soprattutto, una rete ER ha un piccolo cammino medio L che risulta scalare come $L \sim \frac{\ln(N)}{\ln(pN)}$.

È questa una caratteristica, per certi versi sorprendente, che si ritrova effettivamente nelle reti reali, nelle quali è possibile raggiungere qualsiasi punto in pochi passaggi. Visto lo *scaling* di L , si capisce come tale proprietà, cosiddetta “di piccolo mondo”, è garantita anche in reti molto grandi con un numero relativamente piccolo di archi posizionati a caso.

Il modello ER non riesce però a cogliere un ulteriore importante aspetto delle reti reali, che è l'alto coefficiente di *clustering* C , definito come il numero medio di connessioni n_i tra i membri del vicinato di un nodo i rispetto al numero massimo possibile di tali connessioni: $C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{k_i(k_i-1)/2}$, dove k_i è il grado del nodo. Il coefficiente di clustering, in pratica, misura il fatto che il vicinato di un nodo risulti essere un gruppo di nodi in cui molti sono, a loro volta, tra loro connessi (in una rete sociale, ad esempio, i conoscenti del “nodo” i è molto probabile che si conoscano tra loro). In una rete ER, poiché gli archi sono inseriti a caso, è invece poco probabile che ciò accada. D'altra parte, la struttura di una rete regolare fa sì che il coefficiente di clustering sia considerevole, ma una rete regolare non è di piccolo mondo.

Il modello di Watts and Strogatz (WS) coniuga gli aspetti positivi di una rete regolare e di una rete random partendo da una configurazione in cui ogni nodo i è collegato ai suoi vicini $i \pm 1, i \pm 2, \dots, i \pm \frac{K}{2}$ (con K pari) e spostando poi una estremità di un qualsiasi arco, scelto a caso con una data probabilità p , su un nodo a

caso [176]. In tal modo si introducono $\sim pNK/2$ link a lungo raggio (i cosiddetti “legami deboli”) che collegano nodi lontani, facendo diventare la rete di piccolo mondo, pur mantenendo un elevato livello di clustering. Variando p da 0 a 1 si ha la transizione da rete regolare a rete random. Per N sufficientemente grande, la distribuzione di grado di una rete WS risulta ancora di tipo poissoniano, con un picco pari a $\langle k \rangle = K$ e un decadimento esponenziale per valori elevati di k [176].

Tale proprietà, in comune con le reti ER, non è però in accordo con i dati raccolti da una vasta tipologia di reti reali, che presentano invece un andamento in legge di potenza del grado [8,9]. Ciò si riflette in una struttura intrinsecamente molto diversa della rete rispetto agli altri modelli. Nelle reti ER e WS, infatti, la forma sostanzialmente unimodale (a campana) della distribuzione di grado fa sì che abbia senso definire dei valori medi che colgono le qualità fondamentali della struttura che, detto altrimenti, risulta omogenea.

Nel caso di una legge di potenza, invece, non c'è una scala caratteristica e si parla di rete *scale-free* (SF). Tale rete è sostanzialmente disomogenea e si avranno pochissimi nodi con un numero enorme di connessioni: sono i cosiddetti *hub*, o connettori, che consentono di raggiungere punti lontani della rete garantendo la proprietà di piccolo mondo. Barabasi e Albert hanno proposto un modello in grado di cogliere le proprietà di queste reti SF, incentrato sulle modalità in cui una rete cresce nel tempo [8]. Partendo da una configurazione iniziale, nuovi nodi vengono aggiunti facendo però in modo che la probabilità di connessione con un nodo esistente i sia proporzionale al suo numero di link: $\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$. Con tale impostazione di “connessione preferenziale” l'algoritmo proposto da Barabasi e Albert genera effettivamente una rete scale-free. La distribuzione di grado segue una legge di potenza con esponente 3, ovvero: $P(k) \sim k^{-\gamma}$ con $\gamma = 3$. Inoltre, varie simulazioni numeriche mostrano che, rispetto ad una rete random di stesse dimensioni e stesso grado medio, una rete SF ha un cammino medio più piccolo ed un maggior coefficiente di clustering. La presenza di pochi nodi enormemente connessi risulta dunque un modo molto efficiente per rendere una rete di piccolo mondo.

Proprio per questa sua capacità di cogliere aspetti fondamentali delle reti, il modello SF è molto studiato, e anche il problema della sincronizzazione su questo tipo di reti è al centro di numerosi studi [5,116,171,173]. In particolare, una problematica molto studiata è quella della possibilità di forzare il sistema su uno stato di sincronizzazione tramite opportuni ingressi forzanti [101,168,190].

Nel capitolo 6 sono presentati i risultati ottenuti sulla sincronizzabilità di un sistema di oscillatori di Kuramoto accoppiati su una rete SF di 1000 nodi.

Nelle prossime tre sezioni (capitoli 2-4), invece, sono discusse le simulazioni sulla dinamica di sistemi caotici memresistivi accoppiati in modo diffusivo secondo lo schema (1.6). Sono stati considerati sia una singola coppia che un anello descritto dalle (1.7) e (1.8).

2. Circuiti caotici memresistivi

In questa sezione vengono presentate le proprietà peculiari del cosiddetto memristor, un innovativo elemento circuitale bipolare previsto teoricamente negli anni '70 ed effettivamente scoperto nel 2008. Da un punto di vista matematico, il memristor lega tra loro la carica elettrica e il flusso del campo magnetico. Esso può essere visto come un resistore dotato di memoria (da cui il nome, fusione delle due parole memoria e resistore), nel senso che il suo stato dipende dalla quantità di corrente che lo ha attraversato sino a quel momento. Tale caratteristica lo rende un oggetto dalle grandi potenzialità tecnologiche, e molte ricerche evidenziano il suo potenziale utilizzo nella realizzazione di computer di nuova generazione dalle performance innovative. Il memristor è anche al centro di un gran numero di studi che lo usano come valido modello di molti processi, in particolare in campo cognitivo. Inoltre, i circuiti con memristor sono in grado di manifestare una dinamica caotica analizzata da molti e recenti lavori scientifici. Nel capitolo viene quindi descritto il circuito memresistivo utilizzato per il progetto di ricerca sviluppato durante il dottorato.

2.1 Il memristor

Una delle questioni epistemologiche più profonde e affascinanti della scienza moderna riguarda, per dirla con le parole del grande fisico Eugene Wigner, “l’irragionevole efficacia della matematica”, ovvero la sua straordinaria, e per molti versi stupefacente, capacità di fornire una spiegazione profonda ed efficace dell’enorme varietà di fenomeni che si osservano sia a livello macroscopico che microscopico [178]. L’utilità della matematica è in effetti un tratto caratterizzante dell’indagine scientifica sul mondo, e spesso si identifica con essa. E se è vero che nuove strutture matematiche sono nate dall’esigenza di descrivere fenomeni fisici (si pensi al calcolo differenziale sviluppato da Newton e Leibniz per rappresentare il movimento di un corpo), analogamente, e più sorprendentemente, astratte deduzioni di tipo matematico, condotte per motivi di coerenza e bellezza matematica, hanno spesso anticipato la scoperta di fenomeni reali [10]. Di questa profonda interconnessione tra il mondo astratto del formalismo matematico e il mondo reale si trovano numerosi esempi nella storia della scienza, quali, ad esempio, la scoperta delle onde elettromagnetiche, “dedotte” da James Clerk Maxwell per esigenze di simmetria matematica nelle equazioni dei fenomeni elettromagnetici all’epoca note, o la previsione dell’esistenza dell’antielettrone da parte di Paul Dirac.

Un caso recente, di grandissimo interesse per via dei possibili risvolti tecnologici che si prospettano assolutamente innovativi, è quello del “memristor”, ipotizzato nel 1971 da Leon Chua in base a ragioni di completezza all’interno di una formulazione assiomatica della teoria dei circuiti [41] e “scoperto” poi realmente nel 2008 da un team di ricercatori dell’Hewlett Packard [155].

Il ragionamento che portò all’intuizione dell’esistenza del memristor è di grande eleganza. Partendo dalla constatazione che le grandezze circuitali fondamentali sono quattro (la corrente i , il potenziale V , la carica q

e il flusso del campo magnetico ϕ), è evidente che delle sei possibili relazioni duali tra queste quantità, cinque sono quelle classiche note da tempo. Infatti, la definizione stessa di corrente elettrica ($i = \frac{dq}{dt}$) e la cosiddetta legge di Lenz ($V = \frac{d\phi}{dt}$) rappresentano due di tali relazioni, mentre i tre elementi circuitali classici (il resistore R , il capacitore C e l'induttore L) forniscono altrettante relazioni che costituiscono la definizione matematica degli elementi stessi: $R(i) = \frac{dV}{di}$, $C(V) = \frac{dq}{dV}$, $L(i) = \frac{d\phi}{di}$. La situazione è riassunta nello schema riportato in Fig. 2.1, dal quale emerge chiaramente come, nel quadro generale, manchi una relazione $\phi = f(q)$ che leghi flusso magnetico e carica elettrica, da associare ad un nuovo elemento circuitale: il memristor appunto.

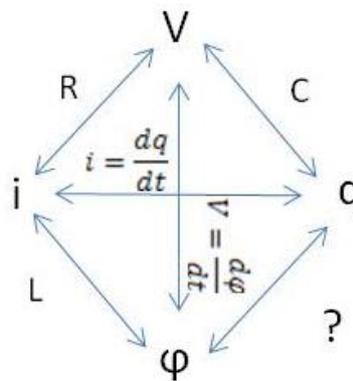


Figura 2.1 – Relazioni classiche esistenti tra le quattro grandezze circuitali fondamentali carica elettrica (q), flusso del campo magnetico (ϕ), potenziale (V) e corrente elettrica (i). Lo schema risulta mancante di una relazione tra ϕ e q .

Per ragioni di simmetria, dunque, un memristor è definito matematicamente attraverso una relazione costitutiva del tipo:

$$g(\phi, q) = 0 . \quad (2.1)$$

Più in dettaglio, si parla di memristor a “controllo di carica” se è possibile esplicitare una forma del tipo $\phi = \phi(q)$, da cui, tramite la legge di Faraday, segue:

$$V(t) = \frac{d\phi(q)}{dq} \cdot i = M(q(t)) \cdot i(t) \quad (2.2.a)$$

$$M(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} \quad (2.2.b)$$

dove il termine $M(q)$ prende il nome di “memristenza” (*memristance*). Analogamente, se è possibile scrivere un’espressione del tipo $q = q(\phi)$, si ha un memristor detto a “controllo di flusso”, per il quale vale la seguente relazione:

$$i(t) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} V(t) = W(\varphi(t)) \cdot V(t) , \quad (2.3.a)$$

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \quad (2.3.b)$$

in cui appare la cosiddetta “memduttanza” (*memductance*) $W(\varphi)$.

Considerando un memristor a controllo di carica (il discorso è analogo per il caso di controllo di flusso), la peculiarità della memristenza è proprio la sua dipendenza funzionale dalla carica che l’ha attraversata sino a quel momento. Poiché, infatti, si ha un relazione integrale ($q = \int_0^t i(\tau) d\tau$), lo stato del memristor dipende dalla storia passata del circuito: $M(q(t)) = M(\int i(\tau))$, e si ha quindi un effetto memoria.

Chiaramente, nel caso di una dipendenza lineare tra flusso e carica, la memristenza diventa una costante e il memristor si riduce ad un resistore ordinario.

In generale, invece, se la (2.1) non esprime una relazione lineare tra q e φ , il memristor si comporta come un resistore dotato di memoria: istante per istante è come se si avesse una resistenza ordinaria, attraversata da una data corrente in base alla legge di Ohm, ma la corrente che circola modifica il valore delle resistenza stessa, per cui si ha un sistema con feedback. Inoltre, quando non circola più corrente, la memristenza non varia ulteriormente, e il memristor “congela” il proprio stato. Sono queste, in sintesi, le caratteristiche del memristor alla base delle sue peculiari proprietà dinamiche.

Nel caso in cui si abbia una funzione monotona non decrescente tra flusso e carica:

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} \geq 0 , \quad (2.4)$$

il memristor è chiaramente un elemento passivo, essendo la potenza istantanea dissipata pari a:

$$W(t) = V(t) \cdot i(t) = M(q(t)) \cdot i^2(t) \geq 0 , \quad (2.5)$$

(analogo discorso vale sulla memduttanza che, per un memristor passivo, deve essere $W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \geq 0$).

Il memristor rappresenta, dunque, un nuovo elemento passivo in grado di collegare carica elettrica e flusso magnetico, senza la presenza di un campo magnetico connesso. Questo aspetto rende profondamente diverso il memristor, ad esempio, da un induttore, che è sì un elemento passivo, ma può comunque immagazzinare energia in un campo magnetico, e restituirla sotto forma di forza elettromotrice indotta. Il memristor, invece, non ammette alcuno *storage* di energia.

Inoltre, si dimostra che, nel caso in cui ai capi di un memristor venga applicata una tensione variabile di tipo armonico, ad esempio $V(t) \sim \sin(\omega t)$, la curva caratteristica del memristor nel piano $V - i$ ha una tipica configurazione di Lissajous che passa per l’origine e la cui ampiezza dipende dalla frequenza della tensione: per $\omega \gg 1$ l’isteresi si riduce e il memristor si comporta in modo lineare [43]. Tale figura ad “8” passante per l’origine nel punto di strozzamento costituisce il tratto distintivo di un memristor [2,22,40].

Il memristor, comunque, rimase una semplice, seppure affascinante, ipotesi sino al 2008, quando un team di ricercatori dell'Hewlett Packard impegnati nello sviluppo di un supercalcolatore a scala molecolare, annunciano sulla rivista *Nature* di aver individuato in un dispositivo nanometrico da loro sintetizzato proprio un memristor ideale [155]. Il dispositivo realizzato dal gruppo dell'HP consiste in un sottilissimo strato (5 nm) di TiO_2 , di cui una parte drogata positivamente, posto tra due elettrodi di Pt, e l'elegante modello interpretativo da loro sviluppato mostra in effetti come un comportamento memresistivo possa avere naturalmente origine in sistemi nanometrici. Il memristor è divenuto dunque, a pieno titolo, il quarto elemento circuitale fondamentale.

Dopo la sua scoperta fisica, gli studi sul memristor si sono rapidamente moltiplicati. Ricerche sono state condotte per approfondirne le proprietà fisiche [35,134,174] e per caratterizzare il suo comportamento come parte di un circuito con altri dispositivi elettronici [86,87]. In effetti, il memristor sta suscitando grande interesse nel campo dell'informazione e della computazione. I memristor, come si è detto, mantengono il loro stato quando sono spenti, quindi si prestano ad essere impiegati ad esempio come memorie non volatili o nella realizzazione di computer dalle performance innovative [54,77,113,185]. In particolare il memristor è un dispositivo analogico, la cui informazione, cioè, non è limitata ad un coppia binaria di 0 e 1 ma varia con continuità, il che potrebbe portare, secondo alcuni studiosi, allo sviluppo di calcolatori analogici competitivi [150]. Inoltre, il memristor è un dispositivo nanometrico che potrebbe rendere realizzabile un calcolatore a scala nanometrica, aggirando la legge di Moore che pone un limite di prestazioni ai calcolatori ordinari, basati su transistor, le cui dimensioni non possono scendere al di sotto di una certa soglia imposta da esigenze costruttive [161,179].

Il memristor si è dimostrato particolarmente adatto anche alla modellazione dei processi cognitivi [133,135,167]. Il comportamento del memristor, infatti, con la sua resistenza che cambia nel tempo in funzione della corrente fluita, ricorda il comportamento delle sinapsi, che si rafforzano quando i neuroni corrispondenti si attivano funzionalmente, con il peso della sinapsi che aumenta all'aumentare delle attivazioni. I memristor sono quindi adoperati come collegamenti che fungono da sinapsi all'interno di dispositivi neuromorfi simulano il funzionamento del cervello [33,85,89].

Infine, ma non meno importante, il memristor risulta un elemento di grande interesse anche nel campo della dinamica non lineare e degli studi sul caos. Per via della non linearità della relazione costitutiva (2.1), i circuiti elettrici contenenti un memristor possono dar luogo ad una dinamica caotica molto interessante [7,29,49,80,114,119,120,164,166]. Ad esempio, i circuiti caotici memresistivi si dimostrano in grado di produrre dinamiche caotiche intermittenti e transitorie [6,27].

In particolare, molti circuiti caotici basati sul diodo di Chua, risultano ancora caotici se il diodo viene rimpiazzato da un memristor [82]. In tal caso, essendo il diodo di Chua un elemento attivo in grado di fornire energia al circuito, anche il memristor da usare come suo sostituto nel circuito deve essere a suo volta un elemento attivo, il che si traduce in una opportuna equazione costitutiva per cui risulti un cambio di segno dell'espressione (2.4). È comunque sempre possibile implementare un memristor attivo tramite un memristor passivo ed altri elementi circuitali [82].

2.2 Circuiti caotici memresistivi

Il circuito di Chua è un sistema molto noto nell'ambito della teoria del caos [12,13,16-21,42,83]. Esso è composto da cinque componenti lineari ordinari (due capacitori, un induttore e due resistori), e da un resistore non lineare noto come "diodo di Chua" (Fig. 2). Il circuito elettronico così composto è in grado di originare un'estrema varietà di dinamiche non lineari, tanto da essere definito un "paradigma universale per la generazione del caos" [109].

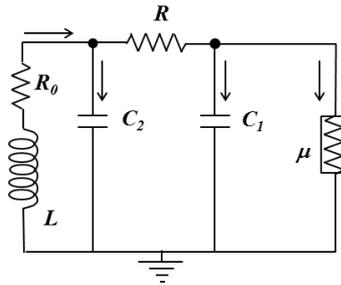


Figura 2.2 – Circuito di Chua, formato da 5 elementi ordinari (L , C_1 , C_2 , R ed R_0), e da un elemento attivo μ , non lineare, noto come diodo di Chua.

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito di Fig. 2.2 si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}(R_0 \cdot i + V_2) \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(i - \frac{V_2 - V_1}{R} \right) , \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{V_2 - V_1}{R} - i_D \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove i indica la corrente attraverso l'induttore L (di cui R_0 rappresenta la piccola resistenza), V_1 e V_2 sono, rispettivamente, le tensioni ai capi delle capacità C_1 e C_2 , mentre i_D rappresenta la corrente che passa attraverso il diodo.

Il cuore del circuito è costituito proprio dal diodo di Chua, un elemento attivo descritto, nella sua versione originale, da una funzione lineare a tratti che collega il valore della tensione V ai capi del diodo con la corrente i_D che lo attraversa [45]:

$$i_D = G_b V + \frac{1}{2}(G_a - G_b) \cdot (|V + E| - |V - E|) \quad (2.7)$$

dove i diversi parametri definiscono nello specifico l'aspetto della funzione.

Sono comunque state proposte anche altre non linearità per il diodo in grado di garantire una dinamica caotica del sistema. In [196], ad esempio, si fa uso di una forma cubica del tipo:

$$i_D = a \cdot V + c \cdot V^3 \quad (2.8)$$

con $a = -0.59$ mS e $c = 0.02$ mS/V². Con tale scelta, e per i seguenti valori dei parametri circuitali: $L = 18.91 \cdot 10^{-3}$, $R_0 = 14.99$, $C_2 = 78 \cdot 10^{-9}$, $C_1 = 7 \cdot 10^{-9}$ e $R = 2000$, il sistema (2.6) possiede una dinamica caotica. Ad esempio, integrando numericamente le (2.6) con i_D data dalla (2.7), partendo da condizioni iniziali $i(0) = 0$, $V_2(0) = 0.1$, $V_1(0) = 0$, la traiettoria del sistema nello spazio delle fasi corrisponde ad un attrattore di tipo doppio scroll (Fig. 2.4). Più in generale, al variare della resistenza R il sistema attraversa tutta una serie di biforcazioni a cui corrisponde il passaggio da una dinamica periodica ad oscillazioni caotiche con i corrispondenti attrattori che passano da cicli limite a spirale di Chua sino al doppio scroll. In Fig. 2.2 è mostrata la mappa di biforcazione ottenuta considerando i massimi locali del segnale V_1 al variare di R , e un ingrandimento di maggior dettaglio è riportato in Fig. 2.3. Emerge un ricco scenario di biforcazioni con raddoppi del periodo a cui corrispondono diversi tipi di attrattori, come riportato in Fig. 2.4. Inoltre, zone di ordine emergono tra situazioni caotiche.

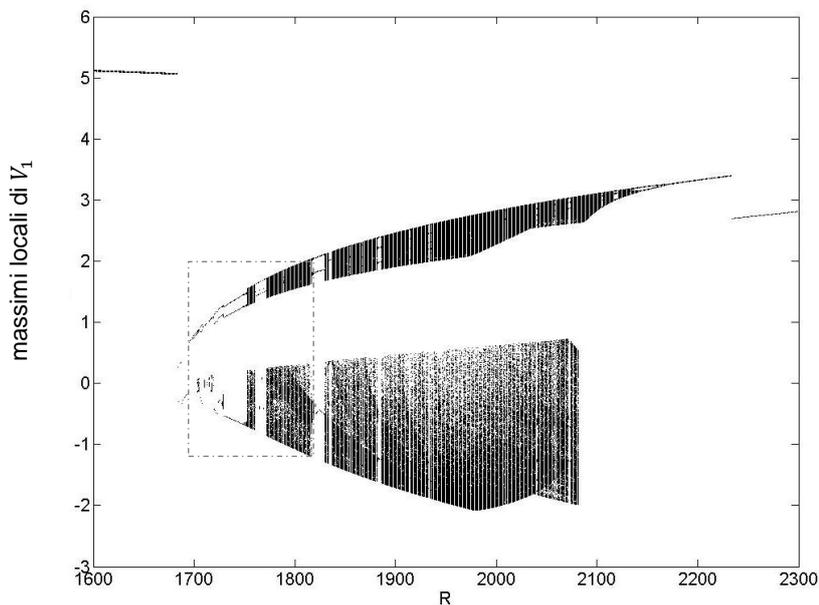


Figura 2.2 – Mappa di biforcazione del circuito di Fig. 2.2 ottenuta integrando le Eq. 2.6 con i valori dei parametri riportati nel testo, e calcolando i massimi locali di V_1 al variare della resistenza R . Le condizioni iniziali sono: $i(0) = 0$, $V_2(0) = 0.1$, $V_1(0) = 0$.

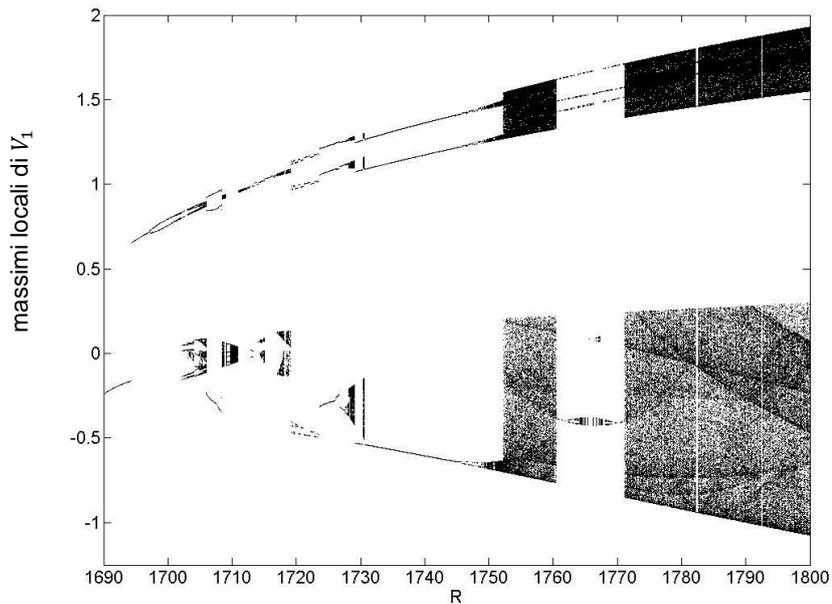


Figura 2.3 – Dettaglio di una porzione della mappa di biforcazione di Fig. 2.2.

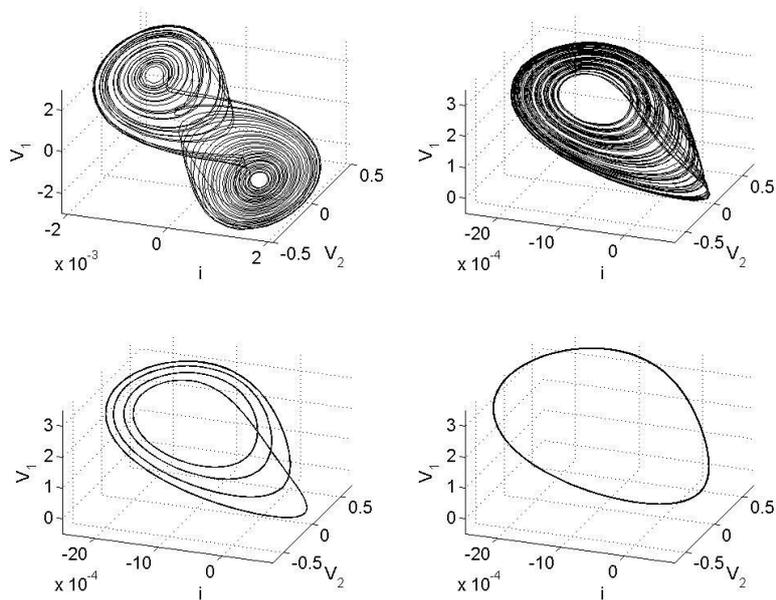


Figura 2.4 – Diverse tipologie di attrattori del sistema di equazioni 2.6 corrispondenti a diversi valori della resistenza R .

Ovviamente, le oscillazioni corrispondenti ai diversi attrattori hanno spettri diversi, come riportato in Fig. 2.5 (gli spettri sono stati calcolati tramite Fast Fourier Transformate – FFT):

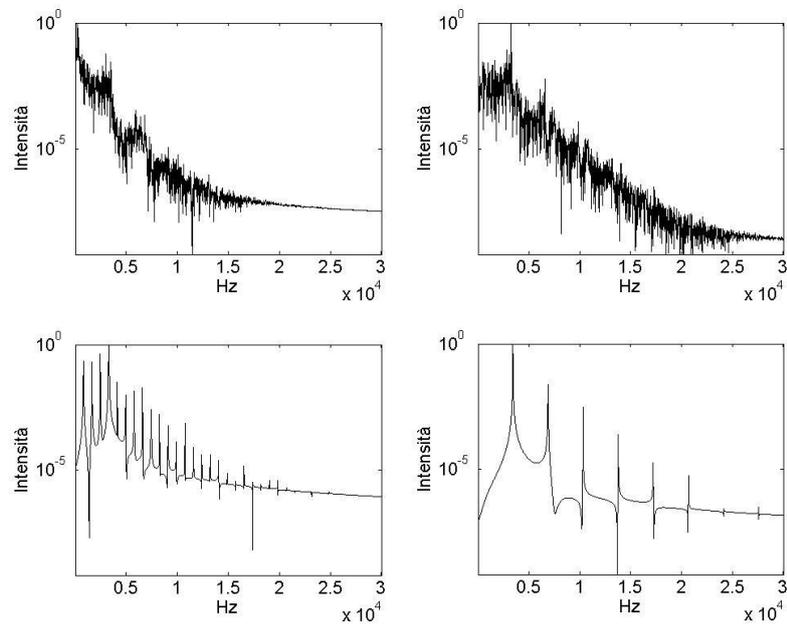


Figura 2.5 – Spettro ottenuto tramite analisi FFT del segnale $V_1(t)$ corrispondente alle diverse tipologie di attrattori di Fig. 2.4.

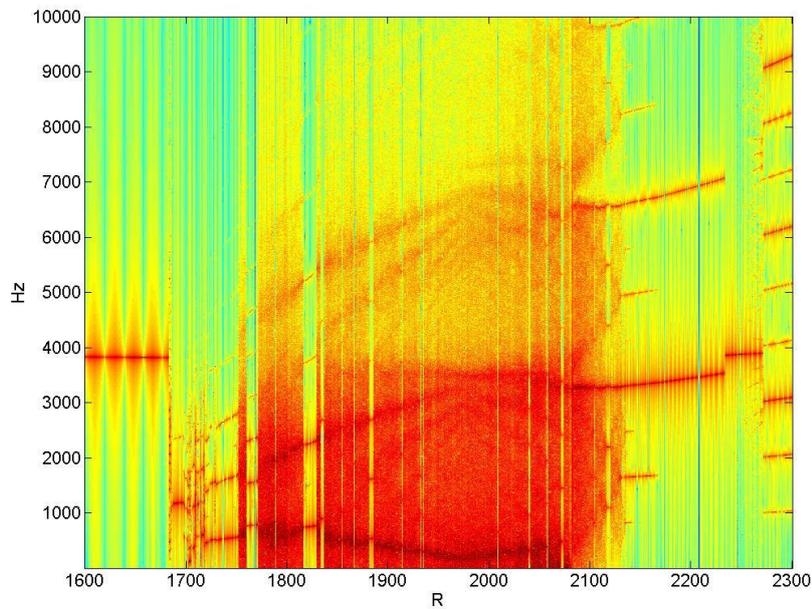


Figura 2.6 – Spettrogramma del segnale $V_1(t)$ al variare della resistenza R (cfr. Fig. 2.2).

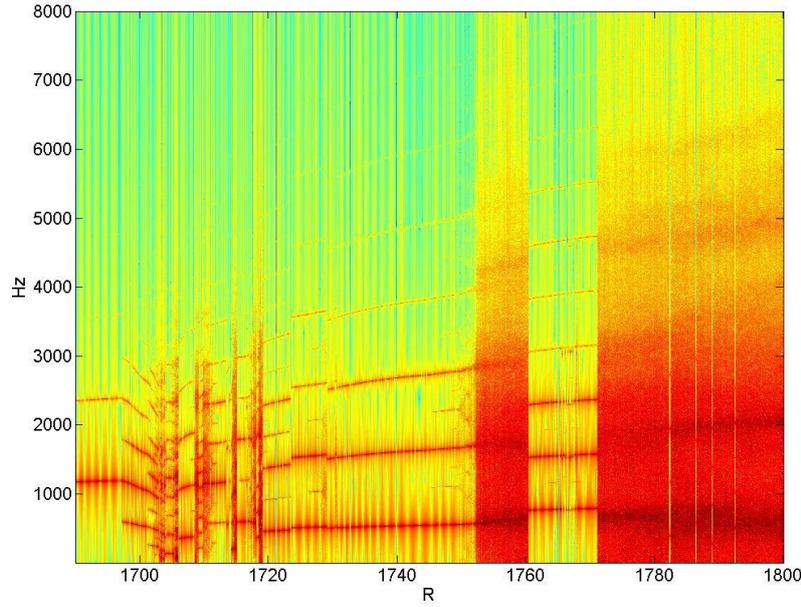


Figura 2.6 – Dettaglio di una porzione della Fig.2.5 (cfr. Fig. 2.3).

Una modifica del circuito di Fig. 2.2 è stata proposta da Muthuswamy [118] sostituendo il diodo di Chua con un memristor a controllo di flusso, caratterizzato comunque da una non linearità di tipo cubico:

$$q(\varphi) = \alpha\varphi + \beta\varphi^3 \quad (2.9)$$

con $\alpha = -0.667 \cdot 10^{-3}$ e $\beta = 0.029 \cdot 10^{-3}$. Dalla (2.3.b) si ricava l'espressione per la memduttanza:

$$w(\varphi) = \alpha + 3\beta\varphi^2 \quad (2.10)$$

Si noti che la memduttanza è negativa per $-\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta}} \leq \varphi \leq \sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta}}$ quindi il memristor risulta un elemento attivo all'interno di questo intervallo del flusso magnetico [82,118].

Le equazioni del nuovo circuito, sempre raffigurabile come in Fig. 2.2, ma con l'elemento non-lineare μ costituito ora dal memristor di equazione (2.10), sono:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}(R_0 \cdot i + V_2) \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(i - \frac{V_2 - V_1}{R} \right) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{V_2 - V_1}{R} - (\alpha + 3\beta\varphi^2) \cdot V_1 \right) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= V_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tali equazioni risultano ovviamente analoghe alle (2.6), con la corrente del diodo rimpiazzata dalla corrente del memristor, e con l'aggiunta di un'equazione per il flusso del campo magnetico.

Scegliendo come valori dei parametri circuitali $L = 18.91 \cdot 10^{-3}$, $R_0 = 14.99$, $C_2 = 78 \cdot 10^{-9}$, $C_1 = 7 \cdot 10^{-9}$ e $R = 2000$, il circuito memresistivo ha un comportamento caotico. In Fig. 2.7 sono riportate le proiezioni dell'attrattore corrispondente, che risulta di tipo doppio scroll nello spazio (i, V_2, V_1) .

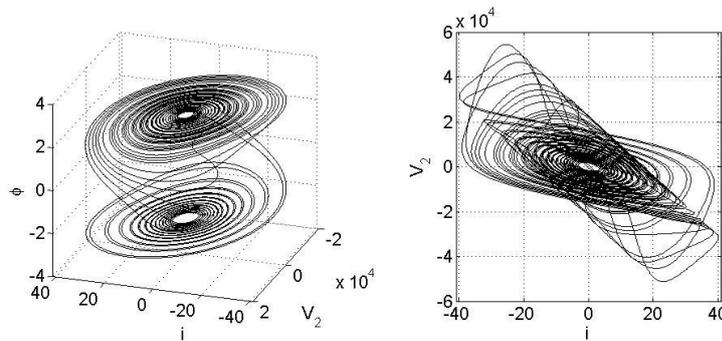


Figura 2.7 – Attrattore ottenuto integrando le Eq. 2.11 del circuito meresistivo, con condizioni iniziali: $i(0) = 0$, $V_2(0) = 0.1$, $V_1(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$.

Al variare delle condizioni iniziali, comunque, si ha un drammatico cambiamento della dinamica del circuito memresistivo, che può dar luogo ad attrattori di tipo spirale di Chua, o anche a dei cicli limite (Fig. 2.8). Per investigare la dipendenza del circuito memresistivo dalle sue condizioni iniziali, partendo dal punto iniziale $(0, 23000, 1250, \varphi(0))$ sono stati calcolati i massimi locali del segnale $\varphi(t)$ al variare del valore di $\varphi(0)$. Il risultato è mostrato in Fig. 2.9, mentre in Fig. 10 sono riportati gli spettri dei diversi ottenuti.

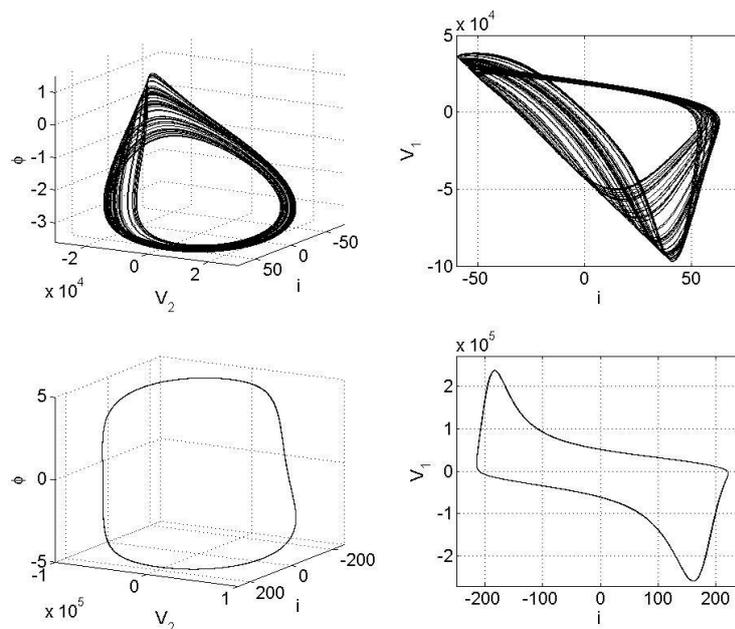


Figura 2.8 – Diverse tipologie di attrattori del circuito memresistivo di equazioni 2.11 corrispondenti a diverse condizioni iniziali $(i(0), V_2(0), V_1(0), \varphi(0))$. Per $(0.0, 23000, 1250, 1)$ si ha un attrattore di tipo spirale di Chua (riquadri in alto), mentre per $(112.4047, 27015, 9360, -4.0542)$ si ha un ciclo limite (riquadri in basso).

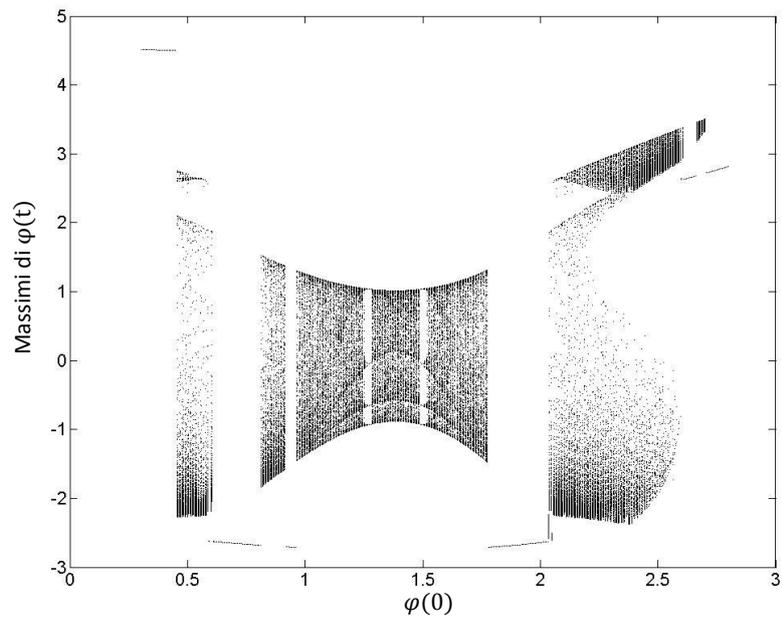


Figura 2.9 – Diagramma realizzato riportando i massimi locali del segnale $\varphi(t)$ ottenuto integrando le Eq. 2.11 del circuito memresistivo a partire da diverse condizioni iniziali $(0,23000,1250, \varphi(0))$.

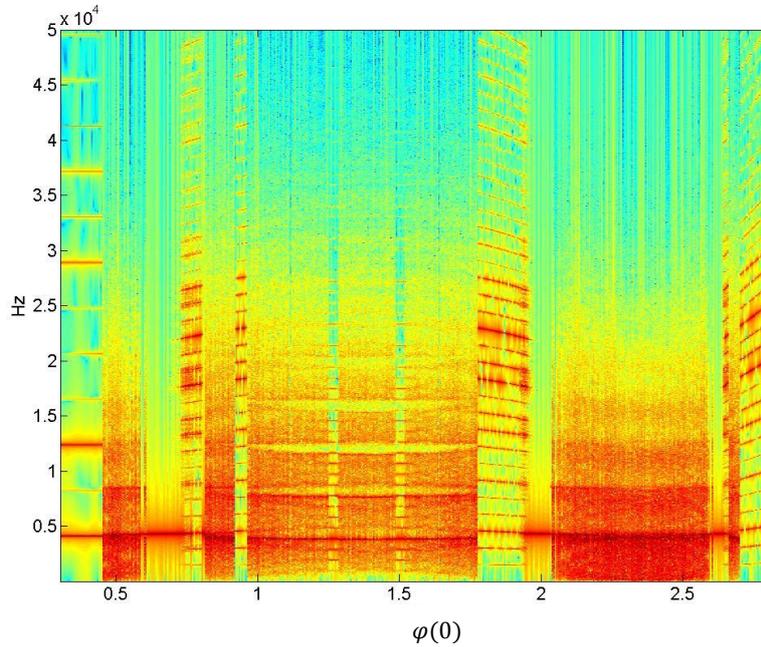


Figura 2.10 – Spettrogramma dei segnali $\varphi(t)$ rispetto ai quali è stata costruita la Fig. 2.9, ottenuti al variare della condizione iniziale $(0,23000,1250, \varphi(0))$ (cfr. Fig. 2.9).

Si nota una struttura molto interessante di questa sorta di “mappa di biforcazione” che valuta la dipendenza della dinamica del circuito memresistivo in esame dalla condizione iniziale $\varphi(0)$. In Fig. 2.11 è riportata l’usuale mappa di biforcazione ottenuta al variare della resistenza R .

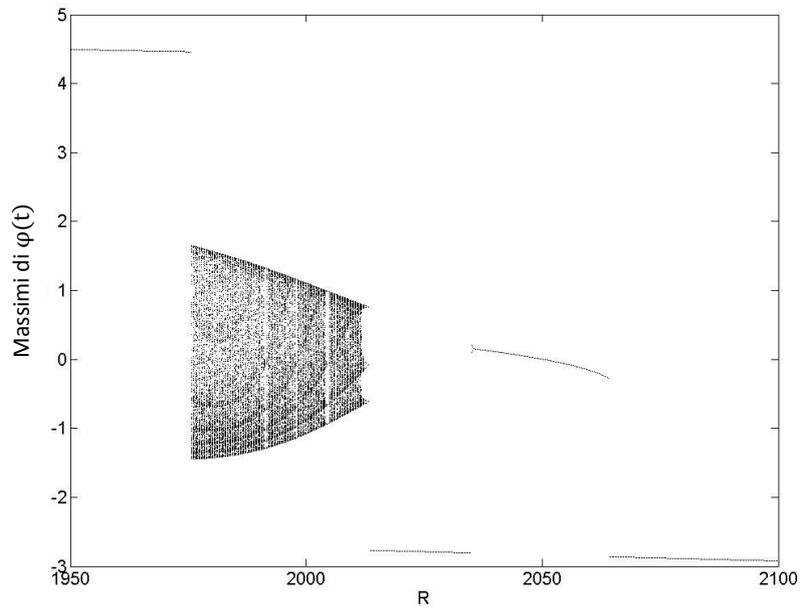


Figura 2.11 – Mappa di biforcazione del circuito di Chua con il diodo rimpiazzato da un memristor, ottenuta integrando le Eq. 2.11 e calcolando i massimi locali di $\varphi(t)$ al variare della resistenza R .

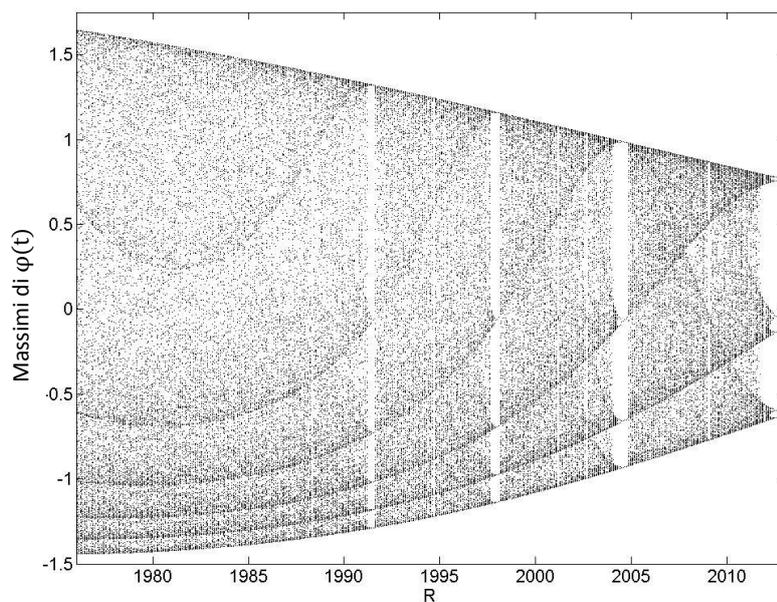


Figura 2.12 – Dettaglio di una porzione della mappa di biforcazione di Fig. 2.10.

È interessante sottolineare che per il circuito di Chua con il diodo definito dalla (2.8) non si ha una struttura analoga a quella di Fig. 2.9. Simulazioni delle equazioni (2.6) al variare delle condizioni iniziali, infatti, non hanno condotto ad uno scenario di transizione tra diversi tipi di attrattore come quello evidenziato per il circuito memresistivo. In Fig. 2.13, ad esempio, sono riportati i massimi dei segnali $V_1(t)$ ottenuti al variare delle condizioni iniziali. Si nota che il circuito rimane sul doppio scroll. Risultati analoghi si anno al variare anche delle altre condizioni iniziali: il circuito rimane sullo stesso attrattore o, al più, va in saturazione su oscillazioni periodiche.

Comunque, anche per il circuito memresistivo la peculiarità evidenziata in Fig. 2.9 si ha solamente quando viene fatto variare il flusso iniziale $\varphi(0)$, mentre esplorando la dinamica sviluppata al variare delle altre condizioni iniziali il sistema rimane sullo stesso attrattore, o al più si spegne (Fig. 2.14).

Sembra dunque che vi sia un ruolo particolare della variabile φ , la quale rappresenta, tra l'altro, la memoria del memristor a controllo di flusso ($\varphi = \int V d\tau$).

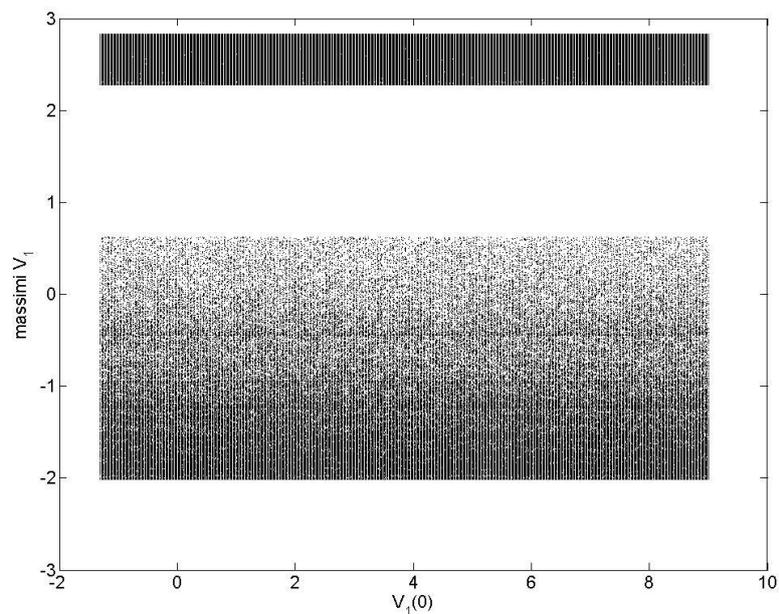


Figura 2.13 - Diagramma realizzato riportando i massimi locali del segnale V_1 del circuito di Chua, con il diodo dato dalla (2.8), al varie delle condizioni iniziali (risultati analoghi si hanno facendo variare le altre condizioni iniziali). Lo scenario è totalmente differente dal quello di Fig. 2.9.

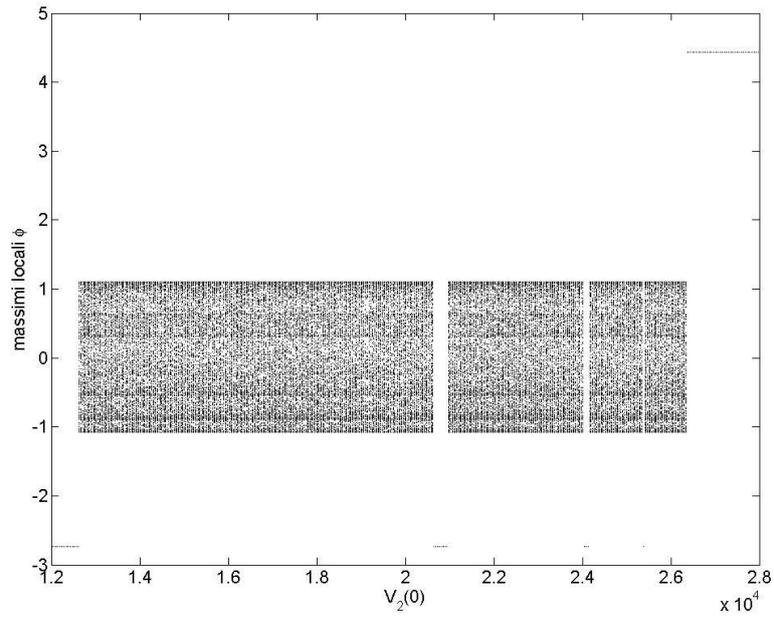


Figura 2.14 - Diagramma realizzato riportando i massimi locali del segnale $\varphi(t)$ del circuito di Chua con memristor, al variare delle condizioni iniziali. Lo scenario è ora totalmente differente dal quello di Fig. 2.9, simile invece a quanto accade per il circuito di Chua con il diodo (cfr. Fig. 2.13).

3. Coppia di circuiti collegati in modo diffusivo

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni numeriche su una coppia di circuiti memresistivi ottenuti sostituendo il diodo di Chua con un memristor a controllo di flusso caratterizzato da una non linearità cubica di tipo polinomiale. Il collegamento tra i due circuiti avviene tramite un resistore R_c , il cui valore determina l'intensità dell'accoppiamento. Le simulazioni sono state effettuate al variare di R_c per diverse condizioni iniziali. Il comportamento globale del sistema si è rivelata di grande interesse, con manifestazione di dinamiche sincronizzate sia caotiche che periodiche, oltre alla presenza di fenomeni quali intermittenza e caos transitorio. Gli aspetti salienti dei risultati esposti sono stati pubblicati sulla rivista *Mathematical Problems in Engineering* [14].

3.1 Descrizione del modello

Il sistema studiato è formato da due oscillatori di Chua mutuamente accoppiati in modo diffusivo tramite un resistore R_c secondo lo schema di Fig. 3.1, in cui con μ rappresenta l'elemento circuitale non lineare in grado di determinare la dinamica caotica del singolo circuito (cfr. Fig. 2.2).

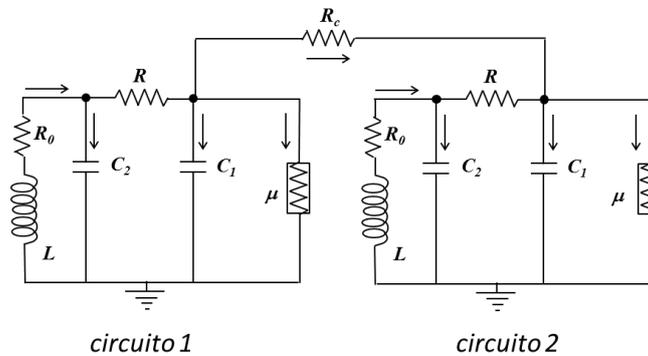


Figura 3.1 – Collegamento diffusivo, tramite resistore R_c , di 2 oscillatori caotici

Applicando le leggi di Kirchhoff ai circuiti di Fig. 3.1 si ricavano le seguenti equazioni descrittive la dinamica spontanea del sistema:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{y_1}{L} - \frac{R_0}{L} x_1 \\
 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_1 - y_1}{R} + x_1 \right) \\
 \frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_1 - z_1}{R} - i_{\mu 1} + \frac{z_2 - z_1}{R_c} \right) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{y_2}{L} - \frac{R_0}{L} x_2 \\
 \frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_2 - y_2}{R} + x_2 \right) \\
 \frac{dz_2}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_2 - z_2}{R} - i_{\mu 2} - \frac{z_2 - z_1}{R_c} \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dove le variabili di stato x_i, y_i, z_i ($i = 1,2$) indicano, rispettivamente, la corrente attraverso l'induttanza L e le tensioni attraverso le capacità C_2 e C_1 nei due circuiti. Il termine i_μ rappresenta, invece, la corrente attraverso l'elemento non lineare μ (cfr. Eq. (1.2) e (1.6)).

Nel caso del memristor a controllo di flusso descritto nel capitolo precedente, la corrente del memristor risulta essere $i_\mu = (\alpha\varphi + \beta\varphi^3) \cdot V_1$ e, ponendo $R_0 = 0$, le (3.1) diventano:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{y_1}{L} \\
\frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_1 - y_1}{R} + x_1 \right) \\
\frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_1 - z_1}{R} - (\alpha + 3 \cdot \beta w^2) \cdot z_1 + \frac{z_2 - z_1}{R_c} \right) \\
\frac{dx_2}{dt} &= -\frac{y_2}{L} \\
\frac{dw_1}{dt} &= z_1 \\
\frac{dy_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_2 - y_2}{R} + x_2 \right) \\
\frac{dz_2}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_2 - z_2}{R} - (\alpha + 3 \cdot \beta w^2) \cdot z_2 - \frac{z_2 - z_1}{R_c} \right) \\
\frac{dw_2}{dt} &= z_2
\end{aligned} \tag{3.2}$$

dove si è aggiunta la relazione che lega la variazione del flusso magnetico w alla tensione z ai capi del memristor.

Come si è detto nella sezione 2.2, il circuito memresistivo in esame presenta un comportamento fortemente dipendente dalle condizioni iniziali. Oltre alle dinamiche caotiche e periodiche mostrate nelle Figure 2.7 e 2.8, il circuito memresistivo può evolvere su un punto fisso di tipo $(0, 0, 0, w = cost)$, e il sistema risulta praticamente spento. È quello che capita, ad esempio, partendo dalle condizioni iniziali $(22, 10000, 0.15, 0.2)$.

Nello scegliere le condizioni iniziali per la coppia di circuiti di Fig. 3.1, dunque, sono possibili sei differenti combinazioni per quanto riguarda il comportamento dei singoli sistemi disaccoppiati. Le simulazioni sono state condotte, al variare di R_c , per tutte e sei le tipologie di condizioni iniziali. Le condizioni caotico-caotico (C-C) e caotico-spento (C-S) riproducono l'intera gamma della fenomenologia dinamica osservata, e verranno quindi discusse in dettaglio.

3.2 Risultati Numerici I: condizioni iniziali C-C

Per $R_c = 100$, quindi con i circuiti fortemente accoppiati, le oscillazioni dei due sistemi sono periodiche con forme d'onda pseudo-sinusoidali, e risultano tra loro sincronizzate come mostrato in Fig. 3.2. In particolare,

si nota come i due flussi magnetici w_1 e w_2 oscillano in sincronizzazione di fase ma con ampiezze diverse. Anche gli attrattori dei due circuiti, che risultano essere dei cicli limite di ordine 1 posti a diverse “quote” di w , evidenziano questa situazione (Fig. 3.3).

Ulteriori dettagli sulle modalità di sincronizzazione che si vengono a creare sono fornite dalla Fig. 3.4, che riporta i diagrammi di correlazione tra i segnali. Oltre a ritrovare la sincronizzazione di fase per w (la retta del diagramma corrispondente non passa per il punto (0,0)) si nota, inoltre, che mentre i segnali x e y sono praticamente in sincronizzazione completa, i segnali z danno origine ad una figura a forma di 8.

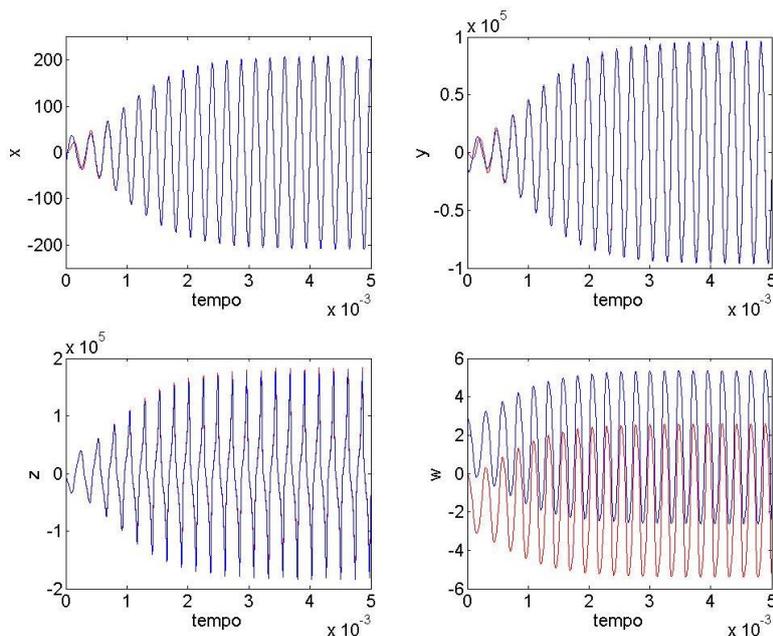


Figura 3.2 – Sincronizzazione dei segnali dei due circuiti mermesistivi collegati come in Fig. 1, nel caso di $R_c = 100$ (rosso: circuito 1, blu: circuito 2). Le oscillazioni dei segnali w risultano sincronizzati solo in fase.

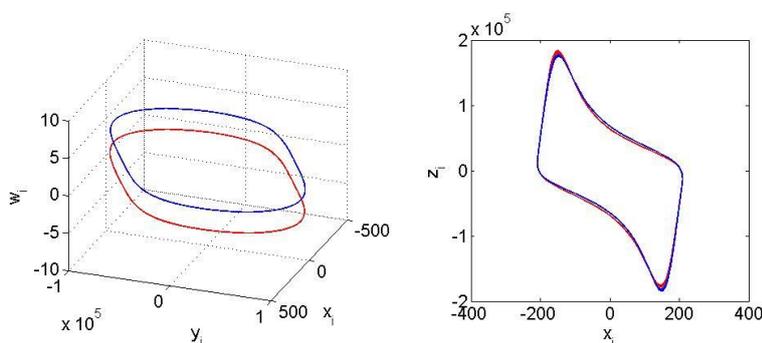


Figura 3.3 – Proiezioni delle traiettorie di fase dei due circuiti per il caso di Fig. 2. Gli attrattori risultano essere dei cicli limite di ordine 1 (rosso: circuito 1, blu: circuito 2). Da notare la diversa quota di w , conseguenza del fatto che i due flussi magnetici risultano sincronizzati solo in fase.

Incrementando il valore della resistenza di accoppiamento R_c , lo stato di oscillazione periodica sincronizzata è preceduto da un transitorio in cui i due circuiti oscillano in modo caotico (Fig. 3.5). Durante tale

transitorio, come mostrato nelle Fig. 3.6, i due circuiti si muovono su attrattori di tipo doppio scroll, simili a quelli che si hanno per i circuiti isolati, ma dall'aspetto perturbato; inoltre, i segnali caotici risultano tra loro scorrelati (Fig. 3.7).

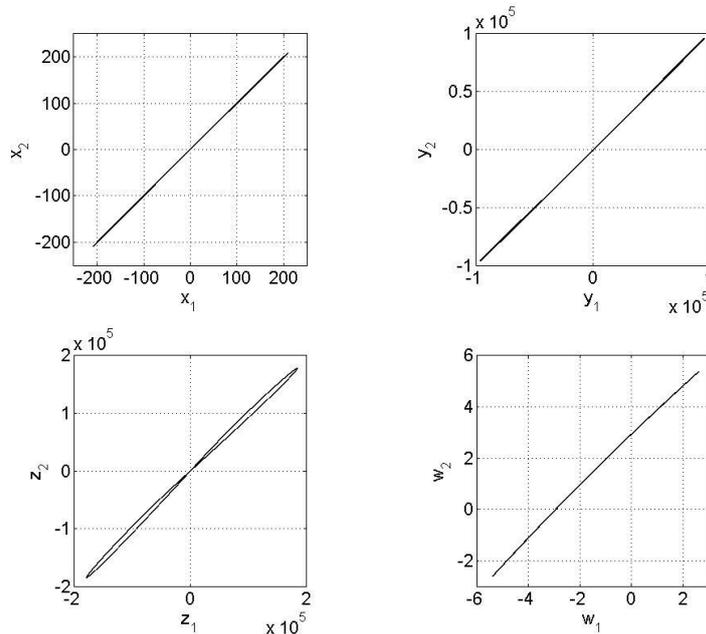


Figura 3.4 – Diagrammi di correlazione indicanti una situazione di sincronizzazione tra i segnali dei due circuiti memresitivi corrispondenti ai casi delle Figure 3.2 e 3.3 ($R_c = 100$). Si noti, in particolare, il profilo ad 8 formato dai segnali z .

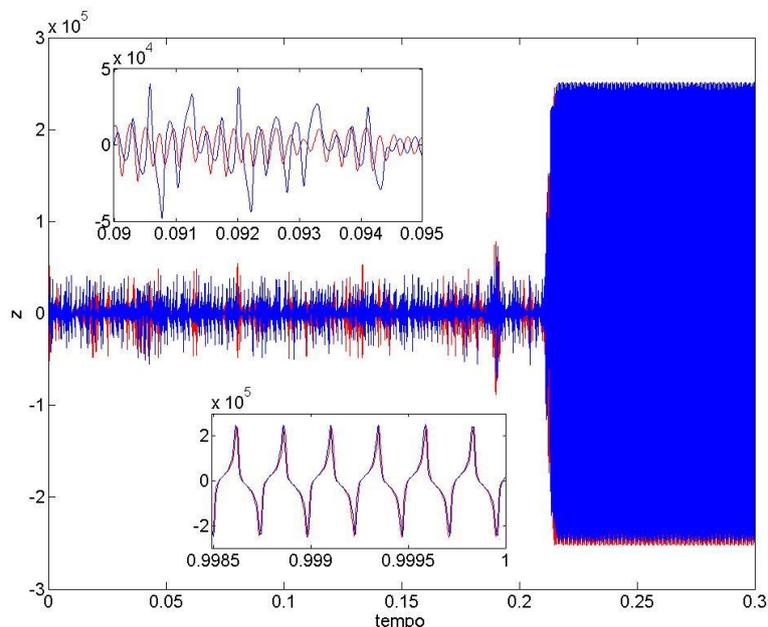


Figura 3.5 – Andamento della variabile di stato z per i due circuiti accoppiati con $R_c = 17000$. La condizione di sincronizzazione con oscillazioni pseudo-sinusoidali è preceduta da un transitorio caotico. I riquadri mostrano degli ingrandimenti di dettaglio di queste due diverse condizioni. La situazione riportata in figura è simile a quanto avviene per tutti i valori usati della resistenza di accoppiamento nell'intervallo $100 < R_c \leq 40000$, con $R_c \neq 12000$.

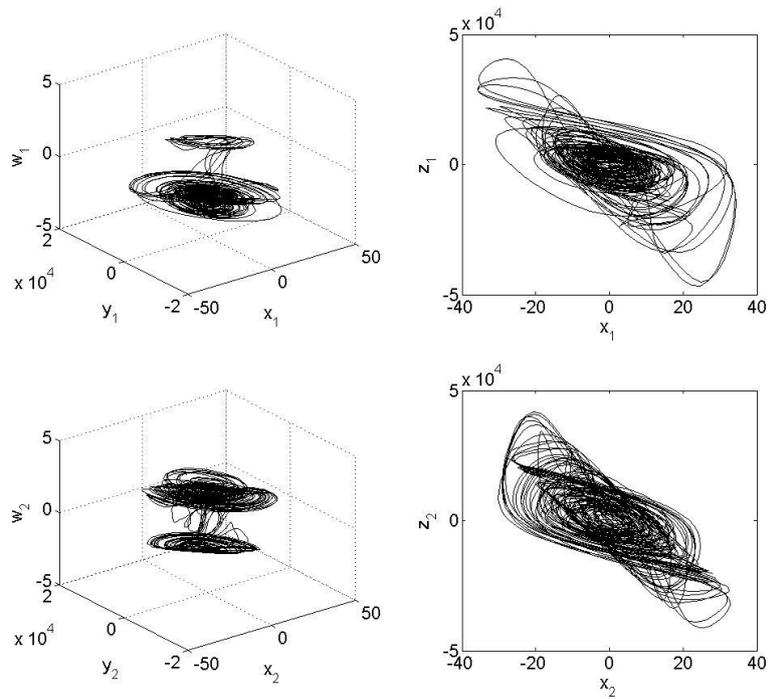


Figura 3.6 – Attrattori dei due circuiti durante il transitorio caotico che precede l’instaurarsi di una dinamica periodica sincronizzata per il caso $R_c = 17000$ raffigurato in Fig. 3.5 (per $100 < R_c \leq 40000$, con $R_c \neq 12000$, si ha una situazione simile).

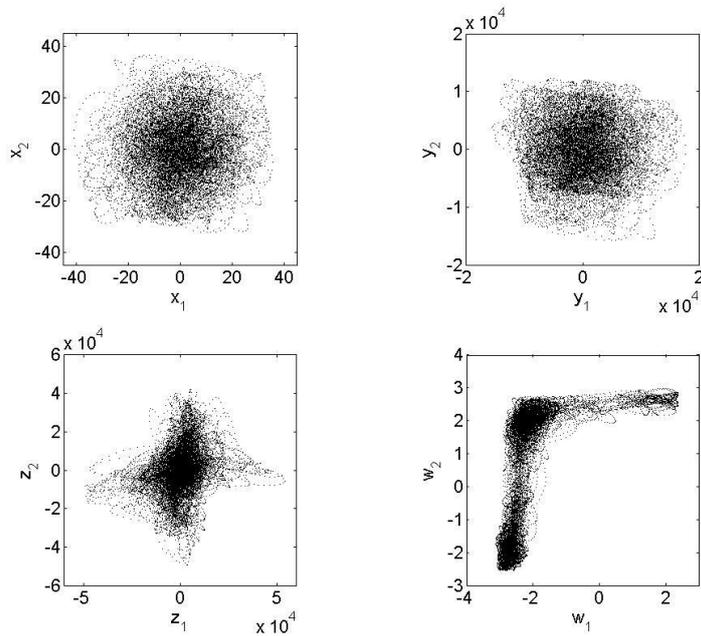


Figura 3.7 – Correlazione tra i segnali dei due circuiti durante il transitorio caotico che precede lo stato di sincronizzazione pseudo-sinusoidale per il caso $R_c = 17000$ raffigurato in Fig. 3.5 (per $100 < R_c \leq 40000$, con $R_c \neq 12000$, si ha una situazione simile).

La dinamica sincronizzata che si instaura dopo il passaggio ad oscillazioni pseudo-sinusoidali è simile a quella descritta per il caso $R_c = 100$. Le Figure 3.8 e 3.9 riportano i dettagli di questa situazione nel caso

$R_c = 17000$, da confrontare con le analoghe Figure 3.2 e 3.4.

In particolare, si nota come la forma ad 8 nei diagrammi di correlazione riportati in Fig. 3.10 non sia esclusiva dei segnali z . I grafici di Fig. 3.8 consentono inoltre di evidenziare l'origine di tale fenomeno in quanto si nota come, durante le oscillazioni pseudo-sinusoidali, i segnali corrispondenti presentino una variazione periodica di fase che li pone alternativamente in anticipo e in ritardo uno rispetto all'altro.

Il quadro si qui descritto, e in particolare la presenza di un transitorio caotico di lunghezza più o meno variabile, la quale non risultata comunque direttamente correlata al valore della resistenza di accoppiamento, è analogo a quanto rilevato per tutti i valori di resistenza investigati all'interno dell'intervallo $100 < R_c \leq 35000$, con $R_c \neq 12000$. Le differenze tra le ampiezze dei segnali durante la dinamica pseudo-sinusoidale e la grandezza dello sfasamento periodico sopra descritto, determinano l'evoluzione dei diagrammi di fase riportata in Fig. 3.10.

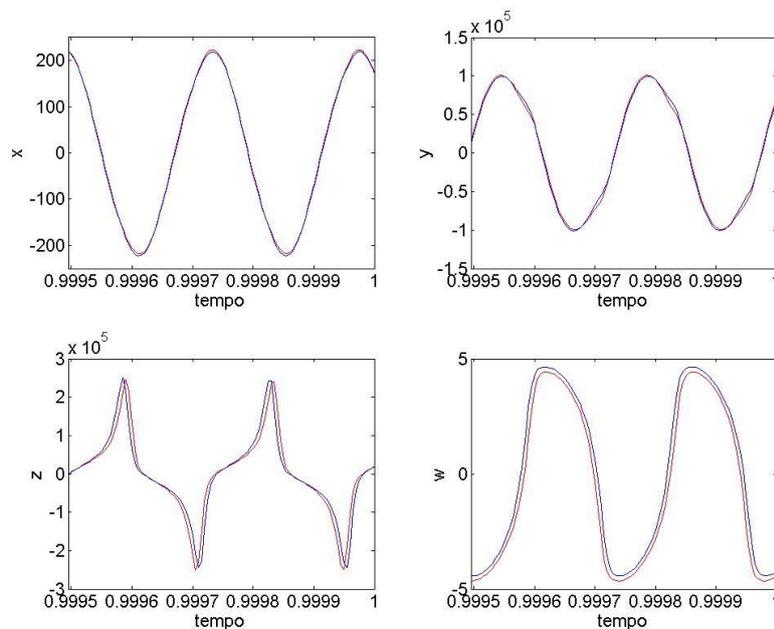


Figura 3.8 – Andamento dei segnali dei due circuiti durante la dinamica periodica pseudo-sinusoidale che si ha per $R_c = 17000$. Rispetto all'analogia situazione per $R_c = 100$, riportata in Fig. 3.2, si ha una minore differenza di ampiezza tra i segnali w . Si noti anche la presenza di uno sfasamento periodico tra i segnali, evidente soprattutto nel grafico di z , che li pone alternativamente in anticipo e in ritardo uno rispetto all'altro.

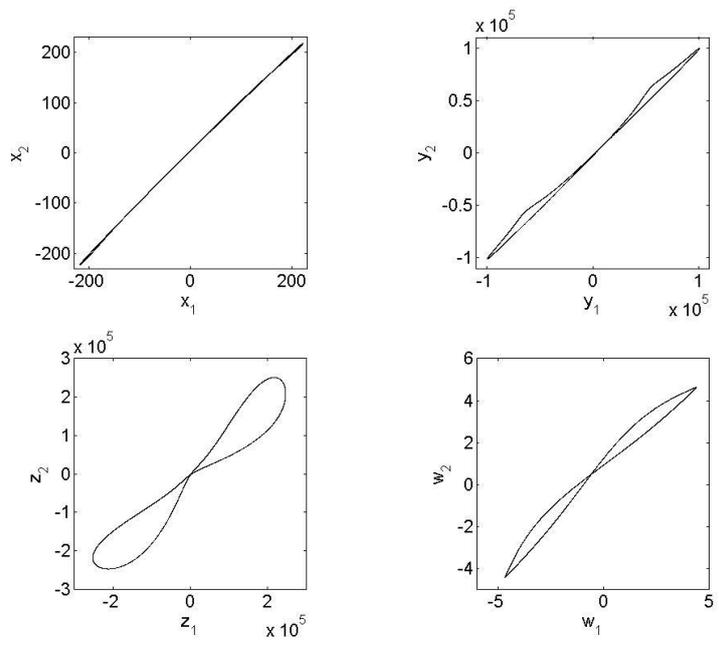


Figura 3.9 – Diagrammi di correlazione relativi alla dinamica pseudo-sinusoidale del caso $R_c = 17000$ (cfr. Fig. 3.4). Si noti, in particolare, il profilo ad “8” presente anche per i segnali y , z e w .

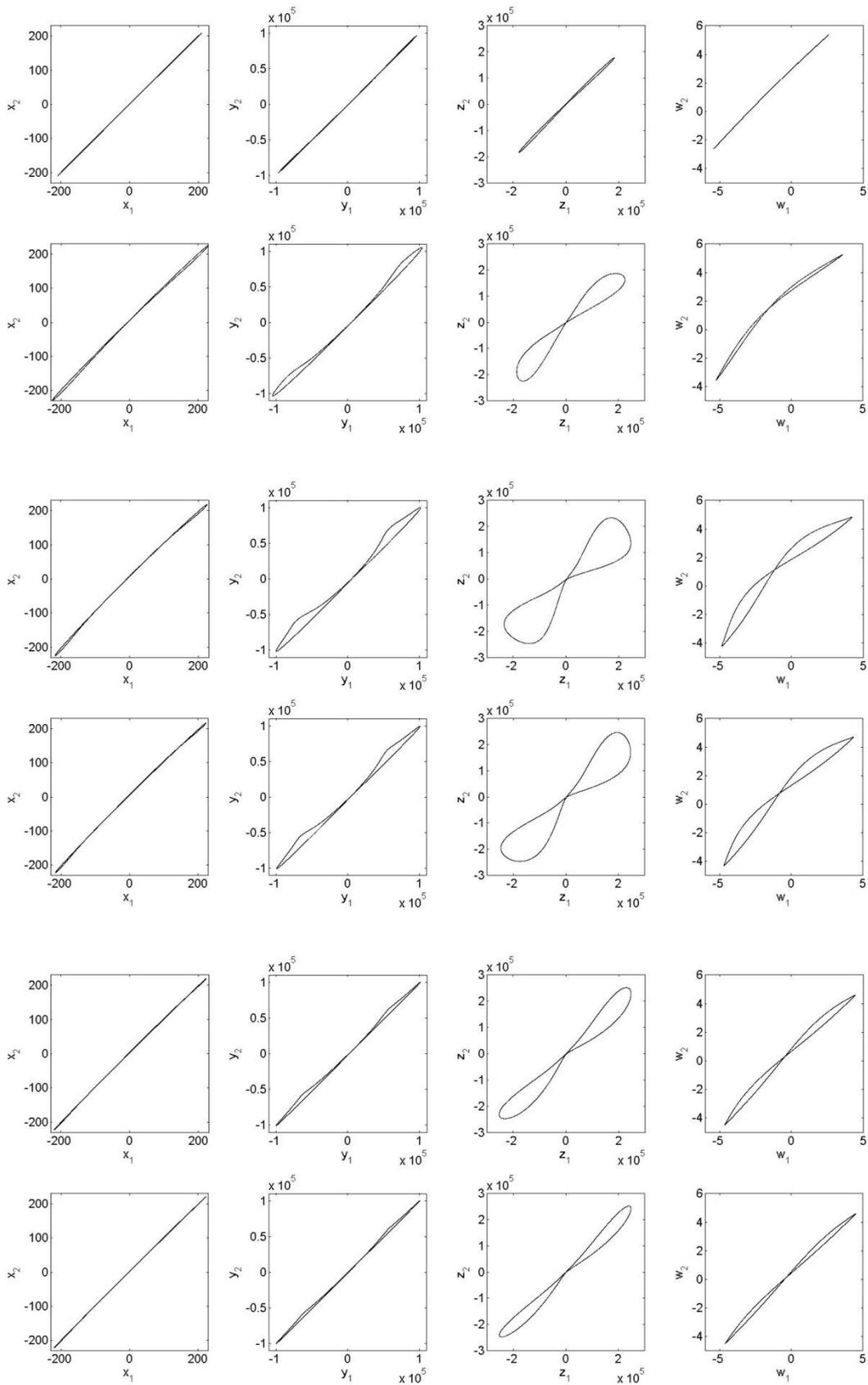


Figura 3.10 – Evoluzione dei diagrammi di correlazione tra i segnali corrispondenti dei due circuiti, relativi alla dinamica pseudo-sinusoidale che si instaura per $100 < R_c \leq 40000$, con $R_c \neq 12000$ (dall'alto: $R_c = 100$, $R_c = 1000$, $R_c = 5000$, $R_c = 10000$, $R_c = 25000$, $R_c = 40000$).

Per $R_c = 20000$ il comportamento del sistema risulta differente rispetto a quanto sin qui descritto. Dopo un transitorio in cui i due circuiti oscillano in modo caotico e scorrelato, si instaura una dinamica pseudo-sinusoidale in cui i segnali hanno ampiezze e forme d'onda diverse, e si trovano in opposizione di fase (Fig. 3.11). I corrispondenti attrattori sono riportati in Fig. 3.12.

I diagrammi di correlazione, mostrati in Fig. 3.13, presentano in questo caso una struttura più complessa di quella discussa prima, ma chiaramente indica la presenza di una qualche forma di sincronizzazione tra i due circuiti [56].

È importante sottolineare che tale comportamento, rilevato per $R_c = 20000$, risulta peculiare e isolato. Simulazioni effettuate per $R_c \in \{19.1, 19.2, 19.5, 19.9, 19.999, 20.001, 20.01, 20.1, 20.2\} \cdot 10^3$ hanno infatti prodotto una dinamica del tutto analoga a quanto descritto precedentemente per gli altri casi.

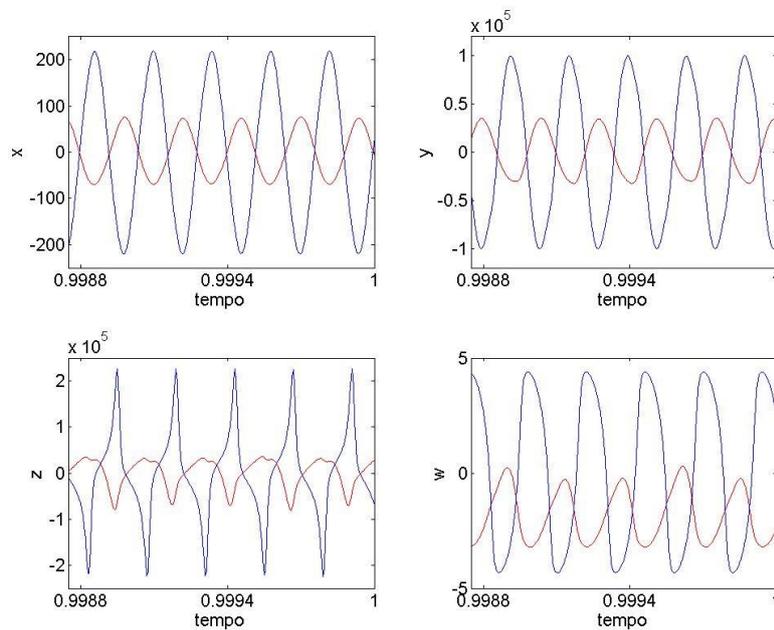


Figura 3.11 – Andamento dei segnali dopo il transitorio caotico per $R_c = 20000$. I segnali dei due circuiti hanno forme d'onda pseudo-sinusoidali diverse che risultano in opposizione di fase.

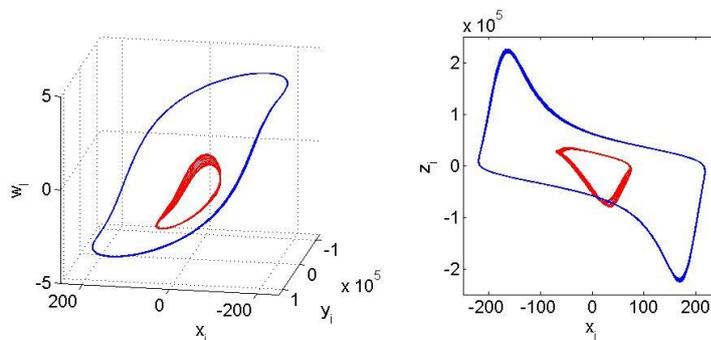


Figura 3.12 – Attrattori dei due circuiti corrispondenti alle oscillazioni pseudo-sinusoidali in opposizione di fase che si instaurano per $R_c = 20000$.

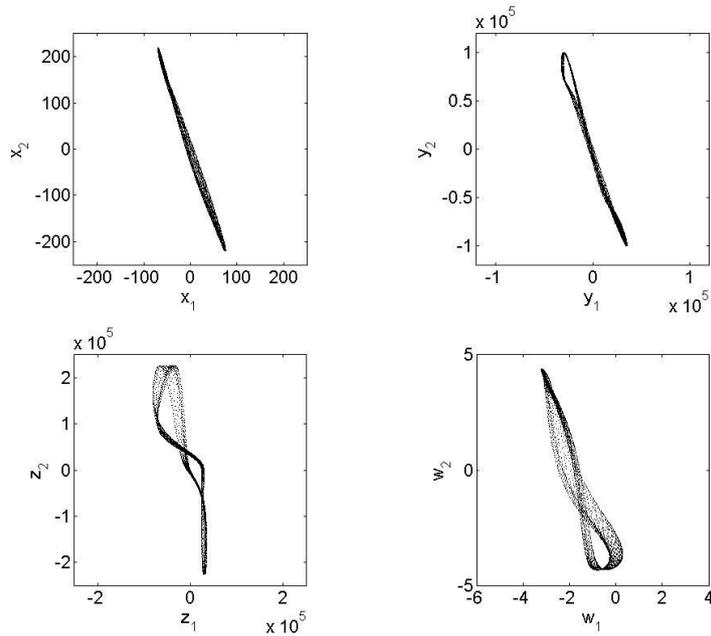


Figura 3.13 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, relativi al caso di $R_c = 20000$.

Per $R_c = 40000$ il sistema mostra un nuovo tipo di comportamento: il transitorio caotico che precede l'instaurarsi delle oscillazioni periodiche ha una durata diversa per i due circuiti. Come mostrato in Fig. 3.14, il sistema comincia infatti ad oscillare in modo caotico, finché inizialmente un unico circuito passa ad una dinamica pseudo-sinusoidale, e si ha una coesistenza di ordine e caos. Infine, anche l'altro circuito passa ad oscillazioni pseudo-sinusoidali e solo a questo punto i due circuiti risultano sincronizzati con le solite modalità sopra descritte.

Infine, per $R_c \geq 45000$ i due circuiti risultano, di fatto, disaccoppiati, e perdurano entrambi su oscillazioni caotiche scorrelate, a cui corrispondono attrattori di tipo doppio scroll.

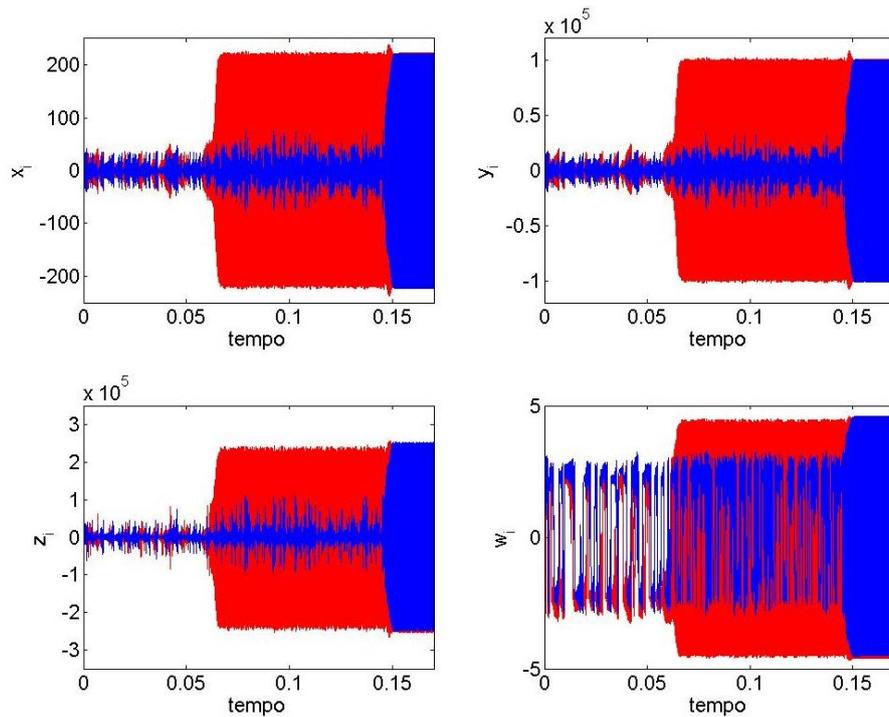


Figura 3.14 – Grafico dei segnali dei due circuiti per un valore della resistenza di accoppiamento pari a $R_c = 40000$. La durata delle oscillazioni caotiche è diversa per i due circuiti, e si vengono a creare due fasi durante il transitorio che precedono l'instaurarsi di una dinamica periodica sincronizzata: inizialmente entrambi i circuiti oscillano caoticamente, mentre dopo si ha una temporanea coesistenza di oscillazioni caotiche e oscillazioni pseudo-sinusoidali.

3.3 Risultati Numerici II: condizioni iniziali C-S

Anche in questo caso il sistema di Fig. 3.1 manifesta, per opportuni valori della resistenza di accoppiamento R_c , uno stato di sincronizzazione periodica con i due circuiti che oscillano in modo pseudo-sinusoidale. Vi sono però anche altri comportamenti globali di interesse. In particolare, ad alti accoppiamenti il sistema risulta ora in uno stato di sincronizzazione caotica.

In Fig. 3.15 sono mostrati gli attrattori, praticamente coincidenti, dei due circuiti accoppiati con una resistenza $R_c = 100$. Lo stato di sincronizzazione è chiaramente evidenziato dai corrispondenti diagrammi di correlazioni mostrati in Fig. 3.16

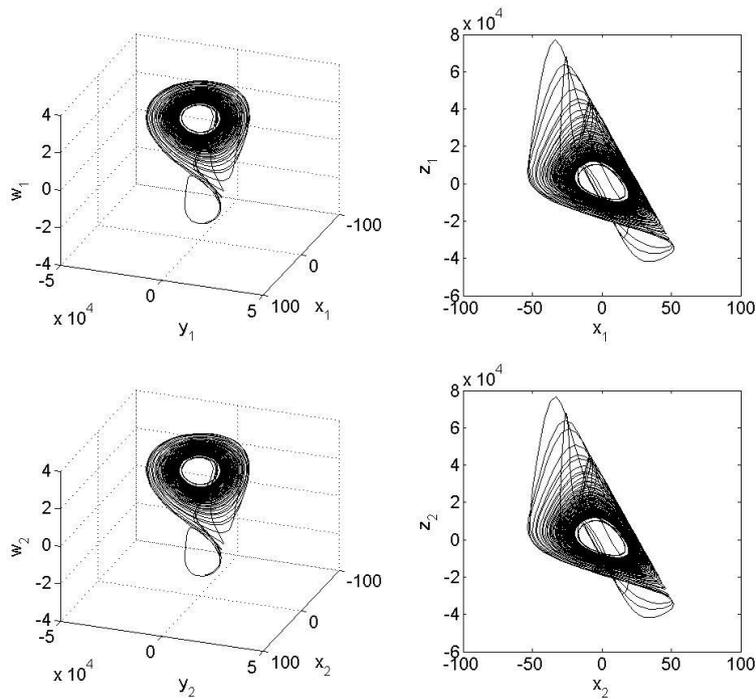


Figura 3.15 – Proiezioni degli attrattori dei due circuiti, corrispondenti alla dinamica caotica sincronizzata manifestata dal sistema per $R_c = 100$.

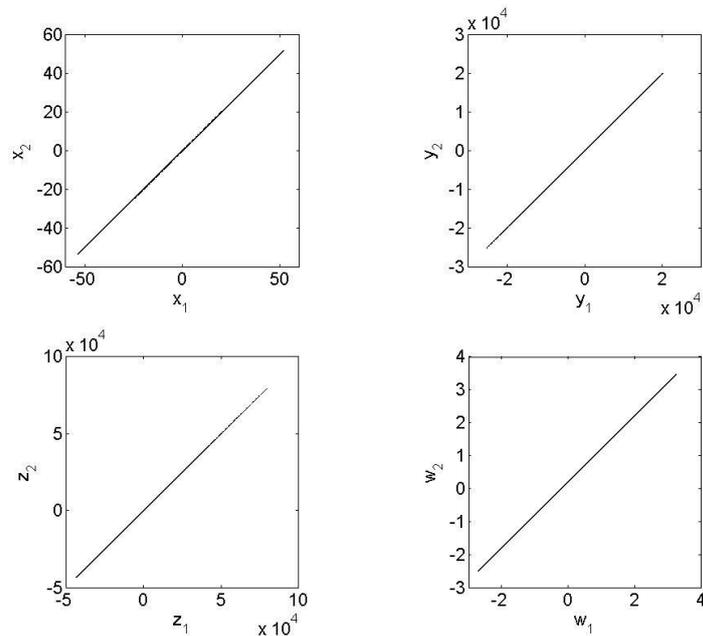


Figura 3.16 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti corrispondente alla situazione raffigurata in Fig. 14 ($R_c = 100$). Le oscillazioni caotiche risultano sincronizzate.

All'aumentare di R_c , comunque, la correlazione tra i segnali caotici dei due circuiti diminuisce come mostrato in Fig. 17. Quello che avviene è che i segnali attraversano fasi di sincronizzazione e desincronizzazione, come evidenziato dal fatto che i punti dei diagrammi di correlazione si sparpagliano attorno alla diagonale man mano che R_c cresce.

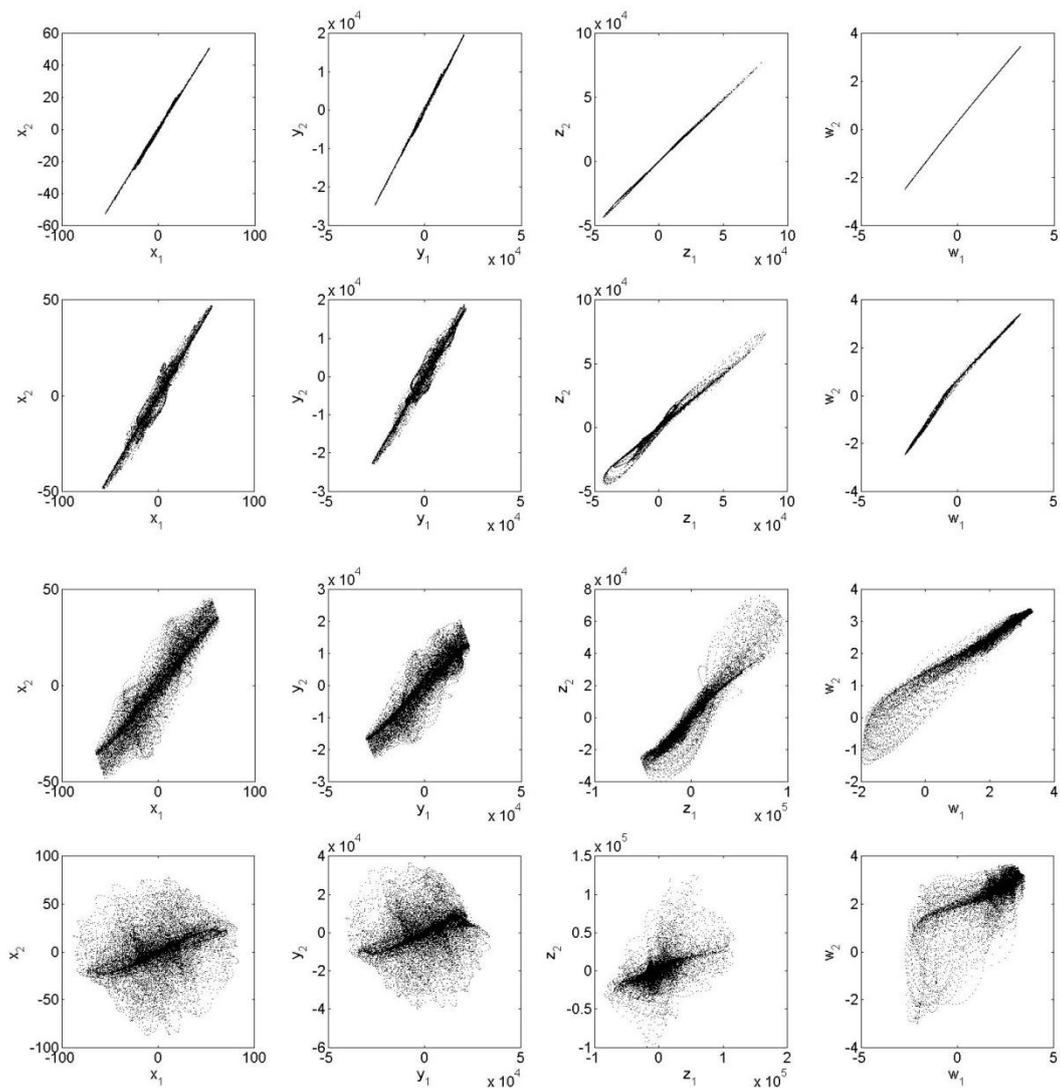


Figura 3.17 – Variazioni dei diagrammi di correlazioni tra i segnali dei due circuiti al variare della resistenza di accoppiamento: man mano che R_c aumenta, i punti risultano più sparpagliati attorno alla diagonale (dall’alto: $R_c = 100$, $R_c = 3000$, $R_c = 6000$, $R_c = 9000$).

Osservando in dettaglio i segnali dei due circuiti (Fig. 3.18), quello che si nota è il susseguirsi di una fase in cui i circuiti “accordano” il loro comportamento, a situazioni di sincronizzazione vera e propria, che poi si rompe per poi nuovamente ricomporsi. All’aumentare della resistenza di accoppiamento R_c la durata della fase di “organizzazione” tra i due segnali, che precede la sincronizzazione, aumenta di durata e ciò corrisponde ad un comportamento globale medio del sistema sempre meno sincronizzato.

I diagrammi di correlazione su finestre temporali più piccole riportate in Fig. 3.19 per il caso $R_c = 9000$ mostrano chiaramente come il meccanismo appena descritto comporti un addensarsi di punti lungo la diagonale, pure all’interno di una struttura diffusa.

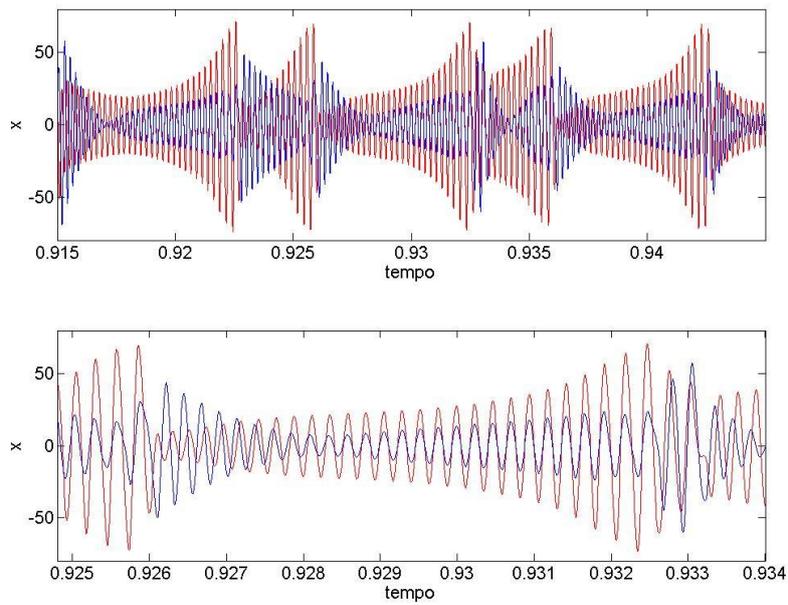


Figura 3.18 – Dettaglio del meccanismo di rottura e ricomposizione dello stato di sincronizzazione tra i segnali $x(t)$ dei due circuiti per $R_c = 9000$.

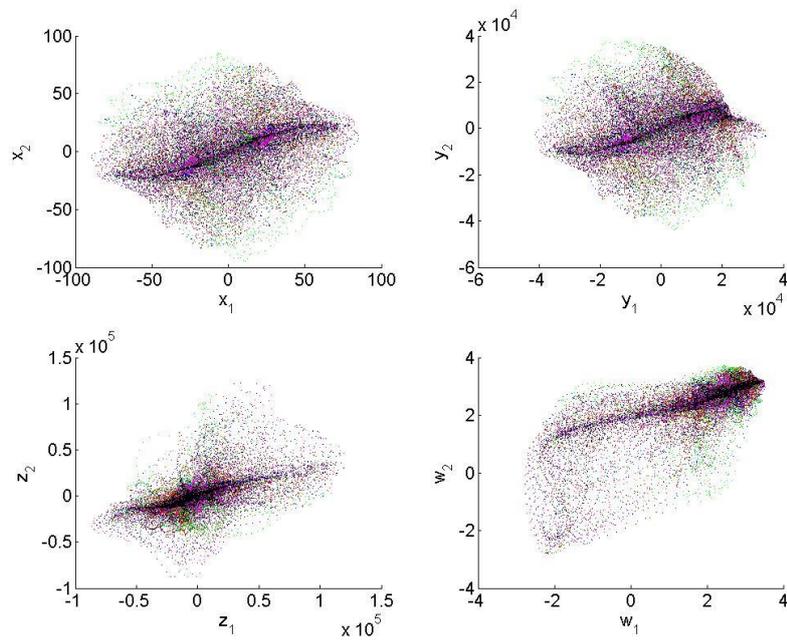


Figura 3.19 – Sovrapposizione dei diagrammi di correlazione tra i segnali caotici dei due circuiti per il caso $R_c = 9000$, ottenuti considerando piccoli intervalli temporali (blu: [0.050 – 0.075] s, rosso: [0.2 – 0.225] s, verde: [0.50 – 0.525] s, magenta: [0.750 – 0.775] s, ciano: [0.950 – 0.975] s). Si nota come, nonostante le fasi di de-sincronizzazione in cui i segnali risultano scorrelati diano origine ad una nuvola di punti che tende ad occupare tutto il diagramma, sussista comunque un addensarsi di punti lungo la diagonale a indicare l'occorrenza di fasi di sincronizzazione caotica.

Aumentando la resistenza di accoppiamento a $R_c = 10000$ il sistema si porta, dopo un transitorio caotico, su una dinamica periodica sincronizzata, con i circuiti che oscillano in modo pseudo-sinusoidale. La dinamica complessiva è del tutto analoga a quella riportata nelle Fig. 3.5 e 3.9.

Per $R_c = 15000$ i due circuiti presentano da subito un moto periodico sincronizzato in fase come mostrato in Fig. 3.20. Si nota, comunque, che le ampiezze delle oscillazioni dei segnali corrispondenti sono significativamente diverse, e ad essere di minore entità sono le oscillazioni del circuito che parte da condizioni iniziali che ne determinerebbero una dinamica smorzata se fosse isolato (circuitto 2). Di conseguenza, anche gli attrattori dei due circuiti risultano avere dimensioni molto diverse (Fig. 3.21). Evidentemente, l'accoppiamento tra i due circuiti risulta piccolo, nel senso che cominciano a evidenziarsi le proprietà dei singoli circuiti. Per $R_c = 20000$ si ha un'analogia situazione di sincronizzazione di fase, con il circuito 2 oscillante su ampiezze ancora minori. Gli attrattori risultanti sono però ora dei cicli limite di ordine 2 (Fig. 3.22).

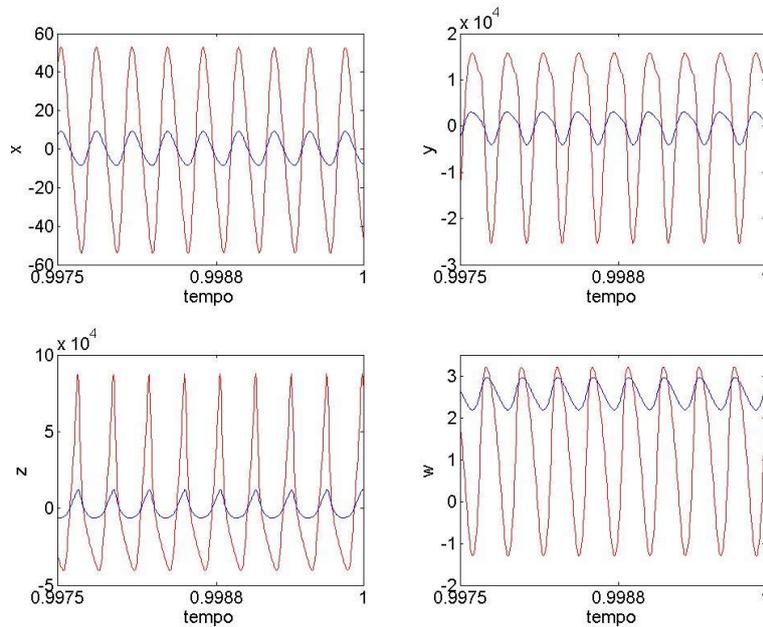


Figura 3.20 – Grafico dei segnali dei due circuiti per $R_c = 15000$. Le oscillazioni, con forme d'onda pseudo-sinusoidali, risultano sincronizzate in fase ma con ampiezze significativamente differenti.

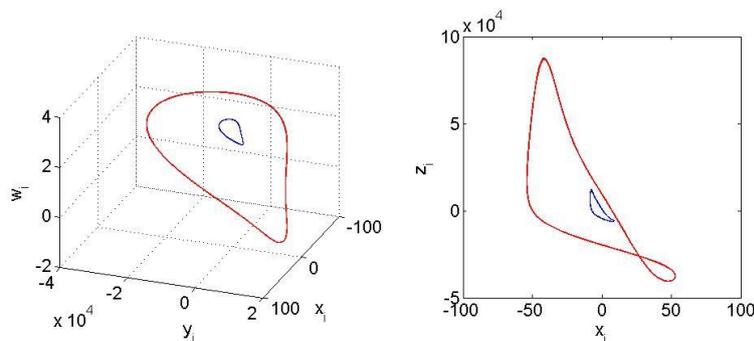


Figura 3.21 – Proiezioni degli attrattori relativi alla dinamica di Fig. 3.20 ($R_c = 15000$).

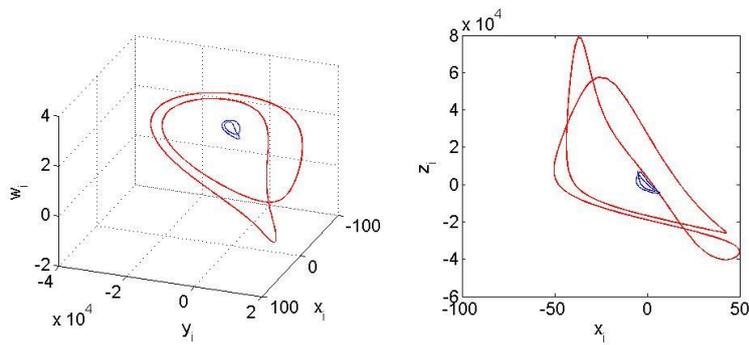


Figura 3.22 – Proiezioni degli attrattori relativi ad un valore della resistenza di accoppiamento pari a $R_c = 20000$. Le oscillazioni pseudo-sinusoidali dei due circuiti risultano in sincronizzazione di fase ma presentano ampiezze significativamente diverse.

In Fig. 3.23 sono riportati i diagrammi di correlazione relativi a questi ultimi tre casi, tutti corrispondenti ad una dinamica pseudo-sinusoidale in cui i circuiti sono in sincronizzazione di fase, ma con le ampiezze del circuito 2 che diventano via via più piccole.

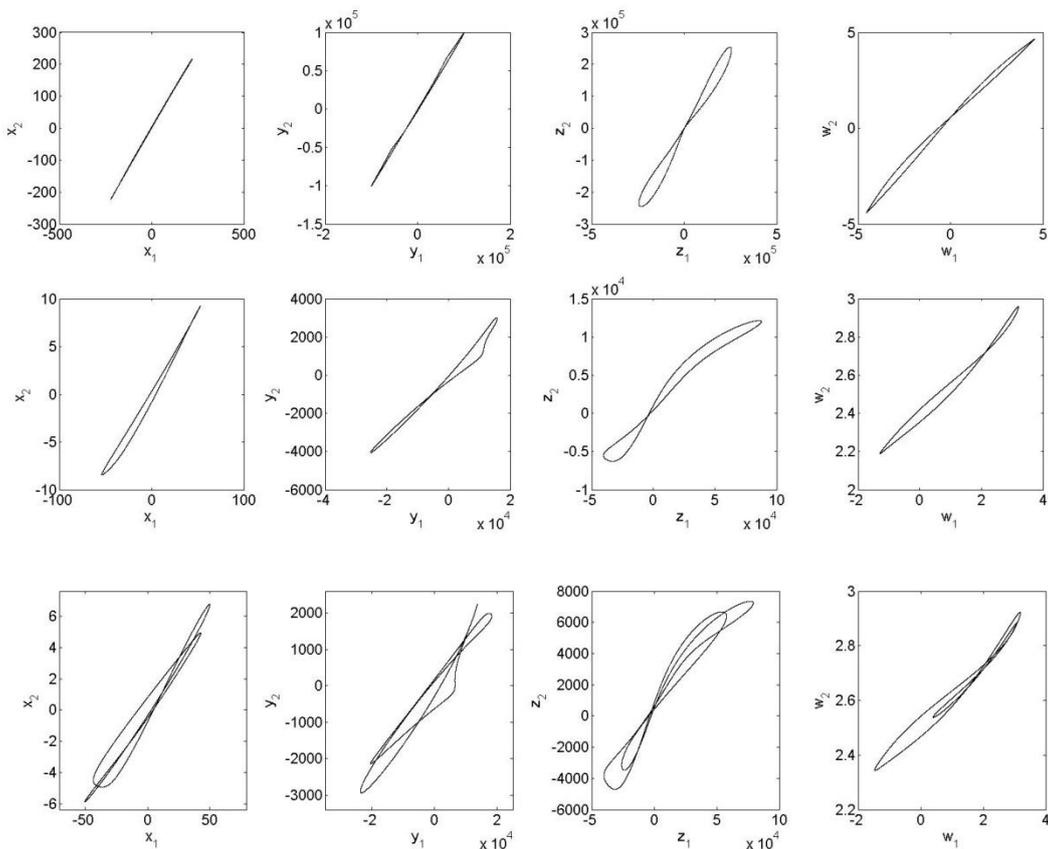


Figura 3.23 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti per diversi valori della resistenza di accoppiamento; dall'alto: $R_c = 10000$, $R_c = 15000$, $R_c = 20000$. Il sistema presenta in tutti e tre i casi una dinamica periodica pseudo-sinusoidale, ma le ampiezze dei segnali dei due circuiti differiscono sempre più all'aumentare di R_c .

Infine, per $R_c \geq 25000$ le oscillazioni dei due circuiti sono caotiche e risultano praticamente scorrelate, come evidenziato dai diagrammi di fase di Fig. 3.24. A differenza della dinamica caotica che si ha per $100 \leq R_c \leq 9000$ (Figure 3.17 e 3.19), i diagrammi di correlazione non mostrano ora alcuna sottostruttura di interesse nemmeno se osservati su piccoli intervalli temporali. Si noti, inoltre, la differenza tra le ampiezze dei segnali dei due circuiti, che cresce all'aumentare di R_c . Evidentemente, al diminuire dell'intensità dell'accoppiamento, il circuito 2 tende sempre più a seguire la dinamica propria che avrebbe se fosse isolato, e quindi a spegnersi.

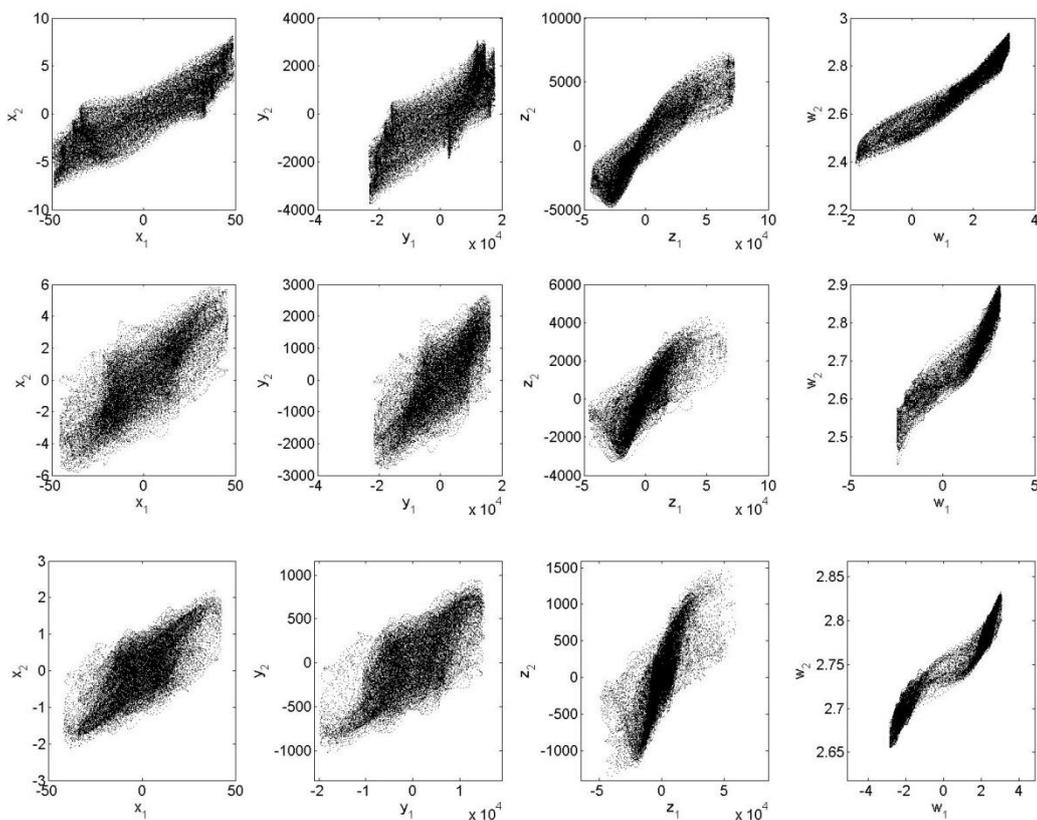


Figura 3.24 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti per diversi valori della resistenza di accoppiamento; dall'alto $R_c = 25000$, $R_c = 40000$, $R_c = 100000$. I circuiti oscillano in modo caotico e scorrelato, con una differenza tra le ampiezze dei rispettivi segnali che aumenta con R_c .

3.4 Risultati Numerici III: altre condizioni iniziali

Come accennato inizialmente, l'insieme dei comportamenti manifestati dal sistema dei due circuiti memresistivi con condizioni iniziali C-C e C-S comprende la totalità dei comportamenti globali del sistema individuati anche per le altre tipologie di condizioni iniziali. Di seguito vengono riassunte, per completezza, i risultati ottenute adottando tali altre condizioni iniziali.

Condizioni C-O

Per $100 \leq R_c \leq 50000$ i due circuiti entrano rapidamente in oscillazione non caotica sincronizzata (Fig. 3.25), con modalità simili alla situazione analoga che si crea nel caso C-C. Per $60000 \leq R_c \leq 100000$ i due circuiti risultano disaccoppiati: il circuito "C" oscilla in modo caotico, mentre quello "O" oscilla in modo non caotico (Fig. 3.26).

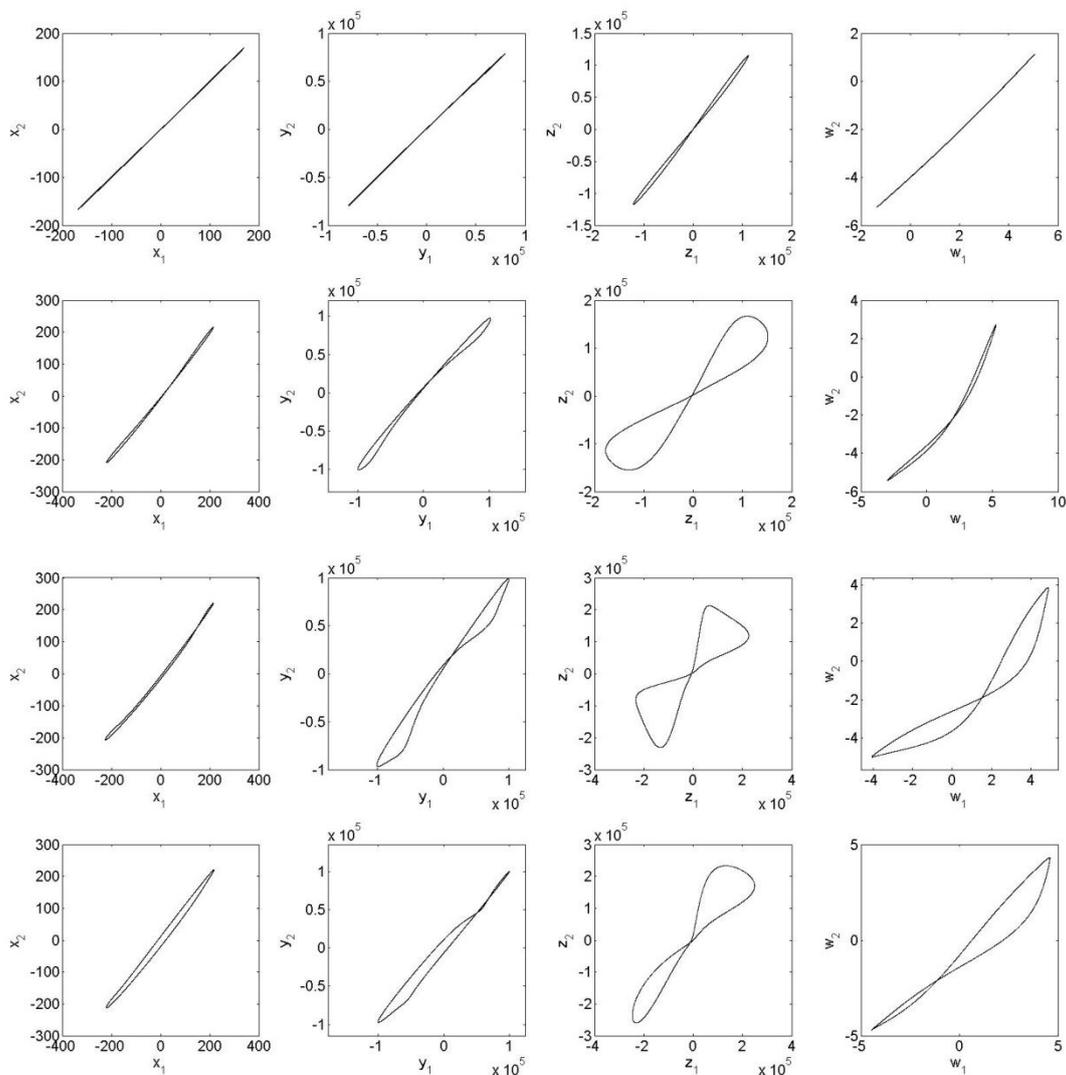


Figura 3.25 –Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui partono da condizioni iniziali che porterebbero i due circuiti isolati su una dinamica rispettivamente caotica (valori iniziali: $(0, 0.11, 0, 0)$) e oscillante (valori iniziali: $(112.4047, 27015, 9360, -4.0542)$). Dall'alto: $R_c = 100$, $R_c = 1000$, $R_c = 5000$, $R_c = 50000$.

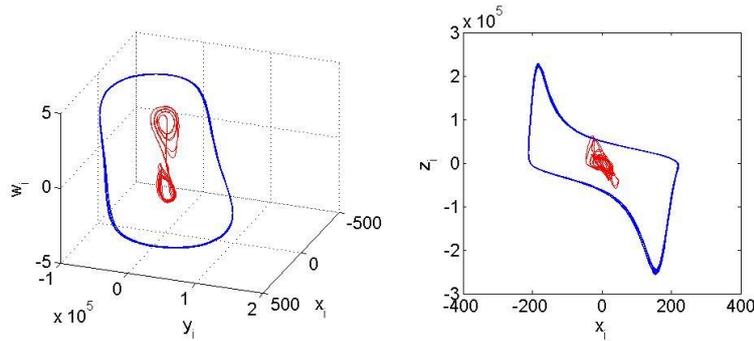


Figura 3.26 – Attrattori dei due circuiti per che $R_c = 100000$. Le condizioni iniziali porterebbero il circuito 1 isolato su una dinamica caotica (valori iniziali: $(0, 0.11, 0, 0)$, in rosso nella figura), mentre il circuito 2 avrebbe una dinamica periodica (valori iniziali: $(112.4047, 27015, 9360, -4.0542)$, in blu nella figura).

Condizioni S-S

Per $100 \Omega \leq R_c \leq 5000$ i due circuiti entrano rapidamente in oscillazione non caotica sincronizzata con modalità simili alla situazioni analoghe precedentemente indagate. In Fig. 3.27 si riportano i corrispondenti diagrammi di correlazione. Per valori maggiori di R_c entrambi i circuiti si spengono.

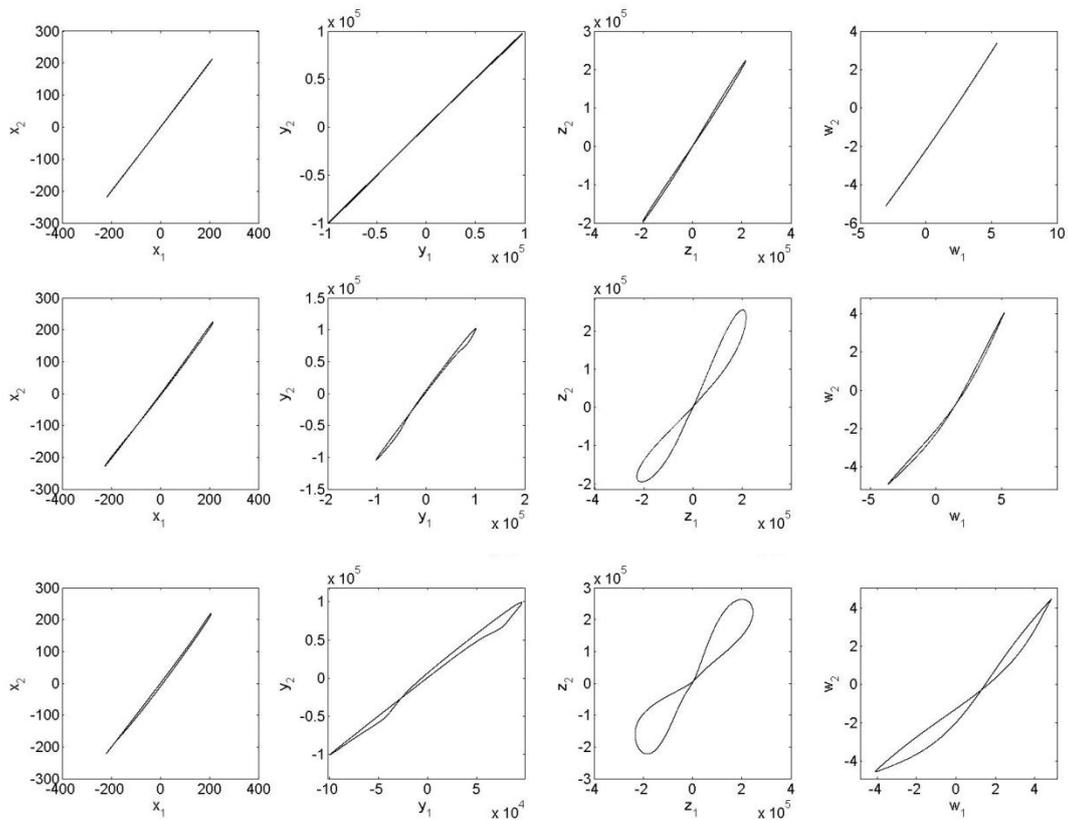


Figura 3.27 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui partono da condizioni iniziali che porterebbero entrambi i circuiti a spegnersi ($(22, 10000, 0.15, 0.2)$ e $(-20, -10000, 50000, -2)$). Dall'alto: $R_c = 100$, $R_c = 1000$, $R_c = 5000$.

Condizioni S-O

Per $100 \leq R_c \leq 35000$ i due circuiti entrano rapidamente in oscillazione non caotica sincronizzata (Fig. 3.28). Per $40000 \leq R_c \leq 100000$ permangono in oscillazione non caotica correlata, ma il circuito che parte da condizioni iniziali “S” oscilla con ampiezze di un ordine di grandezza più piccole (Fig. 3.29).

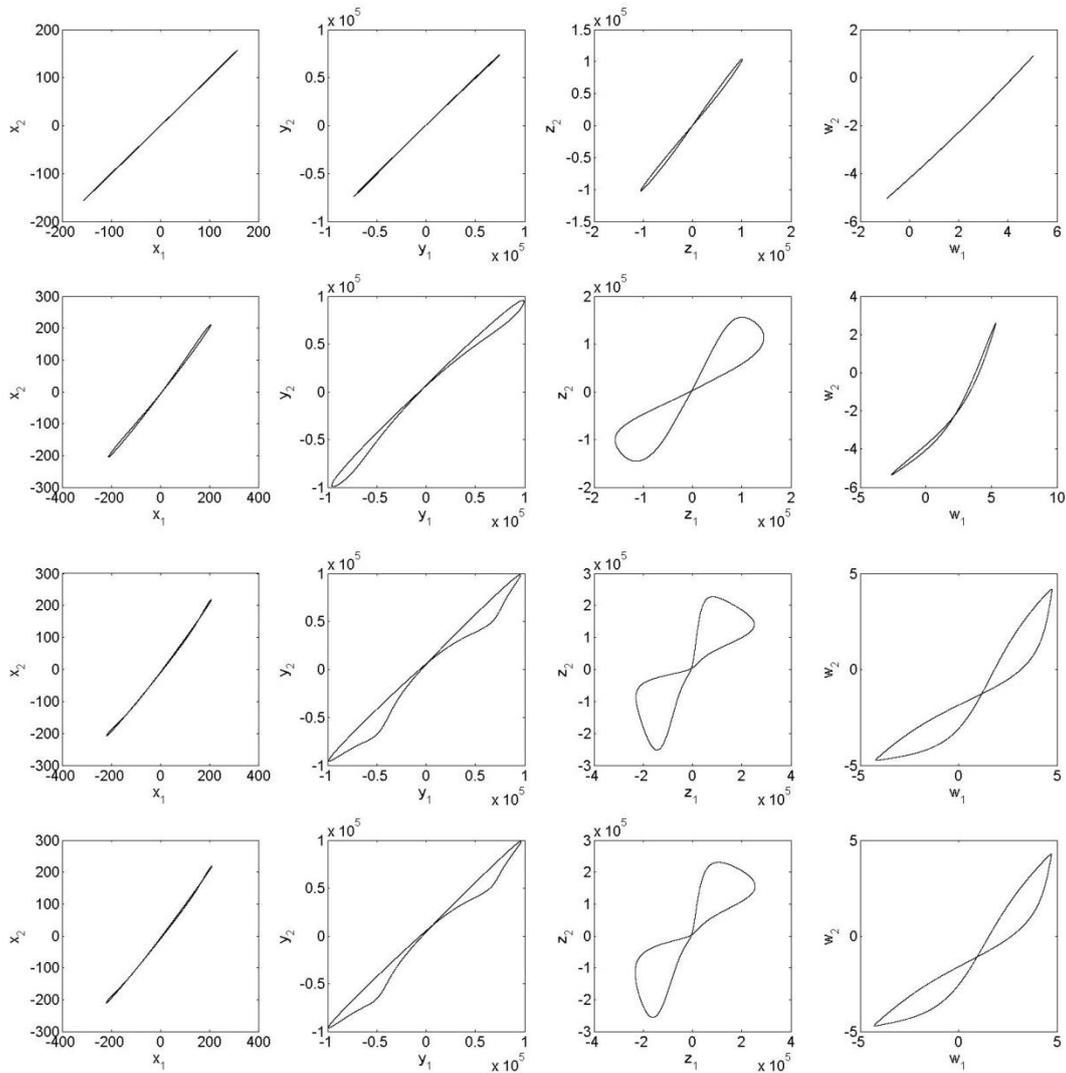


Figura 3.28 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui partono da condizioni iniziali che porterebbero il circuito 1 a spegnersi (valori iniziali: (22, 10000, 0.15, 0.2)) e il circuito 2 su una dinamica periodica (valori iniziali: (112.4047, 27015, 9360, -4.0542)). Dall’alto: $R_c = 100$, $R_c = 10000$, $R_c = 20000$, $R_c = 35000$.

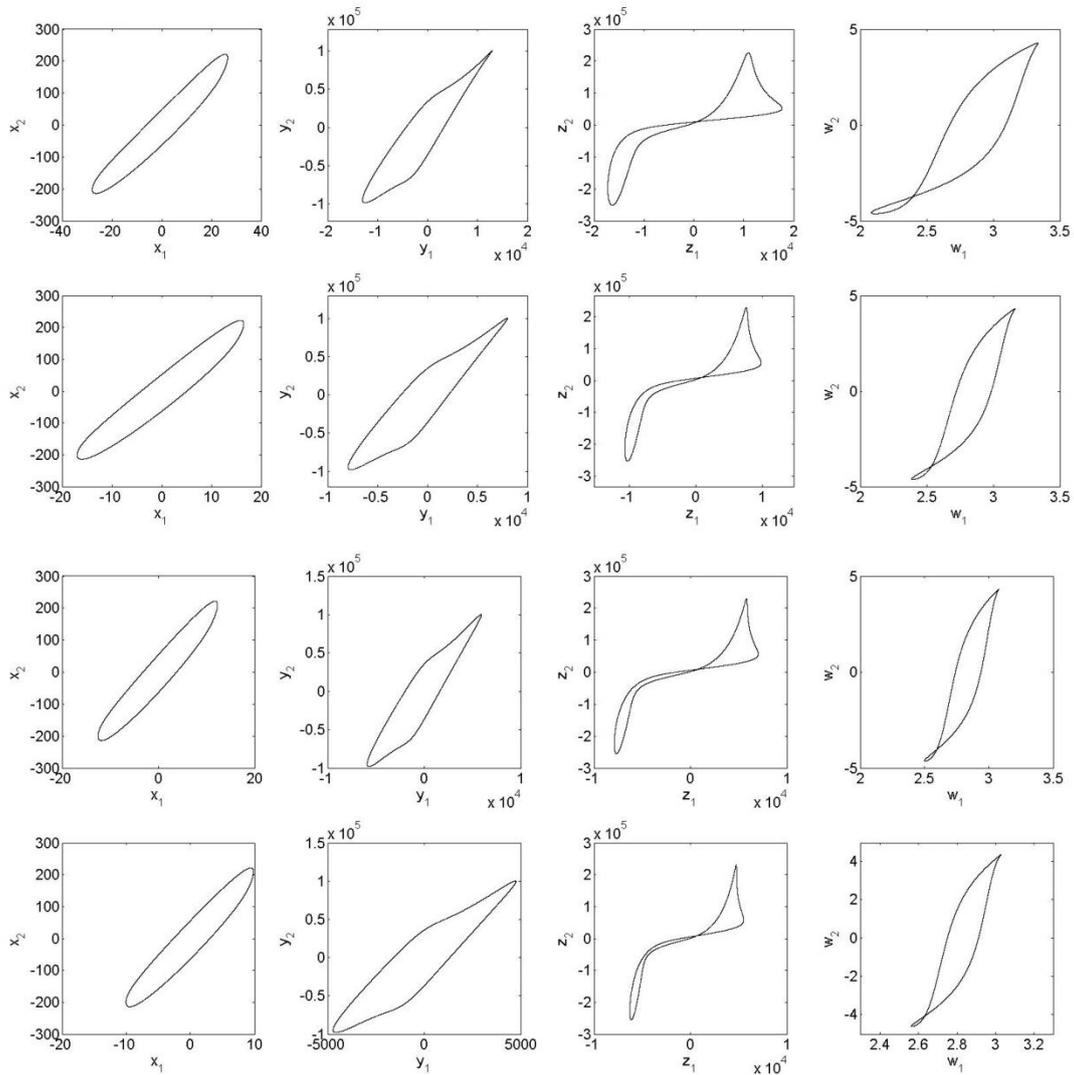


Figura 3.29 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui partono da condizioni iniziali che porterebbero il circuito 1 a spegnersi (valori iniziali: (22, 10000, 0.15, 0.2)) e il circuito 2 su una dinamica periodica (valori iniziali: (112.4047, 27015, 9360, -4.0542)). Dall'alto: $R_c = 40000$, $R_c = 60000$, $R_c = 80000$, $R_c = 100000$.

Condizioni O-O

Per $100 \leq R_c \leq 15000$ i due circuiti si spengono. Per $20000 \leq R_c \leq 150000$ i circuiti presentano una dinamica periodica sincronizzata, con uno dei due circuiti che oscilla però ad ampiezze di un ordine di grandezza più piccole rispetto all'altro (Fig. 3.30).

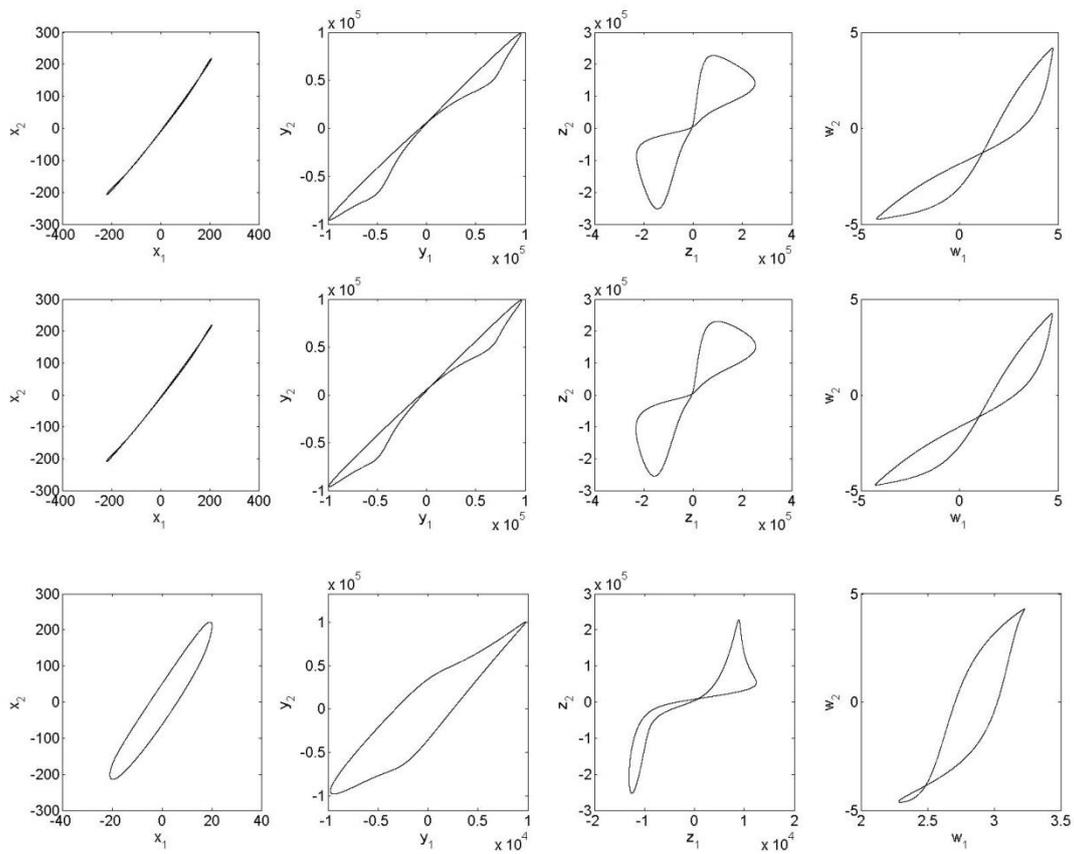


Figura 3.30 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui entrambi partono da condizioni iniziali che porterebbero i circuiti isolati su una dinamica periodica ((112.4047, 27015, 9360, -4.0542) e (-178.1619, -66031, -16762, 4.543)). Dall'alto: $R_c = 20000$, $R_c = 30000$, $R_c = 50000$.

Per $60000 \leq R_c \leq 100000$ lo stato di sincronizzazione periodica continua, ma i due circuiti oscillano ora su ampiezze dello stesso ordine di grandezza. I diagrammi di correlazione sono riportati nella figura seguente.

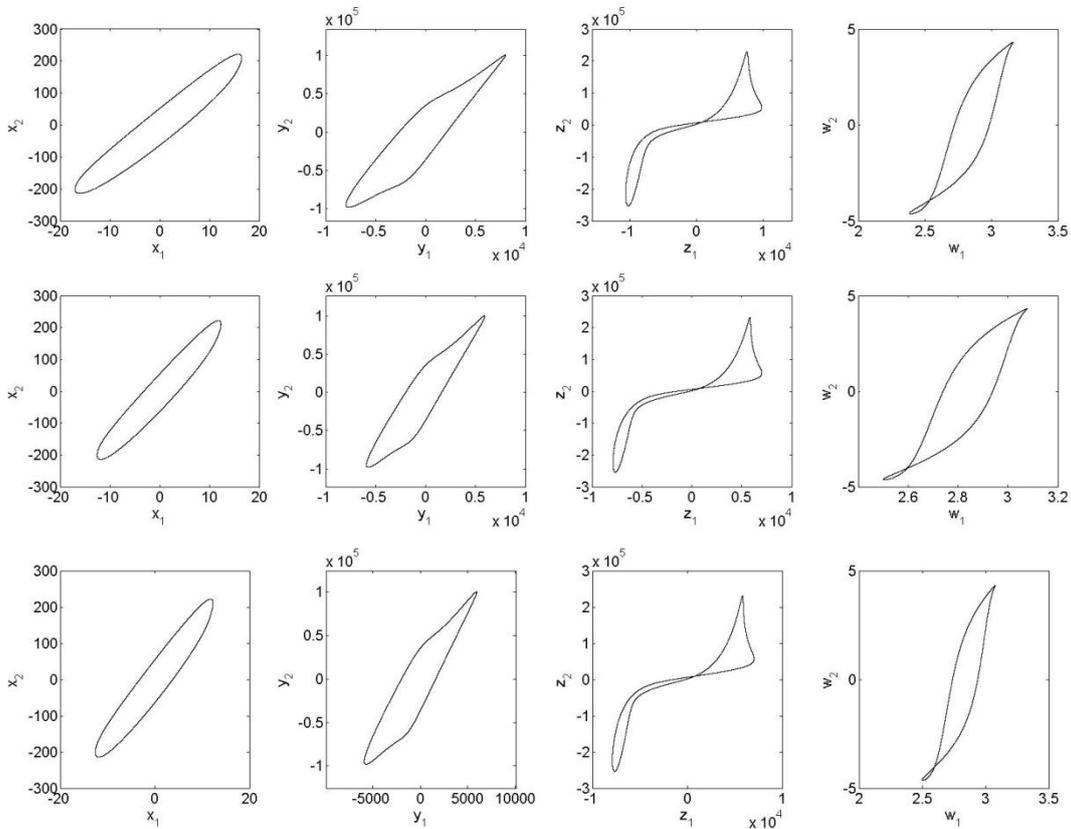


Figura 3.31 – Diagrammi di correlazione tra i segnali dei due circuiti, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , nel caso in cui entrambi partono da condizioni iniziali che porterebbero i circuiti isolati su una dinamica periodica ((112.4047, 27015, 9360, -4.0542) e (-178.1619, -66031, -16762, 4.543)). Dall’alto: $R_c = 60000$, $R_c = 80000$, $R_c = 100000$.

3.5 Confronto con il circuito di Chua

Per avere un’idea dell’effetto che sulla dinamica studiata ha la presenza del memristor, simulazioni dei circuiti di Fig. 3.1 sono state effettuate nel caos in cui l’elemento non lineare μ è costituito dal circuito di Chua con il diodo caratterizzato da una non linearità cubica presentato nella sezione 2.2. Le equazione del sistema, in tal caso, si ottengono dalle (3.1), sostituendo la corrente del memristor i_μ con l’espressione per la corrente del diodo fornita dalla (2.8).

A parità di parametri circuitali, il singolo circuito di Chua presenta una dinamica caotica per condizioni iniziali $(0, 0.11, 0.11)$ e $(2 \cdot 10^{-4}, 1.5, -2.2)$, mentre si ha una dinamica periodica per $(-1.5 \cdot 10^{-3}, 0, -1.5)$ e $(2.1 \cdot 10^{-4}, 1.5, -2.8)$ che corrisponde al circuito in saturazione. Non sono state invece individuati valori iniziali che portano il circuito a spegnersi.

In modo analogo a quanto fatto per la coppia di circuiti memresistivi, simulazioni della dinamica globale del sistema composto da due circuiti di Chua con un diodo con una non linearità cubica sono state effettuate al variare della resistenza di accoppiamento R_c nell'intervallo $100 \leq R_c \leq 100000$ per le diverse combinazioni di condizioni iniziali.

Anche questo sistema manifesta comportamenti interessanti, ma diversi rispetto alla coppia di memristor nella modalità con cui si organizza la sincronizzazione.

La condizione iniziale di tipo O-O porta il sistema in uno stato di sincronizzazione ordinata per tutti i valori investigati di R_c .

Per le altre condizioni iniziali, invece, si ha sincronizzazione caotica ad alti accoppiamenti (piccoli valori di R_c) che passa a sincronizzazione periodica al crescere di R_c . All'interno del *range* di valori di R_c che corrispondono a sincronizzazione periodica, possono emergere stati in cui i due circuiti oscillano in modo pseudo-sinusoidale però in opposizione di fase, ed eventualmente su cicli limite di ordine maggiore di 1. Possono anche emergere situazioni in cui i circuiti oscillano su dinamiche rispettivamente caotica e periodica, risultando di fatto scorrelati. Infine, per alti valori di R_c , i due circuiti risultano di fatto disaccoppiati. Le Figure 3.32-3.36 illustrano le situazioni appena descritte.

Anche il sistema composto da una coppia di circuiti di Chua collegati in modo diffusivo presenta dunque una dinamica molto ricca ma, a differenza del caso memresistivo, gli stati di sincronizzazione, sia caotica che periodica, risultano essere delle condizioni di sincronizzazione completa, con una sovrapposizione pressoché perfetta dei segnali. Non si ha dunque il fenomeno dell'intermittenza riscontrato per il memristor durante la fase di sincronizzazione caotica, né lo sfasamento periodico tra le oscillazioni dei segnali che origina la figura ad "8" dei diagrammi di correlazione nel caso del memristor.

Inoltre, la progressione della dinamica che si ha, al variare di R_c , per la coppia di circuiti di Chua, risulta qualitativamente analoga sia per condizioni iniziali di tipo C-C che di tipo C-O. Nel caso dei circuiti memresistivi, invece, le configurazioni iniziali risultano decisive per il tipo di comportamento globale del sistema. Ad esempio, solamente nel caso di condizioni iniziali di tipo C-S è stato rilevato uno stato globale di sincronizzazione caotica per la coppia di circuiti memresistivi.

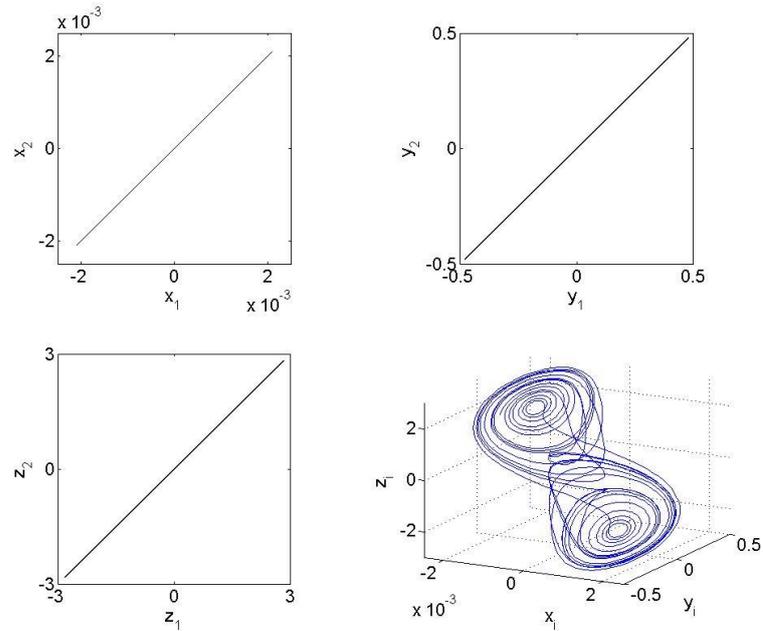


Figura 3.32 – Sincronizzazione caotica nel caso di una coppia di circuiti di Chua collegati in modo diffusivo secondo lo schema di Fig. 3.1 per $R_c = 7000$. Le condizioni iniziali sono di tipo C-O, ma un’analoga situazione si anche per condizioni iniziali di tipo C-C per valori della resistenza di accoppiamento minori di 7000. Da notare lo stato di sincronizzazione completa evidenziato dai diagrammi di correlazione.

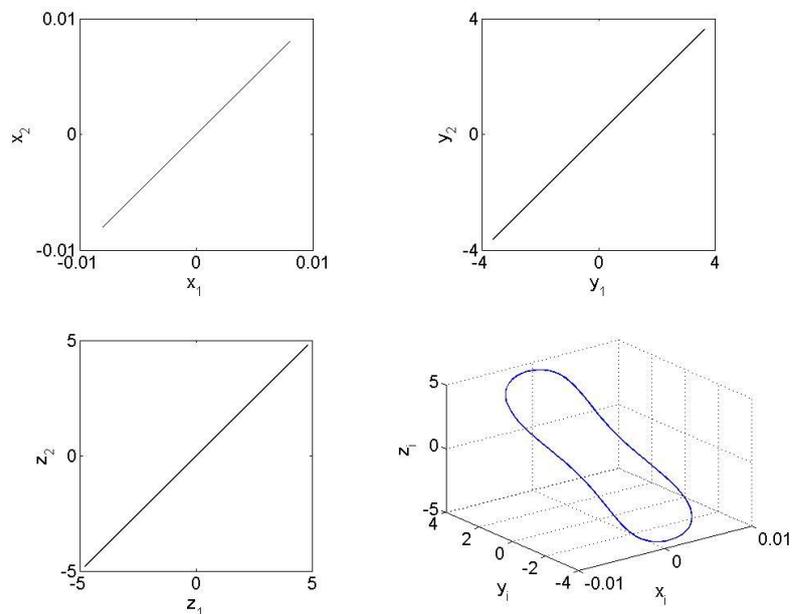


Figura 3.33 – Sincronizzazione ordinata nel caso di una coppia di circuiti di Chua collegati in modo diffusivo secondo lo schema di Fig. 3.1 per $R_c = 42000$ con condizioni iniziali di tipo C-O. Un’analoga situazione si ritrova anche per condizioni iniziali di tipo C-C. Da notare lo stato di sincronizzazione completa evidenziato dai diagrammi di correlazione.

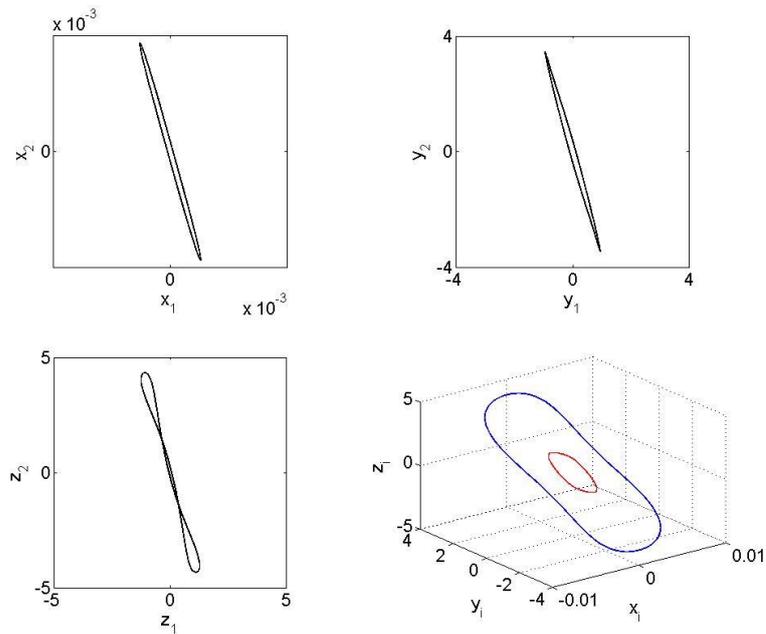


Figura 3.34 – Segnali pseudo-sinusoidali in opposizione di fase, per due circuiti di Chua accoppiati in modo diffusivo secondo lo schema di Fig. 3.1 per $R_c = 12000$ e partendo da condizioni iniziali di tipo C-C. Un’analoga situazione si ha anche per condizioni iniziali di tipo C-O. Questo tipo di comportamento si ritrova, variando R_c , all’interno di un ampio intervallo pe cui si hanno prevalentemente stati di sincronizzazione periodica.

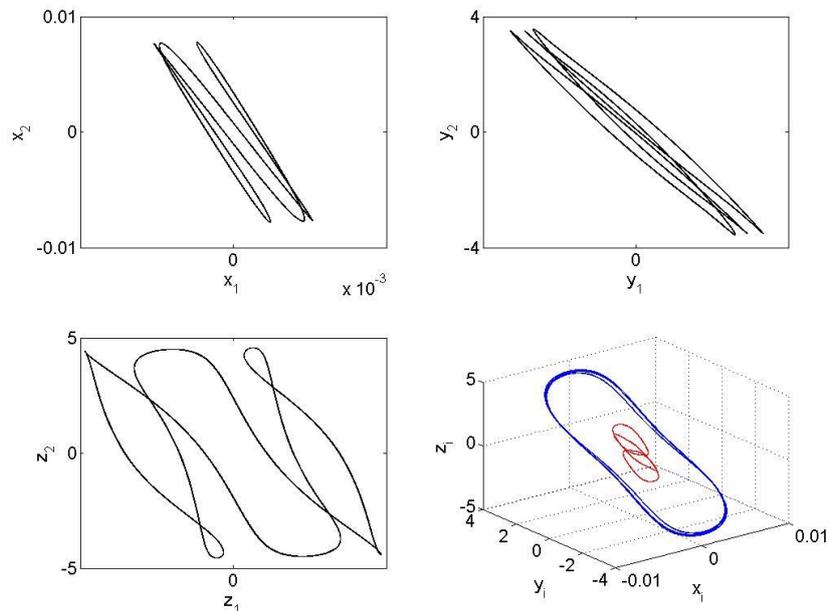


Figura 3.35 – Situazione in cui i due circuiti di Chua oscillano in opposizione di fase con segnali pseudo-sinusoidali e corrispondi attrattori costituiti da e cicli limite di ordine >1 . $R_c = 16850$ e condizioni iniziali di tipo C-O. Un’analoga situazione si ha anche per condizioni iniziali di tipo C-C. Questo tipo di comportamento si ritrova, variando R_c , all’interno di un ampio intervallo pe cui si hanno prevalentemente stati di sincronizzazione periodica.

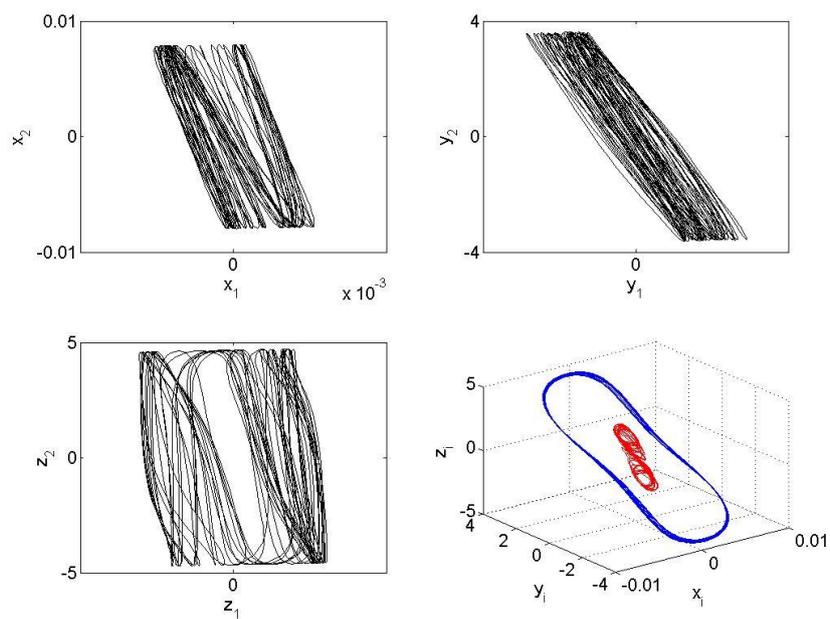


Figura 3.36 – Coesistenza di oscillazioni caotiche e pseudo-sinusoidali per i due circuiti di Chua. Condizioni iniziali di tipo C-C e $R_c = 31000$.

4. Circuiti collegati in modo diffusivo

Come naturale prosecuzione dello studio dei due circuiti memresistivi presentato nel capitolo 3, nella presente sezione viene affrontato il caso di N oscillatori caotici mutuamente collegati tramite un resistore R_c a formare un anello chiuso. L'accoppiamento diffusivo adottato e la geometria circolare fanno sì che le equazioni del sistema risultino simmetriche rispetto alla sequenza di oscillatori (ovvero rispetto ai due versi di percorrenza dell'anello). La dinamica spontanea del sistema è stata investigata numericamente sia al variare del resistore R_c , che determina l'intensità dell'accoppiamento, sia per diversi valori di N . Inoltre, sono state utilizzate due differenti tipologie di configurazioni iniziali: nella prima, le condizioni iniziali sono poste a zero per tutti i circuiti tranne uno, simulando così una situazione in cui viene dato un impulso su un unico circuito al sistema inizialmente a riposo; nella seconda, invece, le condizioni iniziali sono scelte in modo casuale su tutti gli N circuiti. In entrambi i casi, per piccoli valori di R_c (circuiti fortemente accoppiati) il sistema si trova in uno stato di sincronizzazione caotica, che passa poi ad una situazione di sincronizzazione non caotica con oscillazioni periodiche di ampiezza pseudosinusoidale man mano che R_c aumenta (circuiti mediamente accoppiati), per passare infine ad oscillazioni caotiche scorrelate per alti valori di R_c (i circuiti risultano, di fatto, disaccoppiati). All'interno della dinamica periodica, comunque, si è trovato che possono emergere onde stazionarie oppure onde progressive a seconda dello schema iniziale adottato. Oltre al circuito memresistivo presentato nel capitolo precedente, sono state realizzate simulazioni anche utilizzando come oscillatore caotico un circuito di Chua, con un diodo caratterizzato da una non-linearità cubica. Gli aspetti principali dei risultati ottenuti sono stati pubblicati sulla rivista *Acta Applicandae Mathematicae* [15].

4.1 Descrizione del modello

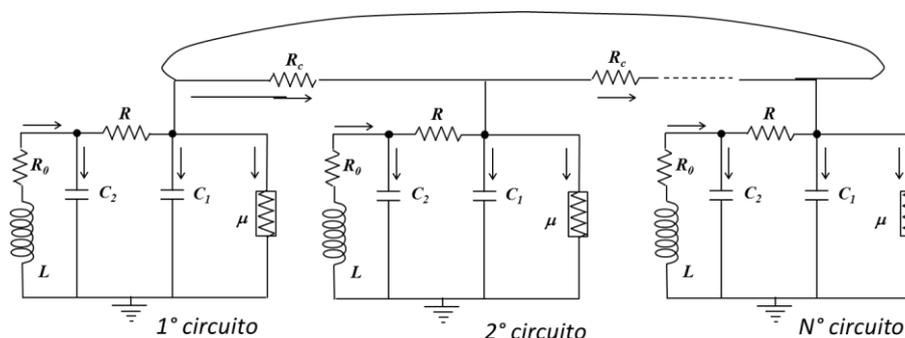


Figura 4.1 – Collegamento diffusivo, tramite resistore R_c , di N oscillatori caotici disposti ad anello. Il valore di R_c determina l'intensità dell'accoppiamento. L'elemento μ rappresenta il componente non lineare che, nel caso studiato, può essere un diodo di Chua o un memristor.

Il sistema analizzato è costituito da N oscillatori caotici mutuamente accoppiati tramite un resistore R_c secondo lo schema riportato in Fig. 4.1. Il tipo di collegamento tra due circuiti consecutivi è identico a quello

adottato nel capitolo precedente (accoppiamento diffusivo), per cui il nuovo sistema considerato ne costituisce una possibile generalizzazione. Applicando le leggi di Kirchhoff si ricavano le seguenti equazioni descrittive la dinamica degli N circuiti accoppiati:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{y_i}{L} - \frac{R_0}{L} x_i \\
 \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_i - y_i}{R} + x_i \right) \\
 \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_i - z_i}{R} - i_{Mi} + \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{R_c} \right) \\
 \frac{dw_i}{dt} &= \frac{z_i}{\zeta}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove L, R_0, C_2, C_1, R sono gli elementi circuitali del singolo circuito (i valori sono quelli usati nei capitoli 2 e 3, proposti in [118]: $R_0 = 0 \Omega$, $L = 18 \text{ mH}$, $C_2 = 68 \text{ nF}$, $C_1 = 6.8 \text{ nF}$, $R = 2000 \Omega$), mentre la costante $\zeta = 82000 \cdot 47 \cdot 10^9$ è un fattore di scala introdotto per esigenze di stabilità numerica [118]. Le variabili x_i, y_i, z_i e w_i indicano, invece, la corrente attraverso l'induttanza L , le tensioni attraverso le due capacità C_2 e C_1 e il flusso del campo magnetico. Infine, il termine i_M rappresenta la corrente attraverso il memristor e, nel caso del memristor a controllo di flusso che si sta utilizzando, come visto nel capitolo 2, assume la solita forma:

$$i_M = (\alpha + 3 \cdot \beta w^2) \cdot z, \tag{4.2}$$

con $\alpha = -0.667 \cdot 10^{-3}$ e $\beta = 0.029 \cdot 10^{-3}$,

Si noti che le equazioni (4.1) rappresentano sono della forma (1.6), con la matrice di adiacenza di tipo (1.7). Il sistema di Fig. 4.1 è stato studiato numericamente, implementando un opportuno codice in Matlab® per l'integrazione delle Eq. (1) nell'intervallo temporale $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$ tramite la funzione ODE45. Per garantire la sufficiente accuratezza dei risultati, la tolleranza relativa e la tolleranza assoluta, parametri della funzione ODE45, sono state poste pari a 10^{-7} . Le simulazioni numeriche sono state realizzate variando sia le dimensioni dell'anello, cioè per diversi valori di N , sia la resistenza R_c che determina l'intensità dell'accoppiamento tra i circuiti.

Sono inoltre state adottati due diverse configurazioni iniziali. Un primo set di condizioni iniziali è costruito ponendo a zero le variabili di tutti i circuiti, tranne la variabile di stato y posta pari a 0.1 su un unico circuito:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} x_i(0) &= 0 \\ y_i(0) &= 0 \\ z_i(0) &= 0 \\ w_i(0) &= 0 \end{aligned} \right\} i \neq j \\
 & \left. \begin{aligned} x_j(0) &= 0 \\ y_j(0) &= 0.1 \\ z_j(0) &= 0 \\ w_j(0) &= 0 \end{aligned} \right\} j \approx \frac{N}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La condizione iniziale $(0,0.1,0,0)$ porta il singolo circuito memresistivo su una dinamica caotica a cui corrisponde un attrattore di tipo doppio scroll.

Una seconda configurazione iniziale è stata invece realizzata attraverso una scelta random delle variabili di stato $(x_i(0), y_i(0), z_i(0), w_i(0))$ per i diversi circuiti dell'anello. Nei paragrafi seguenti vengono presentati i risultati ottenuti.

4.2 Condizioni iniziali I: circuito centrale con condizioni iniziali non nulle

Simulazioni al variare di R_c

Scelto un anello di $N = 10$ circuiti di Chua memresistivi accoppiati come in Fig. 4.1, e ponendo con condizioni iniziali diverse da zero solamente il circuito numero 5, un primo gruppo di simulazioni è stato effettuato al variare della resistenza di accoppiamento R_c .

Per il più piccolo valore utilizzato ($R_c=1000$), il sistema si porta rapidamente in uno stato di sincronizzazione caotica, con i circuiti che evolvono tutti su un attrattore di tipo doppio scroll (Figure 4.2 e 4.3). Tale situazione di moto caotico globale perdura nell'intervallo $1000 \leq R_c \leq 2250$, ma il tipo di sincronizzazione si modifica. Tracciando, ad esempio, i diagrammi di correlazione nel piano (z_1, z_5) per valori crescenti di R_c (Fig. 4.4), si osserva che la condizione iniziale di sincronizzazione (caotica) completa, identificata da una retta a 45° nel suddetto diagramma di fase, si modifica verso una situazione di intermittenza. Il sistema, cioè, rimane mediamente sincronizzato nel tempo, ma attraversa fasi di non sincronizzazione.

Nei diagrammi in Fig. 4.4, infatti, all'andamento rettilineo che individua uno stato di sincronizzazione completa, si sovrappongono altri tratti di traiettoria, indicanti segnali non sincronizzati, via via più consistenti al diminuire dell'accoppiamento tra i circuiti. Anche dagli andamenti della differenza $\Delta_{1-5}(t) = z_1(t) - z_5(t)$ al variare di R_c , riportati in Fig. 4.5, emerge una condizione di intermittenza, con picchi di desincronizzazione il cui numero e intensità aumentano con R_c .

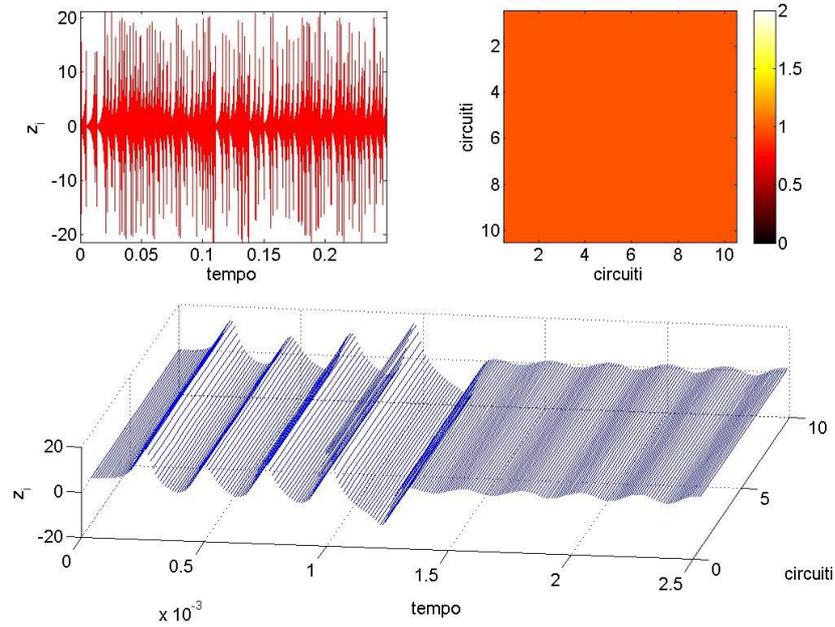


Figura 4.2 – Dinamica globale di un anello di $N = 10$ circuiti di Chua, mutuamente accoppiati in modo diffusivo secondo lo schema di Fig. 4.1, per $R_c = 1000$. Dall'alto a sinistra e procedendo in senso orario la figura riporta: l'insieme dei segnali $z_i(t)$ per tutti i circuiti; la matrice di correlazione C ; diagramma dell'evoluzione spazio-temporale degli N circuiti per i primi istanti di integrazione. Il sistema è in uno stato di sincronizzazione caotica completa.

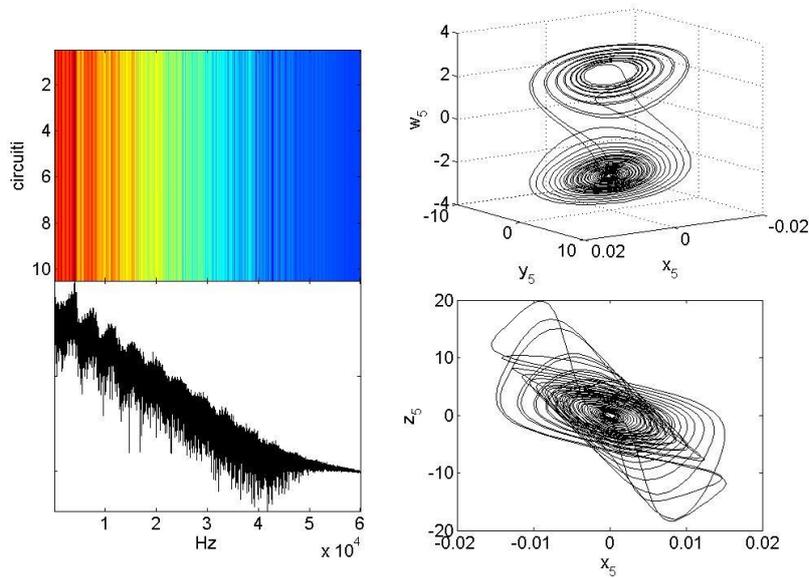


Figura 4.3 – Ulteriore caratterizzazione della situazione di sincronizzazione caotica riportata in Fig. 4.1. A sinistra: spettrogramma dei segnali $z_i(t)$ per tutti gli N circuiti, e relativo spettro medio (allo spettrogramma è stato applicato uno stretching logaritmico per evidenziarne la struttura, mentre l'intensità dello spettro medio è riportata in scala logaritmica). A destra: proiezioni dell'attrattore per il circuito numero 5.

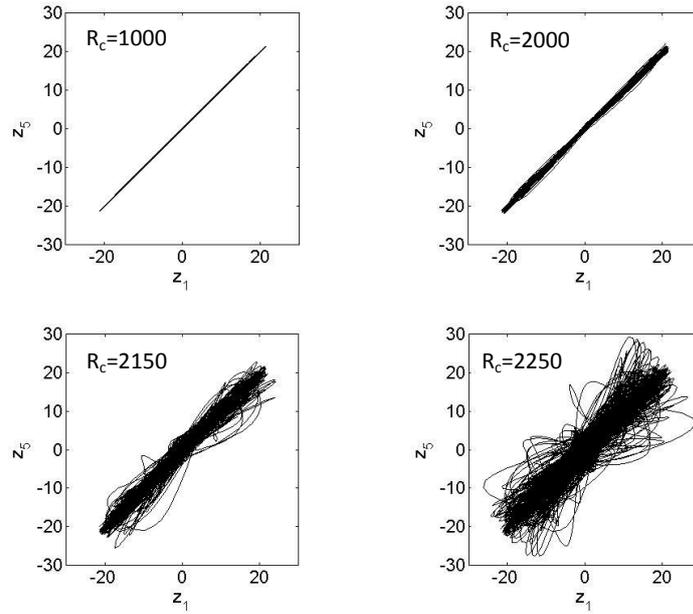


Figura 4.4 – Diagramma di correlazione relativo al segnale $z_i(t)$ tra i circuiti numero 1 e numero 5 all'aumentare della resistenza di accoppiamento R_c : lo stato di sincronizzazione completa si degrada verso una condizione di intermittenza.

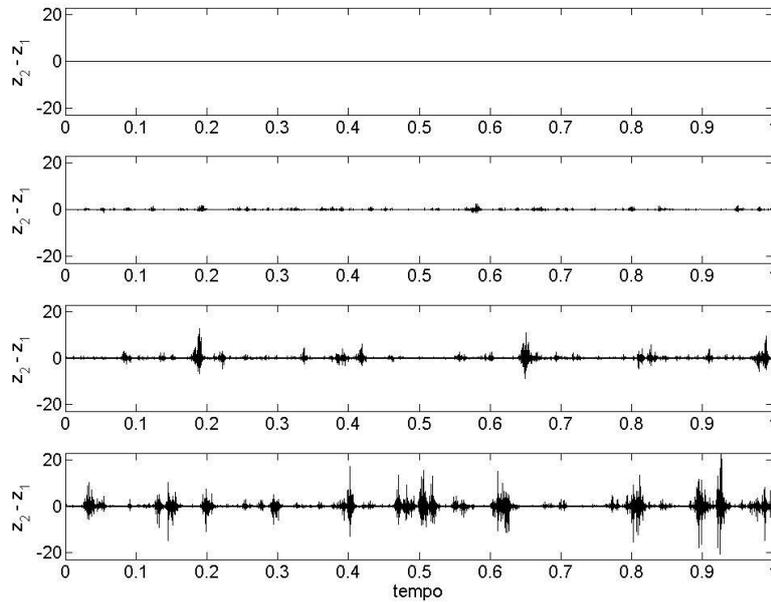


Figura 4.5 – Differenza tra i segnali z_1 e z_5 all'aumentare della resistenza di accoppiamento R_c : si passa da una condizione di sincronizzazione completa a fenomeni di intermittenza via via più significativi in termini di occorrenza e intensità (dall'alto: $R_c=1000, 2000, 2150, 2250$).

Ulteriori dettagli sulla dinamica globale nell'intervallo $1000 \leq R_c \leq 2250$, corrispondente alle oscillazioni caotiche dei singoli circuiti su un attrattore di tipo doppio scroll, sono forniti dalla matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$ costruita calcolando la correlazione lineare tra i segnali $w_i(t)$ e $w_j(t)$ per tutte le coppie di circuiti (i, j) del sistema (si noti che, essendo la correlazione tra due segnali simmetrica rispetto all'ordine in cui si considerano i segnali, si ha $c_{ij} = c_{ji}$ e la matrice C risulta simmetrica). Ovviamente, nel caso di sincronizzazione completa le correlazioni tra i vari circuiti sono tutte pari ad 1, e la matrice di correlazione banalmente coincide con la matrice identità.

Viceversa, quando i circuiti sono tra loro casualmente correlati o scorrelati, i valori della matrice di correlazione saranno, a loro volta, casualmente distribuiti nell'intervallo $[-1, 1]$.

Situazioni intermedie, ovvero strutture presenti nella matrice di correlazione, possono eventualmente riflettere organizzazioni emergenti del sistema.

In Fig. 4.6 è riportata la matrice di correlazione per $R_c = 2000$, corrispondente al caso in cui il sistema comincia a non trovarsi più in uno stato di sincronizzazione caotica perfetta (cfr. Figure 4.4 e 4.5). Si nota chiaramente che la correlazione tra due generici circuiti diminuisce man mano che aumenta la distanza tra questi lungo l'anello: il minimo di correlazione lo si ha considerando circuiti diametralmente opposti. Inoltre, la matrice di correlazione presenta una struttura a cluster. Si noti, comunque, che la correlazione tra i segnali dei diversi circuiti resta molto alta.

Per mettere in evidenza la presenza di un'eventuale struttura fine nelle oscillazioni del sistema, al segnale $z_i(t)$ di ogni circuito è stato sottratto la media $\overline{z_N}(t)$ calcolata rispetto agli N circuiti, ovvero:

$$z_i^*(t) = z_i(t) - \overline{z_i}(t), \quad (4.4)$$

dove:

$$\overline{z_N}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N z_k(t)}{N}. \quad (4.5)$$

La (4.5) rappresenta, istante per istante, la configurazione media dell'anello, coincidente con il valore dei singoli circuiti nel caso di sincronizzazione completa. La (4.4) indica invece la discrepanza tra il segnale di un dato circuito e il valor medio del segnale lungo l'anello.

Per evidenziare la struttura spaziale delle grandezze (4.4), è stato usato l'approccio proposto in [149] che fa uso della sezione di Poincaré per caratterizzare la periodicità spazio-temporale di un segnale caotico. Più in dettaglio, si sceglie un segnale di uno dei circuiti dell'anello, ad esempio x_1 , e si calcolano i tempi a cui quel dato segnale passa per 0, da valori positivi verso valori negativi. In tal modo si stabilisce una sequenza temporale t_1, t_2, \dots che determina un clock per il sistema, e a quegli istanti di tempo si osserva una qualsiasi altra funzione della dinamica del sistema. In altre parole, dunque, per l'anello di circuiti memresistivi in esame, sono state ottenute diverse istantanee delle grandezze z_i^* , $i = 1, 2, \dots, N$, ai tempi determinati dal passaggio per 0^+ del segnale $x_1(t)$.

Il risultato è mostrato in Fig. 4.6, con $z_i^*(t)$ normalizzato, per ogni i , rispetto all'ampiezza massima delle

oscillazioni di $z_i(t)$ nel tempo (in tal modo si ha un'idea, per ogni circuito, di quanto sia significativa la discrepanza delle sue oscillazioni rispetto al comportamento medio dell'anello, rapportata all'ampiezza delle sue oscillazioni temporali). Si nota chiaramente come, rispetto alla configurazione media di $z_i(t)$ lungo l'anello, vi sia un'onda stazionaria che rappresenta, evidentemente, una sorta di "struttura fine" della dinamica globale dell'anello. L'onda ha due nodi ben definiti (nello specifico, vicino ai circuiti 3 e 7) e quindi si ha una corrispondente lunghezza d'onda pari a $\lambda = N$ (si noti che la simmetria delle Eq. 4.1 e delle condizioni iniziali (4.3) impongono necessariamente una simmetria rispetto al circuito numero 5). L'ampiezza delle oscillazioni variano in modo caotico, come si deduce dal fatto che i diversi "fotogrammi" di z_i^* vanno a riempire omogeneamente la sezione di Poincaré. Risulta anche chiara la corrispondenza tra l'aspetto della matrice di correlazione e la forma di tale onda.

V'è poi da dire che i segnali $(x_i(t), y_i(t), z_i(t), w_i(t))$ intersecano il valore 0^+ con periodo pressoché costante: T_{i0^+} , che risulta inoltre essere praticamente lo stesso per tutti i circuiti dell'anello: $T_{i0^+} \sim T_{0^+} = \text{cost} \forall i$. Dunque, sebbene in generale il concetto di "periodo" non possa essere univocamente definito per un sistema caotico in cui la distanza tra i picchi di un segnale varia caoticamente, i segnali dei circuiti memresistivi qui considerati possono essere visti come oscillazioni pseudo-sinusoidali di periodo T_{0^+} con una modulazione di ampiezza caotica. Anche il periodo dell'onda stazionaria sopra descritta risulta pressoché costante e pari a $T_{0^+} \cong 2.36 \cdot 10^{-3}$.

In Fig. 4.7 vengono riportate le sezioni di Poincaré di $z_i^*(t)$ per valori crescenti di R_c . Da quanto si qui detto, è chiaro che l'onda stazionaria caotica rappresenta una perturbazione che disturba lo stato di sincronizzazione completa. L'effetto di disturbo è tanto maggiore quanto maggiore è l'ampiezza dell'onda stazionaria, che comunque varia caoticamente, causando l'effetto di intermittenza; in altre parole, le oscillazioni stazionarie di piccola ampiezza lasciano pressoché invariato lo stato di sincronizzazione, il che spiega la correlazione comunque presente nei diagrammi di Fig. 4, mentre le oscillazioni di ampiezza consistente corrispondono ad una rottura momentanea della sincronizzazione.

All'aumentare di R_c l'ampiezza massima (elongazione positiva) dell'onda stazionaria tende ad aumentare (Fig. 4.8), mentre il periodo rimane praticamente costante.

Per $R_c=2260$, evidentemente questo scenario diventa instabile e, dopo una fase iniziale di moto caotico con le modalità sopra descritte, il sistema subisce una transizione ad una dinamica periodica sincronizzata. La Fig. 4.9 mostra questa transizione. Oltre ai segnali $z_i(t)$, in figura è riportato l'andamento del modulo dell'elongazione dell'onda stazionaria $z_i^*(t)$, e si nota come si abbia un rapido incremento proprio a ridosso del cambio di dinamica. Ciò sembra confermare che l'onda stazionaria caotica, emergente come struttura fine rispetto alla dinamica globale caotica, rappresenti un'instabilità che cresce all'aumentare della resistenza di accoppiamento, sino a causare la transizione di fase del sistema.

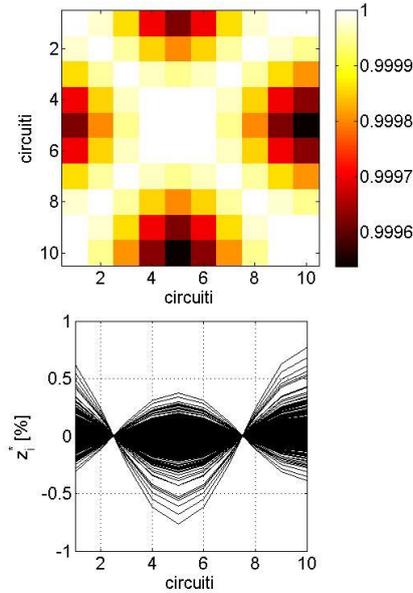


Figura 4.6 – Relazione tra la struttura della matrice di correlazione dei segnali z_i (immagine in alto) per $R_c = 2000$, e il corrispondente andamento di z_i^* (diagramma in basso), rappresentante lo scostamento di z_i dal suo valor medio calcolato, istante per istante, rispetto ai diversi circuiti (il risultato è espresso in percentuale rispetto all'ampiezza massima del segnale $z_i(t)$). Il diagramma risulta da una sovrapposizione delle configurazioni di z_i^* considerate a determinati istanti di tempo (sezione di Poincaré), come specificato nel testo.

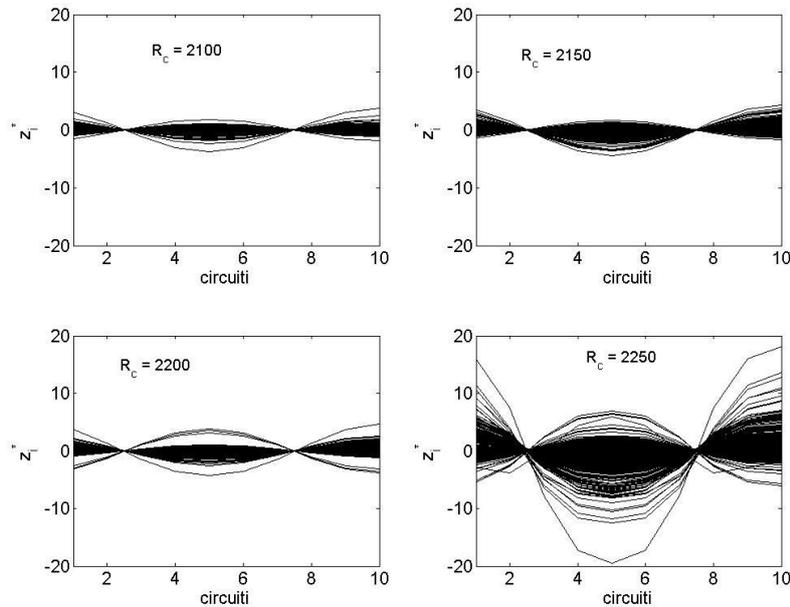


Figura 4.7 – Sezioni di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$ calcolate rispetto ai tempi in cui $x_1(t)$ passa per 0^+ (si veda il testo per ulteriori dettagli), mostranti l'evoluzione dell'onda stazionaria caotica, presente come struttura fine rispetto alla dinamica globale media del sistema, al variare della resistenza di accoppiamento R_c .

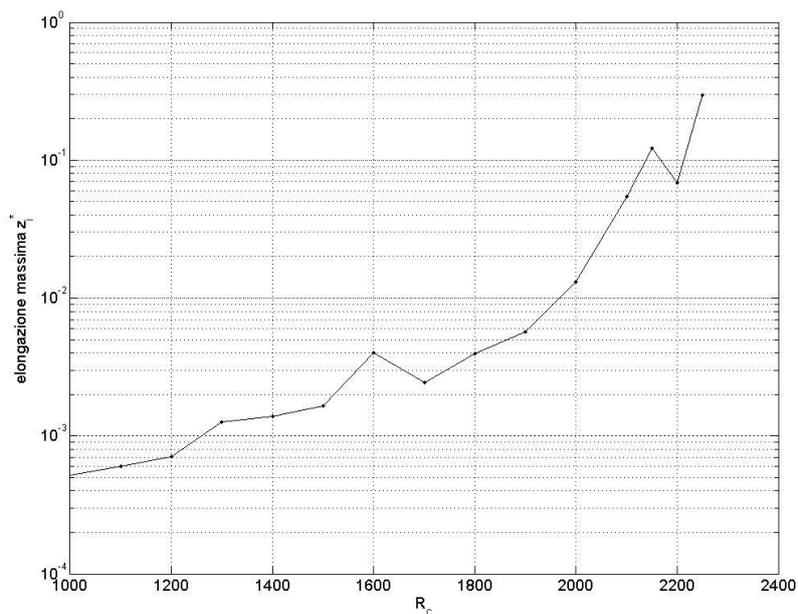


Figura 4.8 – Andamento dell'elongazione massima dell'onda stazionaria z_i^* in funzione della resistenza di accoppiamento R_c .

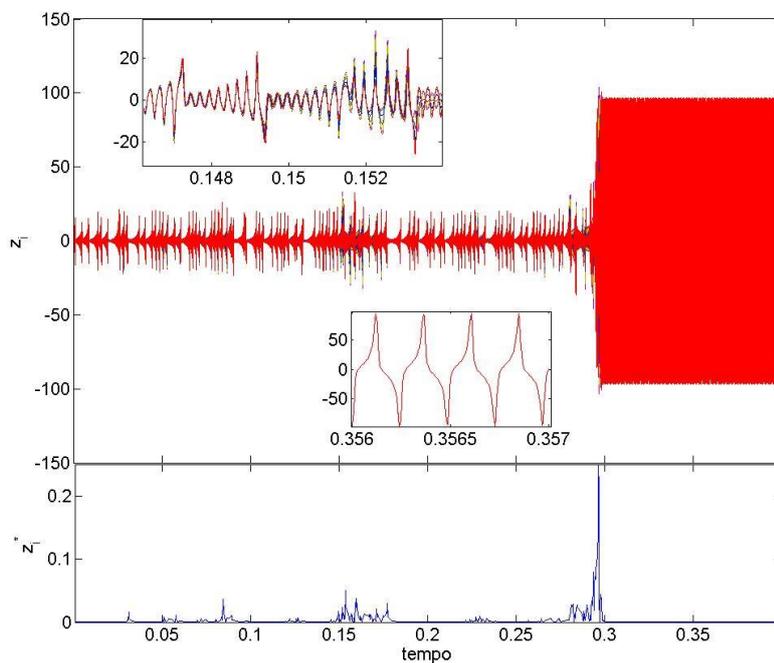


Figura 4.9 – Transizione da dinamica caotica e dinamica periodica per $R_c = 2260$. I riquadri mostrano un dettaglio della forma d'onda dei segnali nelle due situazioni. In basso è riportato l'andamento del modulo dell'elongazione dell'onda stazionaria caotica $z_i^*(t)$, ed è evidente un rapido incremento proprio a ridosso del cambio di regime dinamico.

Dopo la transizione ad una dinamica periodica il sistema, come accennato, risulta in uno stato di sincronizzazione completa. Le oscillazioni dei singoli circuiti hanno una forma pseudo-sinusoidale e, come mostrato in Fig. 4.10, i corrispondenti attrattori sono dei cicli limite di ordine 1. Analogamente a quanto fatto in Fig. 4.3 per la situazione di dinamica caotica, nella Fig. 10 è anche riportato lo spettrogramma costruito calcolando, tramite una *Fast Fourier Transformate* (FFT), lo spettro dei segnali $w_i(t)$ per tutti i circuiti dell'anello. Ogni spettro è stato normalizzato rispetto al suo valore massimo, ed è anche stato tracciato lo spettro medio.

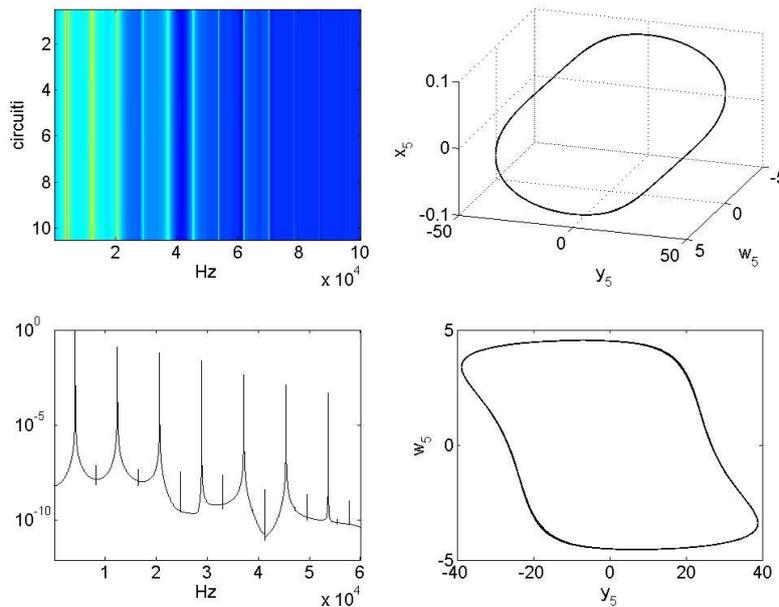


Figura 4.10 – Caratterizzazione della dinamica dei singoli circuiti dopo la transizione da oscillazioni caotiche a moto periodico che avviene per $R_c = 2260$. A sinistra sono riportati lo spettrogramma ottenuto dall'insieme degli spettri dei segnali $w_i(t)$ e il corrispondente spettro medio; a destra si hanno le proiezioni dell'attrattore del circuito 5 (per evidenziare i dettagli dello spettrogramma è stato effettuato uno stretching logaritmico dell'immagine, mentre l'intensità dello spettro medio è stata riportata in scala logaritmica).

Aumentando ulteriormente la resistenza R_c , ovvero diminuendo l'intensità dell'accoppiamento tra i circuiti, il transitorio caotico che precede il passaggio alla dinamica periodica sincronizzata diminuisce progressivamente, e per $R_c \sim 3000$ il sistema si porta praticamente subito su una dinamica pseudo-sinusoidale. A questo punto, all'interno dell'intervallo dei valori di R_c investigati, la situazione di sincronizzazione resta invariata sino a $R_c = 11000$. Per tale valore, infatti, alcuni circuiti oscillano con ampiezze molto più piccole degli altri. Ciò rompe, ovviamente, lo stato di sincronizzazione completa, e sull'anello emerge un'onda stazionaria macroscopica i cui nodi sono costituiti dai circuiti oscillanti a piccola ampiezza. Incrementando ulteriormente R_c , dinamiche analoghe si ritrovano all'interno di uno scenario caratterizzato per lo più da stati di sincronizzazione globale. La situazione è illustrata in Fig. 4.11, dove sono riportate le sezioni di Poincaré di $z_i^*(t)$ per valori di R_c a cui si ha il fenomeno descritto.

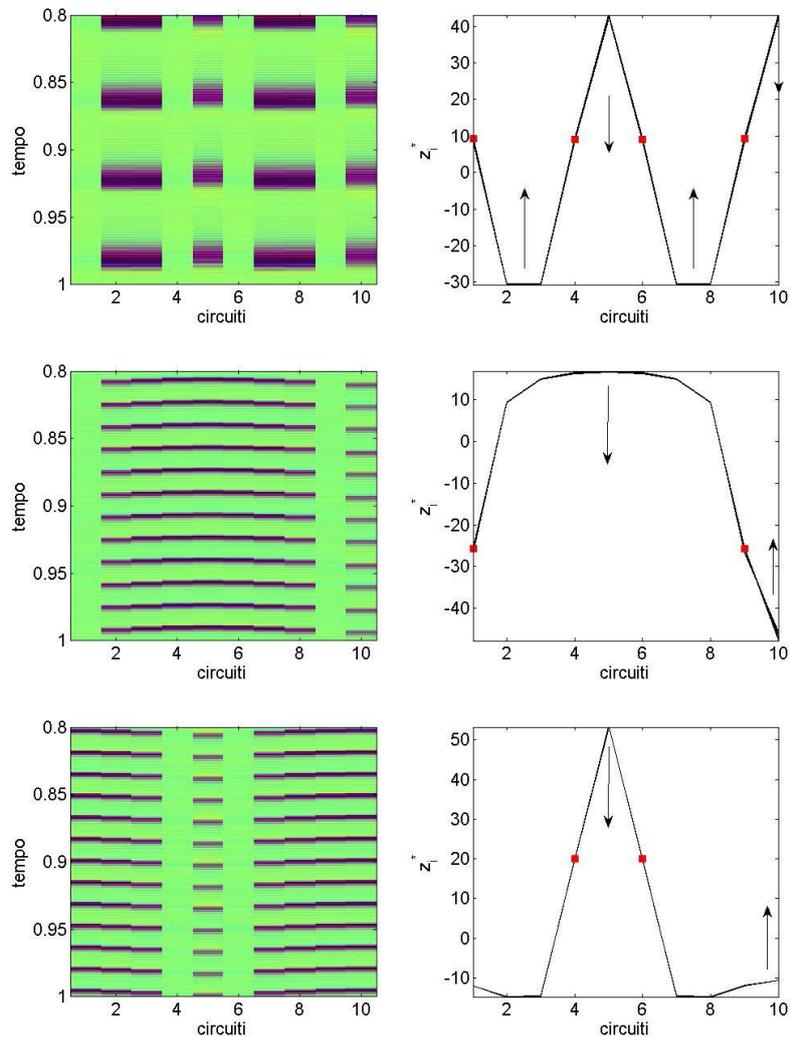


Figura 4.11 – Diagramma spazio-temporale dell’evoluzione del segnale $z_i(t)$ per tutti i circuiti dell’anello, a sinistra, e corrispondente sezione di Poincaré di $z_i^*(t)$ a destra, calcolata utilizzando come segnale di clock il segnale $x_5(t)$. Si noti la corrispondenza tra i circuiti oscillanti a piccola ampiezza, e i nodi dell’onda stazionaria emergente sull’anello (dall’alto: $R_c = 11000$, $R_c = 11200$, $R_c = 12000$).

A differenza dell’onda stazionaria caotica emergente per $R_c < 2260$, l’onda stazionaria non è più, ora, una struttura fine della dinamica globale del sistema, ma ne descrive proprio la situazione macroscopica complessiva. Inoltre, l’onda stazionaria è essa stessa periodica rispetto ai tempi del clock, come evidenziato dalla pressoché perfetta sovrapposizione delle diverse configurazioni di z_i^* che formano la sezione di Poincaré mostrate in Fig. 4.11.

Nelle Figure 4.12-4.14 sono invece mostrati gli attrattori dei circuiti oscillanti a piccola ampiezza che costituiscono i nodi delle onde riportate in Fig. 4.11. Tali attrattori risultano essere totalmente diversi rispetto a quelli del singolo circuito memresistivo isolato discussi nel capitolo 2.

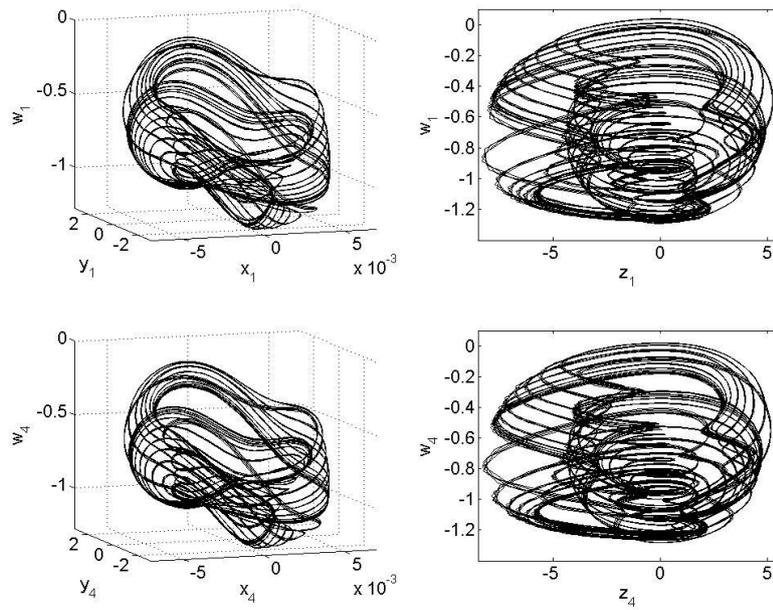


Figura 4.12 – Proiezioni degli attrattori dei circuiti oscillanti a piccola ampiezza, rispetto al resto dei circuiti, per $R_c = 11000$, e che costituiscono i nodi dell'onda stazionaria emergente globalmente sull'anello (cfr. Fig. 4.11).

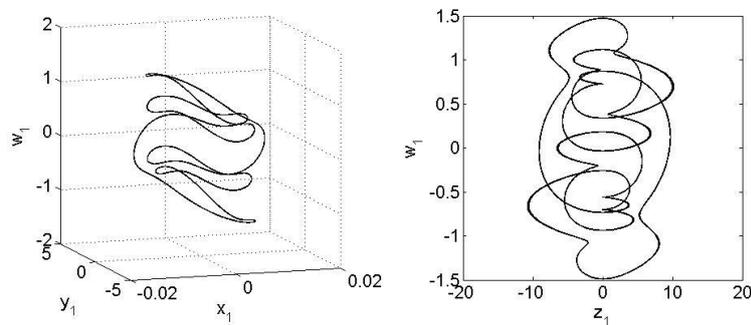


Figura 4.13 – Come in Fig. 4.12, per $R_c = 11200$.

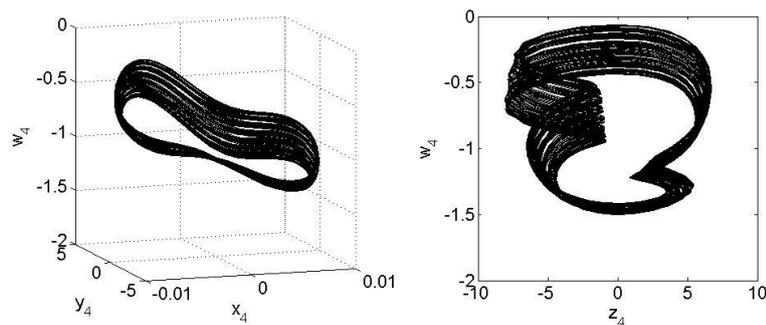


Figura 4.14 – Come in Fig. 4.12, per $R_c = 12000$.

Aumentando ulteriormente la resistenza R_c , ancora si rilevano, tra stati periodici di sincronizzazione completa, nodi a piccola ampiezza che danno origine a forme d'onde stazionarie macroscopiche per le grandezze z_i^* . Le oscillazioni di questi circuiti “nodali”, però, diventano via via caotiche man mano che R_c aumenta, avvicinandosi alla forma dell'attrattore tipo doppio scroll del circuito memresistivo singolo. Nelle Figure 4.15-4.17 è mostrato l'effetto di questa situazione per $R_c = 14000$ e $R_c = 55000$. L'onda stazionaria emergente sull'anello comincia a perdere la sua periodicità rispetto al clock, come evidenziato dal maggiore spessore mostrato dalle sezioni di Poincaré.

Per $R_c = 60000$, i circuiti nodali risultano localmente disaccoppiati dal resto del sistema e presentano una dinamica caotica ormai ben sviluppata, con attrattori di tipo doppio scroll (Fig. 4.19). In pratica, sul sistema si realizza una coesistenza di ordine e caos, con circuiti aventi dinamica periodica e oscillazioni pseudo-sinusoidali, e altri con dinamica caotica (i nodi). Ciò porta ad una perdita totale di periodicità dell'onda stazionaria z_i^* , come evidenziato dalla corrispondente sezione di Poincaré riportata in Fig. 4.18.

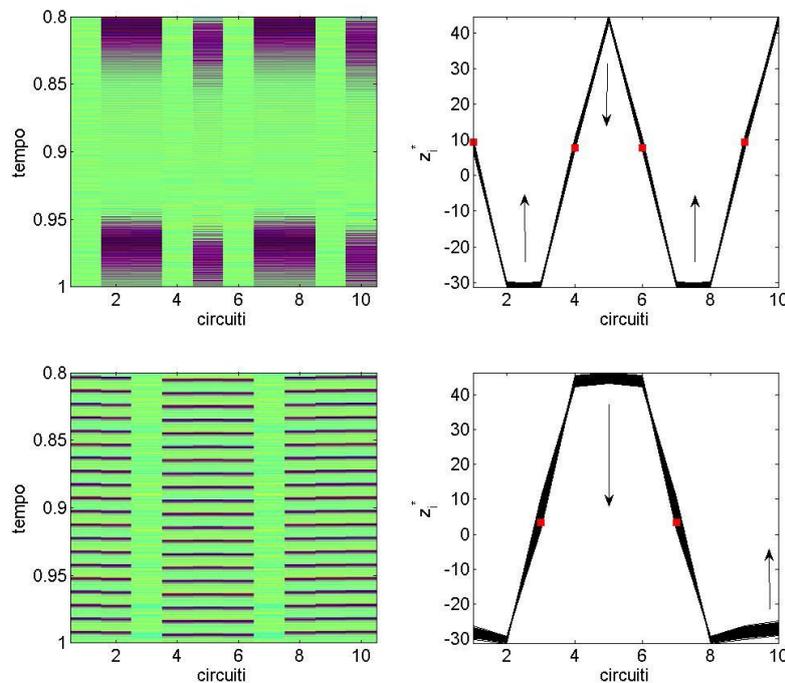


Figura 4.15 – Diagramma spazio-temporale dell'evoluzione del segnale $z_i(t)$ per tutti i circuiti dell'anello, a sinistra, e corrispondente sezione di Poincaré di $z_i^*(t)$ a destra, calcolata utilizzando come segnale di clock il segnale $x_5(t)$. Si noti l'allargamento della sezione di Poincaré rispetto ai casi riportati in Fig. 4.11, indicante una non perfetta periodicità temporale dell'onda stazionaria (dall'alto: $R_c = 14000$, $R_c = 55000$).

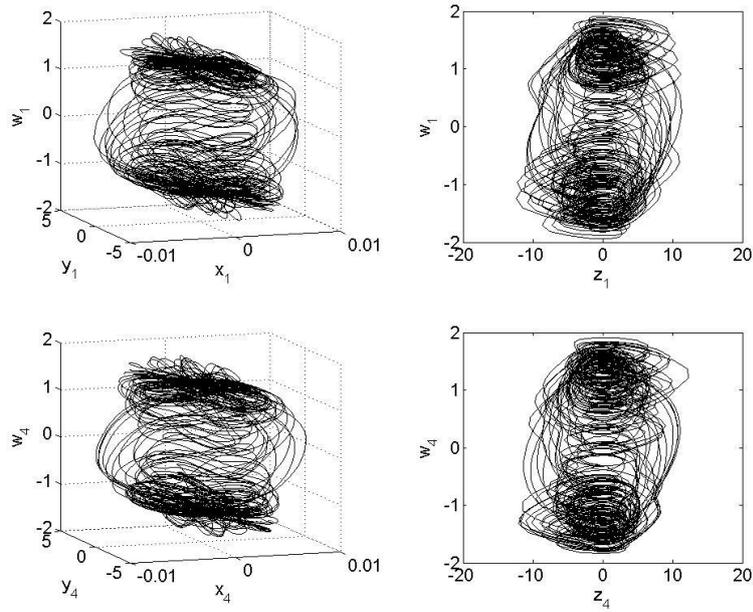


Figura 4.16 – Proiezioni degli attrattori dei due circuiti oscillanti a piccola ampiezza, rispetto al resto dei circuiti, che costituiscono i nodi dell’onda stazionaria emergente globalmente sull’anello per $R_c = 14000$ (cfr. Fig. 4.11).

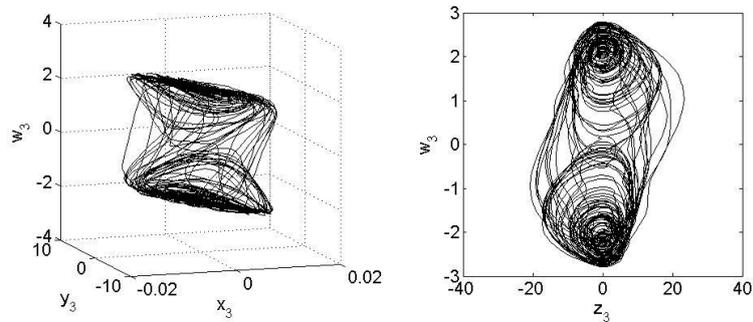


Figura 4.17 – Proiezione dell’attrattore dei circuito oscillante a piccola ampiezza, rispetto al resto dei circuiti, che costituisce il nodi dell’onda stazionaria emergente globalmente sull’anello per $R_c = 55000$ (cfr. Fig. 4.11).

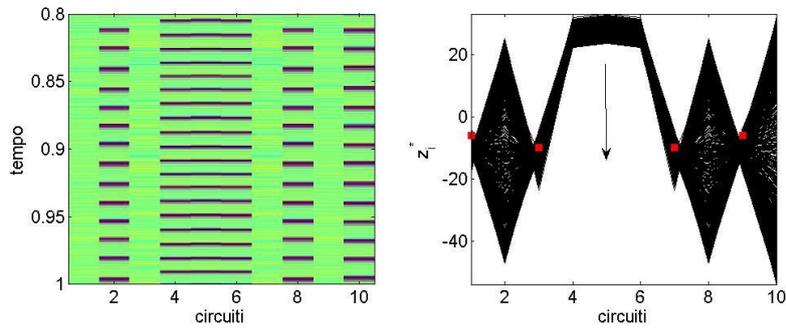


Figura 4.18 – Diagramma spazio-temporale dell'evoluzione del segnale $z_i(t)$ per tutti i circuiti dell'anello, a sinistra, e corrispondente sezione di Poincaré di $z_i^*(t)$ a destra, calcolata utilizzando come segnale di clock il segnale $x_5(t)$, per $R_c = 60000$. Si noti la perdita di periodicità dell'onda stazionaria emergente (cfr. Figure 4.7 e 4.11).

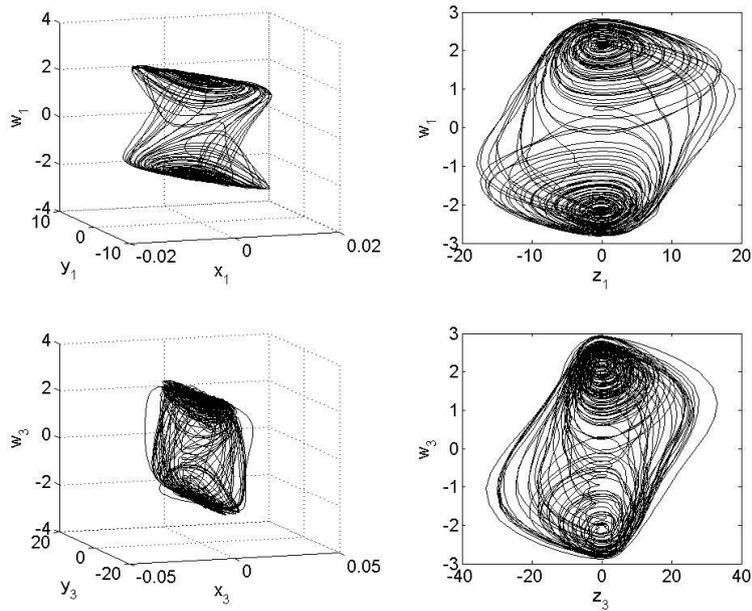


Figura 4.19 – Proiezioni degli attrattori dei due circuiti oscillanti a piccola ampiezza per $R_c = 60000$ (cfr. Fig. 4.15).

Per $R_c > 60000$ il numero di nodi caotici aumenta, rompendo lo stato di sincronizzazione del sistema senza però portare a comportamenti globali emergenti. Ad $R_c = 80000$ i circuiti risultano di fatto disaccoppiati, e oscillano in modo caotico e tra loro scorrelato. In Fig. 4.20 è mostrato questo graduale deterioramento del moto globale periodico che porta, alla fine, nuovamente ad una dinamica caotica dei singoli circuiti. A differenza che nel caso di forte accoppiamento tra i circuiti, però, il comportamento globale del sistema è a sua volta caotico, senza fenomeni di sincronizzazione o emergenze.

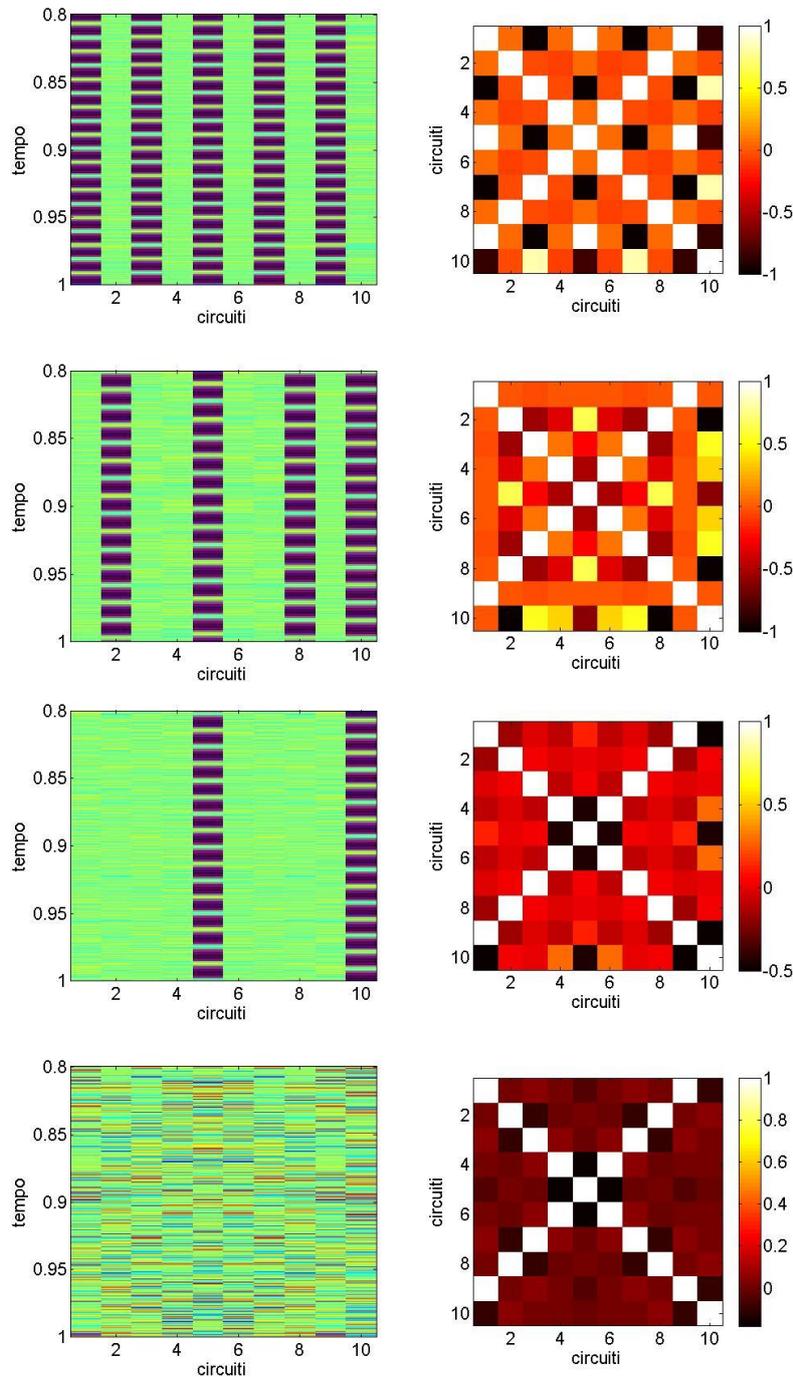


Figura 4.20 – Aumento del numero di circuiti oscillanti in modo caotico man mano che si diminuisce l'intensità dell'accoppiamento incrementando il valore della resistenza R_c . La figura mostra l'evoluzione spazio-temporale del segnale $z_i(t)$ e la corrispondente matrice di correlazione, che non mostra alcun tipo di struttura d'interesse (dall'alto: $R_c = 65000$, $R_c = 70000$, $R_c = 80000$, $R_c = 85000$).

Uno schema riassuntivo della dinamica del sistema sin qui descritta è stato ottenuto riportando in un unico diagramma i massimi dei segnali y_i per tutti gli N circuiti dell'anello al variare della resistenza di accoppiamento R_c . Il risultato è mostrato in Fig. 4.21. Si nota chiaramente il moto caotico iniziale, seguito da unadinamica globale pseudosinusodiale nella quale emergono nodi oscillanti a piccola ampiezza, che diventano poi caotici perturbando sempre più i anche gli andamenti dei segnali degli altri circuiti, sinchè non si ha un ritorno ad una dinamica caotica per tutti i circuiti.

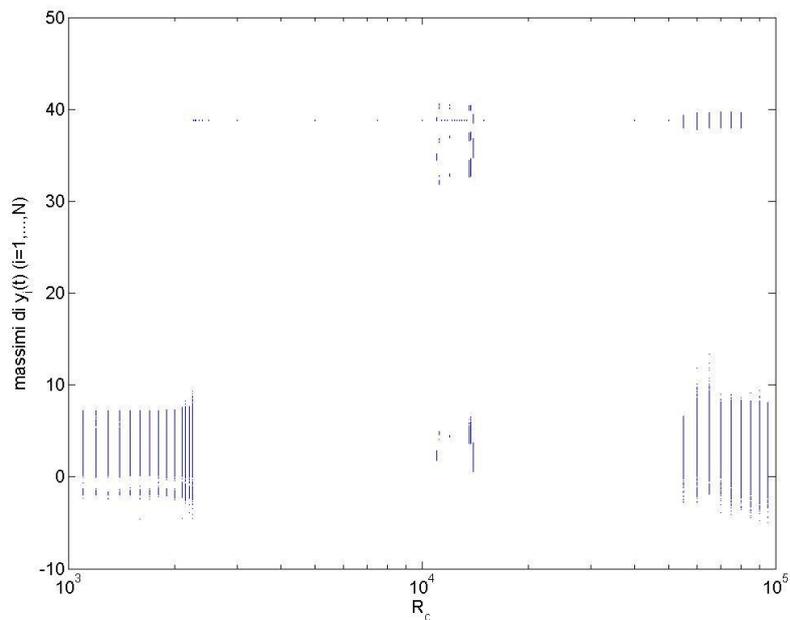


Figura 4.21 – Diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c .

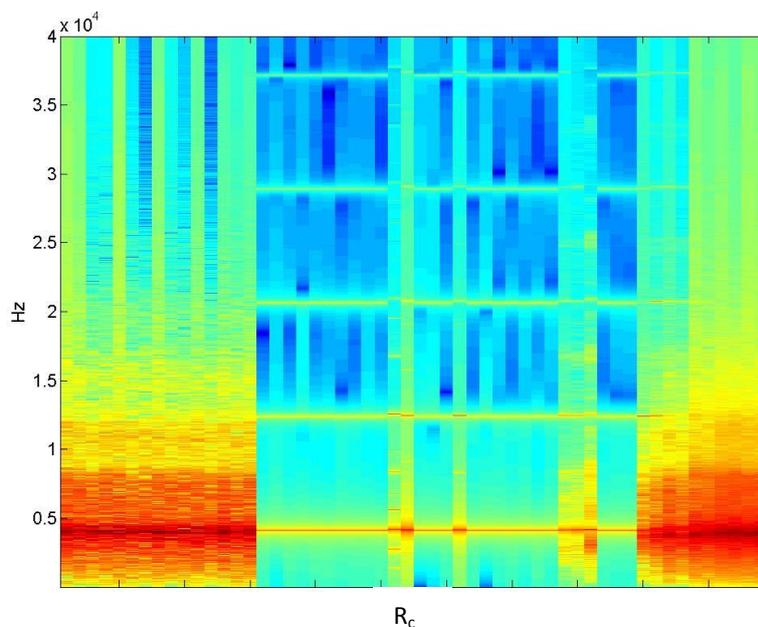


Figura 4.22 – Spettrogramma ottenuto tramite FFT dei segnali usati per ottenere il diagramma di Fig. 4.21 (l'immagine riporta, per ogni valore di R_c , la media degli spettri calcolati sui segnali dei diversi circuiti).

Simulazioni al variare di N

Un diverso gruppo di simulazioni è stato eseguito per lo stesso tipo di condizioni iniziali, ovvero solamente il circuito centrale con condizioni non nulle, lasciando invariata la resistenza di accoppiamento $R_c = 1000$ e variando le dimensioni dell'anello. Per $N \leq 15$ il sistema presenta una dinamica globale caotica sincronizzata, del tutto analoga a quella sopra descritta per $N = 10$ e $R_c < 2260$. In particolare, si ha sempre l'onda stazionaria caotica come struttura fine sovrapposta alla dinamica globale, la cui ampiezza aumenta con N . Il ruolo del parametro N appare dunque simile a R_c . In Fig. 4.23 sono riportati i diagrammi di correlazione al variare di delle dimensioni dell'anello. Per $N \geq 15$, e sino a $N = 100$, il sistema è in uno stato di sincronizzazione globale pseudo-sinusoidale, analogo a quello descritto nella sezione precedente, ma non sono state riscontrate onde stazionarie o emergenze di alcun tipo.

Anche nel caso dell'aumento di N , il passaggio ad una dinamica periodica è preceduto da un rapido incremento dell'ampiezza delle oscillazioni dell'onda stazionaria periodica (Fig. 4.24).

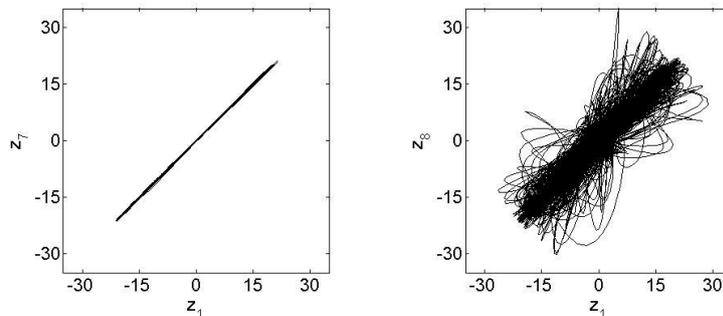


Figura 4.23 – Diagramma di correlazione relativo al segnale $z_i(t)$ tra i circuiti numero 1 e numero $N/2$ per $N=14$ (a sinistra) ed $N=16$ (a destra).

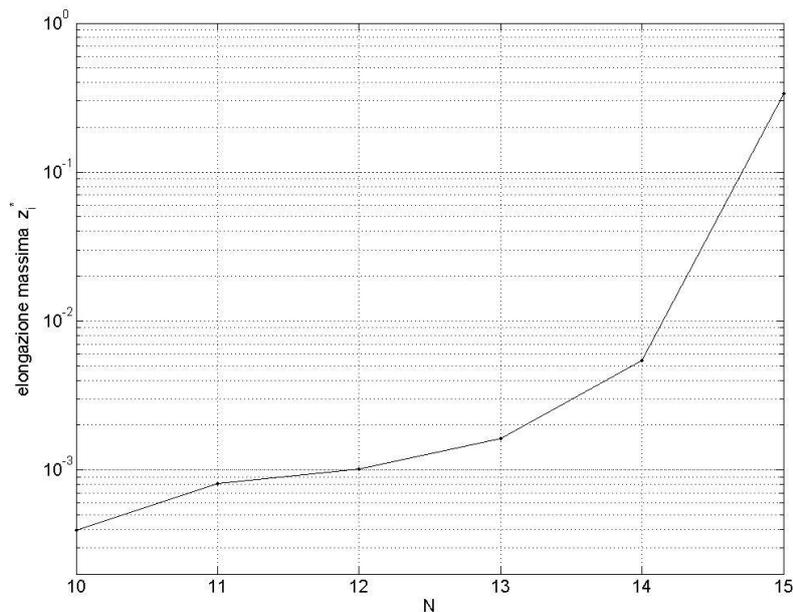


Figura 4.24 - Andamento dell'elongazione massima dell'onda stazionaria z_i^* in funzione della dimensione dell'anello.

4.3 Condizioni iniziali II: condizioni iniziali random

In diverso tipo di integrazione delle Eq. 4.1 è stata impostata utilizzando condizioni iniziali casuali su tutti i circuiti dell'anello. A parità di condizioni iniziali, è poi stato variato l'accoppiamento R_c . Sono stati inoltre simulati sia il caso $N=14$, sia $N=20$.

Per entrambe le dimensioni dell'anello, per piccoli valori di R_c si ha, globalmente, sincronizzazione caotica. Analogamente ai casi descritti nella sezione 4.2, la sincronizzazione caotica si degrada all'aumentare di R_c per via della presenza dell'onda stazionaria caotica evidenziabile tramite la sezione di Poincaré dei segnali dei circuiti. Le Figure 4.25-4.29 illustrano questo aspetto per $N=14$ e $N=20$.

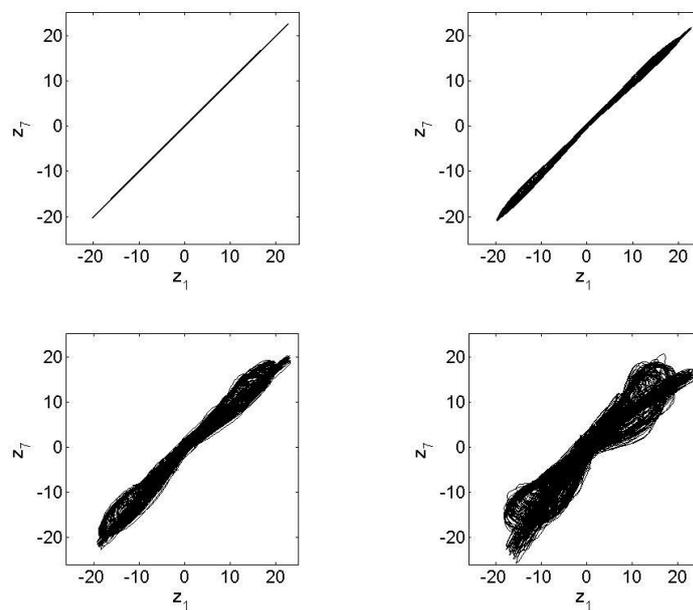


Figura 4.25 - Diagramma di correlazione relativo al segnale $z_i(t)$ tra i circuiti numero 1 e numero 7 all'aumentare della resistenza di accoppiamento R_c per un anello di $N = 14$ circuiti memresistivi, con condizioni iniziali scelte in modo casuale. Lo stato di sincronizzazione completa si degrada verso una condizione di intermittenza. Da sinistra in alto, in senso orario: $R_c = 100, 400, 600, 800$.

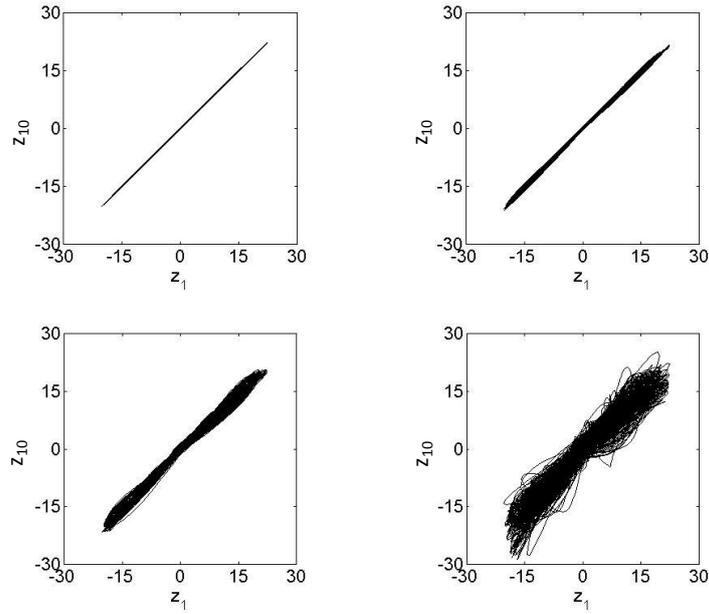


Figura 4.26 - Diagramma di correlazione relativo al segnale $z_i(t)$ tra i circuiti numero 1 e numero 10 all'aumentare della resistenza di accoppiamento R_c per un anello di $N = 20$ circuiti memresistivi, con condizioni iniziali scelte in modo casuale. Lo stato di sincronizzazione completa si degrada verso una condizione di intermittenza. Da sinistra in alto, in senso orario: $R_c = 100, 300, 400, 510$.

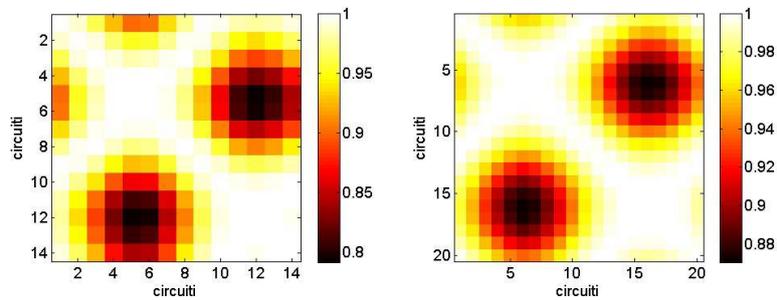


Figura 4.27 - Matrice di correlazione dei segnali z_i per $N = 14$ e $R_c = 800$ (a sinistra), e per $N = 20$ e $R_c = 510$ (a sinistra).

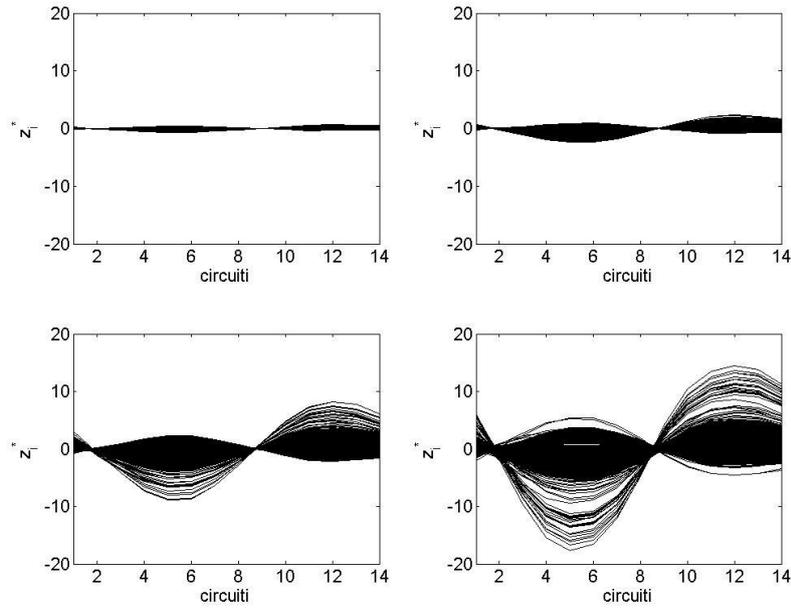


Figura 4.28 - Sezioni di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$ calcolate rispetto ai tempi in cui $x_1(t)$ passa per 0^+ , mostranti l'evoluzione dell'onda stazionaria caotica presente come struttura fine rispetto alla dinamica globale media del sistema, al variare della resistenza di accoppiamento R_c per un anello di $N=14$ circuiti con condizioni iniziali random. Da sinistra in alto, in senso orario: $R_c = 250, 400, 600, 800$.

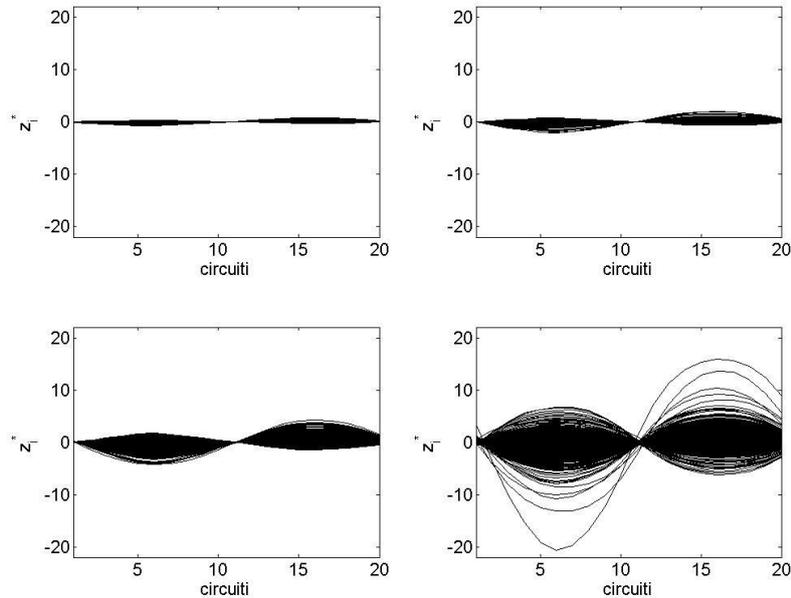


Figura 4.29 - Sezioni di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$ calcolate rispetto ai tempi in cui $x_1(t)$ passa per 0^+ , mostranti l'evoluzione dell'onda stazionaria caotica presente come struttura fine rispetto alla dinamica globale media del sistema, al variare della resistenza di accoppiamento R_c per un anello di $N=20$ circuiti con condizioni iniziali random. Da sinistra in alto, in senso orario: $R_c = 200, 300, 400, 510$.

Anche in questa tipologia di simulazioni, inoltre, all'aumentare di R_c si assiste, ad un certo punto, ad una transizione ad una dinamica periodica sincronizzata. In Fig. 4.30 è mostrato l'andamento dell'elongazione massima dell'onda stazionaria caotica, in funzione del valore assunto dalla resistenza di accoppiamento, per entrambe le dimensioni dell'anello investigate. Si nota come la transizione ad una dinamica periodica è preceduta, anche nei casi qui studiati, ad un incremento dell'ampiezza dell'onda z_i^* . La transizione, inoltre, avviene prima per l'anello più grande.

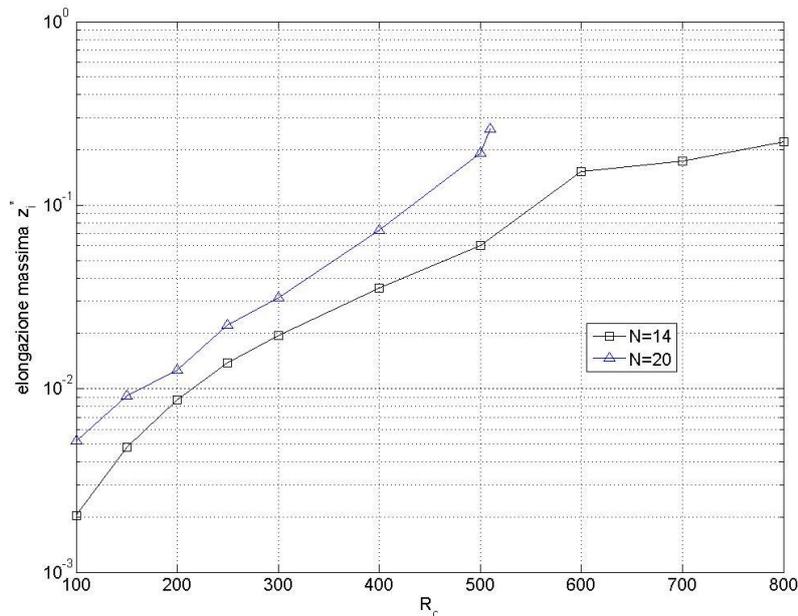


Figura 4.30 – Andamento dell'elongazione massima dell'onda stazionaria z_i^* in funzione della resistenza di accoppiamento R_c nei casi di $N=14$ e $N=20$, partendo da condizioni iniziali casuali su tutti i circuiti dell'anello.

Ciò che differenzia la dinamica che si sviluppa partendo da condizioni iniziali random rispetto alle condizioni iniziali utilizzate nella sezione 4.2 è l'emergenza, all'interno del range di valori di R_c per cui si ha sincronizzazione periodica, di onde periodiche che si propagano lungo l'anello. Tali onde, che si originano per una differenza di fase costante tra i diversi oscillatori lungo l'anello, possono propagarsi sia in verso orario che antiorario. Inoltre, mentre nel caso $N=10$ sono state rilevate solamente lunghezze d'onda pari a $\lambda = N$ (Fig. 4.31), per $N=10$ sono emerse anche onde con $\lambda = N/2$ (Fig. 4.32)

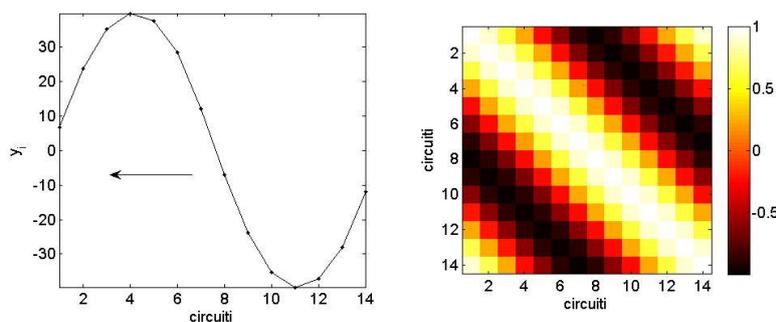


Figura 4.31 – Onda progressiva pseudo-sinusoidale di lunghezza d'onda $\lambda = N$ emergente sull'anello composto da $N=14$ circuiti, per $R_c = 1000$ (condizioni iniziali random).

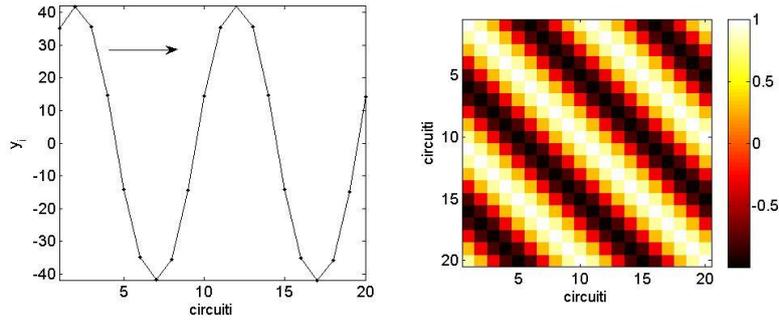


Figura 4.32 – Onda progressiva pseudo-sinusoidale di lunghezza d’onda $\lambda = N/2$ emergente sull’anello composto da $N=204$ circuiti, per $R_c = 3000$ (condizioni iniziali random).

La situazione di sincronizzazione globale periodica, con l’emergenza di onde progressive per alcuni valori della resistenza di accoppiamento, rimane qualitativamente invariato sino a $R_c = 50000$. Da tale valore in poi, sull’anello compaiono circuiti che oscillano in modo caotico (Figure 4.33 e 4.34), perturbando la dinamica globale complessiva.

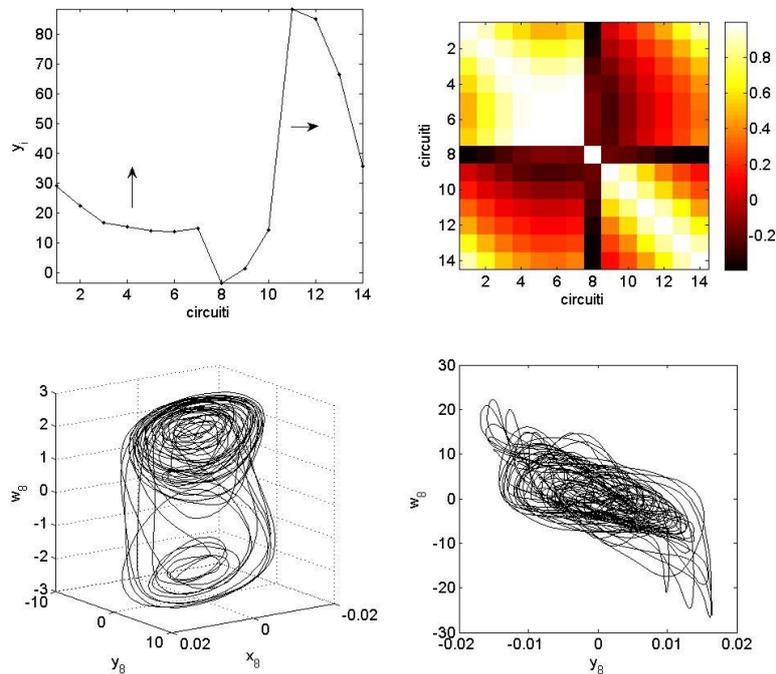


Figura 4.33 – Dinamica globale risultante su un anello di $N=14$ circuiti come effetto dalla presenza di un circuito oscillante in modo caotico con oscillazioni a piccola ampiezza rispetto al resto dei circuiti, che presentano una dinamica pseudo-sinusoidale. Le proiezioni dell’attrattore corrispondente sono mostrate nei riquadri in basso. Come evidente dalla matrice di correlazione riportata a destra, rispetto al nodo caotico si hanno, da una parte, una perturbazione che si propaga verso destra, e dall’altra dei circuiti che si muovono in gruppo praticamente sincronizzati (condizioni iniziali random, $R_c=50000$).

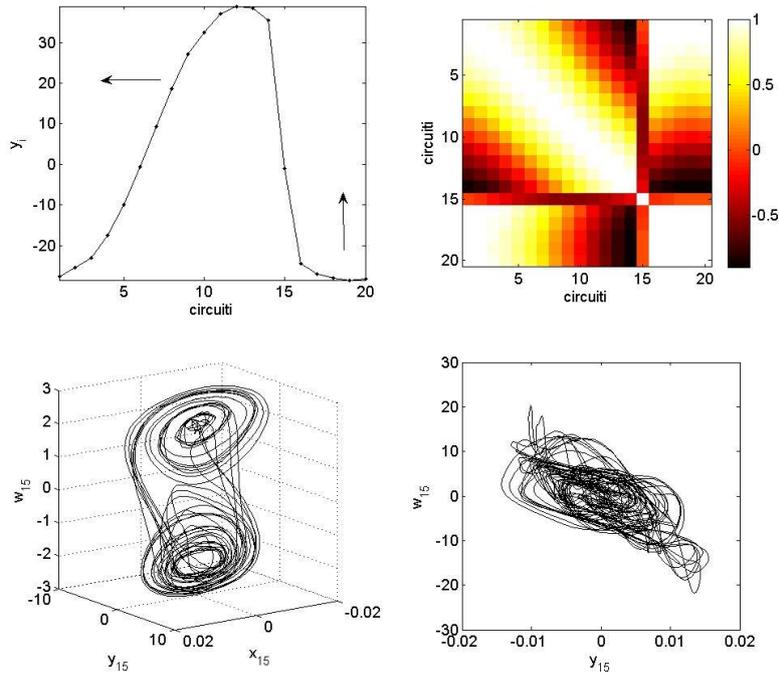


Figura 4.34 – Situazione analoga a quella di fig. 4.32, qui mostrata per un anello di $N=20$ circuiti memresistivi (condizioni iniziali random, $R_c = 50000$).

Analogamente a quanto fatto per costruire la Fig. 4.21, uno schema riassuntivo della dinamica complessiva sin qui descritta è stato ottenuto riportando in un unico diagramma i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti dell'anello al variare della resistenza di accoppiamento R_c . Le Figure 4.35 e 4.36 mostrano i risultati ottenuti per $N=14$ e $N=20$ rispettivamente. Le due figure sono sostanzialmente simili tra loro, a parte i valori soglia di R_c oltre i quali si ha il cambiamento di regime dinamico.

Rispetto alla Fig. 4.21, però, si nota una diversa struttura nell'intervallo di accoppiamenti a cui corrisponde una dinamica periodica. Non si ha, infatti, nei diagrammi ora ottenuti, lo sparpagliamento di punti dovuto alla presenza di nodi oscillanti su piccole ampiezze che caratterizza la Fig. 4.21. Si notano, invece, due diversi rami, che corrispondono, quello più in alto, alle situazioni con onde progressive lungo l'anello, quello più in basso, al caso di sincronizzazione. Infatti, come mostrato dalle Figure 4.37-4.40, quando i segnali si organizzano facendo emergere un'onda progressiva, le ampiezze delle singole oscillazioni sono un po' più grandi rispetto al caso di sincronizzazione.

Inoltre, quando i due rami si uniscono, da quel punto in poi compaiono i nodi con oscillazioni caotiche che perturbano il comportamento globale del sistema.

Per ulteriormente caratterizzare il quadro descritto, nelle Figure 4.41 e 4.42 sono riportati gli spettrogrammi, ottenuti considerando la media tra gli spettri di tutti i circuiti, dei segnali utilizzati per tracciare i diagrammi di Fig. 4.35 e 4.36.

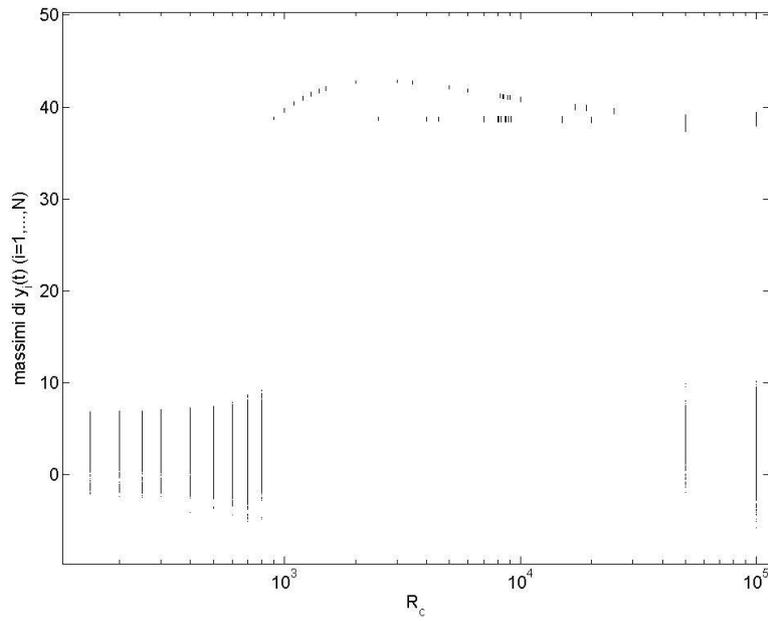


Figura 4.35 - Diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c nel caso di $N=14$ e per condizioni iniziali random.

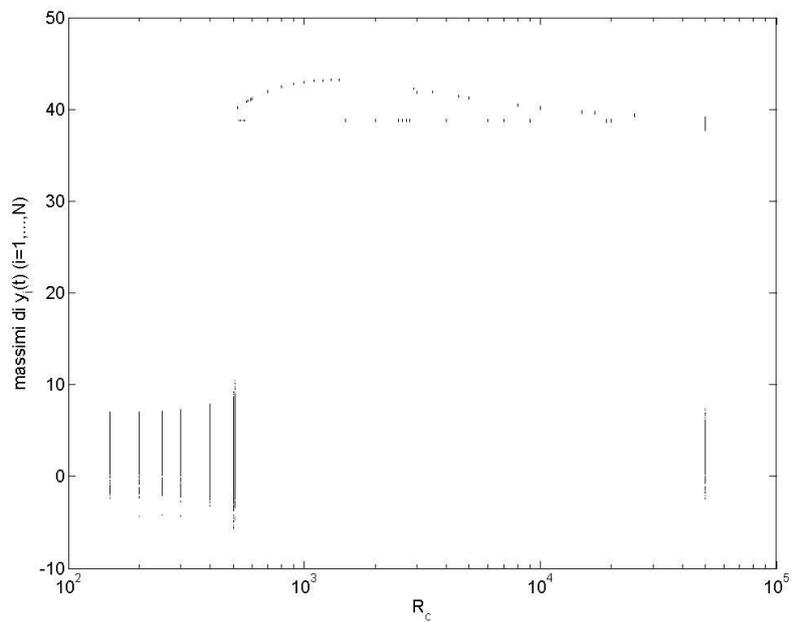


Figura 4.36 - Diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c nel caso di $N=20$ e per condizioni iniziali random.

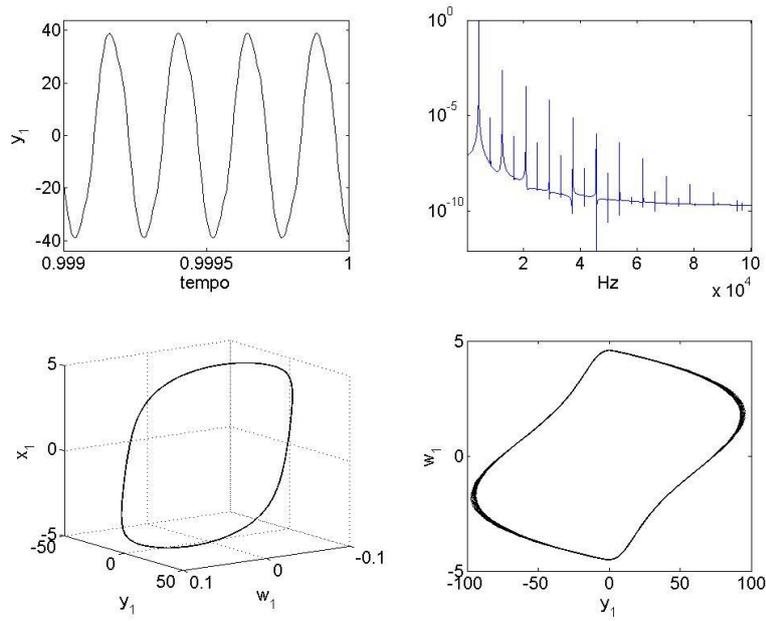


Figura 4.37 – Dinamica del circuito 1 nel caso di $N=14$ e $R_c=2500$. Il comportamento globale dell'anello, che parte da condizioni iniziali random, risulta sincronizzato. La figura riporta, da sinistra in alto, l'andamento del segnale y , il relativo spettro ottenuto tramite FFT, e le proiezioni dell'attrattore.

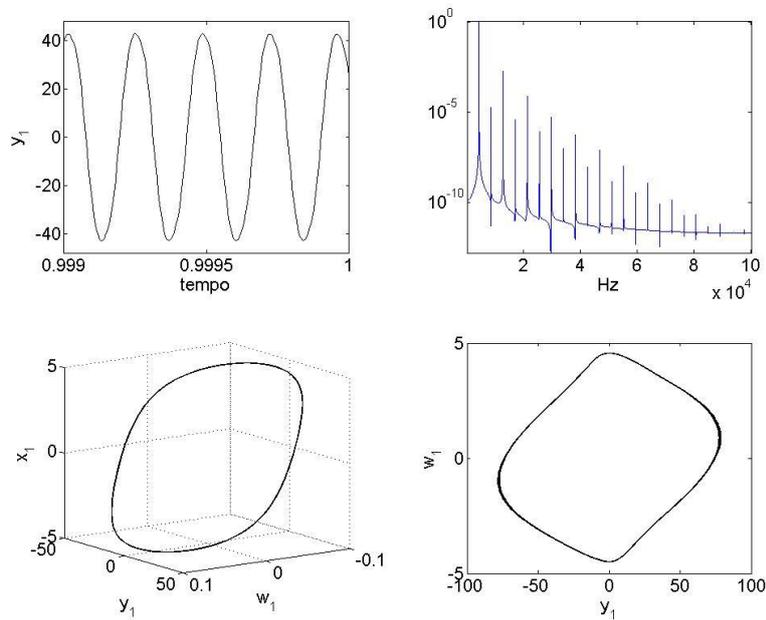


Figura 4.38 – Dinamica del circuito 1 nel caso di $N=14$ e $R_c=3000$. Il comportamento globale del sistema, che parte da condizioni iniziali random, risulta caratterizzato dalla presenza di un'onda progressiva che si propaga lungo l'anello. La figura riporta, da sinistra in alto, l'andamento del segnale y , il relativo spettro ottenuto tramite FFT, e le proiezioni dell'attrattore.

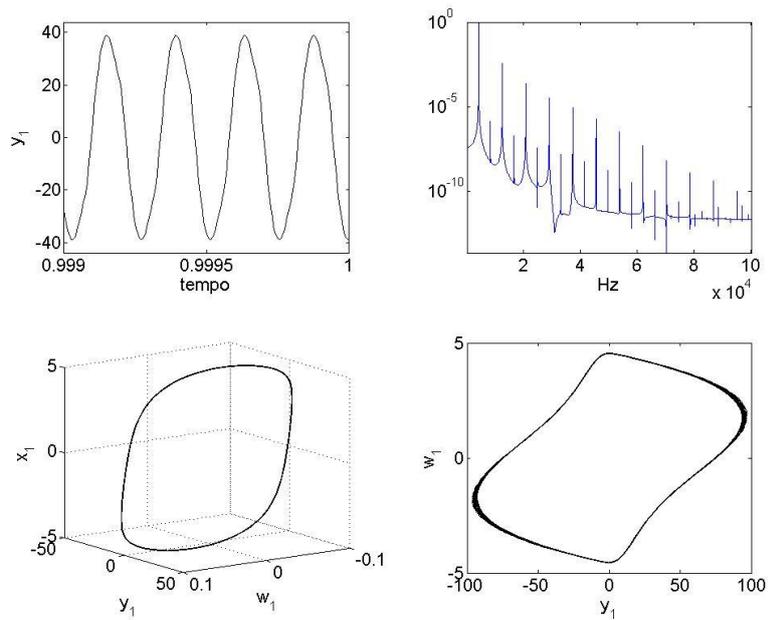


Figura 4.39 – Dinamica del circuito 1 nel caso di $N=20$ e $R_c=1500$. Il comportamento globale dell'anello, che parte da condizioni iniziali random, risulta sincronizzato. La figura riporta, da sinistra in alto, l'andamento del segnale y , il relativo spettro ottenuto tramite FFT, e le proiezioni dell'attrattore.

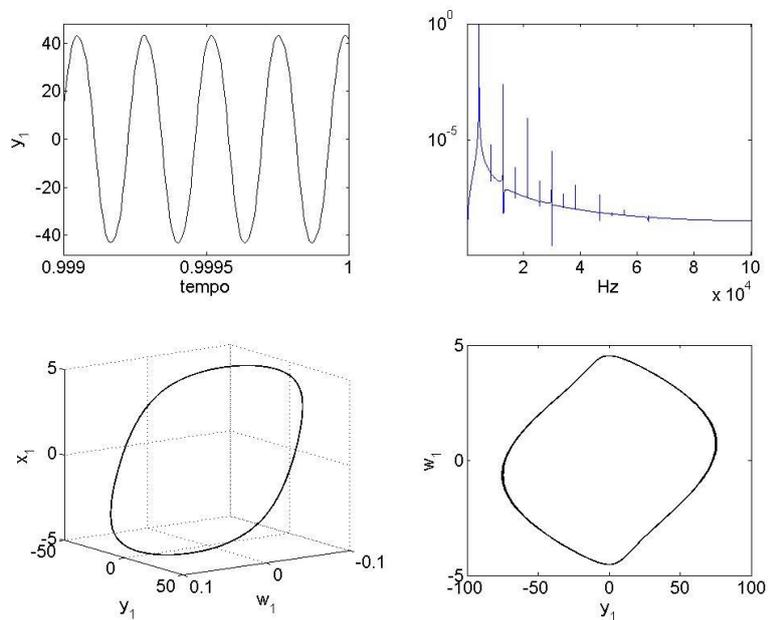


Figura 4.40 – Dinamica del circuito 1 nel caso di $N=20$ e $R_c=1400$. Il comportamento globale del sistema, che parte da condizioni iniziali random, risulta caratterizzato dalla presenza di un'onda progressiva che si propaga lungo l'anello. La figura riporta, da sinistra in alto, l'andamento del segnale y , il relativo spettro ottenuto tramite FFT, e le proiezioni dell'attrattore.

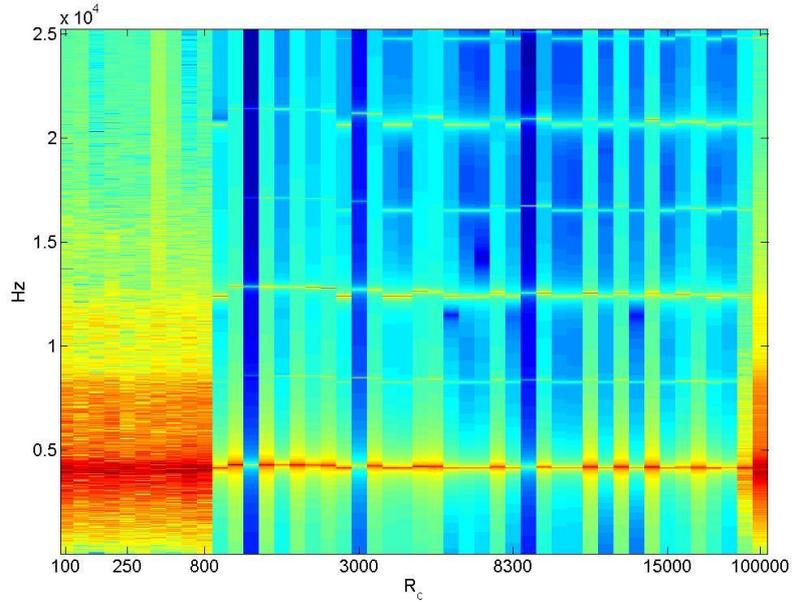


Figura 4.41 – Spettrogramma ottenuto tramite FFT dei segnali usati per ottenere il diagramma di Fig. 4.35 per l’anello di $N=14$ circuiti (l’immagine riporta, per ogni valore di R_c , la media degli spettri calcolati sui segnali dei diversi circuiti). Si nota il piccolo *shift* di frequenza tra la situazione di sincronizzazione globale e il caso in cui emergono onde progressive lungo l’anello.

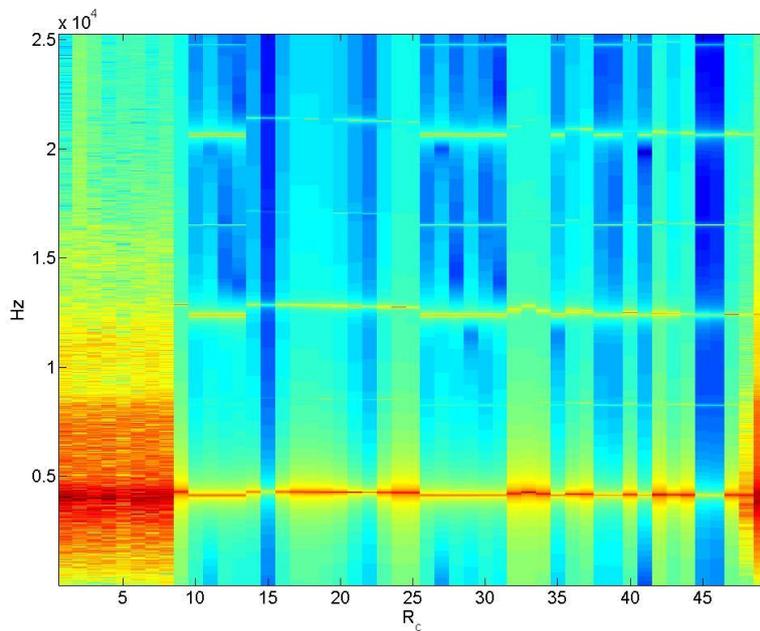


Figura 4.42 – Spettrogramma ottenuto tramite FFT dei segnali usati per ottenere il diagramma di Fig. 4.36 per l’anello di $N=20$ circuiti (l’immagine riporta, per ogni valore di R_c , la media degli spettri calcolati sui segnali dei diversi circuiti). Si nota il piccolo *shift* di frequenza tra la situazione di sincronizzazione globale e il caso in cui emergono onde progressive lungo l’anello.

4.4 Anello diffusivo di circuiti di Chua

Analogamente a quanto fatto nel capitolo 3 per la coppia di circuiti memresistivi, anche nel caso dell'anello di Fig. 4.1 sono state eseguite simulazioni adottando come sistema caotico il circuito di Chua con il diodo caratterizzato dalla non linearità cubica presentato nel capitolo 2.

Le equazioni per un anello di tali circuiti di Chua, banalmente si ottengono dalle (4.1) sostituendo al posto della corrente del memristor i_M l'espressione della corrente del diodo i_D data dalla (2.8), e non considerando, ovviamente, le equazioni per il flusso del campo magnetico:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= -\frac{y_i}{L} - \frac{R_0}{L} x_i \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_i - y_i}{R} + x_i \right) \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y_i - z_i}{R} - i_{Di} + \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{R_c} \right)\end{aligned}\quad (4.3)$$

Le simulazioni sono state condotte, al variare della resistenza di accoppiamento R_c , adottando la stessa tipologia di condizioni iniziali usate per il caso dell'anello di circuiti memresistivi.

Su un anello di $N=10$ circuiti, partendo da condizioni iniziali tutte nulle tranne che sul circuito 5, per il quale si ha $(0, 0.1, 0)$, per alti accoppiamenti si ritrova una dinamica globale di sincronizzazione caotica (Figure 4.43 e 4.44), che passa poi ad una sincronizzazione periodica per $R_c > 1652$ (Fig. 4.45).

A differenza del caso dei circuiti memresistivi, però, lo stato di sincronizzazione caotica non mostra alcuna struttura fine sotto forma di onda stazionaria caotica e si ha, di fatto, sincronizzazione completa (Fig. 4.46).

Si ritrovano, invece, anche in questo caso, i circuiti oscillanti a piccola ampiezza durante la dinamica globale periodica, con conseguente emergenza di un'onda stazionaria globale (Fig. 4.47). All'aumentare di R_c si assiste al solito passaggio ad una dinamica caotica per i tali circuiti "nodali" (Figure 4.47 e 4.48).

Si riporta in Fig. 4.49 il diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c , che risulta analogo a quello di Fig. 4.21.

Sempre mantenendo condizioni iniziali tutte nulle tranne che per il circuito centrale, sono poi state effettuate, per $R_c = 1000$, simulazioni al variare di N riscontrando, analogamente al caso dei circuiti con memristor, il passaggio da sincronizzazione caotica a sincronizzazione periodica. Nel caso dei circuiti di Chua la transizione avviene ad $N = 13$. Non è comunque emersa alcuna struttura degli stati di sincronizzazione.

Infine, sono state eseguite simulazioni per un anello di $N = 14$ circuiti di Chua con condizioni iniziali random. In Fig. 4.50 si riporta il diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c , che risulta del tutto analogo a quello di Fig. 4.35. In effetti si ritrova anche per i circuiti di Chua una fenomenologia analoga a quella dei circuiti memresistivi, con la differenza, però, che le situazioni di sincronizzazione caotica sono, a tutti gli effetti, stati di sincronizzazione completa.

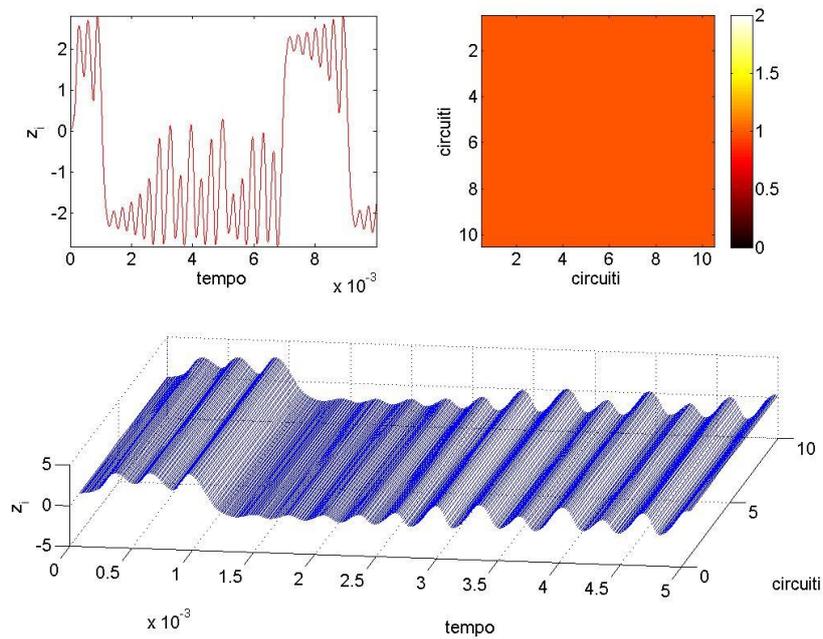


Figura 4.43 – Stato di sincronizzazione caotica per un anello di $N=10$ circuiti di Chua accoppiati come in Fig. 4.1 per $R_c = 100$ e con condizioni iniziali tutte nulle tranne che sul circuito numero 5.

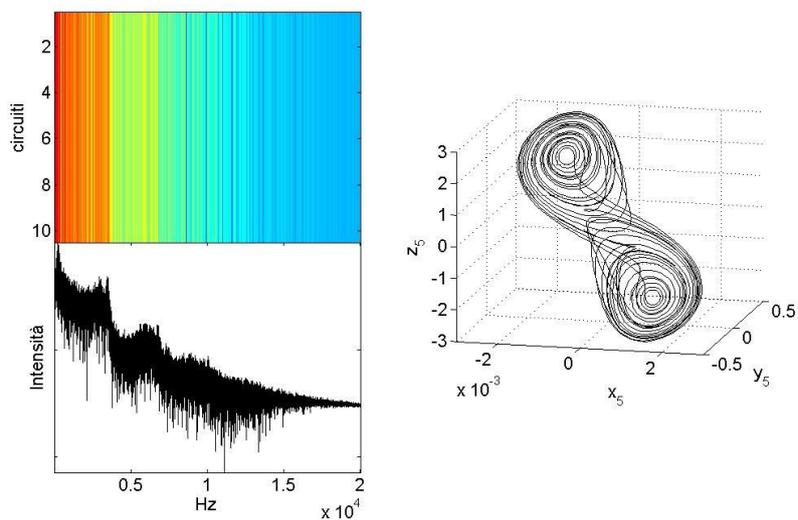


Figura 4.44 – Ulteriore caratterizzazione della situazione di sincronizzazione caotica riportata in Fig. 4.41. A sinistra: spettrogramma dei segnali $z_i(t)$ per tutti gli N circuiti, e relativo spettro medio (allo spettrogramma è stato applicato uno stretching logaritmico per evidenziarne la struttura, mentre l'intensità dello spettro medio è riportata in scala logaritmica). A destra: attrattore del circuito numero 5.

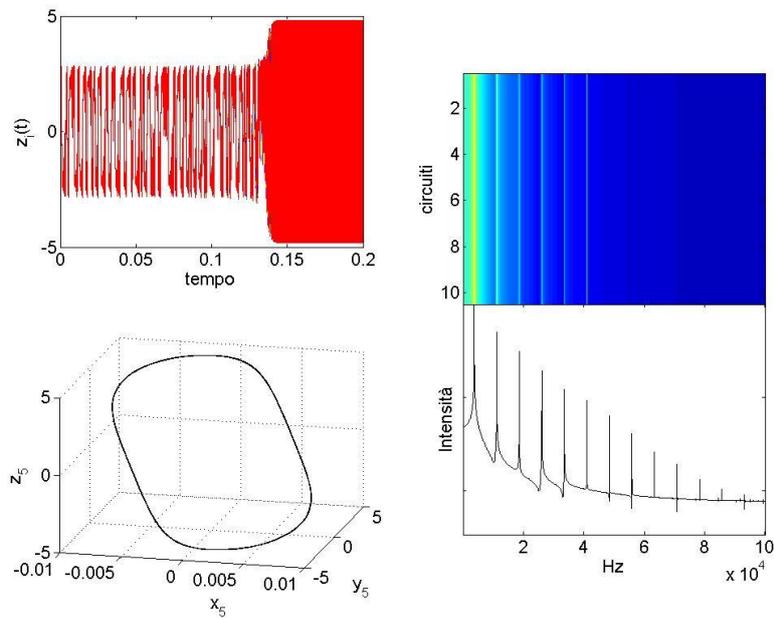


Figura 4.45 – Transizione da dinamica caotica a dinamica periodica per $R_c = 1652$. Da sinistra in alto la figura riporta, in senso orario, l'andamento dei segnali $z_i(t)$, spettrogramma del segnali $z_i(t)$ per tutti gli N circuiti e relativo spettro medio, attrattore del circuito numero 5.

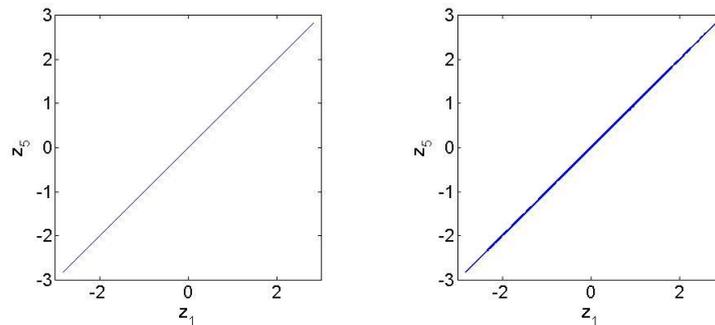


Figura 4.46 – Diagrammi di correlazione per $R_c = 100$ (a sinistra) e $R_c = 1651$ (a destra).

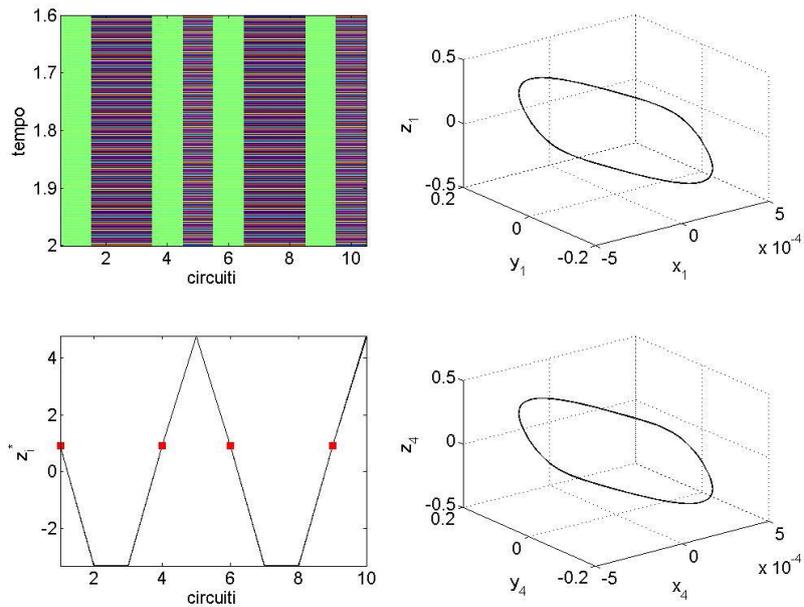


Figura 4.47 – Onda stazionaria emergente sull’anello come conseguenza della presenza di nodi oscillanti a piccola ampiezza con una dinamica pseudo-sinusoidale (gli attrattori dei nodi corrispondenti sono riportati nei riquadri di destra). La figura mostra il diagramma spazio-temporale dei segnali $z_i(t)$ e la corrispondente sezione di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$. La situazione raffigurata corrisponde ad una resistenza di accoppiamento $R_c=13000$.

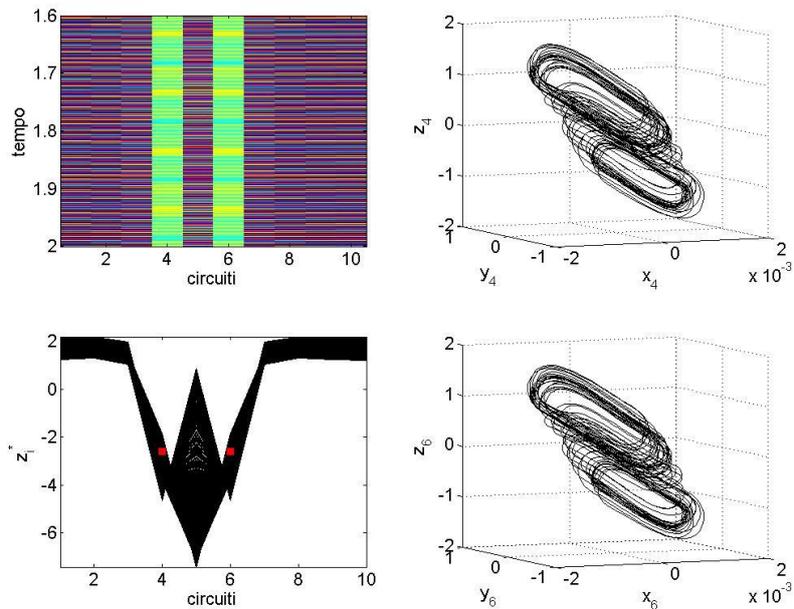


Figura 4.48 – La figura mostra il diagramma spazio-temporale dei segnali $z_i(t)$ e la corrispondente sezione di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$ per $R_c=25000$. I nodi a piccola ampiezza mostrano una dinamica più complicata rispetto al caso di Fig. 4.45.

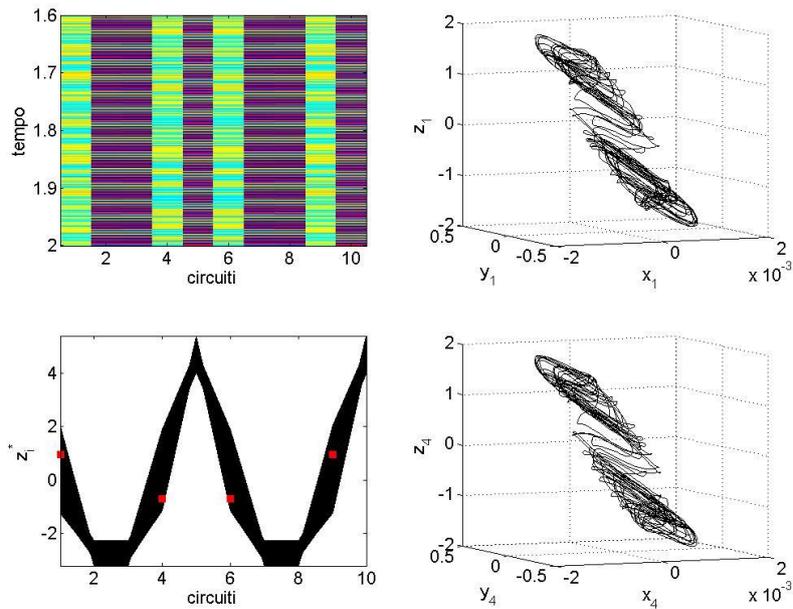


Figura 4.49 – Diagramma spazio-temporale dei segnali $z_i(t)$ e corrispondente sezione di Poincaré della grandezza $z_i^*(t)$ per $R_c=30000$. I nodi a piccola ampiezza mostrano una dinamica chiaramente caotica con attrattori di tipo doppio scroll.

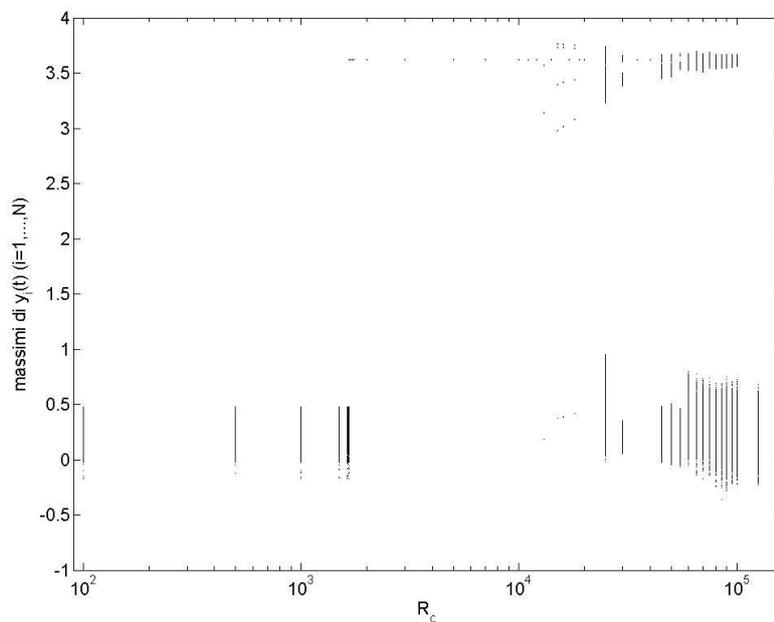


Figura 4.50 - Diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c nel caso di un anello do $N=10$ circuiti di Chua, per condizioni iniziali tutte nulle tranne che sul circuito numero 5.

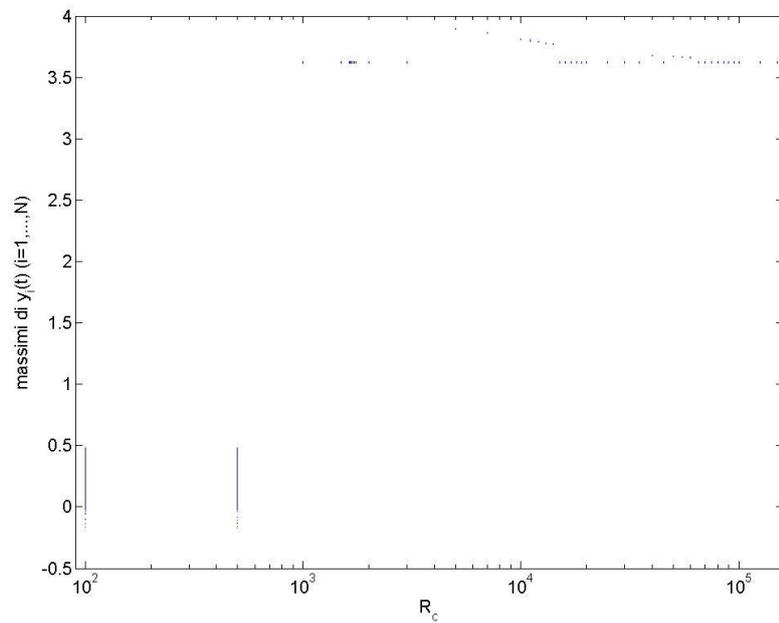


Figura 4.51 - Diagramma ottenuto riportando i massimi dei segnali y_i per tutti i circuiti al variare della resistenza di accoppiamento R_c nel caso di un anello di $N=14$ circuiti di Chua, per condizioni iniziali random. Si notino, all'interno della dinamica periodica, i valori più alti corrispondenti all'emergenza di onde progressive lungo l'anello.

5. Circuiti collegati in modo sequenziale

In questo capitolo vengono presentati i risultati delle simulazioni numeriche sulla dinamica spontanea di un sistema costituito da N oscillatori caotici identici, mutuamente accoppiati tramite un resistore e disposti su una configurazione topologica ad anello. Lo schema di collegamento adottato corrisponde, in pratica, ad una sequenza di circuiti messi in fila uno dietro l'altro e, a differenza dei casi discussi nelle sezioni precedenti caratterizzati da un accoppiamento diffusivo, non è simmetrico rispetto alla direzione individuata dalla sequenza di circuiti che viene a determinarsi. Ogni circuito, infatti, è connesso al precedente e al successivo in due suoi punti diversi e non equivalenti tra loro. Le simulazioni sono state eseguite considerando come oscillatore caotico sia un circuito di Chua memresistivo, sia un circuito di Chua ordinario il cui diodo è caratterizzato da una non-linearità cubica. La dinamica globale dell'anello così formato, caratterizzata da una transizione tra ordine e caos al diminuire dell'intensità dell'accoppiamento e dall'emergenza di pattern complessi a ridosso di tale transizione, si è rivelata sostanzialmente analoga per entrambi i circuiti investigati.

5.1 Descrizione del modello

Nel proseguire l'indagine sulla dinamica spontanea di gruppi di oscillatori caotici mutuamente interagenti, una variante rispetto ai casi sin qui studiati è stata introdotta modificando la modalità di accoppiamento secondo quanto riportato in Fig. 5.1. In questo nuovo schema i circuiti vengono sempre collegati in modo bidirezionale tramite un resistore R_c ma, a differenza dell'accoppiamento diffusivo considerato in precedenza, la configurazione complessiva non risulta simmetrica rispetto alla sequenza dei circuiti.

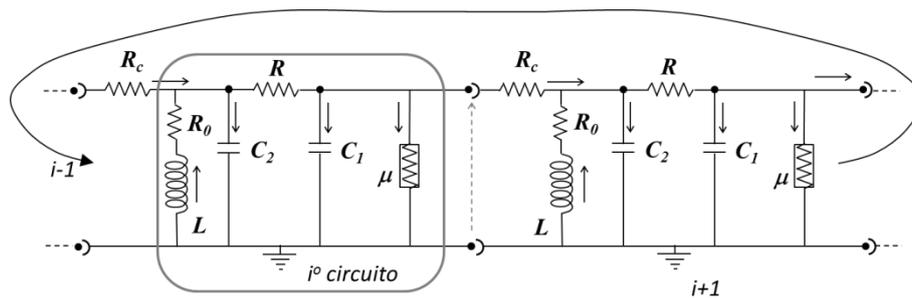


Figura 5.1 – Accoppiamento di una successione di oscillatori caotici collegati tramite un resistore R_c a formare un anello. L'elemento μ rappresenta il componente non lineare che, nel caso studiato, può essere un diodo di Chua o un memristor.

In effetti, il collegamento in Fig. 5.1 ricorda lo schema elettrico di una linea di trasmissione formata però, in questo caso, da una successione di circuiti caotici.

Dalle leggi di Kirchhoff si ricavano le seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{y_1}{L} - \frac{R_0}{L} x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_1 - y_1}{R} + x_1 + \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-i_{\mu 1} - \frac{z_1 - y_1}{R} - \frac{z_1 - y_2}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, 1^\circ \text{ circ.} \quad (5.1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{y_i}{L} - \frac{R_0}{L} x_i \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_i - y_i}{R} + x_i + \frac{z_{i-1} - y_i}{R_c} \right) \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-i_{\mu i} - \frac{z_i - y_i}{R} - \frac{z_i - y_{i+1}}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, i^\circ \text{ circ. } (1 < i < N) \quad (5.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_N}{dt} &= -\frac{y_N}{L} - \frac{R_0}{L} x_N \\ \frac{dy_N}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_N - y_N}{R} + x_N + \frac{z_{N-1} - y_N}{R_c} \right) \\ \frac{dz_N}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-i_{\mu N} - \frac{z_N - y_N}{R} - \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, N^\circ \text{ circ.} \quad (5.1.3)$$

dove L , R_0 , C_2 , C_1 ed R rappresentano i parametri circuitali del singolo circuito e il vettore di stato (x_i, y_i, z_i) indica, rispettivamente, la corrente attraverso l'induttanza L e le tensioni attraverso le due capacità C_2 e C_1 . Il termine i_μ rappresenta, invece, la corrente attraverso l'elemento non lineare μ , ed è funzione non lineare della tensione ai capi dell'elemento stesso, ovvero $i_\mu = f(z)$.

Si noti che sono le equazioni (5.1.1) e (5.1.3) che specificano la geometria ad anello del sistema.

5.2 Risultati numerici 1: circuito di Chua memresistivo

Nel caso in cui il singolo sistema caotico dell'anello di Fig. 1 sia il circuito di Chua memresistivo già impiegato per gli studi dei Capitoli precedenti, la corrente i_μ assume la solita forma:

$$i_\mu = (\alpha + 3 \cdot \beta w^2) \cdot z \quad (5.2)$$

con $\alpha = -0.667 \cdot 10^{-3}$ e $\beta = 0.029 \cdot 10^{-3}$, in cui w rappresenta il flusso del campo magnetico, ed è legato al potenziale del memristor z dalla relazione $\frac{dw}{dt} = z$.

Le equazioni (5.1) diventano dunque, in questo caso:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{y_1}{L} - \frac{R_0}{L} x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_1 - y_1}{R} + x_1 + \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-(\alpha + 3 \cdot \beta w_1^2) \cdot z_1 - \frac{z_1 - y_1}{R} - \frac{z_1 - y_2}{R_c} \right) \\ \frac{dw_1}{dt} &= \frac{z_1}{\zeta} \end{aligned} \right\}, 1^\circ \text{ circ.} \quad (5.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{y_i}{L} - \frac{R_0}{L} x_i \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_i - y_i}{R} + x_1 + \frac{z_{i-1} - y_i}{R_c} \right) \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-(\alpha + 3 \cdot \beta w_i^2) \cdot z_i - \frac{z_i - y_i}{R} - \frac{z_i - y_{i+1}}{R_c} \right) \\ \frac{dw_i}{dt} &= \frac{z_i}{\zeta} \end{aligned} \right\}, i^\circ \text{ circ. } (1 < i < N) \quad (5.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_N}{dt} &= -\frac{y_N}{L} - \frac{R_0}{L} x_N \\ \frac{dy_N}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_N - y_N}{R} + x_1 + \frac{z_{N-1} - y_N}{R_c} \right) \\ \frac{dz_N}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-(\alpha + 3 \cdot \beta w_N^2) \cdot z_N - \frac{z_N - y_N}{R} - \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \\ \frac{dw_N}{dt} &= \frac{z_N}{\zeta} \end{aligned} \right\}, N^\circ \text{ circ} \quad (5.3.3)$$

I parametri circuitali assumono i soliti valori: $R_0 = 0 \Omega$, $L = 18 \text{ mH}$, $C_2 = 68 \text{ nF}$, $C_1 = 6.8 \text{ nF}$, $R = 2000 \Omega$; mentre la costante $\zeta = 82000 \cdot 47 \cdot 10^9$ è il solito fattore di scala introdotto per esigenze di stabilità numerica.

La dinamica spontanea di un sistema costituito da $N = 200$ circuiti di Chua memresistivi, collegati ad anello secondo quanto riportato in Fig. 5.1, è stata quindi investigata per mezzo di accurate simulazioni numeriche del set di equazioni (3). Si è adoperata la funzione ODE45 di Matlab®, impostando sia per la tolleranza relativa che per la tolleranza assoluta un valore pari a 10^{-7} .

Le condizioni iniziali su x , z e w sono nulle per tutti i circuiti, mentre y presenta un profilo gaussiano di ampiezza 0.1 e deviazione standard $\sigma = \frac{N}{100}$, centrato sul circuito in posizione $\frac{N}{2} = 100$ (Fig. 5.2):

$$\begin{aligned} x_i(0) &= 0, \\ y_i(0) &= 0.1 e^{-\frac{(i-N/2)^2}{2\sigma^2}}, \\ z_i(0) &= 0, \\ w_i(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

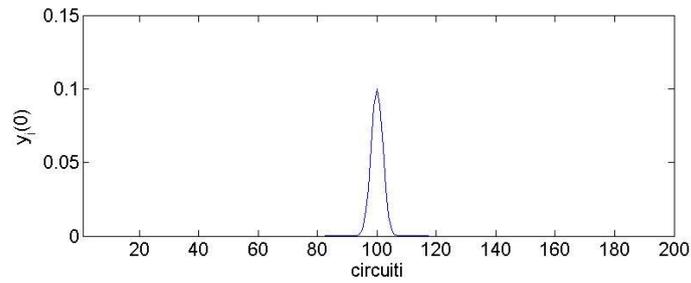


Figura 5.2 – Profilo gaussiano del segnale $y_i(0)$. Le altre condizioni iniziali sono tutte nulle per tutti i circuiti.

A parità di condizioni iniziali, le diverse simulazioni sono state condotte su un intervallo temporale $t \in [0, 5]$ s, al variare della resistenza di accoppiamento tra i circuiti nel range $10^2 \leq R_c \leq 10^5$. In effetti, ci si aspetta che per alti valori di R_c (piccolo accoppiamento) i diversi circuiti risultino, di fatto, disaccoppiati, procedendo indipendentemente ognuno per la propria dinamica in modo scorrelato. Invece, per piccoli valori di R_c (grande accoppiamento), i circuiti interagiscono in modo significativo influenzandosi a vicenda ed è plausibile aspettarsi dinamiche globali correlate. Una descrizione riassuntiva dei risultati ottenuti dall'insieme delle simulazioni così effettuate la si può ottenere dalla Fig. 5.3, nella quale sono riportati, per i diversi valori utilizzati di R_c , i massimi locali dei segnali $w_i(t)$ di tutti gli N circuiti dell'anello. In altre parole, per un dato valore di R_c in ascissa, sono stati riportati in ordinata i massimi locali di $w_i(t)$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Inoltre, per evitare eventuali andamenti transitori, nel calcolo dei massimi è stato considerato solamente l'ultima metà del segnale. La “mappa di biforcazione” così ottenuta mostra distintamente un passaggio, al crescere di R_c , da una dinamica ordinata ad una dinamica caotica, con una transizione piuttosto netta tra queste due situazioni per un valore critico della resistenza $10050 < R_c^* < 10100$.

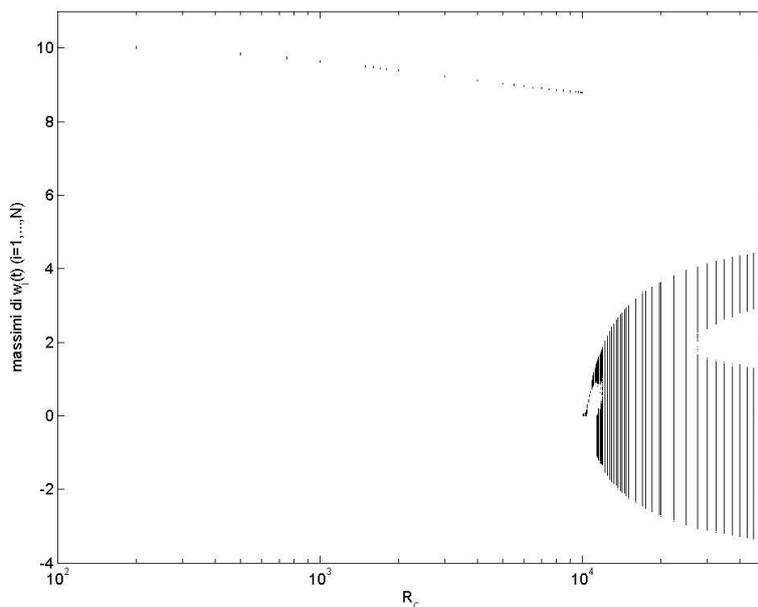


Figura 5.3 – Diagramma ottenuto riportando i massimi locali dei segnali $w_i(t)$ per tutti i circuiti dell'anello ($1 \leq i \leq N$). È evidente una transizione di fase da una dinamica ordinata ad una caotica.

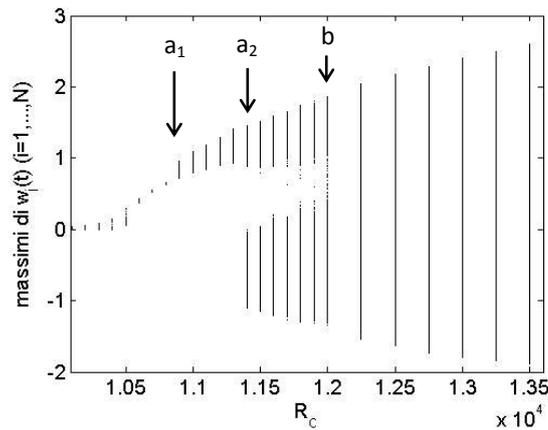


Figure 5.4 – Dettaglio di Fig. 5.3 relativo all’instaurarsi di una dinamica caotica dei circuiti dell’anello dopo la transizione di fase. Tra a_1 e b si ha un attrattore tipo spirale di Chua nel piano (z, w) . Tra a_2 e b circuiti diversi si muovono su spirali disposte a diverse quote rispetto a w . Oltre b si ha un attrattore tipo doppio scroll nel piano (z, w) . Infine, i punti prima di a_1 corrispondono a punti fissi per l’anello, con i circuiti che risultano, di fatto, spenti.

Inoltre, i punti in Fig. 5.3 presentano un forte grado di coerenza nella loro distribuzione, il che indica chiaramente che le diverse dinamiche circuitali hanno un alto livello di coordinazione tra loro. Di fatto, tutti i circuiti si muovono sostanzialmente sullo stesso attrattore per la maggior parte dei valori di R_c investigati.

Se da un lato questo aspetto può non essere del tutto sorprendente, per via del fatto che i sistemi in esame sono identici tra loro e, se considerati singolarmente, è presumibile che evolvano su uno stesso attrattore, dall’altro non è affatto scontato a priori che tale concordanza di comportamento sia mantenuta anche quando i circuiti vengono accoppiati. Oltre tutto, come si è visto nel capitolo 2, il circuito di Chua memresistivo studiato presenta una sensibilità tale alle condizioni iniziali che, anche mantenendo invariati i parametri circuitali, la sua evoluzione può aver luogo su attrattori diversi (come evidenziato nel capitolo 2, il circuito di Chua con un diodo caratterizzato da una non linearità cubica non ha invece evidenziato, nell’ambito delle simulazioni effettuate, questo tipo di comportamento). Tenuto conto di ciò, il riscontrato “accordo” tra i circuiti nel ritrovarsi sullo stesso attrattore non è ovvio a priori.

Più in dettaglio, per $R_c < R_c^*$ tutti i circuiti presentano oscillazioni pseudo-sinusoidali a cui corrispondono cicli limite di periodo 1 nello spazio della fasi. In Fig. 5.5 è riportato l’andamento di $w_{50}(t)$ con il relativo spettrogramma e le proiezioni della traiettoria nello spazio delle fasi per $R_c = 1000$. Gli altri circuiti hanno una dinamica analoga, e la situazione resta qualitativamente invariata in tutto l’intervallo $100 \leq R_c \leq 10050$.

Quando la resistenza di accoppiamento supera il valore critico R_c^* , invece, si ha un repentino cambio di regime che porta rapidamente ad una dinamica caotica (si veda la Fig. 5.4 per un dettaglio della mappa di biforcazione subito dopo tale transizione). Per $10100 \leq R_c \leq 10800$ i circuiti sono di fatto spenti, e l’anello si trova su un punto fisso caratterizzato da $x_i = 0$, $y_i = 0$, $z_i = 0$ per ogni $1 \leq i \leq N$, mentre w_i assume

valori costanti, eventualmente diversi sui diversi circuiti (si noti, in effetti, che qualsiasi punto della retta $(0,0,0, \varphi)$, con $\varphi \in \mathbb{R}$, è una possibile soluzione del singolo circuito dell'anello di Fig. 5.1).

Per $R_c \geq 10900$ i circuiti prendono nuovamente ad oscillare, ma con dinamiche caotiche e attrattori che, nel piano (z, w) , all'aumentare di R_c passano da una tipologia spirale di Chua ad una doppio scroll. Le Figure 5.6 e 5.7 illustrano queste due situazioni per il circuito 50 (gli altri circuiti dell'anello oscillano in modo analogo).

Più in dettaglio, per $10900 \leq R_c < 11400$ tutti i circuiti si muovono su spirali di Chua situate nella zona $w > 0$ (Fig. 5.8a), mentre per $11400 \leq R_c < 12250$ le spirali di Chua sono collocate anche nella zona $w < 0$ (Fig. 5.8b). Infine per $R_c \geq 12250$ tutti i circuiti si muovono sul doppio scroll, i cui lobi risultano dall'unione delle due tipologie di spirale di Chua (Fig. 5.8c). Si comprende, quindi, quale sia il significato dell'andamento della distribuzione dei punti presente nelle Figure 5.3 e 5.4, in particolare dello sdoppiamento che si rileva a partire da $R_c = 11400$. Inoltre, lo scenario appena descritto tornerà utile anche per l'interpretazione dell'evoluzione dei pattern che, a livello globale, emergono sull'anello per valori di R_c immediatamente prossimi alla ripresa della dinamica caotica dopo i punti fissi, e prima che il sistema vada in uno stato di caos spazio-temporale ben sviluppato.

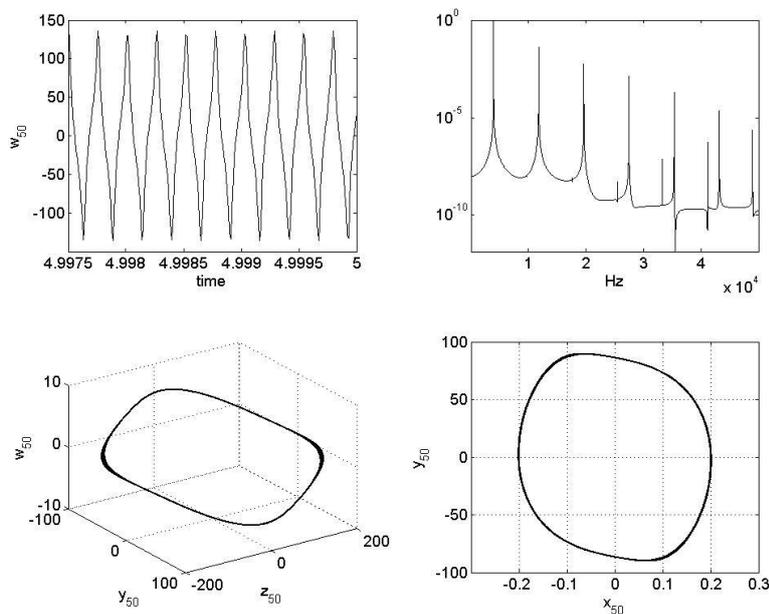


Figura 5.5 – Rappresentazione della dinamica del circuito 50, caratterizzata da oscillazioni periodiche pseudo-sinusoidali, nel caso di una resistenza di accoppiamento $R_c = 1000$. Dall'alto, in senso orario, sono riportati: l'andamento del segnale w ; il relativo spettro, normalizzato rispetto al suo valore massimo, calcolato tramite FFT (Fast Fourier Transform); due proiezioni dell'attrattore, corrispondente ad un ciclo limite. La situazione è sostanzialmente la stessa per gli altri circuiti dell'anello, e rimane qualitativamente analoga per $100 \leq R_c \leq 10050$.

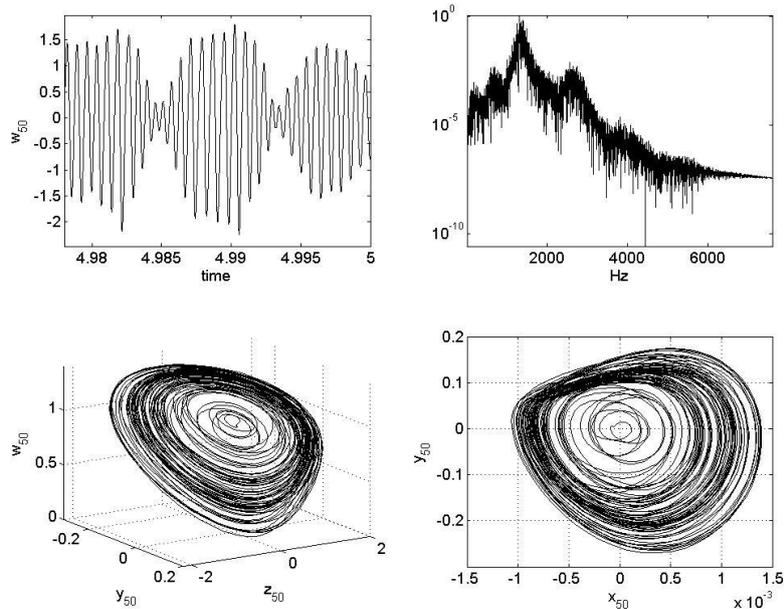


Figura 5.6 - Rappresentazione della dinamica del circuito 50, caratterizzata da oscillazioni caotiche, nel caso di una resistenza di accoppiamento $R_c = 11300$. Dall'alto, in senso orario, sono riportati: l'andamento del segnale w ; il relativo spettro, normalizzato rispetto al suo valore massimo, calcolato tramite FFT (Fast Fourier Transform); due proiezioni dell'attrattore, corrispondenti a delle spirali di Chua. La situazione è sostanzialmente la stessa per gli altri circuiti dell'anello, e rimane qualitativamente analoga per $10900 \leq R_c \leq 11300$.

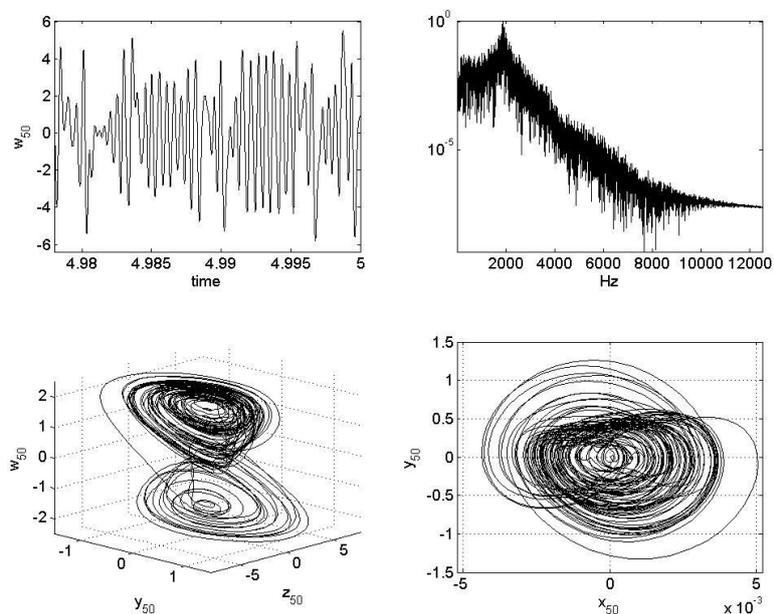


Figura 5.7 - Rappresentazione della dinamica del circuito 50, caratterizzata da oscillazioni caotiche, nel caso di una resistenza di accoppiamento $R_c = 13000$. Dall'alto, in senso orario, sono riportati: l'andamento del segnale w ; il relativo spettro, normalizzato rispetto al suo valore massimo, calcolato tramite FFT (Fast Fourier Transform); due proiezioni dell'attrattore, che è di tipo doppio Scroll. La situazione è sostanzialmente la stessa per gli altri circuiti dell'anello, e rimane qualitativamente invariata per tutti i valori $R_c \geq 12250$ indagati.

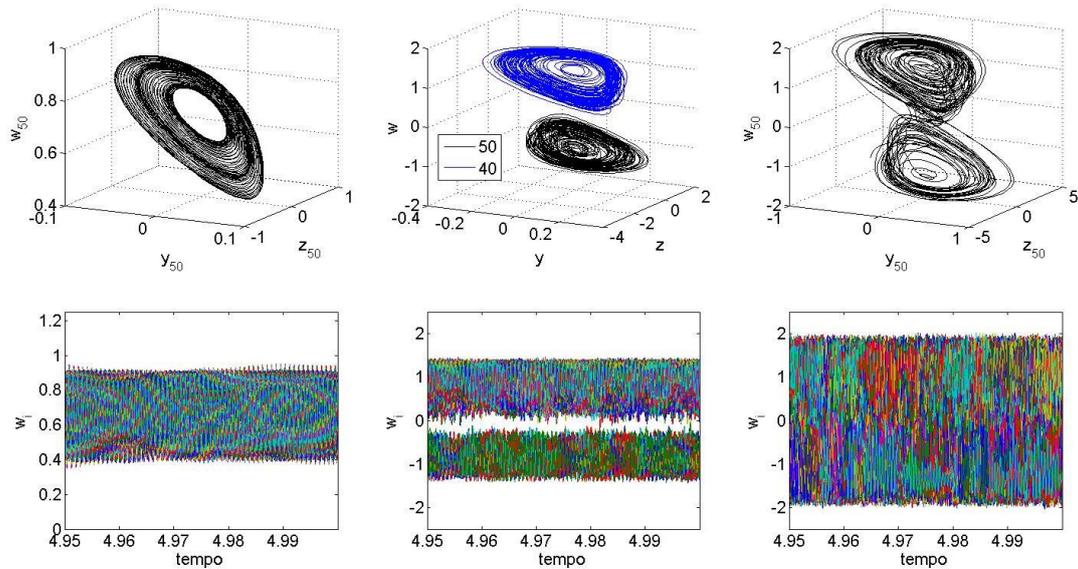


Figure 5.8 – Attrattori (in alto) e corrispondenti segnali $w_i(t)$ (in basso) tracciati per tutti i circuiti dell’anello ($i = 1, \dots, N$) al variare della resistenza di accoppiamento R_c . A sinistra: $R_c = 10900$, i circuiti oscillano tutti su un attrattore di tipo spirale di Chua collocato nella zona $w > 0$, come evidenziato anche dall’insieme dei segnali $w_i(t)$, che formano un’unica fascia. Al centro: $R_c = 11400$, ci sono anche circuiti che evolvono su spirali di Chua posizionate nella zona $w < 0$, e l’insieme dei segnali $w_i(t)$ forma due diverse fasce. A destra: $R_c = 12250$, i circuiti si muovono su attrattori di tipo doppio scroll, formati dall’unione delle due tipologie di spirale, e l’insieme dei segnali $w_i(t)$ appare nuovamente come un’unica fascia ma di ampiezza più grande.

Riassumendo, dunque, per un dato valore di R_c negli intervalli sopra discussi, i diversi circuiti si muovono tutti sulla stessa tipologia di traiettoria nello spazio delle fasi (ciclo limite o attrattore caotico), e in questo senso la loro dinamica risulta accordata. Al variare di R_c , poi, di concerto i circuiti evolvono da una dinamica periodica ad una situazione caotica, con uno scenario di biforcazione da spirale di Chua a doppio scroll che, qualitativamente, ricorda quello del singolo circuito di Chua al variare della resistenza circuitale R . In altre parole, la resistenza di accoppiamento R_c agisce sul sistema costituito da un anello di circuiti memresistivi (Equazioni (5.3)), in modo analogo a quanto fa la resistenza R per il singolo circuito di Chua. È, questo, un fenomeno interessante e in parte anche sorprendente, soprattutto tenendo conto del diverso ruolo che nello schema di Fig. 5.1 hanno i due resistori (R è un parametro del singolo circuito, mentre R_c determina l’intensità dell’accoppiamento tra i circuiti).

Un’ulteriore visualizzazione di questo processo è fornita dalla Fig. 5.9, in cui è riportato lo spettro dei segnali $w_i(t)$ al variare di R_c . L’immagine è ottenuta calcolando, per ogni valore della resistenza di accoppiamento R_c , la media degli spettri normalizzati dei diversi circuiti e rappresenta, dunque, una sorta di “mappa di biforcazione spettrale”, analoga alla Fig. 5.3 (per ogni valore di R_c , gli spettri dei diversi circuiti, ottenuti tramite FFT, risultano sostanzialmente gli stessi). La Fig. 5.9 mostra come l’impronta spettrale dei circuiti dell’anello cambi nel passaggio dalla dinamica ordinata a quella caotica e poi, all’interno del caos, come ulteriormente si modifichi con il cambiare del tipo di attrattore.

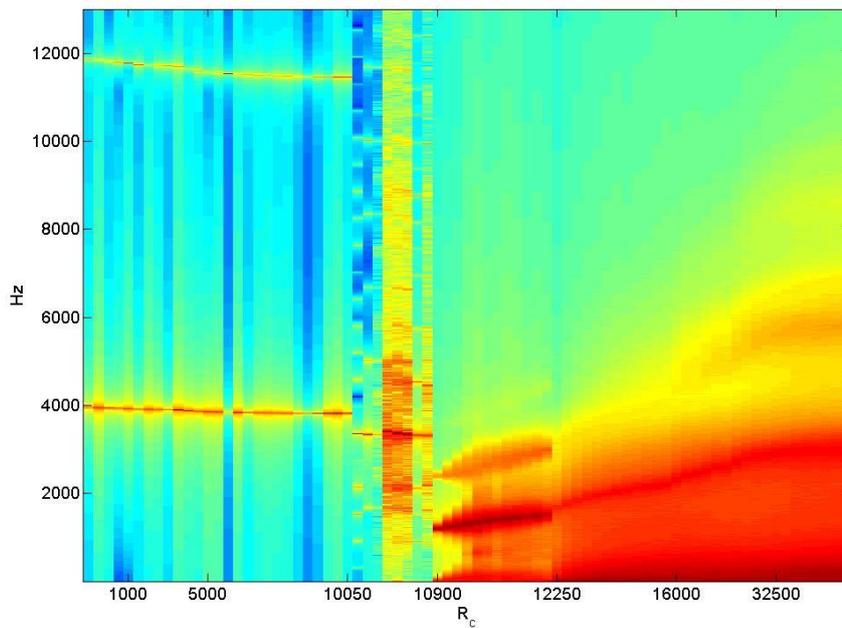


Figura 5.9 – Variazione dello spettro del segnale $w_i(t)$ al variare della resistenza di accoppiamento R_c . Le colonne dell'immagine rappresentano, per un dato valore di R_c , le intensità dello spettro medio dei diversi circuiti dell'anello (calcolato tramite FFT). Per evidenziare i dettagli è stato applicato uno stretching logaritmico. Si noti come la scala delle ascisse non è intervallata in modo omogeneo.

Chiaramente, le due diverse situazioni sopra descritte, di dinamica periodica e di dinamica caotica per i singoli circuiti, corrispondono a due diversi comportamenti globali del sistema, ma differenze emergono anche all'interno di una stessa regione. Infatti, per $R_c < R_c^*$ i circuiti risultano per lo più sincronizzati (sincronizzazione ordinata), ma sono possibili anche onde pseudo-sinusoidali che si propagano lungo l'anello. Nello specifico, per gli accoppiamenti investigati $R_c \leq 2000$ si ha sempre uno stato di sincronizzazione completa. Per $R_c \geq 2000$ e $R_c < R_c^*$, invece, tra gli stati di sincronizzazione si trovano situazioni con onde periodiche che si propagano lungo l'anello, sia in un verso che nell'altro, e con diverse possibili lunghezze d'onda λ . Alcuni esempi di tali dinamiche globali sono mostrati nelle Figure 5.10-5.14 che riportano: il diagramma spazio-temporale del segnale $w(t)$ per gli N circuiti dell'anello; la matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$ costruita calcolando la correlazione lineare tra i segnali $w_i(t)$ e $w_j(t)$ per tutte le coppie (i, j) di circuiti; l'insieme degli spettri normalizzati del segnale $w_i(t)$ per tutti i circuiti e il corrispondente spettro medio; la "forma" del profilo $w(t_{fin})$ lungo l'anello all'istante finale di integrazione. Ovviamente, nel caso di sincronizzazione completa, le correlazioni tra i circuiti sono tutte pari ad 1, e la matrice di correlazione banalmente coincide con la matrice identità (Fig. 5.10). Quando, invece, si hanno onde lungo l'anello, i segnali dei diversi circuiti risultano sfasati tra loro di una quantità costante. In altre parole, le oscillazioni dei singoli circuiti sono sostanzialmente analoghe ma, per $R_c < R_c^*$, esse possono risultare sia sincronizzate, sia sfasate in modo tale da originare, globalmente, un'onda progressiva periodica e di forma pseudo-sinusoidale lungo l'anello. In questo senso, l'onda può essere visto come un fenomeno

emergente di auto-organizzazione. Chiaramente, le correlazioni tra i diversi circuiti risentiranno della presenza di tali sfasamenti, e la matrice C presenterà delle caratteristiche sequenze di correlazione e anticorrelazione parallele alla diagonale, e in numero pari alla lunghezza d'onda λ dell'onda che si propaga lungo l'anello (Figure 5.11-5.13).

Inoltre, poiché la frequenza principale di oscillazione dei circuiti ν resta pressoché costante per $R_c < R_c^*$ (si veda la Fig. 5.9, così come gli spettri riportati nelle Figure 5.11-5.13), le diverse lunghezze d'onda corrispondono a diverse velocità di propagazione $V = \lambda \cdot \nu$ lungo l'anello. I profili di alcune onde con diverso valore di λ , emergenti per alcuni dei valori di R_c studiati, sono riportati in Fig. 5.14.

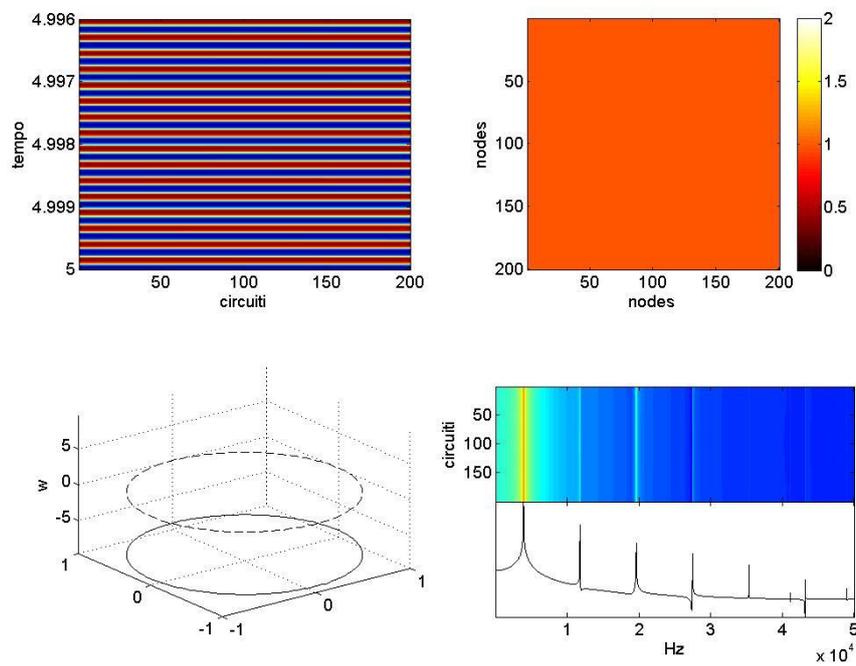


Figura 5.10 – Dinamica globale di sincronizzazione completa, corrispondente al caso $R_c = 1000$ (cfr. Fig. 5.5). Dall'alto in senso orario: diagramma spazio-temporale di w ; matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$; insieme degli spettri normalizzati del segnale $w_i(t)$ per tutti i circuiti e corrispondente spettro medio (ordinate in scala logaritmica); profilo di w lungo l'anello all'istante finale di integrazione (linea continua) rispetto alla posizione $w = 0$ (linea tratteggiata).

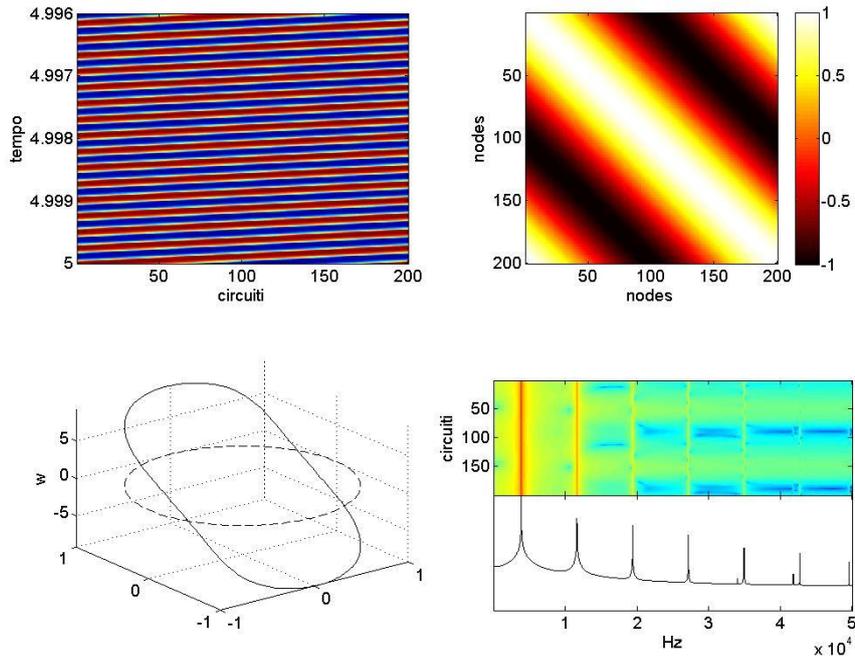


Figura 5.11 – Come in Fig. 10, ma per $R_c = 3000$. In questo caso si ha un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = N$ propagantesi in senso orario lungo l'anello (cfr. Fig. 5.14a).

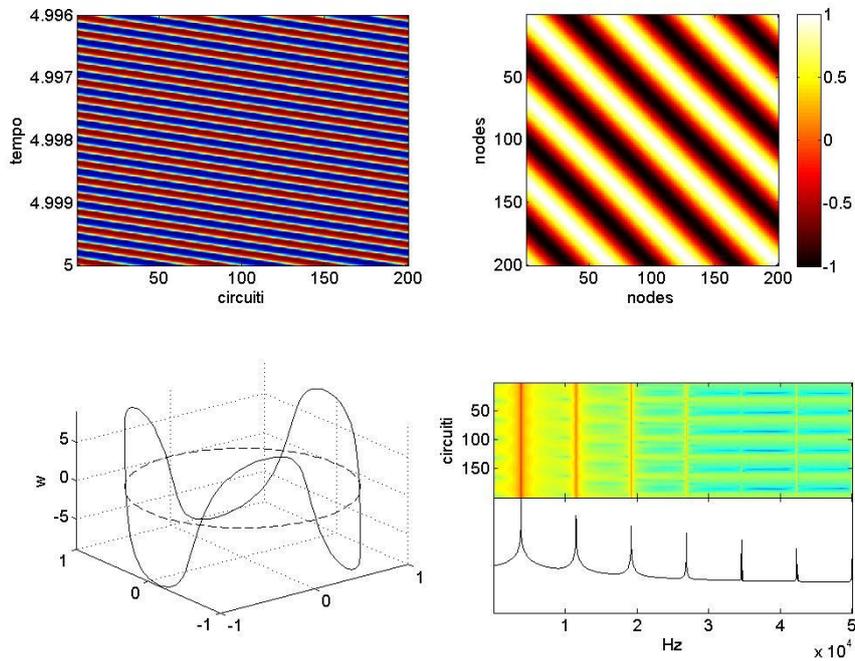


Figura 5.12 – Come in Fig. 5.10, ma per $R_c = 6500$. In questo caso si ha un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{N}{3}$ propagantesi in senso anti-orario lungo l'anello (cfr. Fig. 5.14b).

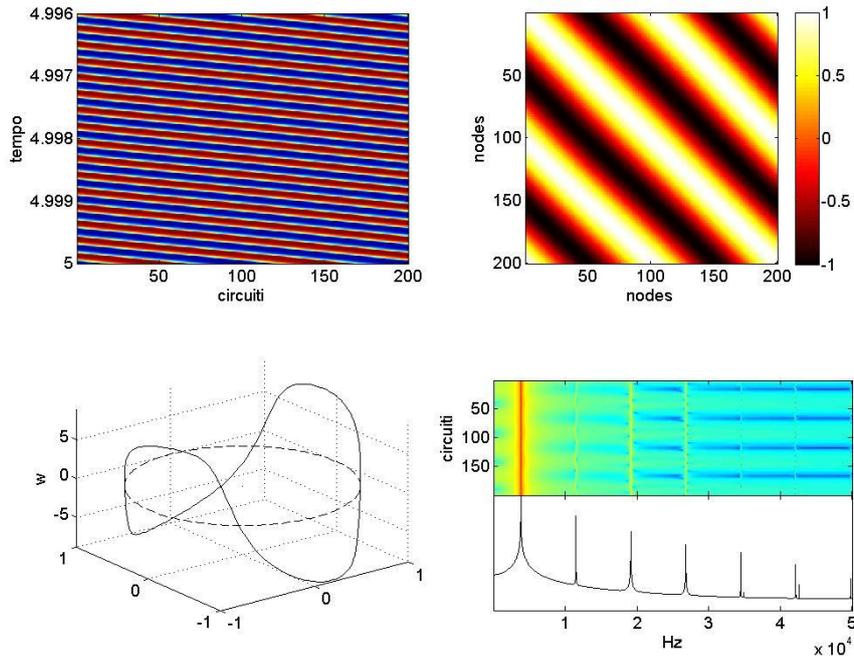


Figura 5.13 – Come in Fig. 10, ma per $R_c = 8000$. L'onda ha lunghezza d'onda $\lambda = \frac{N}{2}$ e viaggia in senso anti-orario lungo l'anello (cfr. Fig. 5.14c).

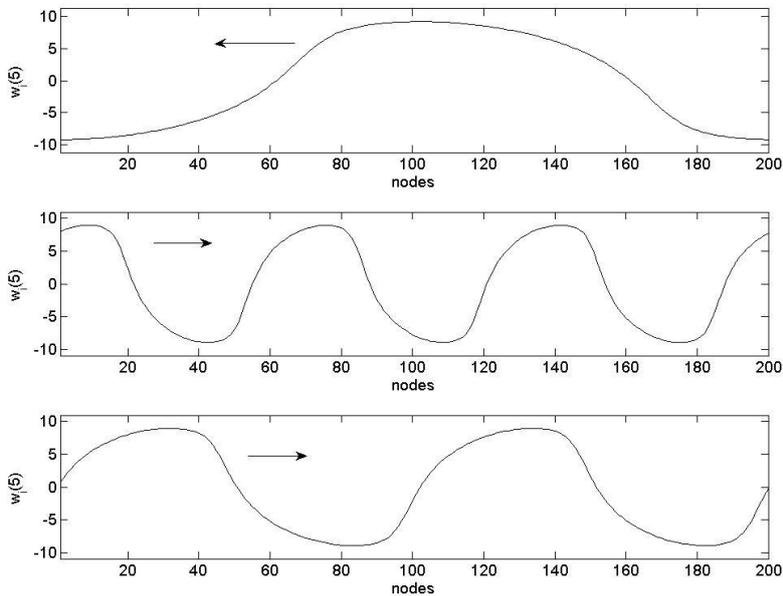


Figura 5.14 – Onde periodiche pseudo-sinusoidali emergenti lungo l'anello per diversi valori della resistenza di accoppiamento R_c , caratterizzate da diverse lunghezze d'onda λ . Poiché la frequenza di oscillazione dei circuiti è praticamente costante al variare di R_c , i diversi casi qui rappresentati corrispondono a diverse velocità di fase dell'onda. Le frecce indicano il verso di propagazione dell'onda.

Per $10100 \leq R_c \leq 10800$, come già detto sopra, i diversi circuiti si posizionano su un punto fisso $(0,0,0, cost(i))$ e ciò corrisponde, sull'anello, ai profili stazionari di w_i riportati in Fig. 5.15. Si noti come il sistema mantenga chiaramente memoria del profilo gaussiano iniziale (cfr. Fig. 5.2), e si pone su un valore medio costante di w che aumenta al crescere di R_c .

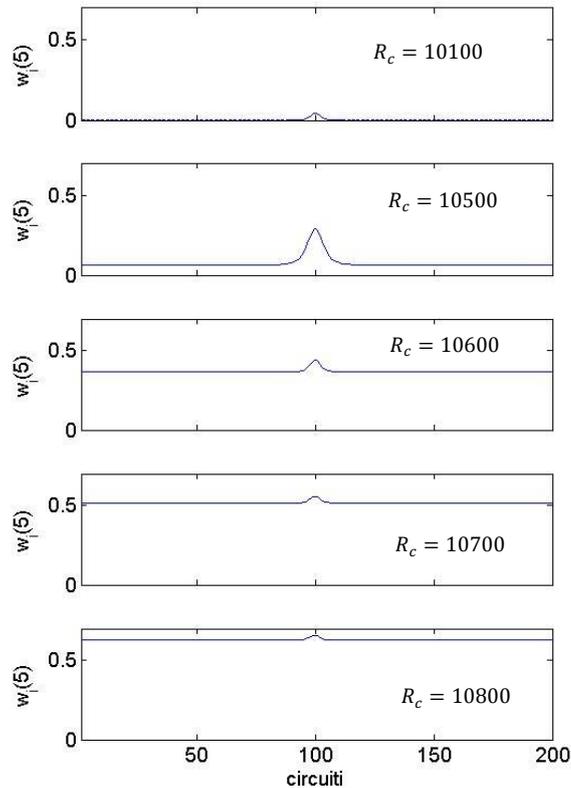


Figura 5.15 – Profili stazionari di w_i lungo l’anello, per diversi valori della resistenza di accoppiamento R_c .

Infine, quando i circuiti riprendono ad oscillare con una dinamica caotica per $R_c \geq 10800$, il corrispondente comportamento globale del sistema è riassunto nelle Figure 5.16-5.24. Come evidente dalle matrici di correlazione $C = \{c_{ij}\}$, che presentano fluttuazioni continue nell’intervallo $[-1,1]$ isotrope rispetto ad i e j , i segnali dei diversi circuiti risultano tra di loro scorrelati.

Tuttavia, per $10900 \leq R_c \leq 12000$ (Figure 5.16-5.21), l’evoluzione spazio-temporale dei segnali lungo l’anello è caratterizzata dall’emergenza di pattern complessi che si presentano come perturbazioni effimere che si spostano lungo l’anello. Come detto sopra, tale intervallo di accoppiamenti corrisponde a oscillazioni caotiche dei singoli circuiti su attrattori di tipo spirale di Chua (Fig. 5.6).

Inoltre, per $11400 \leq R_c \leq 12000$, quando cioè i circuiti evolvono su spirali di Chua disposte sia nella zona $w > 0$ che per $w < 0$ (Fig. 5.8), si assiste ad un cambiamento dei pattern. Inizialmente, la presenza di alcuni circuiti dell’anello oscillanti nella zona $w < 0$ rompe in parte lo sviluppo dei pattern (Figure 5.19 e 5.20), portando ad una condizione di maggior disordine spaziale, evidenziato anche dalla minore dimensione spaziale tipica delle fluttuazioni presenti nella matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$. Una situazione di maggior

definizione dei pattern la si ritrova quando la maggior parte dei circuiti prende ad oscillare con $w < 0$, come mostrato in Fig. 5.21 per $R_c = 12000$.

Infine, per $R_c \geq 12250$ (Figure 5.22-5.24), quando cioè i singoli circuiti si muovono su un attrattore di tipo doppio scroll (Fig. 5.7), i pattern svaniscono, e la dinamica spazio-temporale del sistema globale rapidamente si porta su una situazione di caos spazio-temporale simile ad un campo turbolento ben sviluppato (si noti come la dimensione spaziale tipica delle fluttuazioni presenti nella matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$ diminuisca all'aumentare di R_c).

L'emergenza dei pattern sembra dunque un fenomeno legato all'auto-organizzazione dei segnali caotici corrispondenti alla spirale di Chua, mentre una situazione di maggior caos, come è quella dei segnali corrispondenti al doppio scroll, pare non possedere più tale proprietà. In questo senso, l'emergenza dei pattern nel sistema qui studiato si manifesta "ai margini del caos", per usare un'espressione ben nota nell'ambito della scienza della complessità, in quanto è un fenomeno comune a molti sistemi complessi.

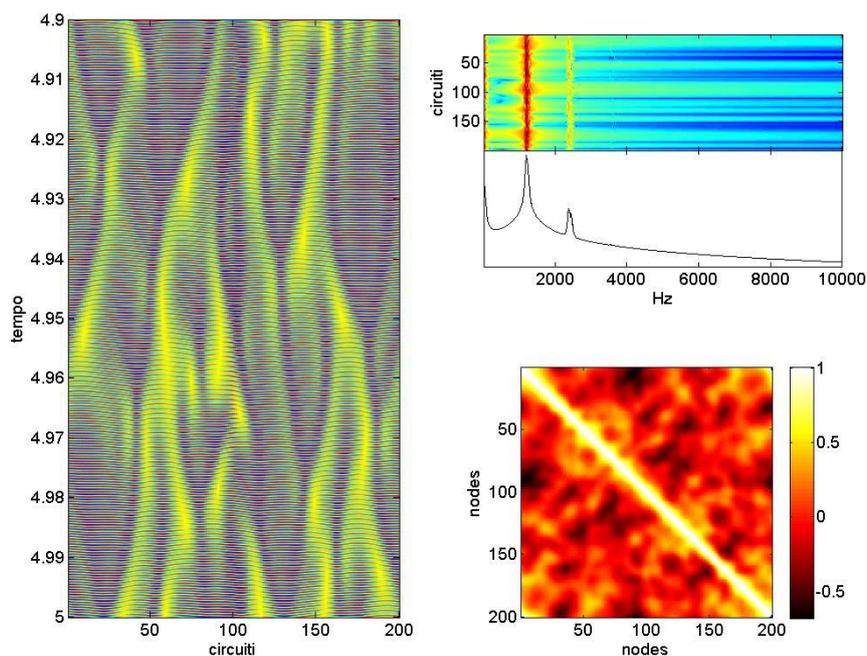


Figura 5.16 – Dinamica globale del sistema per $R_c = 10900$, caratterizzata dall'emergenza di pattern complessi. A sinistra è riportata l'evoluzione spazio-temporale del segnale $w(t)$, mentre a destra si hanno, in alto, gli spettri normalizzati dei vari circuiti e il corrispondente spettro medio (l'ordinata è in scala logaritmica), in basso la matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$ calcolata per ogni coppia di segnali (w_i, w_j) . I singoli circuiti oscillano su attrattori di tipo spirale di Chua, tutte posizionate nella zona $w > 0$.

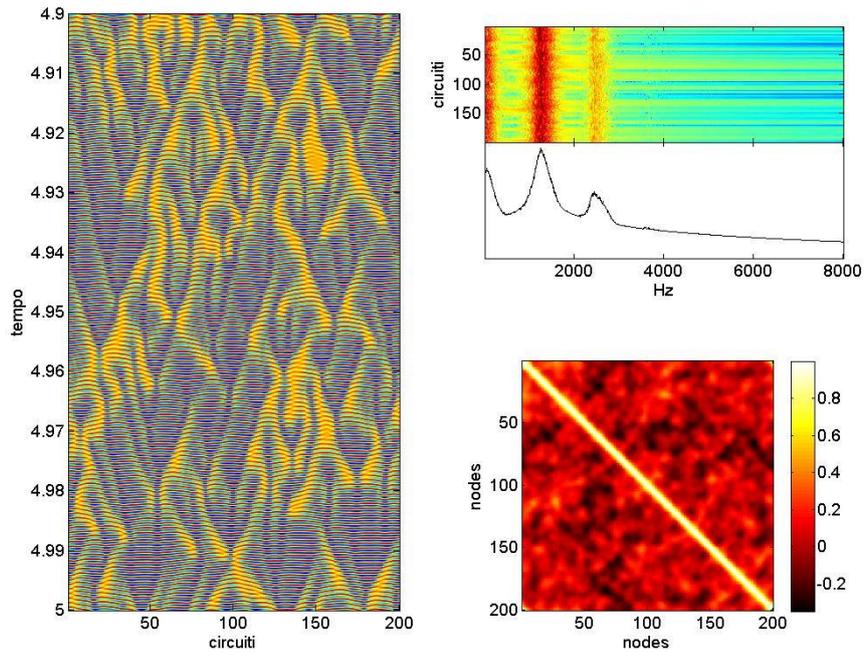


Figura 5.17 – Come in Fig. 16, per una valore di $R_c = 11000$.

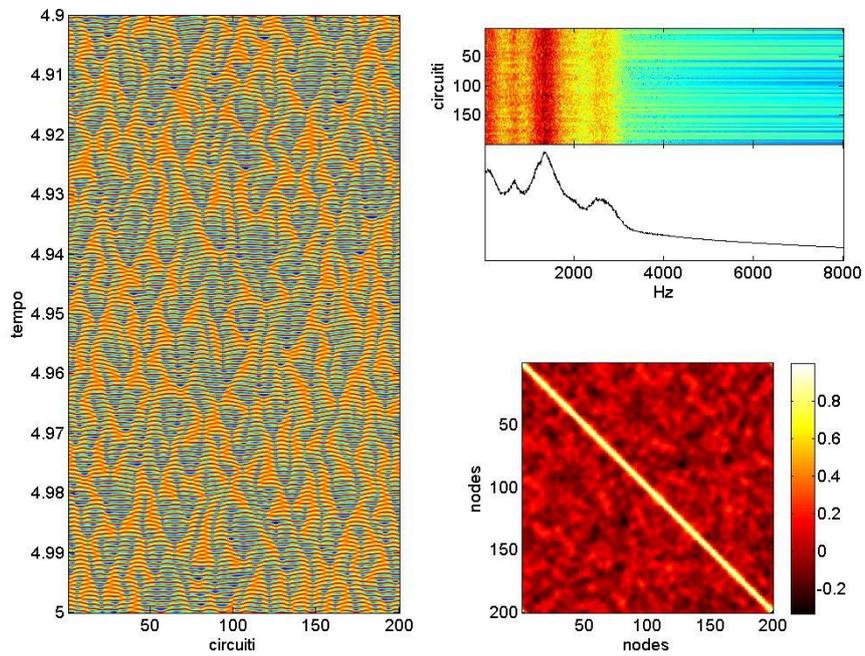


Figura 5.18 – Come in Fig. 16, per una valore di $R_c = 11300$

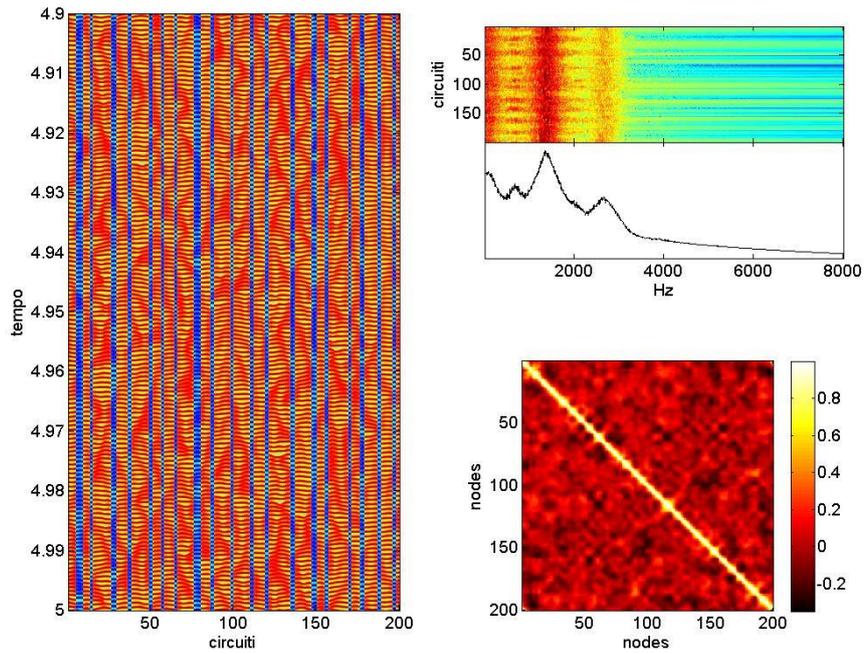


Figura 5.19 – Come in Fig. 5.12, per $R_c = 11400$. Il forte cambiamento evidenziato nell'evoluzione dei pattern è causato dalla presenza di alcuni circuiti dell'anello che oscillano su attrattori di tipo spirale di Chua con $w < 0$ (crf. Fig 5.8). Ciò crea le righe blu dell'immagine, che rompono lo sviluppo dei pattern.

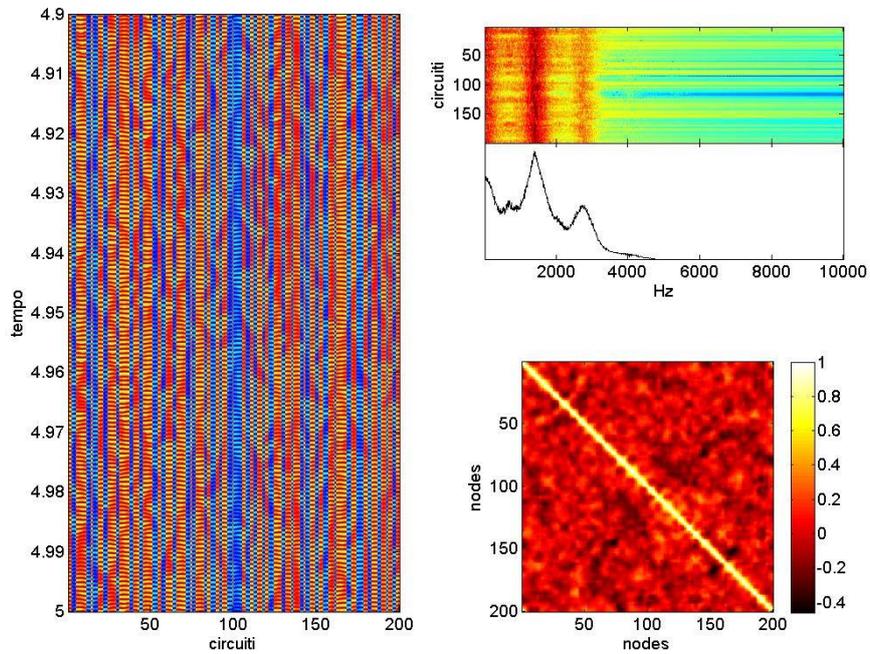


Figura 5.20 – Come in Fig. 5.19, per $R_c = 11500$.

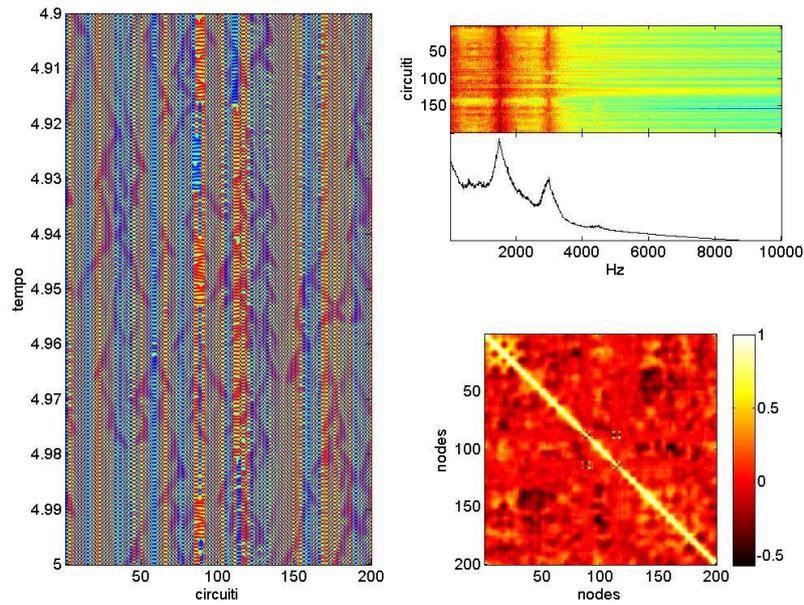


Figura 5.21 – Come in Fig. 5.20, per $R_c = 12000$. La presenza di una maggioranza di circuiti oscillanti su attrattori tipo spirale di Chua nella stessa zona w , in particolare $w < 0$, produce una ricomposizione dei pattern rispetto, ad esempio, alla Fig. 5.19. La situazione di maggior ordine è evidenziata anche dalla presenza di fluttuazioni spaziali, nella matrice di correlazione, con una dimensione scala maggiore rispetto ai casi delle Figure 5.19 e 5.20.

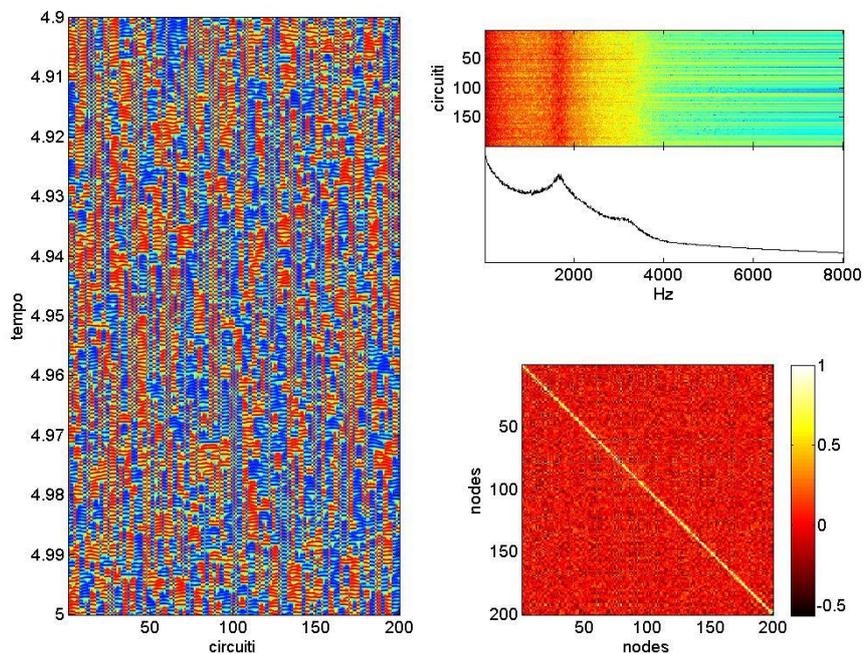


Figura 5.22 – Dinamica globale del sistema per $R_c = 12250$. I singoli circuiti oscillano ora su attrattori di tipo doppio scroll (Fig. 5.7), e non si ha più l'emergenza dei pattern.

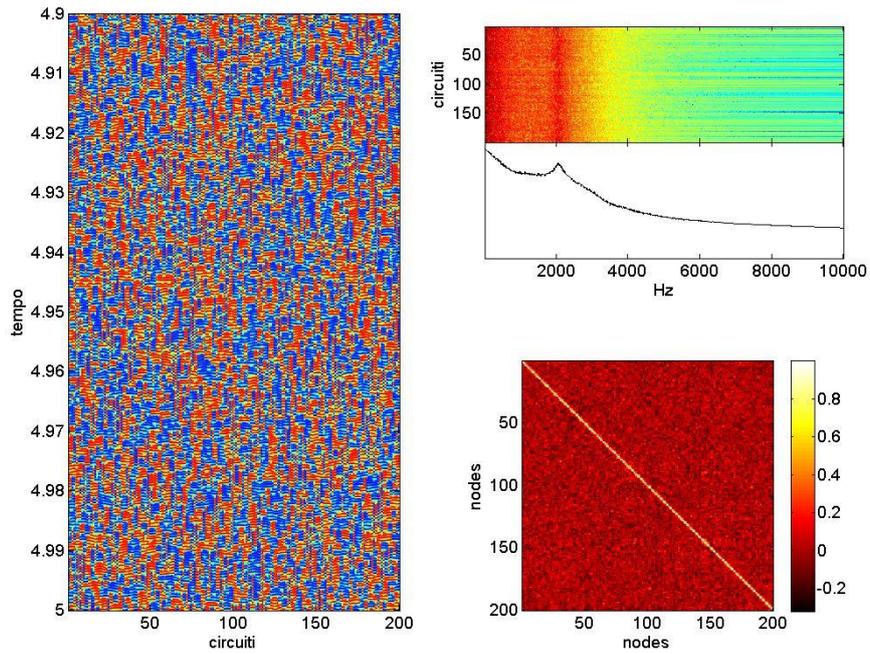


Figura 5.23 – Come in Fig. 22, per $R_c = 14000$. La dinamica globale è ormai completamente turbolenta.

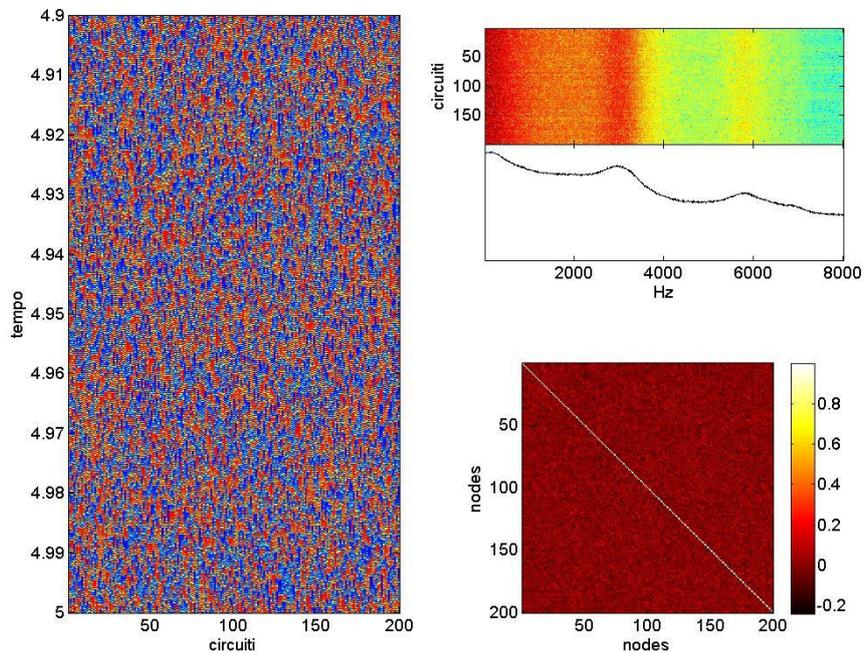


Figura 24 – Come in Fig. 5.22 per $R_c = 50000$, il più alto valore della resistenza di accoppiamento usato per simulare la dinamica del sistema.

Per caratterizzare ulteriormente il comportamento globale dell'anello per $R_c \geq 10900$, quando ciò la dinamica dei singoli circuiti risulta caotica, è stata usata la correlazione tra le diverse configurazioni $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_N(t))$ assunte nel tempo dal sistema.

Più in dettaglio, scelta una configurazione iniziale $\mathbf{w}(t_1)$, è stata calcolata la correlazione

$$S(t) = \text{corr}(\mathbf{w}(t_1), \mathbf{w}(t)), \quad (5.5)$$

tra $\mathbf{w}(t_1)$ e tutte successive configurazioni $\mathbf{w}(t)$, con $t_2 \leq t \leq t_f$, dove $t_2 \geq t_1$. In Fig. 5.25 è riportato l'andamento temporale di $S(t)$ per il caso $R_c = 10900$, con una scelta dei tempi pari a $t_1 = 2.5$ e $t_2=3.75$ (si ricordi che il tempo finale di integrazione t_f è pari a 5 s). La correlazione $S(t)$ si presenta essa stessa con un andamento caotico. Per evidenziare eventuali periodicità, che corrispondono a ricorrenze periodiche di configurazioni con un livello simile di correlazione, è stato calcolato lo spettro di $S(t)$ tramite FFT. I risultati trovati al variare della resistenza di accoppiamento R_c sono riassunti in Fig. 5.26.

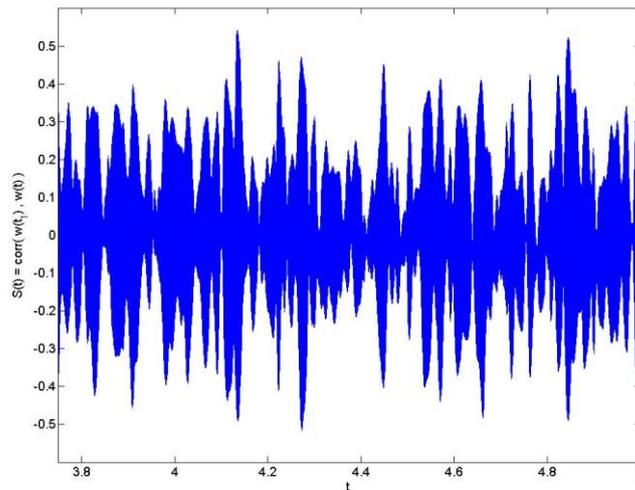


Figura 5.25 – Andamento temporale della correlazione tra la configurazione $\mathbf{w}(t_1)$ del segnale $w_i(t_1)$ assunto dai diversi circuiti lungo l'anello all'istante $t_1 = 2.5$ s, e le successive configurazioni $\mathbf{w}(t)$ nell'intervallo $3.75 \leq t \leq 5$ s. Caso di $R_c = 10900$.

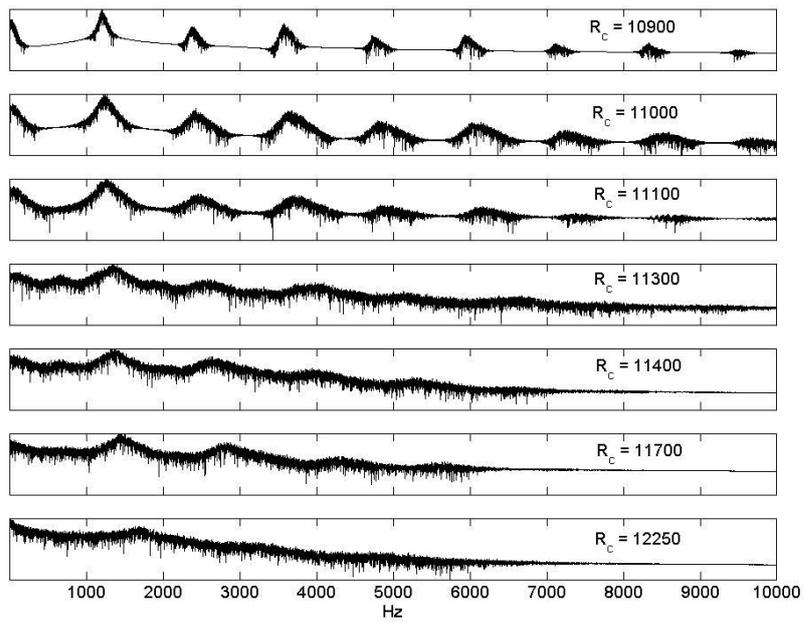


Figura 5.26 – Spettri della correlazione (5.5) ottenuti trami FFT (Fast Fourier Transformate) al variare di R_c . I grafici sono normalizzati rispetto ai rispettivi valori massimi, e rappresentati con una scala logaritmica delle ordinate.

5.3 Risultati numerici 2: circuito di Chua

Un seconda configurazione del sistema di Fig. 5.1 è stata ottenuta utilizzando come oscillatore caotico il circuito di Chua con un diodo descritto da una funzione cubica presentato nel capitolo 2. La corrente che attraversa il diodo è data dalla solita espressione:

$$i_D = a_1 z + a_3 z^3, \quad (5.6)$$

con $a_1 = -0.59 \cdot 10^{-3}$ e $a_3 = 0.02 \cdot 10^{-3}$.

Sostituendo la (5.6) nelle (5.1), si ottiene il seguente set di equazioni descrivente la dinamica dell'anello di circuiti di Chua:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{y_1}{L} - \frac{R_0}{L} x_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_1 - y_1}{R} + x_1 + \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-a_1 z_1 - a_3 z_1^3 - \frac{z_1 - y_1}{R} - \frac{z_1 - y_2}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, 1^\circ \text{ circ.} \quad (5.7.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= -\frac{y_i}{L} - \frac{R_0}{L} x_i \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_i - y_i}{R} + x_1 + \frac{z_{i-1} - y_i}{R_c} \right) \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-a_1 z_1 - a_3 z_1^3 - \frac{z_i - y_i}{R} - \frac{z_i - y_{i+1}}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, i^\circ \text{ circ. } (1 < i < N) \quad (5.7.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_N}{dt} &= -\frac{y_N}{L} - \frac{R_0}{L} x_N \\ \frac{dy_N}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{z_N - y_N}{R} + x_1 + \frac{z_{N-1} - y_N}{R_c} \right) \\ \frac{dz_N}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left(-a_1 z_N - a_3 z_N^3 - \frac{z_N - y_N}{R} - \frac{z_N - y_1}{R_c} \right) \end{aligned} \right\}, N^\circ \text{ circ.} \quad (5.7.3)$$

I parametri circuitali sono gli stessi della sezione precedente, così come le condizioni iniziali ($x_i(0) = z_i(0) = 0$ per $i = 1, \dots, N$; mentre $y_i(0)$ ha un profilo gaussiano descritto dall'Eq. 5.4).

Così come descritto per il circuito di Chua memresistivo, sono state eseguite delle integrazioni numeriche delle Equazioni 5.7 al variare della resistenza di accoppiamento R_c tramite la funzione ODE45 di Matlab®.

Il comportamento del nuovo sistema (7) si è rivelato del tutto analogo al caso del circuito con memristor. In Fig. 5.27 è riportato l'insieme dei massimi del segnale z_i per tutti i circuiti dell'anello, al variare dell'accoppiamento. Ancora una volta si trova, al crescere di R_c , una transizione di fase da un moto periodico, ad una dinamica caotica, con un andamento praticamente coincidente con quanto trovato per il circuito con memristor. Per valori $R_c \leq 10050$ i circuiti oscillano in modo periodico (Fig. 5.28a), mentre quando $R_c \geq 10900$ si ha una dinamica caotica su un attrattore che, per $R_c < 12250$ risulta essere una spirale di Chua (Fig. 5.28b), mentre diventa poi un doppio scroll per $R_c \geq 12250$ (Fig. 5.28c). Come ben

evidenziato anche dal riquadro di Fig. 5.27, tali transizioni avvengono per gli stessi valori di accoppiamento trovati per il circuito memresistivo (cfr. Fig. 5.4).

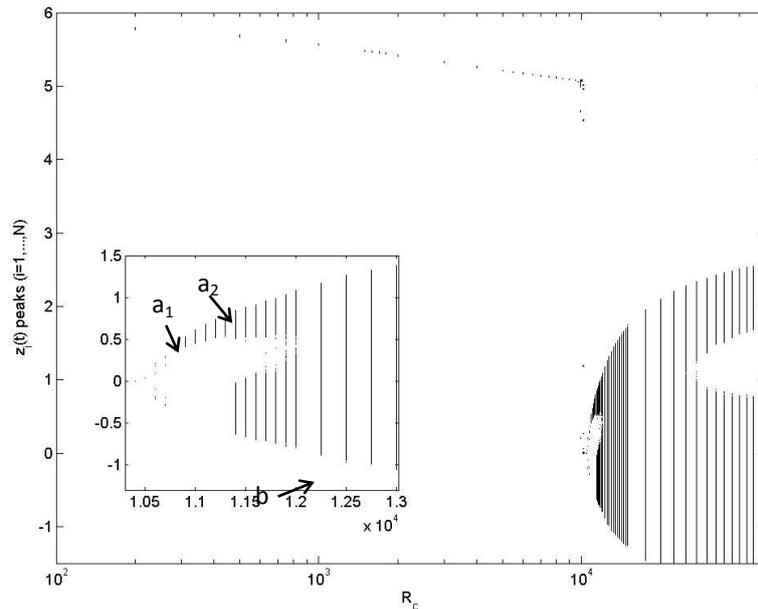


Figura 5.27 - Diagramma ottenuto riportando i massimi locali dei segnali $z_i(t)$ per tutti i circuiti di Chua dell'anello ($1 \leq i \leq N$). È evidente la fortissima corrispondenza con l'analogo diagramma ottenuto nel caso del circuito di Chua memresistivo (Figure 5.3 e 5.4). Nel riquadro è mostrato il dettaglio della struttura subito dopo la transizione dalla dinamica periodica a quella caotica: si noti la perfetta coincidenza dei punti a_1 , a_2 e b con gli analoghi punti della mappa in Fig. 5.4.

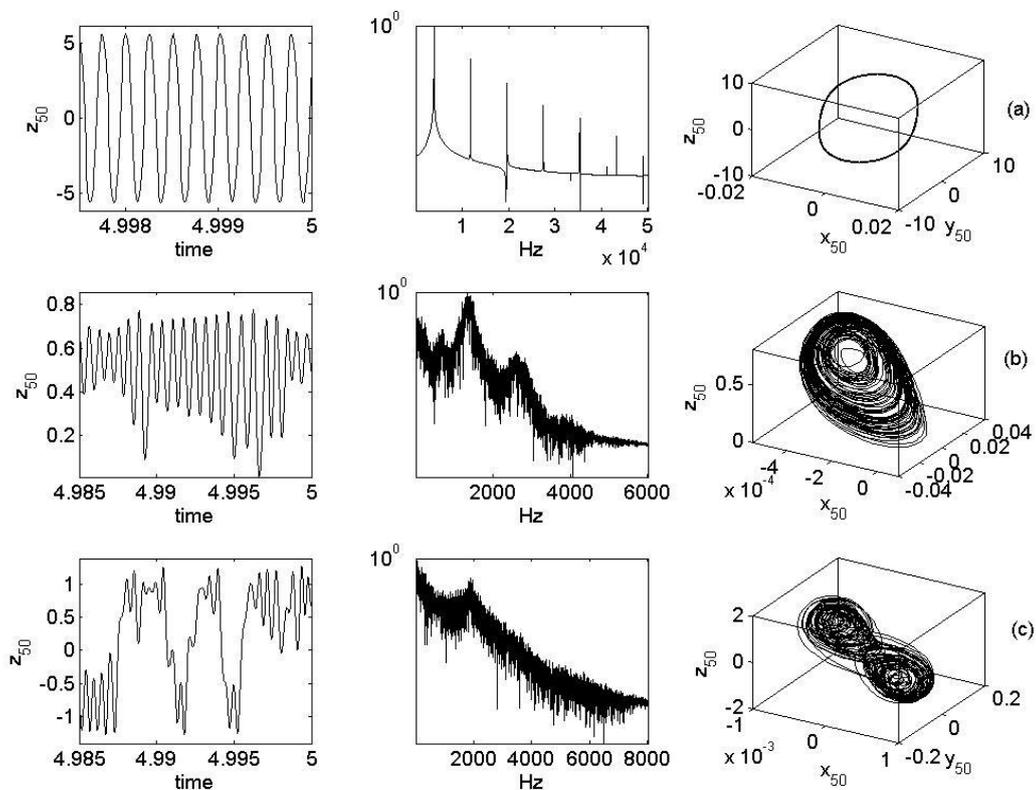


Figura 5.28 – Dinamica del circuito 50 per diversi valori della resistenza di accoppiamento R_c . Da sinistra, sono riportati l'andamento del segnale $z_{50}(t)$, lo spettro corrispondente (normalizzato rispetto al suo valore massimo e disegnato con una scala logaritmica delle ordinate) e l'attrattore. Gli accoppiamenti sono: $R_c = 1000$ (a), $R_c = 11300$ (b) e $R_c = 13000$ (c).

Anche la dinamica globale è analoga al caso trattato nella sezione precedente. Alla dinamica ordinata dei singoli circuiti corrisponde una situazione di sincronizzazione completa, con l'emergenza di onde periodiche di forma pseudo-sinusoidale che si propagano sull'anello (Figure 5.29-5.33). La Fig. 5.34 mostra alcune delle forme d'onda rilevate, con diverse lunghezze d'onda λ .

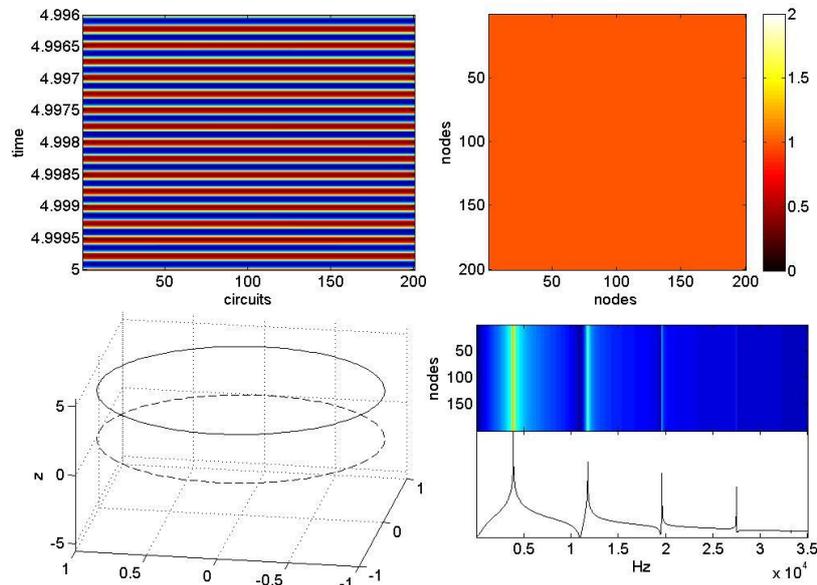


Figura 5.29 – Dinamica periodica sincronizzata per $R_c = 1000$ nel caso di circuiti di Chua collegati come in Fig. 5.1. Dall'alto in senso orario: diagramma spazio-temporale del segnale $z_i(t)$; matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$; insieme degli spettri normalizzati di segnali $z_i(t)$ per tutti i circuiti e corrispondente spettro medio (ordinate in scala logaritmica); profilo di z_i lungo l'anello all'istante finale di integrazione (linea continua) rispetto alla posizione $z = 0$ (linea tratteggiata).

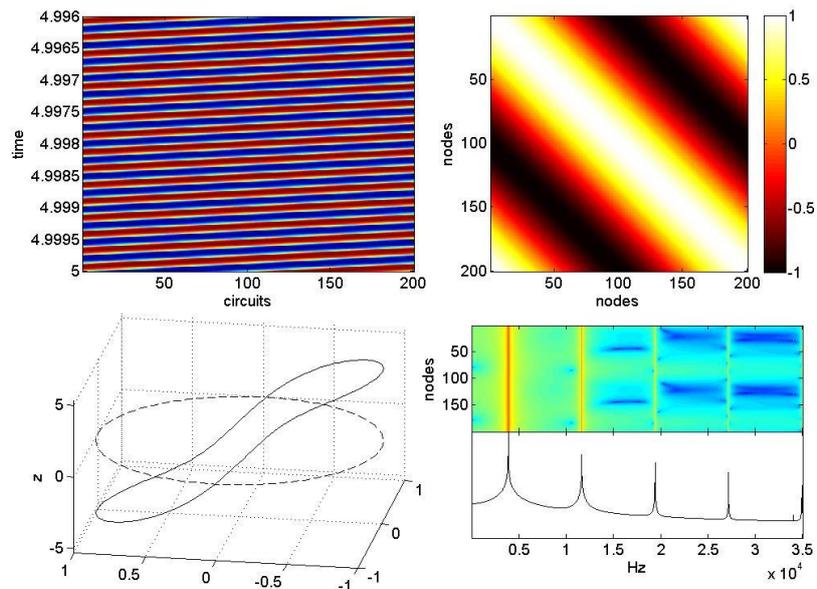


Figura 5.30 – Come in Fig. 10, ma per $R_c = 3000$. In questo caso si ha un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = N$ propagantesi lungo l'anello.

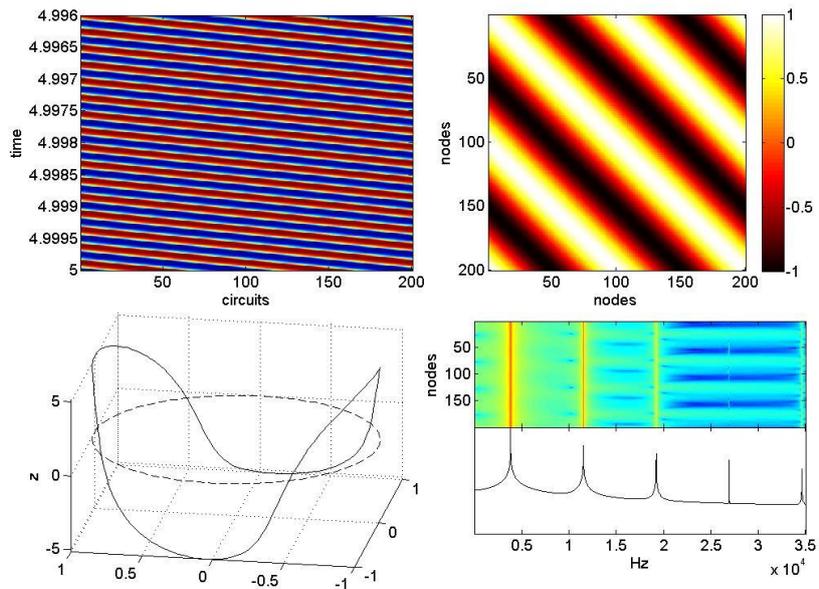


Figura 5.31 – Come in Fig. 10, ma per $R_c = 6000$. In questo caso si ha un onda di lunghezza d'onda $\lambda = N/2$ propagantesi lungo l'anello.

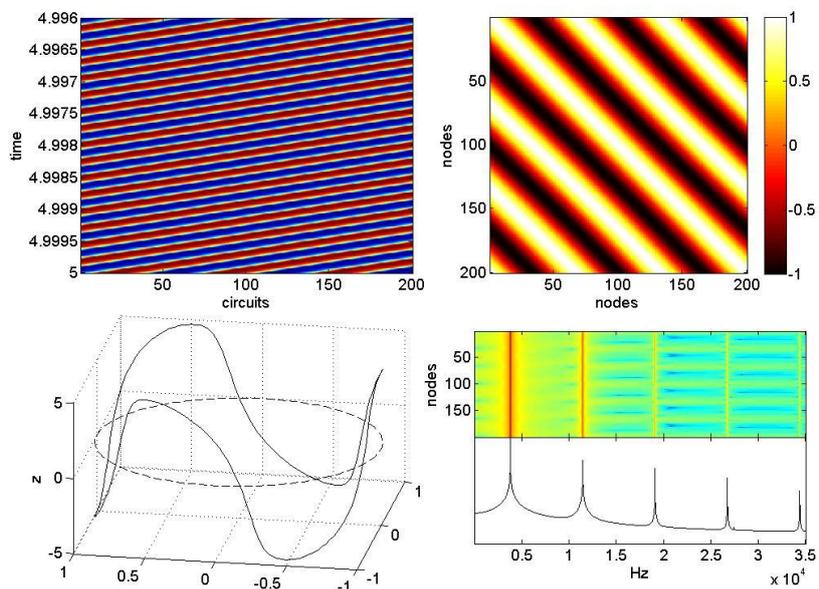


Figura 5.32 – Onda progressiva emergente con $\lambda = N/3$ per $R_c = 9500$.

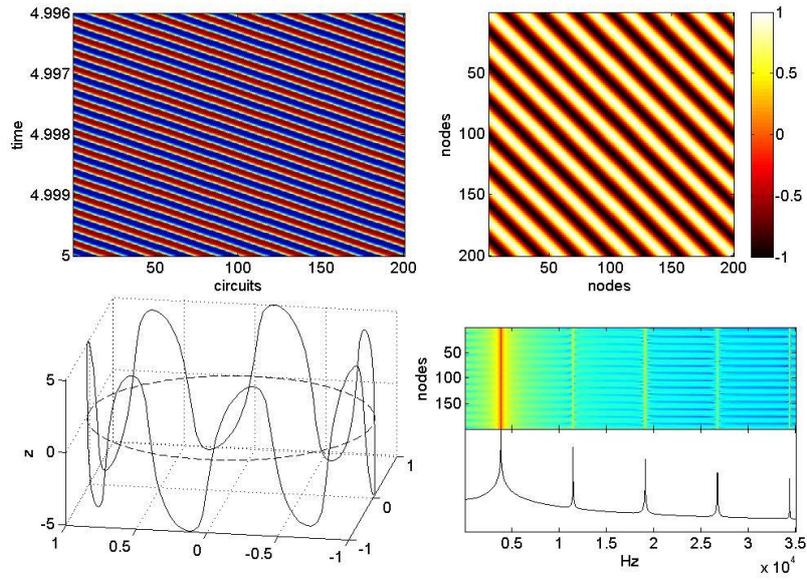


Figura 5.33 – Dinamica globale per $R_c = 9700$. L'onda progressiva emergente ha lunghezza d'onda $\lambda = N/7$

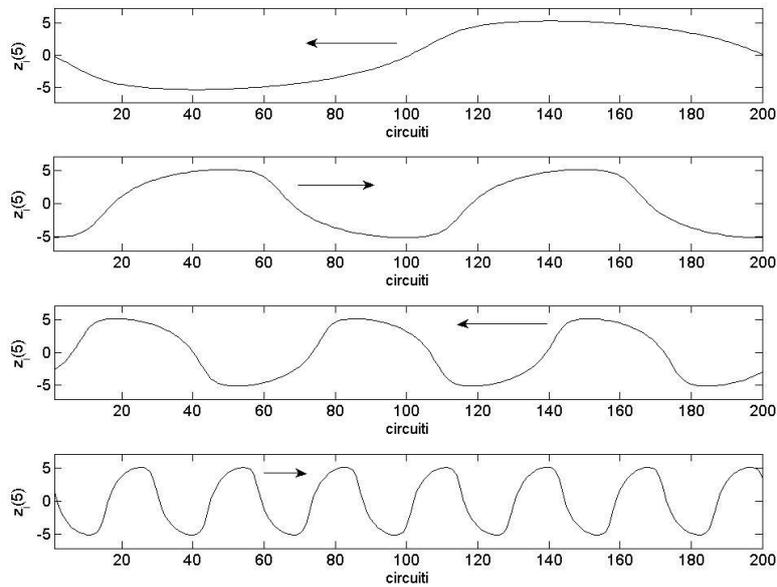


Figura 5.34 – Diverse tipologie di forme d'onda emergenti sull'anello di circuiti di Chua, con diodo caratterizzato da una non-linearità cubica, per diversi valori di R_c (dall'alto, $R_c = 3000$, $R_c = 6000$, $R_c = 9500$, $R_c = 9700$).

Alla dinamica caotica dei singoli circuiti corrisponde, invece, un comportamento globale caratterizzato dall'emergenza di pattern complessi finché si hanno come attrattori delle spirali di Chua, mentre si ha una dinamica disordinata quando l'attrattore diventa un doppio scroll (in perfetta analogia col caso di circuito memresistivo). Le Figure 5.35-5.40 mostrano l'evoluzione dei pattern, e in Fig. 5.41 è infine riportata l'analisi tramite FFT della correlazione applicata però ora alle configurazioni $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$, similmente alla formula (5.5) per il caso del circuito con memristor.

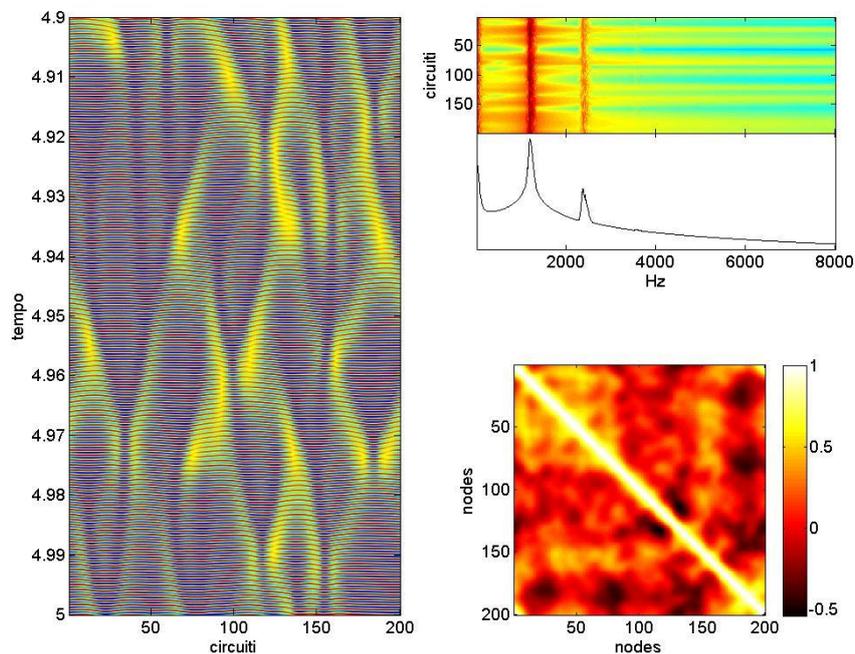


Figura 5.35 – Dinamica globale del sistema composto da circuiti di Chua, per $R_c = 10900$, caratterizzata dall'emergenza di pattern complessi. A sinistra è riportata l'evoluzione spazio-temporale del segnale $z(t)$, mentre a destra si hanno, in alto, gli spettri normalizzati dei vari circuiti e il corrispondente spettro medio (l'ordinata è in scala logaritmica), in basso la matrice di correlazione $C = \{c_{ij}\}$ calcolata per ogni coppia di segnali (z_i, z_j) . I singoli circuiti hanno come oscillatori delle spirali di Chua.

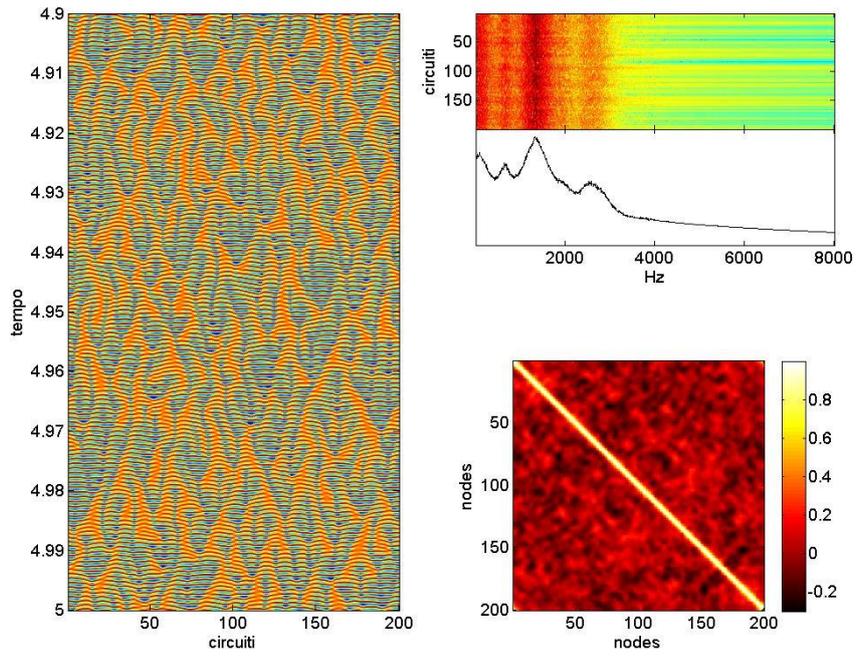


Figura 5.36 – Come in Fig. 5.36, con $R_c = 11300$.

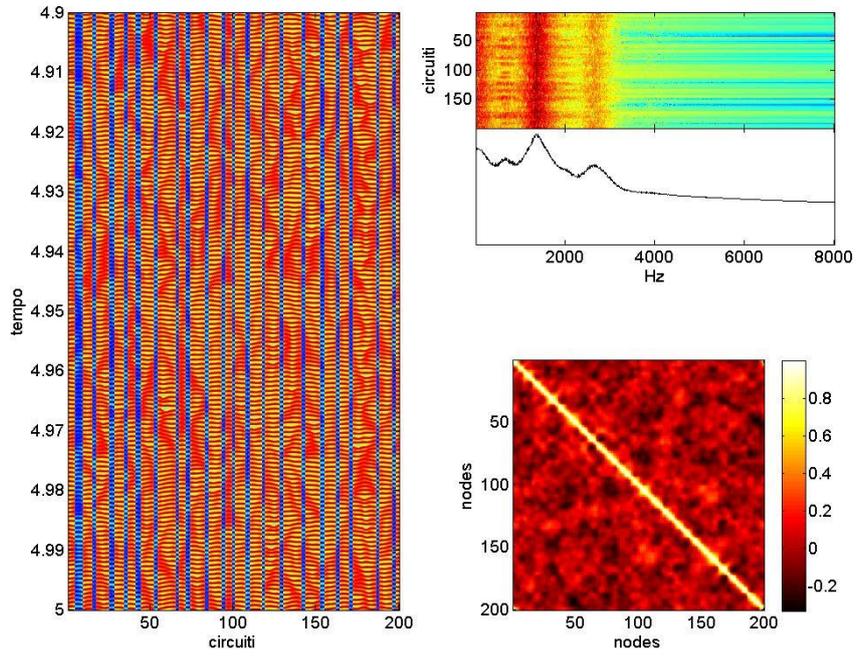


Figura 5.37 – Come in Fig. 5.36, con $R_c = 11400$.

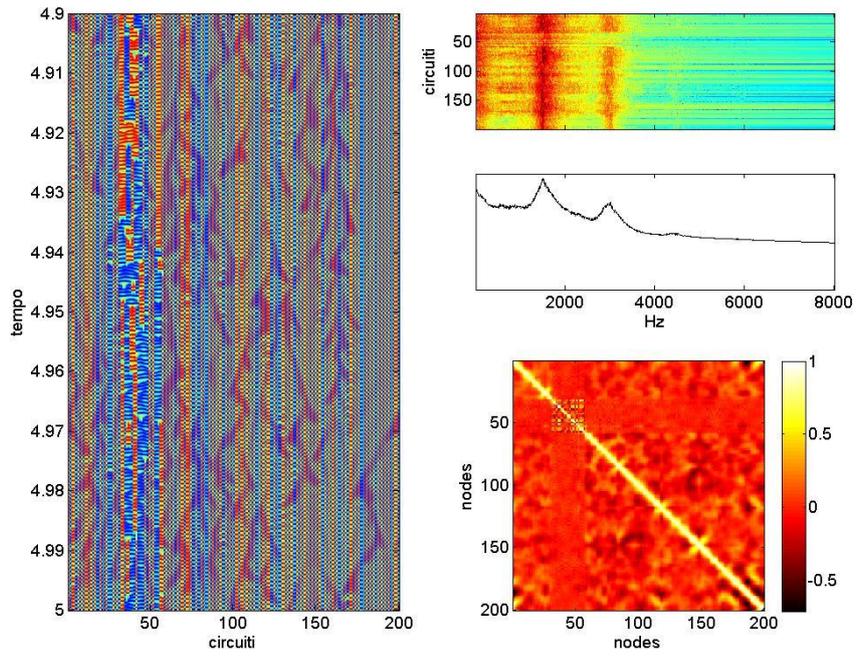


Figura 5.38 – Come in Fig. 5.36, con $R_c = 12000$.

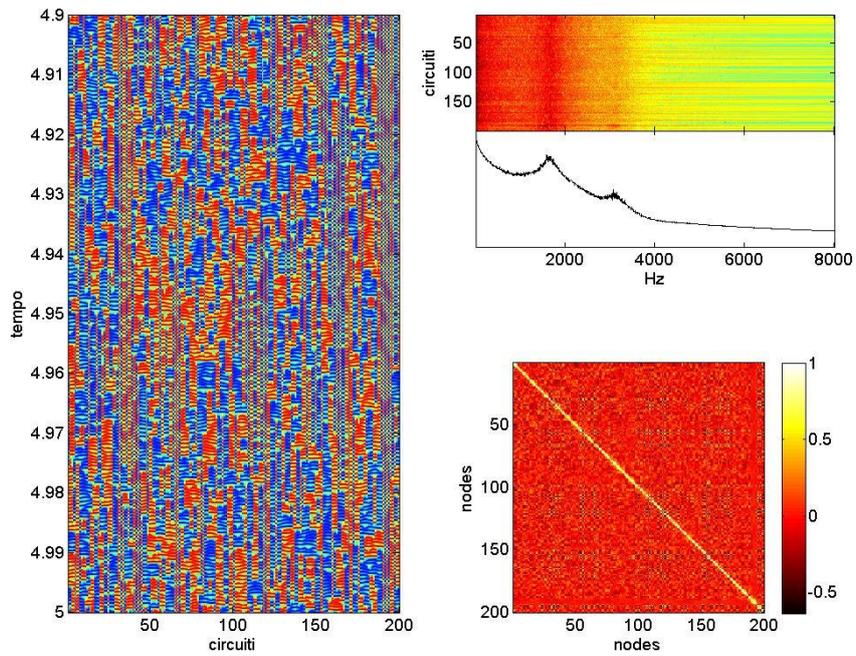


Figura 5.39 – Come in Fig. 5.36, con $R_c = 12250$.

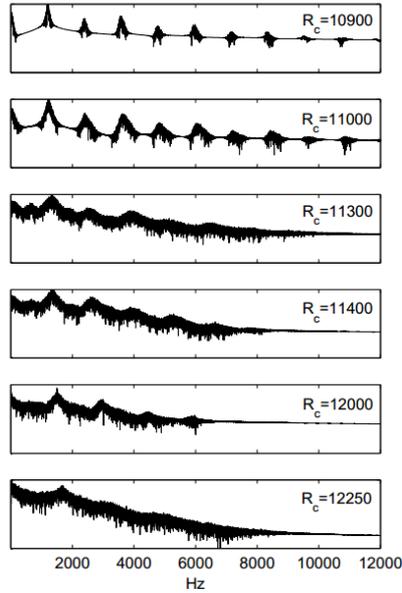


Figura 5.40 – Analisi spettrale delle correlazioni tra le configurazioni $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$ assunte dal sistema.

Per $10300 \leq R_c \leq 10800$ il sistema si porta globalmente su uno stato praticamente stazionario (Fig. 5.41). Differenze, rispetto al caso del circuito memresistivo emergono in prossimità della transizione tra dinamica periodica e dinamica caotica. Per $R_c = 10100$ e $R_c = 10200$, infatti, il profilo gaussiano di $y_i(0)$ non si propaga lungo l'anello, e solamente i circuiti centrali risultano infine oscillanti con ampiezze significative (Fig. 5.42).

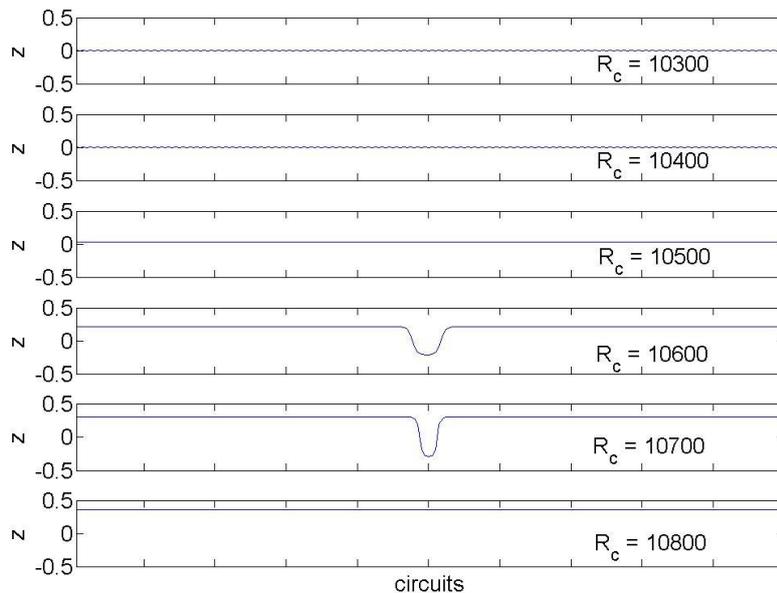


Figura 5.41 – Profili stazionari nel caso di un sistema di circuiti di Chua.

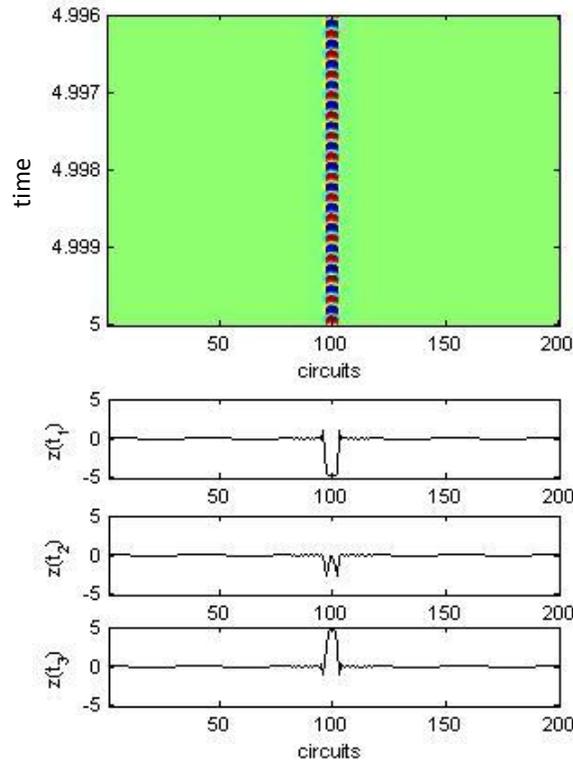


Figura 5.42 – Comportamento globale del sistema per $R_c = 10100$. Il riquadro superiore mostra il diagramma spazio-temporale dell'evoluzione dei segnali z_i , mentre nel riquadro inferiore ci sono alcune configurazioni dell'anello a diversi istanti di tempo. Solamente i circuiti centrali oscillano in modo significativo.

Infine, per $R_c = 9900$, il comportamento del sistema risulta anomalo. In questo caso le oscillazioni dei circuiti 148 e 149 hanno ampiezza più piccola rispetto agli altri circuiti e la dinamica globale risulta differente da quanto sin qui descritto: due perturbazioni pseudo-sinusoidali partono dal circuito 77 e si propagano lungo l'anello, convergendo sul circuito 159. In Fig. 5.43 è riportata l'evoluzione spazio-temporale dei segnali z_i ad anche alcune configurazioni dell'anello a tre diversi istanti di tempo. Anche la matrice di correlazione indica chiaramente la presenza di onde lungo l'anello. I circuiti 148 e 169, i cui attrattori sono anche riportati in Fig. 5.43, presentano oscillazioni pseudo-sinusoidali con un spettro comunque del tutto simile a quello delle oscillazioni degli altri circuiti dell'anello

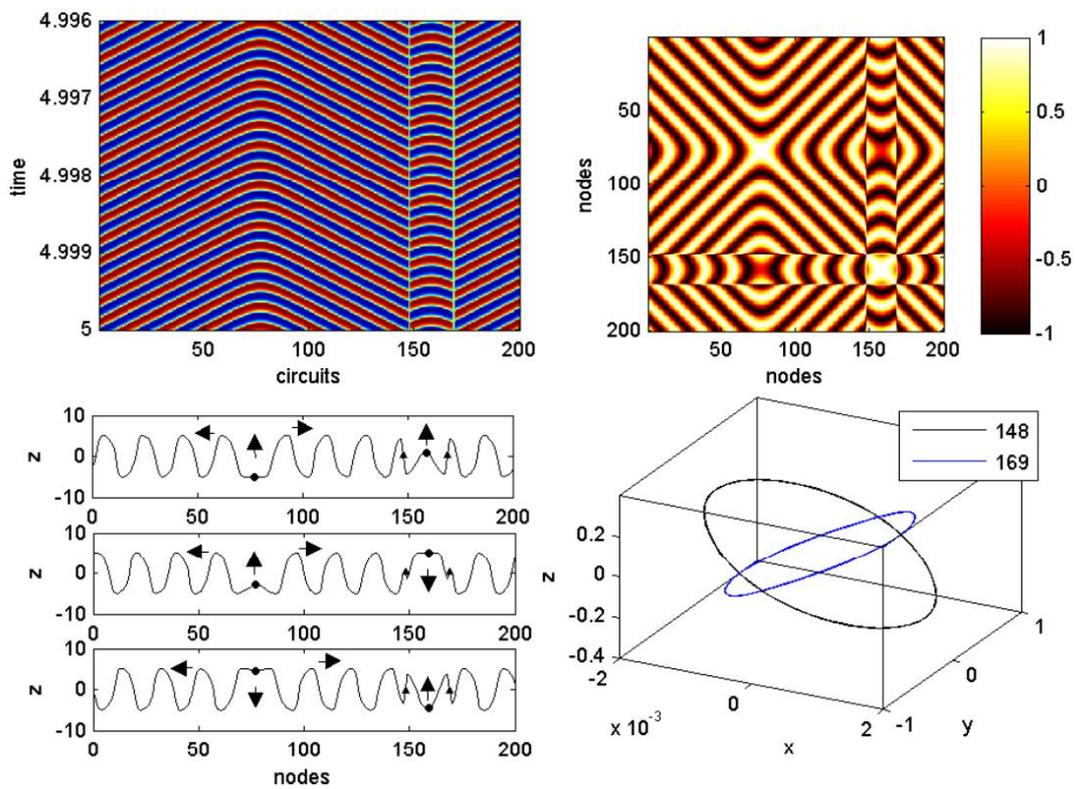


Figura 5.42 – Comportamento globale del sistema per $R_c = 9900$. Da sinistra in alto sono riportati, in senso orario, il diagramma spazio temporale del segnale $z(t)$, la matrice di correlazione sulle varie coppie di segnali (z_i, z_j) , gli attrattori dei circuiti 148 e 169, tre diverse configurazioni di z lungo l'anello a tre diversi istanti di tempo.

6. Sincronizzabilità su reti scale-free

Come visto nei capitoli precedenti, il comportamento di oscillatori caotici accoppiati su geometrie ad anello mostra una grande varietà di dinamiche. Il passaggio a geometrie più articolate complica inevitabilmente la situazione e il quadro interpretativo emergente. Ciò è valido soprattutto nel caso di accoppiamenti su reti complesse, dalla geometria irregolare e composte da un grandissimo numero di sistemi interagenti. Tuttavia, tale situazione, come visto nel capitolo 1, è di estremo interesse in quanto quello delle reti complesse è un modello matematico che si adatta alla descrizione di molte situazioni reali, sia naturali che artificiali. Per trattare il problema della sincronizzazione su tali geometrie è molto usato il cosiddetto modello di Kuramoto, che semplifica la dinamica studiata, cercando comunque di cogliere l'aspetto essenziale costituito dalla transizione di fase da disordine a sincronizzazione che si ha per molti sistemi quando l'accoppiamento supera un certo valore soglia. Nella presente sezione, dopo aver introdotto il modello di Kuramoto, verranno illustrati i risultati ottenuti dall'indagine numerica della sincronizzabilità di un gruppo di $N = 1000$ oscillatori di Kuramoto accoppiati su una rete scale-free, cioè il problema di come forzare o disturbare la sincronizzazione di un tale sistema.

6.1 Il modello di Kuramoto

Al di là della possibile varietà di sistemi dinamici e della geometrie di accoppiamento, un aspetto essenziale del comportamento globale di un gruppo di oscillatori interagenti è solitamente la transizione da uno stato disordinato ad una situazione di sincronizzazione, quando l'intensità dell'accoppiamento tra i sistemi supera una certa soglia [5]. Il modello di Kuramoto [1,95,153] costituisce una descrizione semplificata della dinamica di un gruppo di oscillatori interagenti che cerca di cogliere proprio questo fenomeno, concentrandosi sul meccanismo di nascita e mantenimento della sincronizzazione.

Nella sua versione originale, esso si presenta come una popolazione di N oscillatori di fase $\theta_i(t)$ aventi frequenze naturali ω_i distribuite secondo una certa densità di probabilità $g(\omega)$, e accoppiati in modo proporzionale al seno delle differenze di fase [95]:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \cdot \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (6.1)$$

Il fattore $\frac{1}{N}$ garantisce un buon comportamento del modello nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$, mentre K rappresenta l'intensità dell'accoppiamento.

Si assume inoltre che la funzione di distribuzione delle frequenze naturali, $g(\omega)$, sia unimodale e simmetrica rispetto alla frequenza media $\Omega = \langle \omega_i \rangle$. Senza perdita di generalità, si può assumere $\Omega = 0$, in quanto è sempre possibile un cambiamento di sistema di riferimento, $\omega_i \rightarrow \omega_i + \Omega$, nel quale tale condizione è

verificata (si passa ad un sistema rotante alla frequenza media della distribuzione delle frequenze naturali). La dinamica collettiva dell'intera popolazione di oscillatori viene caratterizzata attraverso il parametro d'ordine complesso:

$$r(t) \cdot e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (6.2)$$

dove il modulo $0 \leq r(t) \leq 1$ misura la coerenza di fase degli oscillatori, e $\phi(t)$ rappresenta la fase media. Chiaramente, nel caso in cui gli oscillatori abbiano fasi distribuite casualmente si ha $r \cong 0$, mentre nel caso in cui gli oscillatori risultino sincronizzati, abbiano cioè tutti la stessa fase $\theta_i(t)$, si ha $r \cong 1$. Il parametro d'ordine r , dunque, fornisce una misura macroscopica dello stato di sincronizzazione o meno.

Moltiplicando ambo i membri della (6.2) per $e^{-i\theta_i(t)}$ si ricava la seguente uguaglianza:

$$r \cdot \sin(\phi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (6.3)$$

da cui:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K \cdot r \cdot \sin(\phi - \theta_i). \quad (6.4)$$

La (6.4) mostra come ogni oscillatore è accoppiato con gli altri in funzione delle quantità medie r e ϕ . Chiaramente, per $K = 0$ gli oscillatori evolvono ognuno secondo la propria frequenza naturale, ed essendo le ω_i distribuite casualmente, si ha $r \cong 0$. Se, invece, $K \rightarrow \infty$, dalla (6.4) si vede che $\theta_i = \phi$ è soluzione del sistema. All'aumentare dell'accoppiamento, cioè, si ha un passaggio da uno stato disordinato ad una situazione in cui le fasi degli oscillatori sono sincronizzate sulla fase media ϕ .

Questo risultato, ricavato in modo rigoroso da Kuramoto, mostra come il sistema (6.1) riesca a modellare la transizione di fase da caos ad ordine che si osserva in molti sistemi dinamici accoppiati all'aumentare dell'intensità dell'accoppiamento. Il valore critico dell'accoppiamento trovato da Kuramoto, al quale si ha la transizione verso la sincronizzazione, risulta pari a: $K_c = \frac{2}{\pi \cdot g(0)}$.

Formalmente, per $K < K_c$ si ha $r \sim 0$, mentre per $K > K_c$ si ha $r = 1$. Quando l'accoppiamento è prossimo al valore critico, lo scaling del parametro d'ordine è: $r \sim (K - K_c)^\beta$, con $\beta = \frac{1}{2}$ [95].

L'equazione (6.1), comunque, descrive un accoppiamento globale, ovvero ogni oscillatore è influenzato da tutti gli altri, ed è questa condizione regolare, tra l'altro, che consente di trattare matematicamente il modello. Nel caso di un accoppiamento su una rete complessa, una possibile estensione della (6.1) è:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \lambda \cdot \sum_{j=1}^N c_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (6.5)$$

dove c_{ij} sono gli elementi della matrice di adiacenza del grafo che descrive la rete introdotta nel capitolo 1, mentre λ misura l'intensità dell'accoppiamento. Poiché $c_{ij} = c_{ji} = 1$ (grafo bidirezionale) solamente se gli

oscillatori i e j sono connessi, la dinamica di un oscillatore risulterà influenzata solo dal suo vicinato. L'equazione (6.5) descrive dunque la dinamica della popolazione di oscillatori accoppiati su una topologia qualsiasi, descritta dalla matrice di adiacenza del corrispondente grafo. Essa è usata, ad esempio, come modello della dinamica delle reti di distribuzione elettrica [104].

Nel caso di reti complesse, comunque, la trattazione matematica della dinamica (6.5) risulta estremamente difficile, per cui molti studi ricorrono ad un approccio numerico per determinare come la topologia influenza la dinamica del sistema e la transizione ad uno stato sincronizzato. In ogni caso, la definizione del parametro d'ordine (6.3) come indice dello stato di coerenza del sistema rimane valido.

Tra l'altro, per via della simmetria della matrice di adiacenza, sommando su i ambo i membri della (6.5) si ricava:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N} = \Omega, \quad (6.6)$$

da cui si deduce che un eventuale stato di sincronizzazione sarà sulla frequenza media degli oscillatori (gli oscillatori risultano “congelati” nel sistema rotante nel quale $\Omega = 0$).

6.2 Sincronizzabilità di oscillatori di Kuramoto su rete scale-free

Il modello (6.5) è stato qui indagato utilizzando una rete scale-free costituita da 1000 nodi. Una sua rappresentazione grafica è riportata in Fig. 6.1.

La dinamica del sistema complessivo è stata tramite simulazione numerica delle equazioni (6.5). Per l'integrazione è stato usato un Runge-Kutta del 4° ordine [123]. Le frequenze naturali sono state assegnate ai diversi oscillatori in modo casuale secondo una distribuzione gaussiana a media nulla e deviazione standard $\sigma = 5$, mentre le fasi iniziali risultano uniformemente distribuite, sempre in modo casuale, nell'intervallo $-\pi \leq \theta_i(0) \leq \pi$. Il tempo di integrazione è stato $0 \leq t \leq 100$ s.

Integrate le equazioni (6.5), è stato quindi calcolato il parametro d'ordine (6.2). Per un dato valore dell'accoppiamento λ , l'integrazione è stata ripetuta 50 volte in modo da poter calcolare il valor medio del parametro d'ordine r rispetto ai diversi set di frequenze naturali e fasi iniziali. Il tutto è stato poi ripetuto al variare di λ .

I risultati ottenuti da questa campagna iniziale di simulazioni sono riportati in Fig. 6.2, che mostra chiaramente la transizione ad uno stato di sincronizzazione ($r \sim 1$) all'aumentare dell'accoppiamento.

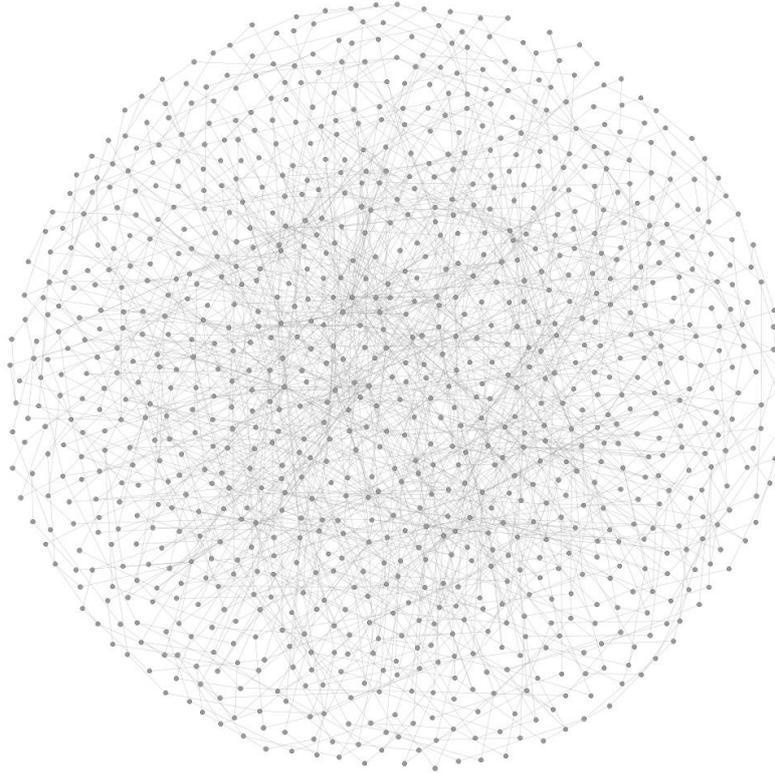


Figura 6.1 – Rete scale-free con $N = 1000$ nodi su cui sono stati accoppiati degli oscillatori di Kuramoto (immagine ottenuta tramite il software GEPHI).

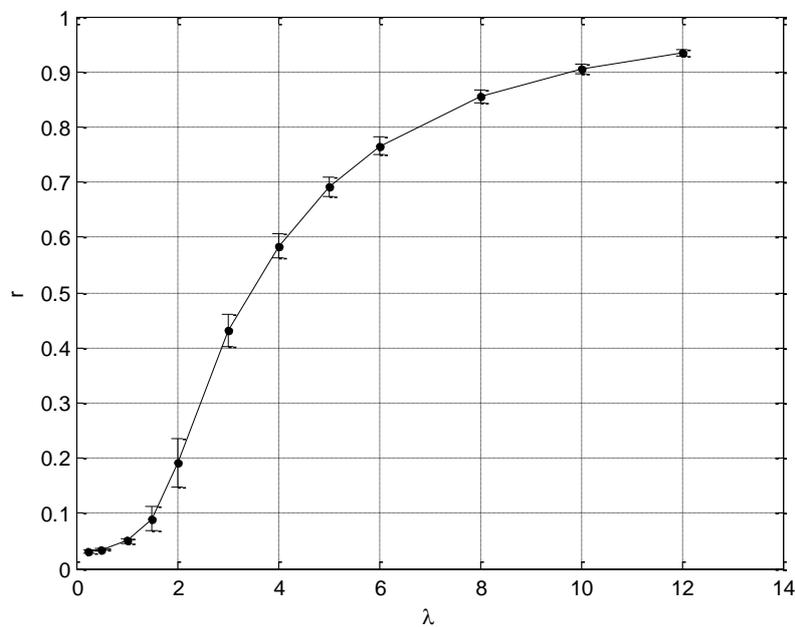


Figura 6.2 – Parametro di ordine r in funzione dell'intensità dell'accoppiamento λ per un sistema di oscillatori di Kuramoto accoppiati su una rete scale-free di $N = 1000$ nodi. Ogni punto è il risultato della media di 50 simulazioni indipendenti, inizializzate con frequenze iniziali distribuite in modo casuale secondo una distribuzione gaussiana di media nulla e deviazione standard $\sigma = 5$. Le fasi iniziali sono assegnate in modo casuale secondo una distribuzione uniforme nell'intervallo $[-\pi, +\pi]$. Le barre d'errore mostrano la deviazione standard dei diversi risultati ottenuti.

Caratterizzata in tal modo la dinamica della rete SF, è stato investigato il problema di forzare o disturbare lo stato di sincronizzazione.

In generale, il controllo della dinamica di una rete complessa è chiaramente un tema di grande importanza e dalle notevoli applicazioni pratiche. Recenti studi hanno affrontato il problema cercando di individuare opportuni ingressi forzanti da inserire sui nodi della rete [50,51,101,168,190]. Oltre al problema di determinare il tipo di ingresso ottimale per guidare la dinamica della rete, occorre dunque individuare i nodi migliori su cui applicare tali segnali [165,188,194].

Chiaramente, però, qualsiasi algoritmo sviluppato per il controllo di una rete deve tener conto anche della complessità computazionale derivante dal grandissimo numero di nodi in gioco. D'altra parte, il concetto stesso di controllo di una rete deve tener conto del gran numero di nodi e della conseguente impossibilità di un effettiva capacità di avere informazioni su ogni singolo nodo di una rete reale.

Un possibile approccio è allora quello di voler controllare un macrostato della rete, tralasciando i dettagli della dinamica dei singoli nodi. È evidente che il parametro d'ordine (6.2) si presta bene a fungere, in questo senso, da parametro termodinamico da controllare.

Incremento della sincronizzabilità

Questa idea di controllo è stata quindi implementata sul modello di Kuramoto (6.5) connesso secondo la rete di Fig. 6.1. La curva di Fig. 6.2 rappresenta la dinamica "libera" della rete al variare dell'accoppiamento λ , e l'obiettivo è quello di forzare o disturbare la sincronizzazione, ovvero modificare il corrispondente valore del parametro d'ordine.

Riguardo la scelta degli ingressi, si è deciso di sostituire un oscillatore su un dato nodo della rete con un *pacemaker*, ovvero con un oscillatore che evolve liberamente con frequenza costante ω_{PM} e che agisce quindi sul suo vicinato come un segnale forzante. Se $\mathbb{P} = \{n_1, \dots, n_{N_{PM}}\}$ rappresenta l'insieme dei nodi su cui inserire N_{PM} pacemaker, le Eq. (6.5) si modificano nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \omega_i + \lambda \cdot \sum_{i,j=1}^N c_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) & i \notin \mathbb{P} \\ \dot{\theta}_i &= \omega_{PM} & i \in \mathbb{P} \end{aligned} \quad (6.7)$$

La frequenza dei pacemaker è stata calcolata come la media delle frequenze naturali dei restanti oscillatori sulla rete:

$$\omega_{PM} = \frac{\sum_{i \notin \mathbb{P}} \omega_i}{N - N_{PM}}, \quad (6.8)$$

In tal modo i pacemaker forzano l'insieme degli altri nodi della rete ad oscillare alla loro frequenza media, che in base alla (6.6) costituisce la frequenza su cui tenderebbero spontaneamente a sincronizzare all'aumentare dell'accoppiamento reciproco. Infine, nel calcolo del parametro d'ordine sono stati esclusi i pacemaker, che risultano sempre ovviamente sincronizzati tra loro, e sono stati considerati solamente gli altri

nodi, ovvero:

$$r(t) \cdot e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N-N_{PM}} \sum_{j \in \mathbb{P}} e^{i\theta_j(t)}. \quad (6.9)$$

Riguardo il posizionamento dei pacemaker, sono state adottate 3 diverse strategie:

- a) Posizionamento random;
- b) Posizionamento “greedy”;
- c) Posizionamento in base alla betweenness.

Per il posizionamento random, banalmente, sono stati scelti a caso N_{PM} nodi e vi sono stati posti i pacemaker.

Per il posizionamento “greedy”, è stato seguito il seguente ragionamento. Nel caso di sincronizzazione, come è stato visto, gli oscillatori si muovono alla frequenza media Ω . Sommando le (6.5) sui nodi appartenenti ad un dato sottocluster S_c della rete, tenendo conto della simmetria della matrice di adiacenza si ottiene:

$$n_n \Omega = \sum_{i \in S_c} \omega_i + \lambda \sum_{\substack{i \in S_c \\ j \notin S_c}} c_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (6.10)$$

dove n_n è il numero di nodi nel sottocluster considerato. In pratica, i termini di accoppiamento si annullano per tutti i nodi appartenenti al sottocluster, e restano solamente i termini che danno l'accoppiamento tra i nodi di S_c e il resto della rete. Dalla (6.10) si ricava quindi la seguente condizione:

$$|\Omega - \omega_m| \leq \frac{n_l}{n_n} \lambda, \quad (6.10)$$

dove ω_m è il valor medio della frequenza dei nodi del sottocluster considerato, mentre n_l è il numero di link che collegano i nodi del sottocluster con gli altri nodi della rete.

La condizione (6.10) vale, in caso di sincronizzazione, per ogni sottocluster della rete. D'altra parte, essa è solo una condizione necessaria.

Si è allora pensato di inserire dei pacemaker all'interno dei subcluster per cui non vale la (6.10), con il duplice beneficio di apportare nella rete dei nodi forzanti, e nello stesso tempo rimuovere una condizione incompatibile con uno stato di sincronizzazione.

Chiaramente, il calcolo di tutti i sottocluster di una rete di 1000 nodi è computazionalmente proibitivo. D'altra parte, appena l'accoppiamento λ comincia ad aumentare, la (6.10) tende ad essere sempre verificata per cluster sufficientemente grandi, in quanto in tal caso la frequenza media ω_m calcolata sul sottocluster approssima la frequenza media globale Ω . Inoltre, nelle reti scale-free, ma non solo, il numero n_l dei link che

fuoriescono da un sottocluster cresce solitamente più velocemente di n_n all'aumentare della taglia del sottocluster. Prove numeriche condotte su reti scale-free più piccole hanno effettivamente mostrato che la (6.10) è praticamente sempre verificata per cluster di più di 6 nodi.

Per scegliere quali nodi della rete sostituire con dei pacemaker è stata allora calcolata la quantità:

$$x(\Omega, S_c) = \frac{n_n}{n_l} |\Omega - \omega_m| \quad (6.11)$$

per tutti i sottocluster S_c della rete formati da un numero di nodi $n_n \leq 6$.

Per un dato accoppiamento λ si individuano quindi i sottocluster per cui $x(\Omega, S_c) > \lambda$. A questo punto, per ogni nodo i appartenente a tali sottocluster, si calcola la somma delle quantità $x(\Omega, S_c)$ relativa ai diversi sottocluster a cui appartiene il nodo, ovvero:

$$U_i = \sum_{S_c | (i \in S_c \ \& \ x(\Omega, S_c) > \lambda)} x(\Omega, S_c) . \quad (6.12)$$

L'espressione (6.12) valuta, in pratica, l'importanza del nodo i come membro contemporaneamente di più sottocluster che non verificano la (6.10), tenendo conto anche dell'effettivo valore della quantità (6.11).

I primi N_{PM} nodi con i valori più alti di U_i vengono quindi sostituiti con dei pacemaker.

Infine, come ulteriore strategia di posizionamento si è pensato di utilizzare la cosiddetta betweenness, che rappresenta una delle misure standard della centralità di un nodo. La betweenness b_i di un nodo i è definita come [26]:

$$b_i = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \frac{n_{jk(i)}}{n_{jk}} , \quad (6.13)$$

dove n_{jk} è il numero di cammini minimi che congiungono i nodi j e k , mentre $n_{jk(i)}$ è il numero di cammini minimi che congiungono j e k passano per i . La betweenness fornisce dunque un'indicazione di quanto un dato nodo è centrale rispetto ai percorsi che si hanno all'interno della rete. L'idea, allora, è che un pacemaker posto nei nodi a più alta betweenness abbia la possibilità di "trasmettere" la sua influenza in modo efficiente al resto della rete.

I risultati ottenuti dal posizionamento rispettivamente di $N_{PM} = 100, 200$ e 300 pacemaker su nodi scelti casualmente sono riportati in Fig. 6.3. La figura fornisce anche un'indicazione della sensibilità della rete di oscillatori di Kuramoto ad essere influenzata dalla presenza di pacemaker. Si nota come anche sostituendo il 30% dei nodi con dei pacemaker prevale l'andamento della dinamica "naturale" della rete, anche se si riesce comunque ad avere un incremento del parametro d'ordine.

Nella Fig. 6.4 è invece riportato il caso del posizionamento dei pacemaker nei nodi selezionati in base alla procedura "greedy". L'effetto sull'andamento del parametro d'ordine è molto diverso rispetto al caso

random. Si riesce infatti a incrementare ancora di più il valore di r , ma le diverse curve presentano ad un certo punto un brusco cambio di pendenza e si sovrappongono.

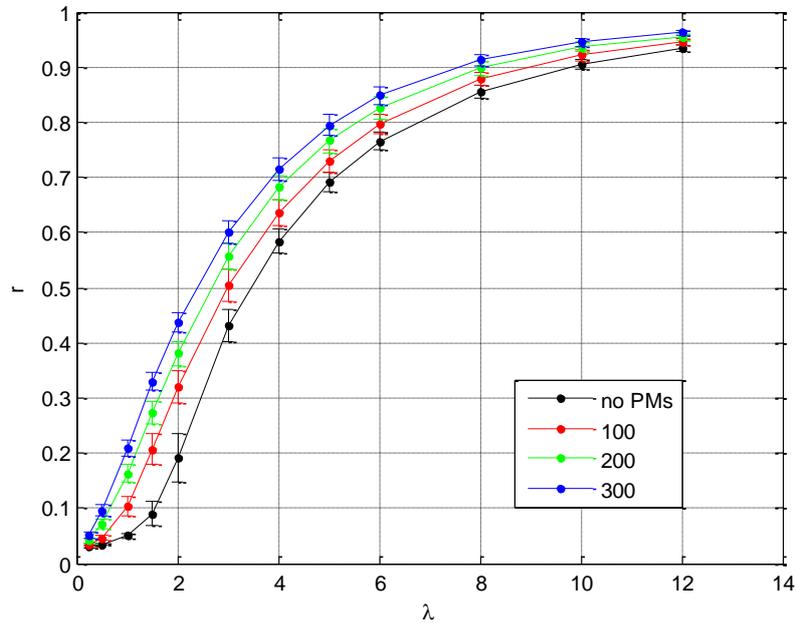


Figura 6.3 – Andamento del parametro d'ordine r in funzione dell'intensità dell'accoppiamento λ nel caso in cui N_{PM} nodi, scelti a caso, sono sostituiti da pacemaker di frequenza ω_{PM} pari alla media delle rimanenti $N - N_{PM}$ frequenze naturali. Ogni punto è il risultato della media di 50 simulazioni indipendenti, con diverse distribuzioni casuali dei pacemaker, delle frequenze naturali e delle fasi iniziali. Le barre d'errore mostrano la deviazione standard dei diversi risultati ottenuti.

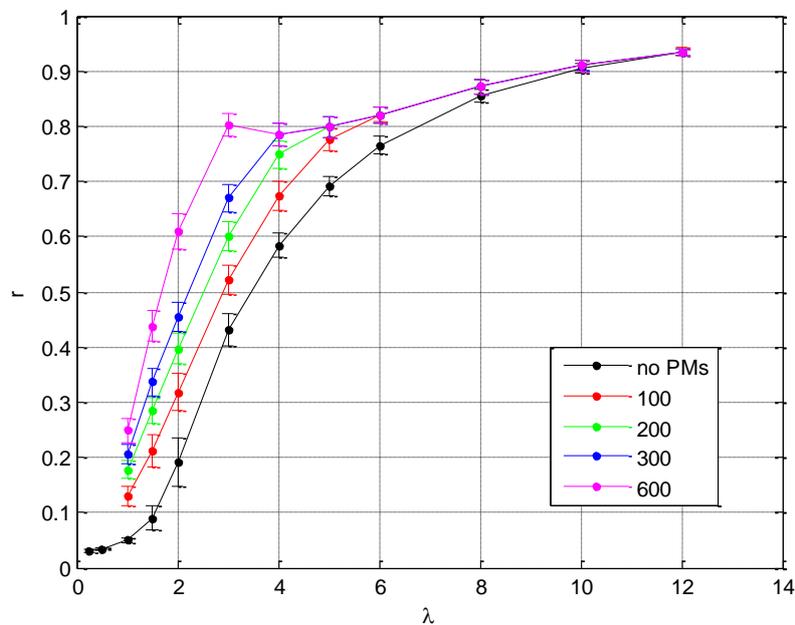


Figura 6.4 – Andamento del parametro d'ordine r in funzione dell'intensità dell'accoppiamento λ nel caso in cui N_{PM} nodi, scelti in base alla procedura greedy, sono sostituiti da pacemaker di frequenza ω_{PM} calcolata come media delle N frequenze naturali iniziali. Ogni punto è il risultato della media di 50 simulazioni indipendenti, con diverse distribuzioni casuali delle frequenze naturali e delle fasi iniziali. Le barre d'errore mostrano la deviazione standard dei diversi risultati ottenuti.

Per comprendere questo comportamento occorre far riferimento alle Figure 6.5 e 6.6, nelle quali è riportato, rispettivamente, il numero di sottocluster che non soddisfano la condizione (6.10). Chiaramente, man mano che l'accoppiamento λ aumenta, ci saranno sempre meno cluster che non rispettano la condizione (6.10), sino al momento in cui il sistema sincronizza e per tutti i sottocluster vale la (6.10).

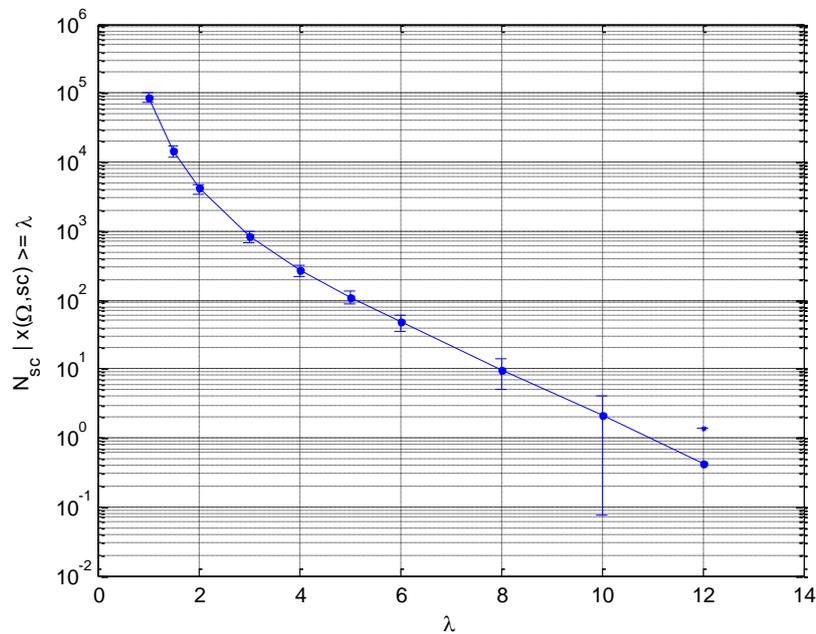


Figura 6.5 – Numero di subcluster che non rispettano la condizione necessaria di sincronizzazione (6.10) in funzione dell'accoppiamento λ . Ogni punto è la media di 100 simulazioni indipendenti, con diverse distribuzioni casuali delle frequenze naturali, e le barre d'errore mostrano la deviazione standard dei risultati ottenuti.

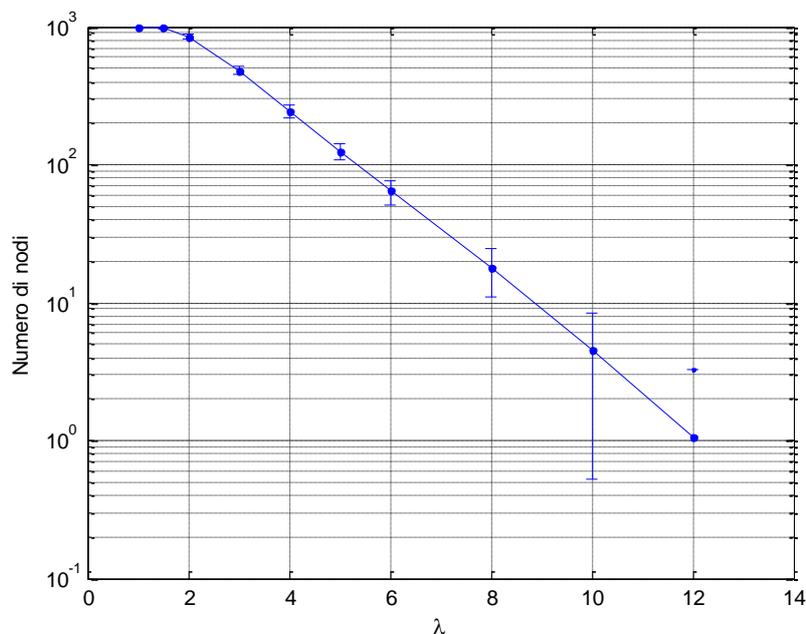


Figura 6.6 – Numero complessivo dei nodi differenti appartenenti ai diversi subcluster per cui $x(\Omega, sc) \geq \lambda$, in funzione dell'accoppiamento λ . Ogni punto è la media di 100 simulazioni indipendenti, con diverse distribuzioni casuali delle frequenze naturali; le barre d'errore mostrano la deviazione standard dei risultati ottenuti.

Quello che accade quindi, è che oltre un certo valore di λ , semplicemente possono non esserci più N_{PM} nodi selezionati con la procedura “greedy” da sostituire con dei pacemaker. In Fig. 6.7 sono riportati i valori medi dei pacemaker che è stato effettivamente possibile utilizzare nella procedura “greedy”.

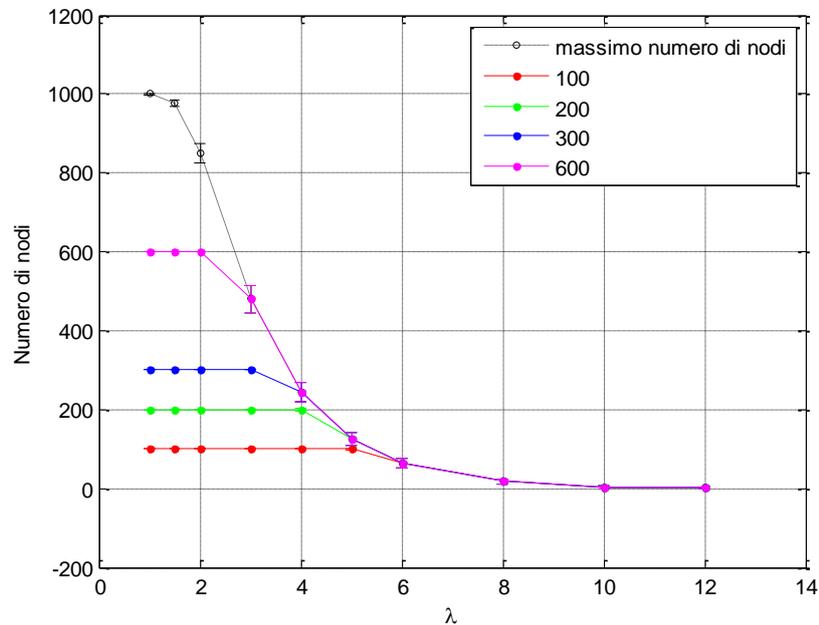


Figura 6.7 – Numero medio di pacemaker effettivamente utilizzate nelle simulazioni effettuate secondo il metodo “greedy”. Ogni punto rappresenta la media di 100 diverse simulazioni indipendenti e le barre d’errore sono pari alla deviazione standard.

Dal confronto tra le Figure 6.6 e 6.7, si comprende dunque il meccanismo con cui varia l’efficacia del posizionamento “greedy” dei pacemaker. Per piccoli λ la quasi totalità dei sottocluster non soddisfa la condizione (6.10), e praticamente tutti i nodi della rete si trovano a far parte di tali sottocluster. La sostituzione di N_{PM} nodi con dei pacemaker, probabilmente migliorerà la situazione di alcuni sottocluster, ma sarà un piccolo effetto rispetto alla situazione complessiva.

Solamente quando, all’aumentare di λ , i sottocluster che non rispettano la (6.10) diminuiscono si avrà che N_{PM} comincia ad essere un valore significativo rispetto al totale dei nodi che appartengono a tali sottocluster “difettosi” (si veda la Fig. 6.6). I pacemaker, allora, andranno ad aggiustare la situazione di un numero percentualmente importante di sottocluster, e si ha effettivamente un aumento del parametro d’ordine superiore al caso di posizionamento random.

Ma mano che λ aumenta, però, ad un certo punto i nodi appartenenti a sottocluster che non soddisfano la (6.10) risulteranno $< N_{PM}$ (Fig. 6.7). Ecco che l’effetto della procedura satura e, anche per diversi valori di N_{PM} , si ha una sovrapposizione dei diversi parametri d’ordine (Fig. 6.4).

Infine, nelle Figure 6.8 e 6.9 sono riportati i risultati ottenuti sostituendo con pacemaker i primi N_{PM} nodi con betweenness rispettivamente più bassa e più alta.

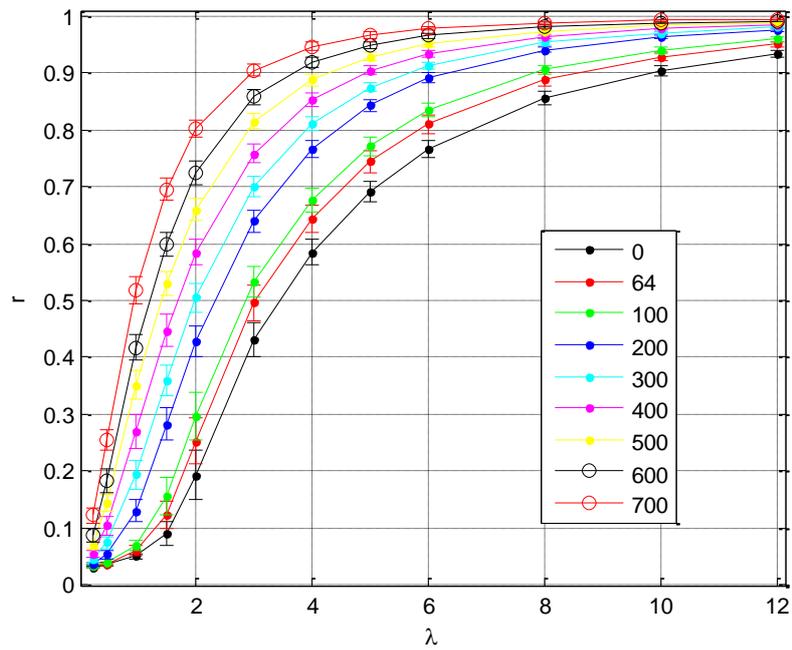


Figura 6.8 – Sostituzione con pacemaker dei primi N_{PM} nodi ordinate in base a valori crescenti di betweenness. La frequenza ω_{PM} è pari alla media delle frequenze naturali dei restanti nodi. Ogni punto rappresenta la media di 50 diverse simulazioni indipendenti e le barre d'errore rappresentano la deviazione standard.

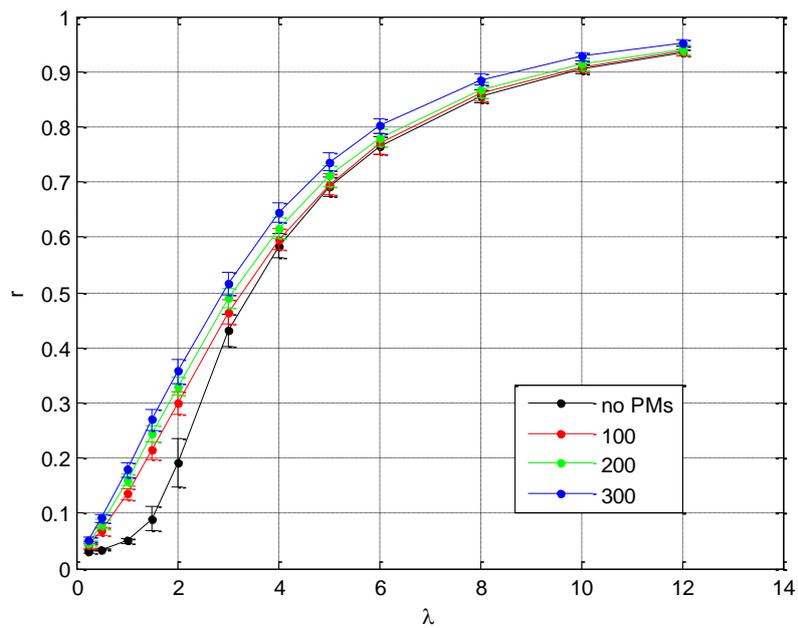


Figura 6.9 – Come in Fig. 6.8, con I nodi ordinate però in base a valori decrescenti di betweenness.

Una possibile interpretazione del diverso andamento dei due casi la si può ottenere facendo ricorso al ragionamento sviluppato per definire la procedura “greedy”. I nodi con alta betweenness, sono anche i nodi che, per definizione stessa di betweenness, fanno mediamente parte di più sottocluster, anche grandi, che rispettano la condizione (6.10). La collocazione di pacemaker in queste posizioni, va quindi ad incidere mediamente su sottocluster per i quali già vale la (6.10).

Discorso opposto vale per i nodi a piccola betweenness, che si dimostrano quindi più adatti ad ospitare dei pacemaker per sincronizzare prima, rispetto ai valori di λ , la rete.

Nelle Figure 6.10-6-12 vengono confrontate le tre metodologie adottate per il posizionamento dei pacemaker.

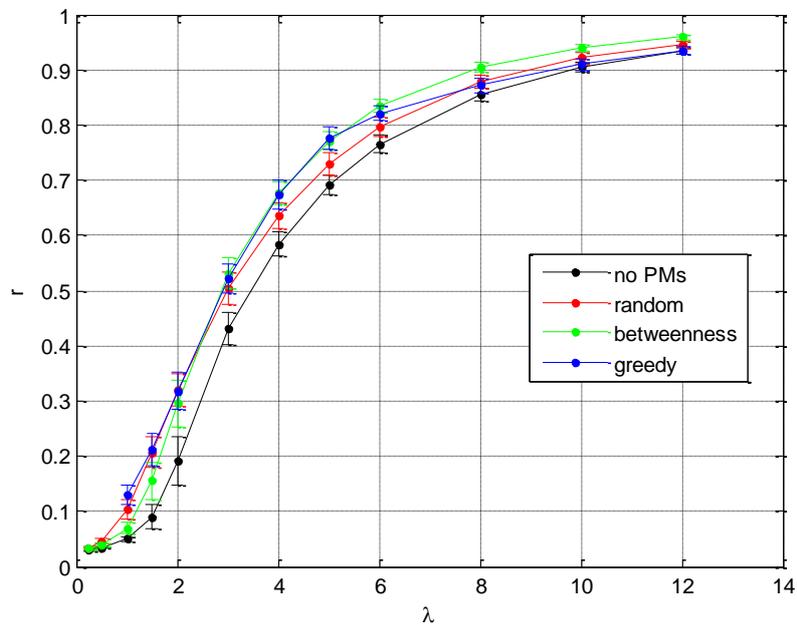


Figura 6.10 – Confronto tra le diverse modalità di posizionamento di $N_{PM}=100$ pacemaker.

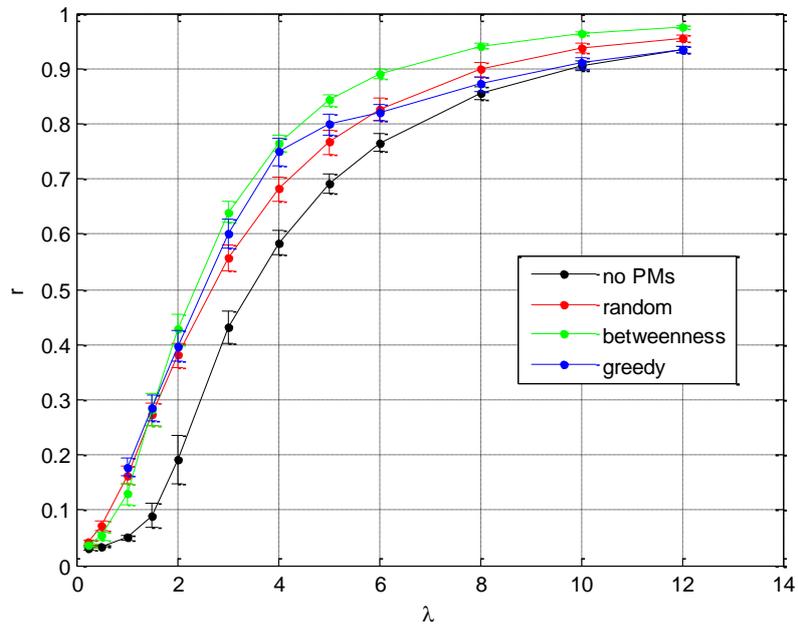


Figura 6.11 – Confronto tra le diverse modalità di posizionamento di $N_{PM}=200$ pacemaker

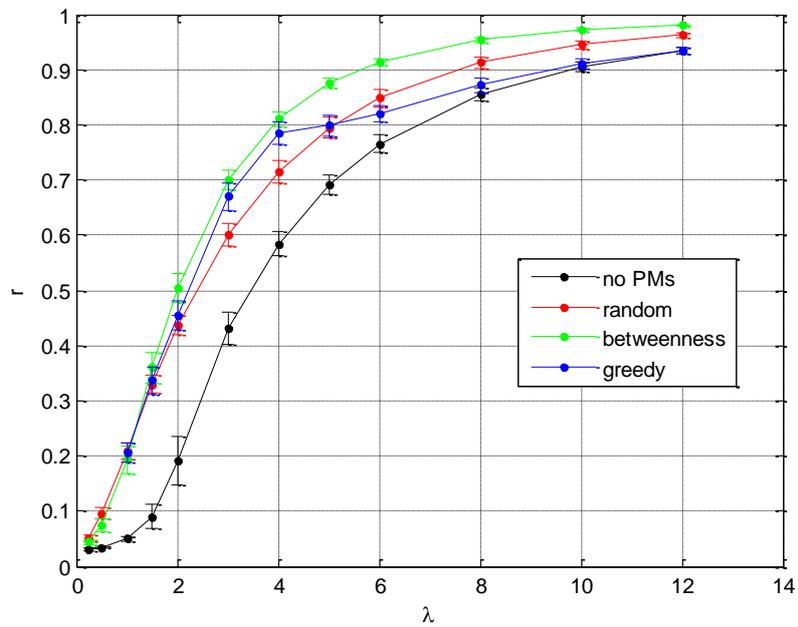


Figura 6.12 – Confronto tra le diverse modalità di posizionamento di $N_{PM}=300$ pacemaker

Disturbo della sincronizzabilità

Nel tentativo, opposto a quello si qui descritto, di disturbare la sincronizzazione sulla rete di oscillatori di Kuramoto, la frequenza dei pacemaker è stata imposta scegliendo in modo casuale tra le due frequenze estreme risultanti dalla realizzazione delle frequenze naturali degli oscillatori. Più in dettaglio, assegnate in modo casuale, secondo una distribuzione gaussiana a media nulla e deviazione standard $\sigma = 5$, le frequenze naturali agli N oscillatori, esse vengono raggruppate in 10 intervalli. Le frequenze degli N_{PM} pacemaker vengono quindi assegnate scegliendo in modo casuale tra i valori centrali dei due intervalli estremi. In tal modo si avranno sulla rete due gruppi, mediamente numericamente equivalenti, di pacemaker a frequenze diverse. Nelle Fig. 6.13 e 6.14 il caso di posizionamento random dei pacemaker.

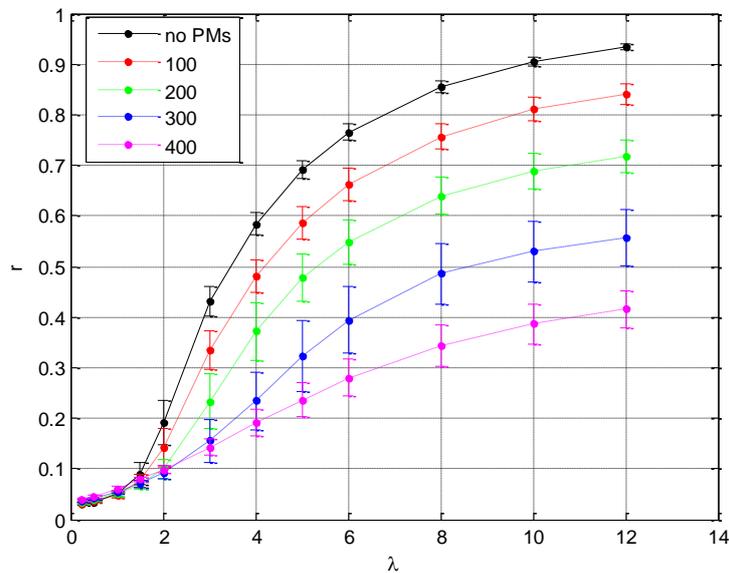


Figura 6.13 – Posizionamento random di pacemaker la cui frequenza ω_{PM} varia in modo casuale tra i due estremi della distribuzione di frequenze naturali degli oscillatori (ogni punto è la media di 50 diverse simulazioni indipendenti e le barre d'errore rappresentano la deviazione standard).

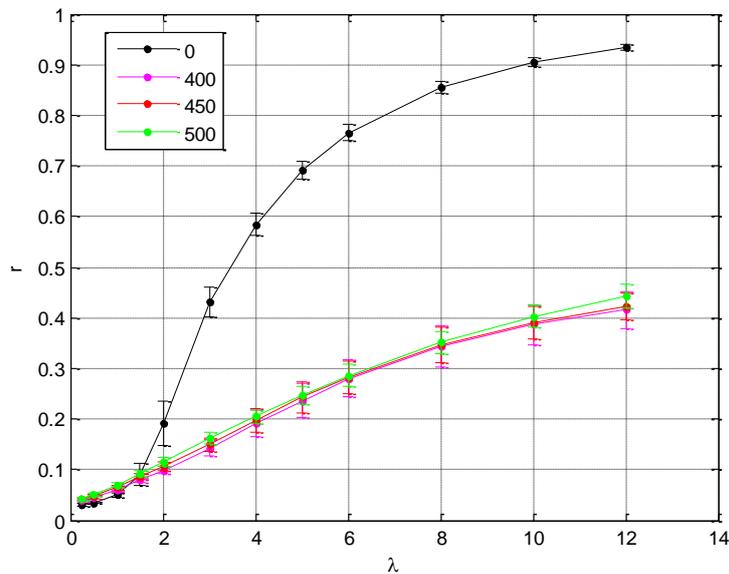


Figura 6.14 – Come in Fig. 6.13, per valori maggiori di pacemaker (ogni punto è la media di 50 diverse simulazioni indipendenti e le barre d'errore rappresentano la deviazione standard).

L'effetto è ora molto più pronunciato, rispetto al caso precedente in cui si voleva aumentare la sincronizzabilità della rete. Si nota inoltre una “saturazione” dell'effetto di disturbo, che non aumenta ulteriormente per $N_{PM} \geq 400$. Ciò è dovuto al fatto che, all'aumentare dell'accoppiamento, gli oscillatori tendono a sincronizzarsi attorno alle due frequenze dei pacemaker, come mostrato in Fig. 6.16.

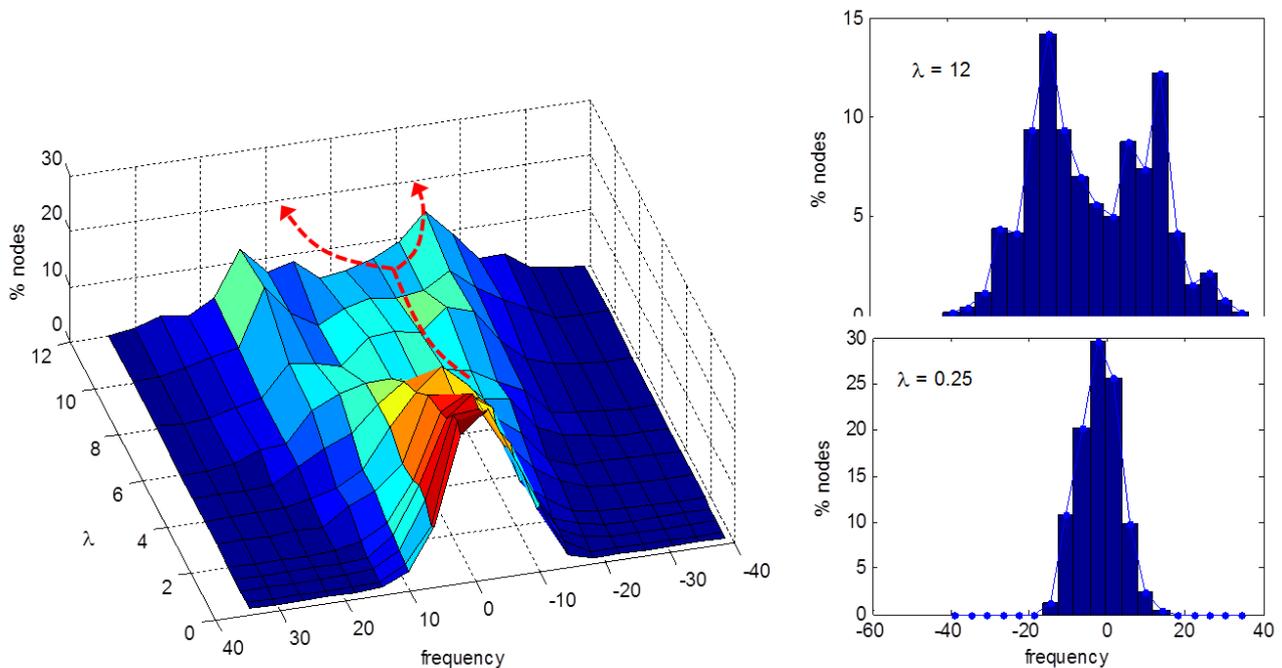


Figura 6.16 – Andamento della distribuzione delle frequenze di oscillazione θ_i , $i \notin \mathbb{p}$, al variare dell'accoppiamento λ quando $N_{PM}=500$ nodi, le cui frequenze variano tra i due valori estremi della distribuzione di frequenze naturali degli oscillatori, sono presenti sulla rete. All'aumentare di λ si creano due famiglie di oscillatori sincronizzate sulle due frequenze dei pacemaker.

Posizionando i pacemaker in base alla betweenness più grande, in base a quanto detto sopra ci si aspetta di “disturbare” sottocluster per cui vale la condizione necessaria (6.10). In effetti, come mostrato in Fig. 6.15, si ottiene una drastica diminuzione della sincronizzabilità della rete. Chiaramente, anche in questo caso si ha una saturazione per via dell'effetto di sincronizzazione locale degli oscillatori attorno alle due frequenze dei pacemaker quando questi diventano presenti in numero importante sulla rete (Fig. 6.16).

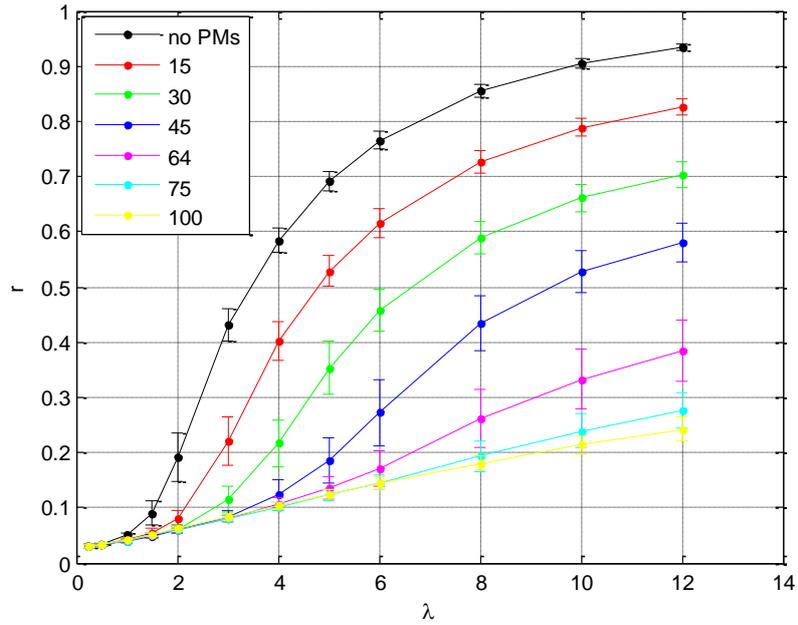


Figura 6.15 – Posizionamento in base ai valori più alti di betweenness di N_{MP} pacemaker la cui frequenza ω_{PM} varia in modo casuale tra i due estremi della distribuzione di frequenze naturali degli oscillatori (ogni punto è la media di 50 diverse simulazioni indipendenti e le barre d'errore rappresentano la deviazione standard).

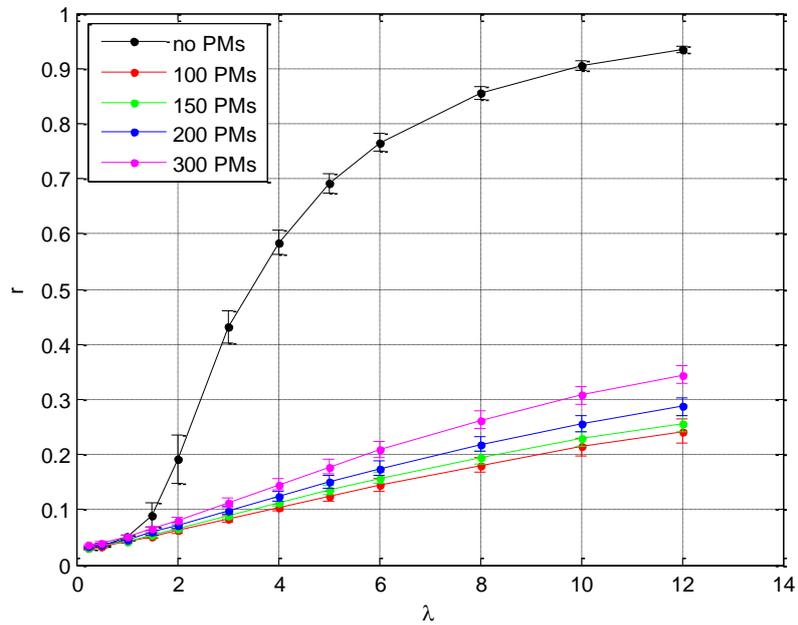


Figura 6.16 – Come in Fig. 6.15 per altri valori di N_{PM} .

7. Conclusioni e futuri sviluppi

Nel presente lavoro di tesi sono stati studiati, tramite accurate simulazioni numeriche, l'evoluzione spontanea e i comportamenti emergenti di oscillatori caotici accoppiati. È questa un tematica di grande interesse sia teorico che applicativo, in quanto gruppi di oscillatori non-lineari interagenti sono in grado di produrre una vasta gamma di fenomeni dinamici, che vanno dalla sincronizzazione allo sviluppo di onde sino all'emergenza di strutture coerenti e pattern. In effetti, un insieme di oscillatori non-lineari accoppiati può essere in molti casi considerato un sistema complesso, un sistema, cioè, le cui caratteristiche globali non sono riconducibili esclusivamente alle proprietà dei suoi costituenti, e che è in grado di manifestare una auto-organizzazione emergente.

Il sistema caotico che è stato l'oggetto principale della ricerca condotta è un sistema memresistivo basato sul circuito di Chua, nel quale il diodo di Chua è sostituito con un memristor a controllo di flusso caratterizzato da una non-linearità cubica. Tale scelta è scaturita dal grandissimo interesse che la comunità scientifica ha manifestato negli ultimi anni nei confronti del memristor e delle proprietà dinamiche dei sistemi memresistivi. In particolare, esiste una vasta famiglia di circuiti non-lineari basati sul memristor che hanno comportamento caotico, oggetto di molti lavori scientifici.

Un primo studio è stato condotto su una coppia di circuiti memresistivi simmetricamente collegati tramite un resistore R_c che modula l'intensità dell'accoppiamento tra i due sistemi: all'aumentare di R_c ci si aspetta che l'influenza reciproca tra i due circuiti diminuisca progressivamente sino a che essi divengono, di fatto, disaccoppiati. Per piccoli valori di R_c , invece, c'è una forte mutua interazione tra i due sistemi. La dinamica spontanea della coppia di circuiti memresistivi è stata quindi studiata numericamente per diversi valori della resistenza di collegamento e per diverse condizioni iniziali. È stato trovato che il sistema formato dai due circuiti va effettivamente in uno stato di sincronizzazione per piccoli valori di R_c , mentre per R_c sufficientemente grande si hanno oscillazioni caotiche dei due circuiti che risultano tra loro scorrelate. La dinamica sincronizzata, invece, può essere sia caotica che periodiche a seconda delle condizioni iniziali dei due circuiti. In entrambi i casi, comunque, lo stato di sincronizzazione presenta aspetti peculiari. In generale, come è noto, il concetto di sincronizzazione per oscillatori caotici è da intendersi in senso più ampio rispetto al caso della perfetta coincidenza tra i segnali, e si può definire uno stato di sincronizzazione tra due sistemi caotici quando questi accordano una qualche proprietà del loro moto su un comportamento comune. Si ha dunque tutta una gamma di situazioni di sincronizzazione, che vanno dalla sincronizzazione completa alla cosiddetta sincronizzazione generalizzata.

Per la coppia di circuiti memresistivi studiata, la sincronizzazione periodica risulta da una forte correlazione tra le oscillazioni pseudo-sinusoidali dei due circuiti, le quali presentano però un piccolo sfasamento periodico che porta i segnali corrispondenti dei due circuiti alternativamente in anticipo e in ritardo uno rispetto all'altro. Ciò fa sì che i diagrammi di correlazione, costruiti riportando i segnali corrispondenti su un piano cartesiano, presentino una particolare forma ad "8".

Anche lo stato di sincronizzazione caotica presenta caratteristiche particolari, in quanto esso è in realtà

costituito da un rapido alternarsi di una fase in cui i segnali, scorrelati, accordano le loro oscillazioni, e di una fase di sincronizzazione effettiva, che va però poi a rompersi e il processo si ripete. La durata della fase di organizzazione dei segnali aumenta con R_c , e ciò comporta un cambiamento da uno stato di sincronizzazione caotica praticamente completa, a forme di intermittenza che finiscono col degradare lo stato di sincronizzazione via via che i valori di R_c crescono.

Queste modalità con cui si realizzano gli stati di sincronizzazione appaiono tipiche della coppia di circuiti memresistivi, in quanto analoghe simulazioni condotte su due circuiti di Chua ordinari, pur evidenziando un quadro fenomenologico globale assai simile, presentano delle normali forme di sincronizzazione completa sia nel caso di sincronizzazione periodica che nel caso di sincronizzazione caotica, con diagrammi di correlazione perfettamente rettilinei. Inoltre il comportamento della coppia di circuiti di Chua appare modulato essenzialmente dal valore della resistenza di accoppiamento R_c , in quanto la progressione della dinamica risulta sostanzialmente indipendente dalle condizioni iniziali investigate. Per i circuiti memresistivi, invece, sembrano essere le condizioni iniziali a determinare il tipo di sincronizzazione, caotica o meno, che si ha per piccoli valori di R_c .

Tra l'altro, anche per il singolo circuito memresistivo è stata evidenziata una maggior dipendenza dalle condizioni iniziali del tipo di dinamica sviluppata rispetto al singolo circuito di Chua. È comunque, questo, un argomento che necessita di ulteriori approfondimenti.

Come estensione del caso della coppia di circuiti memresistivi, si è poi passati ad un anello di tali circuiti, collegati sempre tramite un resistore R_c , e la dinamica globale è stata investigata, per diverse condizioni iniziali, al variare di R_c e di N . Ancora una volta, per forti accoppiamenti il sistema presenta una dinamica caotica sincronizzata che passa a sincronizzazione periodica all'aumentare di R_c o, a parità di accoppiamento, all'aumentare di N . Inoltre, i segnali caotici dei diversi circuiti non sono esattamente coincidenti e, a livello della dinamica globale del sistema, ciò corrisponde alla presenza di un'onda stazionaria caotica sovrapposta al moto complessivo, di cui costituisce una sorta di struttura fine. L'ampiezza di tale onda stazionaria caotica aumenta con R_c e, a parità di accoppiamento, all'aumentare di N , sino a raggiungere un'ampiezza massima poco prima della transizione ad una dinamica globale periodica.

A questo punto, il comportamento manifestato dal sistema all'ulteriore aumento di R_c , prima che i circuiti risultino di fatto disaccoppiati, dipende dal tipo di condizioni iniziali. Tra stati di sincronizzazione completa, sull'anello possono emergere, per opportuni valori di R_c onde progressive pseudo-sinusoidali di varia lunghezza d'onda λ , con valori possibili di λ più piccoli all'aumentare di N . Le ampiezze delle oscillazioni dei singoli circuiti risultano, nel caso delle onde progressive, un po' più grandi rispetto alla situazione di sincronizzazione.

Oppure, per diverse condizioni iniziali, sull'anello possono emergere onde stazionarie periodiche come effetto della presenza di circuiti oscillanti a piccola ampiezza, che fungono da "nodi" di tali onde macroscopiche. Man mano che R_c aumenta, la dinamica di tali circuiti "nodali" diventa caotica e, conseguentemente, il moto globale del sistema risulta via via meno coerente sino a che i circuiti oscillano in modo caotico scorrelato.

Un quadro simile è stato trovato simulando, con analoghe modalità, un anello di circuiti di Chua ma, a differenza del caso dei sistemi memresistivi, la situazione di dinamica caotica sincronizzata che si ha per piccoli valori di R_c è sostanzialmente uno stato di sincronizzazione completa, senza alcuna struttura emergente. La presenza dell'onda stazionaria caotica appare dunque peculiare dei circuiti con memristor.

Totalmente differente è invece la dinamica globale manifestata da un anello di $N = 200$ circuiti memresistivi collegati, ancora una volta, tramite un resistore R_c , ma con uno schema di collegamento asimmetrico. In tal caso, ad alti accoppiamenti il sistema presenta una dinamica globale periodica e sincronizzata, che passa poi ad una dinamica caotica scorrelata all'aumentare della resistenza di accoppiamento. La transizione tra le due dinamiche avviene in modo netto, a differenza dei casi diffusivi in cui, invece, lo stato caotico scorrelato finale viene raggiunto da una graduale entrata nel caos dei vari circuiti del sistema. Inoltre, per un piccolo intervallo di valori di R_c subito dopo la transizione al caos, il sistema di circuiti accoppiati in modo sequenziale produce pattern complessi. Essi sono prodotti dall'interazione e auto-organizzazione delle dinamiche dei singoli circuiti quando questi si muovono su attrattori di tipo spirale di Chua, mentre svaniscono nel momento in cui i circuiti passano ad un attrattore di tipo doppio scroll.

Tale emergenza di pattern complessi appare peculiare di questo tipo di collegamento. Inoltre, il quadro appena descritto vale sia per il sistema memresistivo che per il circuito di Chua. D'altra parte, la differenza tra i questi due sistemi sembra esserci, come rilevato nel caso del collegamento diffusivo, quando si ha sincronizzazione caotica, che però non si produce nel caso dell'accoppiamento sequenziale studiato. Ulteriori indagini sono comunque consigliabili per approfondire, ad esempio, l'effetto delle condizioni iniziali e delle dimensioni dell'anello per questo tipo di accoppiamento.

Inoltre, e ciò vale anche per l'anello diffusivo, si potrebbe indagare l'effetto di una distribuzione non uniforme delle resistenze di collegamento tra i circuiti, così come l'introduzione di ulteriori collegamenti per modificare la geometria dell'anello verso topologie di accoppiamento più complesse.

Infine, è stato studiato il problema della sincronizzabilità di una rete complessa composta da $N = 1000$ oscillatori di Kuramoto accoppiati con una topologia scale-free, proponendo un approccio macroscopico al problema del controllo della sincronizzazione su reti complesse. Nel caso del sistema di Kuramoto, ciò si traduce nell'obiettivo di controllare il parametro d'ordine che misura il grado di sincronizzazione globale del sistema. Si è allora cercato di influenzare lo stato di sincronizzazione della popolazione di oscillatori tramite la sostituzione di alcuni oscillatori con pacemaker forzanti, e sono state provate diverse soluzioni per la scelta dei nodi migliori su cui posizionare i pacemaker. Numerose e accurate simulazioni numeriche hanno permesso di ricavare andamenti medi dai quali si deduce che i nodi più utili sono quelli scelti in base alla *betweenness*., una tipica misura della centralità di un nodo all'interno di una rete complessa. I nodi con *betweenness* più piccola sono in grado di favorire l'insorgere della sincronizzazione, mentre i nodi a *betweenness* più grande sono indicati per disturbare lo stato di sincronizzazione.

Anche questo argomento di ricerca è suscettibile di interessanti approfondimenti, ad esempio estendendo l'approccio ad altri tipi di topologie di reti complesse.

Bigliografia

- 1] Acebron, J. A., Bonilla, L. L., Vicente C. J. P., Ritort, F., & Spigler, R. (2005). The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77, 137-185.
- 2] Adhikari, S. P., Sah, M. P., Kim, H., & Chua, L. O. (2013). Three fingerprints of memristor.
- 3] Albert, R., Jeong, H., & Barabási, A. L. (1999). Internet: Diameter of the world-wide web. *Nature*, 401(6749), 130-131.
- 4] Arena, P., Fortuna, L., & Frasca, M. (2002). Multi-template approach to realize central pattern generators for artificial locomotion control. *International journal of circuit theory and applications*, 30(4), 441-458.
- 5] Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., & Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3), 93-153.
- 6] Bao, B. C., Xu, J. P., & Liu, Z. (2010). Initial state dependent dynamical behaviors in a memristor based chaotic circuit. *Chinese Physics Letters*, 27(7), 070504.
- 7] Bao, B., Ma, Z., Xu, J., Liu, Z., & Xu, Q. (2011). A simple memristor chaotic circuit with complex dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(09), 2629-2645.
- 8] Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439), 509-512.
- 9] Barabási, A. L., Albert, R., & Jeong, H. (1999). Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 272(1), 173-187.
- 10] Barrow, J. D. (1994). *La luna nel pozzo cosmico: contare, pensare ed essere*. Adelphi.
- 11] Belykh, I., Hasler, M., Lauret, M., & Nijmeijer, H. (2005). Synchronization and graph topology. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(11), 3423-3433.
- 12] Bilotta, E., & Pantano, P. (2006). The language of chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(03), 523-557.
- 13] Bilotta, E., Bossio, E., & Pantano, P. (2010). Chaos at school: Chua's circuit for students in junior and senior high school. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(01), 1-28.
- 14] Bilotta, E., Chiaravalloti, F., & Pantano, P. (2014). Spontaneous Synchronization in Two Mutually Coupled Memristor-Based Chua's Circuits: Numerical Investigations. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, Article ID 594962, 15 pages, 2014. (DOI:10.1155/2014/594962)
- 15] Bilotta, E., Chiaravalloti, F., & Pantano, P. (2014). Synchronization and Waves in a Ring of Diffusively Coupled Memristor-Based Chua's Circuits. *Acta Applicandae Mathematicae*, 132, 83-94.
- 16] Bilotta, E., Di Blasi, G., Stranges, F., & Pantano, P. (2007). a Gallery of Chua Attractors Part V. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(05), 1383-1511.
- 17] Bilotta, E., Di Blasi, G., Stranges, F., & Pantano, P. (2007). a Gallery of Chua Attractors Part VI. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(06), 1801-1910.
- 18] Bilotta, E., Di Blasi, G., Stranges, F., & Pantano, P. (2007). A gallery of Chua attractors: Part IV. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(04), 1017-1077.
- 19] Bilotta, E., Pantano, P., & Stranges, F. (2007). A gallery of Chua attractors: Part I. *International journal of Bifurcation and chaos*, 17(01), 1-60.
- 20] Bilotta, E., Pantano, P., & Stranges, F. (2007). A gallery of Chua attractors: Part II. *International journal of Bifurcation and Chaos*, 17(02), 293-380.
- 21] Bilotta, E., Stranges, F., & Pantano, P. (2007). A gallery of chua attractors: Part III. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17(03), 657-734.
- 22] Biolek, D., Biolek, Z., Biolkova, V., & Kolka, Z. (2013, May). Some fingerprints of ideal memristors. In *Circuits and Systems (ISCAS), 2013 IEEE International Symposium on* (pp. 201-204). IEEE.
- 23] Blasius, B., & Stone, L. (2000). Chaos and phase synchronization in ecological systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(10), 2361-2380.
- 24] Boccaletti, S., & Valladares, D. L. (2000). Characterization of intermittent lag synchronization. *Physical Review E*, 62(5), 7497.
- 25] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. L., & Zhou, C. S. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1), 1-101.

- 26] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4), 175-308.
- 27] Bo-Cheng, B., Zhong, L., & Jian-Ping, X. (2010). Transient chaos in smooth memristor oscillator. *Chinese Physics B*, 19(3), 030510.
- 28] Bollobás, B. (1981). Degree sequences of random graphs. *Discrete Mathematics*, 33(1), 1-19.
- 29] Buscarino, A., Fortuna, L., Frasca, M., & Gambuzza, L. V. (2012). A chaotic circuit based on Hewlett-Packard memristor. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2), 023136.
- 30] Buscarino, A., Fortuna, L., Frasca, M., & Sciuto, G. (2009). Chua's circuits synchronization with diffusive coupling: New results. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 19(09), 3103-3107.
- 31] Buzsáki, G., & Draguhn, A. (2004). Neuronal oscillations in cortical networks. *Science*, 304(5679), 1926-1929.
- 32] Capovani M. e Codonetti B. (a c. di), *La matematica computazionale*, "Le Scienze. Quaderni", n. 84, Le Scienze, Milano 1995.
- 33] Chang, T., Yang, Y., & Lu, W. (2013). Building neuromorphic circuits with memristive devices. *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, 13(2), 56-73.
- 34] Chang, W. D. (2009). PID control for chaotic synchronization using particle swarm optimization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(2), 910-917.
- 35] Chanthbouala, A., Garcia, V., Cherifi, R. O., Bouzehouane, K., Fusil, S., Moya, X., ... & Grollier, J. (2012). A ferroelectric memristor. *Nature materials*, 11(10), 860-864.
- 36] Chen, D. Y., Wu, C., Liu, C. F., Ma, X. Y., You, Y. J., & Zhang, R. F. (2012). Synchronization and circuit simulation of a new double-wing chaos. *Nonlinear Dynamics*, 67(2), 1481-1504.
- 37] Chen, F., & Zhang, W. (2007). LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(12), 3384-3393.
- 38] Chen, G., & Yu, X. (Eds.). (2003). *Chaos control: theory and applications* (Vol. 292). Springer.
- 39] Chen, Y., Wu, X., & Gui, Z. (2010). Global synchronization criteria for a class of third-order non-autonomous chaotic systems via linear state error feedback control. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 4161-4170.
- 40] Chua, L. (2011). Resistance switching memories are memristors. *Applied Physics A*, 102(4), 765-783.
- 41] Chua, L. O. (1971). Memristor-the missing circuit element. *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, 18(5), 507-519.
- 42] Chua, L. O. (1992). The genesis of Chua's circuit. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California.
- 43] Chua, L. O., & Kang, S. M. (1976). Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*, 64(2), 209-223.
- 44] Chua, L. O., Itoh, M., Kocarev, L., & Eckert, K. (1993). Chaos synchronization in Chua's circuit. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 3(01), 93-108.
- 45] Chua, L. O., Wu, C. W., Huang, A., & Zhong, G. Q. (1993). A universal circuit for studying and generating chaos. I. Routes to chaos. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 40(10), 732-744.
- 46] Collins, J. J., & Stewart, I. (1993). Hexapodal gaits and coupled nonlinear oscillator models. *Biological Cybernetics*, 68(4), 287-298.
- 47] Collins, J. J., & Stewart, I. (1994). A group-theoretic approach to rings of coupled biological oscillators. *Biological cybernetics*, 71(2), 95-103.
- 48] Collins, J. J., & Stewart, I. N. (1993). Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits. *Journal of Nonlinear Science*, 3(1), 349-392.
- 49] Corinto, F., Ascoli, A., & Gilli, M. (2011). Nonlinear dynamics of memristor oscillators. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 58(6), 1323-1336.
- 50] Cornelius, et al. (2013). Realistic Control of Network Dynamics. *Nature Communications*, 4, 1942
- 51] Cowan, N.J. et al. (2012). Nodal Dynamics, Not Degree Distributions, Determine the Structural Controllability of Complex Networks. *PlosOne*, 7(6),
- 52] Crowley, M. F., & Epstein, I. R. (1989). Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability and in-phase and out-of-phase entrainment. *The Journal of Physical Chemistry*, 93(6), 2496-2502.

- 53] Cuomo, K. M., Oppenheim, A. V., & Strogatz, S. H. (1993). Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. *Circuits and systems II: Analog and digital signal processing, IEEE Transactions on*, 40(10), 626-633..
- 54] Di Ventra, M., Pershin, Y. V., & Chua, L. O. (2009). Circuit elements with memory: memristors, memcapacitors, and meminductors. *Proceedings of the IEEE*, 97(10), 1717-1724.
- 55] Diaconu, A. V., & Loukhaoukha, K. (2013). An improved secure image encryption algorithm based on rubik's cube principle and digital chaotic cipher. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- 56] Dos Santos, A. M., Lopes, S. R., & Viana, R. L. (2004). Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der Pol oscillators in a model for the heartbeat. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 338(3), 335-355.
- 57] Elson, R. C., Selverston, A. I., Huerta, R., Rulkov, N. F., Rabinovich, M. I., & Abarbanel, H. D. (1998). Synchronous behavior of two coupled biological neurons. *Physical Review Letters*, 81(25), 5692.
- 58] Erdős, P., & Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 5, 17-61.
- 59] Ermentrout, G. B. (1985). The behavior of rings of coupled oscillators. *Journal of mathematical biology*, 23(1), 55-74.
- 60] Ermentrout, G. B., & Kopell, N. (1994). Inhibition-produced patterning in chains of coupled nonlinear oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 54(2), 478-507.
- 61] Fitch, A. L., Yu, D., Iu, H. H., & Sreeram, V. (2012). Hyperchaos in a memristor-based modified canonical Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(06).
- 62] Frigon, A. (2012). Central pattern generators of the mammalian spinal cord. *The Neuroscientist*, 18(1), 56-69.
- 63] Fuh, C. C. (2009). Optimal control of chaotic systems with input saturation using an input-state linearization scheme. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(8), 3424-3431.
- 64] Fujisaka, H., & Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1), 32-47.
- 65] Fujisaka, H., & Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1), 32-47.
- 66] Gambino, G., Lombardo, M. C., & Sammartino, M. (2012). Turing instability and traveling fronts for a nonlinear reaction–diffusion system with cross-diffusion. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(6), 1112-1132.
- 67] Gambino, G., Lombardo, M. C., Sammartino, M., & Sciacca, V. (2013). Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion. *Physical Review E*, 88(4), 042925.
- 68] Glass L., Mackey M.C.; "The Rhythms of Life", Princeton University Press, 1988
- 69] Golubitsky, M., Stewart, I., Buono, P. L., & Collins, J. J. (1999). Symmetry in locomotor central pattern generators and animal gaits. *Nature*, 401(6754), 693-695.
- 70] Gray, C. M. (1994). Synchronous oscillations in neuronal systems: mechanisms and functions. *Journal of computational neuroscience*, 1(1-2), 11-38.
- 71] Grzybowski, J. M. V., Rafikov, M., & Balthazar, J. M. (2009). Synchronization of the unified chaotic system and application in secure communication. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(6), 2793-2806.
- 72] Hadley, P., Beasley, M. R., & Wiesenfeld, K. (1988). Phase locking of Josephson junction arrays. *Applied physics letters*, 52(19), 1619-1621.
- 73] Hale, J. K. (1997). Diffusive coupling, dissipation, and synchronization. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 9(1), 1-52.
- 74] Han, S. K., Kurrer, C., & Kuramoto, Y. (1995). Dephasing and bursting in coupled neural oscillators. *Physical Review Letters*, 75(17), 3190-3193.
- 75] Haus, H. A. (2000). Mode-locking of lasers. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 6(6), 1173-1185.
- 76] Heil, T., Fischer, I., Elsässer, W., Mulet, J., & Mirasso, C. R. (2001). Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers. *Physical Review Letters*, 86(5), 795.

- 77] Ho, Y., Huang, G. M., & Li, P. (2011). Dynamical properties and design analysis for nonvolatile memristor memories. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 58(4), 724-736.
- 78] Horikawa, Y. (2013). Metastable and chaotic transient rotating waves in a ring of unidirectionally coupled bistable Lorenz systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 261, 8-18.
- 79] Hramov, A. E., & Koronovskii, A. A. (2005). Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. *EPL (Europhysics Letters)*, 70(2), 169.
- 80] Hu, X., Chen, G., Duan, S., & Feng, G. (2014). A memristor-based chaotic system with boundary conditions. In *Memristor Networks* (pp. 351-364). Springer International Publishing.
- 81] Ijspeert, A. J. (2008). Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: a review. *Neural Networks*, 21(4), 642-653.
- 82] Itoh, M., & Chua, L. O. (2008). Memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(11), 3183-3206.
- 83] Jackson, L. B., Lindgren, A. G., & Kim, Y. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12).
- 84] Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., Oltvai, Z. N., & Barabási, A. L. (2000). The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804), 651-654.
- 85] Jo, S. H., Chang, T., Ebong, I., Bhadviya, B. B., Mazumder, P., & Lu, W. (2010). Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems. *Nano letters*, 10(4), 1297-1301.
- 86] Joglekar, Y. N., & Wolf, S. J. (2009). The elusive memristor: properties of basic electrical circuits. *European Journal of Physics*, 30(4), 661.
- 87] Kavehei, O., Iqbal, A., Kim, Y. S., Eshraghian, K., Al-Sarawi, S. F., & Abbott, D. (2010). The fourth element: characteristics, modelling and electromagnetic theory of the memristor. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, rspa20090553.
- 88] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear systems* (Vol. 3). Upper Saddle River: Prentice hall.
- 89] Kim, H., Sah, M. P., Yang, C., Roska, T., & Chua, L. O. (2012). Neural synaptic weighting with a pulse-based memristor circuit. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 59(1), 148-158.
- 90] Kleinfeld, D., & Sompolinsky, H. (1988). Associative neural network model for the generation of temporal patterns. *Theory and application to central pattern generators. Biophysical Journal*, 54(6), 1039-1051.
- 91] Kocarev, L., & Parlitz, U. (1995). General approach for chaotic synchronization with applications to communication. *Physical Review Letters*, 74(25), 5028.
- 92] Kocarev, L., & Parlitz, U. (1996). Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters*, 76(11), 1816.
- 93] Kopell, N., & Ermentrout, G. B. (1988). Coupled oscillators and the design of central pattern generators. *Mathematical biosciences*, 90(1), 87-109.
- 94] Kouvaritakis, B., & Cannon, M. (Eds.). (2001). *Non-linear Predictive Control: theory and practice* (No. 61). Iet.
- 95] Kuramoto, Y. (2003). *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Courier Dover Publications.
- 96] Kwon, O. M., Park, J. H., & Lee, S. M. (2011). Secure communication based on chaotic synchronization via interval time-varying delay feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 63(1-2), 239-252.
- 97] Li, C., & Chen, G. (2004). Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 343, 263-278.
- 98] Li, C., Chen, Q., & Huang, T. (2008). Coexistence of anti-phase and complete synchronization in coupled Chen system via a single variable. *Chaos, Solitons & Fractals*, 38(2), 461-464.
- 99] Li, Y. N., Chen, L., Cai, Z. S., & Zhao, X. Z. (2004). Experimental study of chaos synchronization in the Belousov-Zhabotinsky chemical system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(4), 767-771.
- 100] Li, Y. N., Chen, L., Cai, Z. S., & Zhao, X. Z. (2004). Experimental study of chaos synchronization in the Belousov-Zhabotinsky chemical system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(4), 767-771.
- 101] Liu, Y. Y., Slotine, J. J., & Barabási, A. L. (2011). Controllability of complex networks. *Nature*, 473(7346), 167-173.

- 102] Liu, Y., Takiguchi, Y., Davis, P., Aida, T., Saito, S., & Liu, J. M. (2002). Experimental observation of complete chaos synchronization in semiconductor lasers. *Applied physics letters*, 80(23), 4306-4308.
- 103] Lorenzo, M. N., Marino, I. P., Perez-Munuzuri, V., Matias, M. A., & Pérez-Villar, V. (1996). Synchronization waves in arrays of driven chaotic systems. *Physical Review E*, 54(4), R3094.
- 104] Lozano, S., Buzna, L., & Diaz-Guilera, A. (2012). Role of network topology in the synchronization of power systems. *The European Physical Journal B*, 85, 231-238.
- 105] Lu, J., Wu, X., & Lü, J. (2002). Synchronization of a unified chaotic system and the application in secure communication. *Physics Letters A*, 305(6), 365-370.
- 106] Lü, J., Yu, X., & Chen, G. (2004). Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 334(1), 281-302.
- 107] Lu, W., & Chen, T. (2006). New approach to synchronization analysis of linearly coupled ordinary differential systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 213(2), 214-230.
- 108] Lubenov, E. V., & Siapas, A. G. (2009). Hippocampal theta oscillations are travelling waves. *Nature*, 459(7246), 534-539.
- 109] Madan, R. N. (Ed.). (1993). *Chua's circuit: a paradigm for chaos* (Vol. 1). Singapore: World Scientific.
- 110] Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S., & Zannette, D. H. (2004). *Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems* (Vol. 2). World Scientific.
- 111] Mariño, I. P., Pérez-Muñuzuri, V., & Matías, M. A. (1998). Desynchronization transitions in rings of coupled chaotic oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8(08), 1733-1738.
- 112] Matias, M. A., Pérez-Muñuzuri, V., Lorenzo, M. N., Marino, I. P., & Pérez-Villar, V. (1997). Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators. *Physical review letters*, 78(2), 219.
- 113] Merrikh-Bayat, F., & Shouraki, S. B. (2011). Memristor-based circuits for performing basic arithmetic operations. *Procedia Computer Science*, 3, 128-132.
- 114] Messias, M., Nespoli, C., & Botta, V. A. (2010). Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(02), 437-450.
- 115] Mirollo, R. E., & Strogatz, S. H. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(6), 1645-1662.
- 116] Moreno, Y., & Pacheco, A. F. (2004). Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 68(4), 603.
- 117] Mosekilde, E., Maistrenko, Y. & Postnov, D. [2002] *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey).
- 118] Muthuswamy, B. (2010). Implementing memristor based chaotic circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05), 1335-1350.
- 119] Muthuswamy, B., & Chua, L. O. (2010). Simplest chaotic circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(05), 1567-1580.
- 120] Muthuswamy, B., & Kokate, P. P. (2009). Memristor-based chaotic circuits. *IETE Technical Review*, 26(6), 417.
- 121] Niebur, E., Schuster, H. G., Kammen, D. M., & Koch, C. (1991). Oscillator-phase coupling for different two-dimensional network connectivities. *Physical Review A*, 44(10), 6895.
- 122] Nowotny, T., Huerta, R., & Rabinovich, M. I. (2008). Neuronal synchrony: peculiarity and generality. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(3), 037119.
- 123] Numerical recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge University Press (1992)
- 124] Omel'chenko, O. E. (2013). Coherence–incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators. *Nonlinearity*, 26(9), 2469.
- 125] paolo zellini *Calcolo*, 1996
- 126] Parmananda, P. (1997). Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos. *Physical Review E*, 56(2), 1595.
- 127] Pecora, L. M. (1998). Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems. *Physical review E*, 58(1), 347.
- 128] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821.

- 129] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1991). Driving systems with chaotic signals. *Physical Review A*, 44(4), 2374.
- 130] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1998). Master stability functions for synchronized coupled systems. *Physical Review Letters*, 80(10), 2109.
- 131] Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A., Mar, D. J., & Heagy, J. F. (1997). Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(4), 520-543.
- 132] Perlikowski, P., Yanchuk, S., Wolfrum, M., Stefanski, A., Mosiolek, P., & Kapitaniak, T. (2010). Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(1), 013111.
- 133] Pershin, Y. V., & Di Ventra, M. (2010). Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks. *Neural Networks*, 23(7), 881-886.
- 134] Pershin, Y. V., & Di Ventra, M. (2011). Memory effects in complex materials and nanoscale systems. *Advances in Physics*, 60(2), 145-227.
- 135] Pershin, Y. V., La Fontaine, S., & Di Ventra, M. (2009). Memristive model of amoeba learning. *Physical Review E*, 80(2), 021926.
- 136] Pikovsky, A., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2000). Phase synchronization in regular and chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10(10), 2291-2305.
- 137] Ponomarenko, V. I., Prokhorov, M. D., Bespyatov, A. B., Bodrov, M. B., & Gridnev, V. I. (2005). Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(4), 1429-1438.
- 138] Pyragas, K. (1996). Weak and strong synchronization of chaos. *Physical Review E*, 54(5), R4508.
- 139] Qun, L., Hai-Peng, P., Ling-Yu, X., & Yi Xian, Y. (2012). Lag Synchronization of Coupled Multidelay Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- 140] Rosa Jr, E., Ott, E., & Hess, M. H. (1998). Transition to phase synchronization of chaos. *Physical review letters*, 80(8), 1642.
- 141] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., & Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22), 4193.
- 142] Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., & Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22), 4193.
- 143] Rosenblum, M., & Pikovsky, A. (2003). Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*, 44(5), 401-416.
- 144] Ruelle D., "Caos e caso", Bollati Boringhieri, Torino 1992.
- 145] Rulkov, N. F. (1996). Images of synchronized chaos: Experiments with circuits. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 6(3), 262-279.
- 146] Rulkov, N. F., Sushchik, M. M., Tsimring, L. S., & Abarbanel, H. D. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2), 980.
- 147] Seo, K., Chung, S. J., & Slotine, J. J. E. (2010). CPG-based control of a turtle-like underwater vehicle. *Autonomous Robots*, 28(3), 247-269.
- 148] Shabunin, A., Astakhov, V., & Anishchenko, V. (2002). Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: Synchronization and hierarchy of multistability formation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(08), 1895-1907.
- 149] Shabunin, A., Astakhov, V., & Anishchenko, V. (2002). Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: Synchronization and hierarchy of multistability formation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(08), 1895-1907.
- 150] Shin, S., Kim, K., & Kang, S. (2011). Memristor applications for programmable analog ICs. *Nanotechnology*, *IEEE Transactions on*, 10(2), 266-274.
- 151] Sparrow, C. (1982). *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors* (Vol. 41). New York: Springer-Verlag.
- 152] Stewart I., "Dio gioca a dadi?", Bollati Boringhieri, Torino 1993.
- 153] Strogatz, S. H. (2000). From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 143, 1-20.

- 154] Strogatz, S. H., & Mirollo, R. E. (1988). Collective synchronisation in lattices of nonlinear oscillators with randomness. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(13), L699.
- 155] Strukov, D. B., Snider, G. S., Stewart, D. R., & Williams, R. S. (2008). The missing memristor found. *nature*, 453(7191), 80-83.
- 156] Sun, J., Shen, Y., Yin, Q., & Xu, C. (2013). Compound synchronization of four memristor chaotic oscillator systems and secure communication. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(1), 013140.
- 157] Takamatsu, A., Tanaka, R., Yamada, H., Nakagaki, T., Fujii, T., & Endo, I. (2001). Spatiotemporal symmetry in rings of coupled biological oscillators of *Physarum plasmodial* slime mold. *Physical review letters*, 87(7), 078102.
- 158] Takiguchi, Y., Ohyagi, K., & Ohtsubo, J. (2003). Bandwidth-enhanced chaos synchronization in strongly injection-locked semiconductor lasers with optical feedback. *Optics letters*, 28(5), 319-321.
- 159] Tanaka, H. A., Lichtenberg, A. J., & Oishi, S. I. (1997). Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 100(3), 279-300.
- 160] Tinsley, M. R., Nkomo, S., & Showalter, K. (2012). Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics*, 8(9), 662-665.
- 161] Tour, J. M., & He, T. (2008). Electronics: The fourth element. *Nature*, 453(7191), 42-43.
- 162] Ueta, T. (Ed.). (2002). *Chaos in circuits and systems* (Vol. 11). World Scientific.
- 163] Varangis, P. M., Gavrielides, A., Erneux, T., Kovanis, V., & Lester, L. F. (1997). Frequency entrainment in optically injected semiconductor lasers. *Physical review letters*, 78(12), 2353.
- 164] Volos, C. K., Kyprianidis, I. M., Stouboulos, I. N., & Capișcă, C. (2011, July). Complex Dynamics of a Memristor Based Chua's Canonical Circuit. In *Proceedings of the 5th WSEAS international conference on Communications and information technology* (pp. 111-116). World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- 165] Wang X F, Chen G. Pinning control of scale-free dynamical networks. *Physica A*, 2002, 310: 521–531
- 166] Wang, L., Drakakis, E., Duan, S., He, P., & Liao, X. (2012). Memristor model and its application for chaos generation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(08).
- 167] Wang, L., Duan, M., & Duan, S. (2013). Memristive perceptron for combinational logic classification. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- 168] Wang, W. X., Lai, Y. C., Ren, J., Li, B., & Grebogi, C. (2011). Controllability of complex networks with nonlinear dynamics. *arXiv preprint arXiv:1107.2177*.
- 169] Wang, X. F. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(05), 885-916.
- 170] Wang, X. F., & Chen, G. (2002). Pinning control of scale-free dynamical networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 310(3), 521-531.
- 171] Wang, X. F., & Chen, G. (2002). Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *IEEE Transactions on*, 49(1), 54-62.
- 172] Wang, X. F., & Chen, G. (2002). Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(01), 187-192.
- 173] Wang, X., & Chen, G. (2002b). Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 187-192
- 174] Wang, X., & Chen, Y. (2010, March). Spintronic memristor devices and application. In *Proceedings of the Conference on Design, Automation and Test in Europe* (pp. 667-672). European Design and Automation Association.
- 175] Wasserman, S. (1994). *Social network analysis: Methods and applications* (Vol. 8). Cambridge university press.
- 176] Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *nature*, 393(6684), 440-442.
- 177] Wembe, E. T., & Yamapi, R. (2009). Chaos synchronization of resistively coupled Duffing systems: numerical and experimental investigations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 1439-1453.

- 178] Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. *Communications on pure and applied mathematics*, 13(1), 1-14.
- 179] Williams, R. (2008). How we found the missing memristor. *Spectrum, IEEE*, 45(12), 28-35.
- 180] Winfree, A. T. (1994). Electrical turbulence in three-dimensional heart muscle. *Science*, 266(5187), 1003-1006.
- 181] Wu, C. W., & Chua, L. O. (1993). A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3(06), 1619-1627.
- 182] Wu, C. W., & Chua, L. O. (1995). Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 42(8), 430-447.
- 183] Wu, C. W., & Chua, L. O. (1996). On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 43(2), 161-165.
- 184] Yamapi, R., & Wofofo, P. (2005). Dynamics and synchronization of coupled self-sustained electromechanical devices. *Journal of Sound and Vibration*, 285(4), 1151-1170.
- 185] Yang, J. J., Strukov, D. B., & Stewart, D. R. (2013). Memristive devices for computing. *Nature nanotechnology*, 8(1), 13-24.
- 186] Yang, J., & Hu, G. (2007). Three types of generalized synchronization. *Physics Letters A*, 361(4), 332-335.
- 187] Yang, T., Wu, C. W., & Chua, L. O. (1997). Cryptography based on chaotic systems. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(5), 469-472.
- 188] Yu et al.; 2009. On pinning synchronization of complex dynamical networks. *Automatica* 45 (2009) 429-435.
- 189] Yu, Y., & Zhang, S. (2004). The synchronization of linearly bidirectional coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(1), 189-197.
- 190] Yuan, Z., Zhao, C., Di, Z., Wang, W. X., & Lai, Y. C. (2013). Exact controllability of complex networks. *Nature communications*, 4. (DOI: 10.1038/ncomms3447)
- 191] Zaks, M. A., Park, E. H., Rosenblum, M. G., & Kurths, J. (1999). Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Physical review letters*, 82(21), 4228.
- 192] Zambelli, S. (2011). Flexible accelerator economic systems as coupled oscillators. *Journal of Economic Surveys*, 25(3), 608-633.
- 193] Zanarini G.; 1996. complessità come modo di pensare il mondo. In "Caos e Complessità", collana TESSERE, SISSA, CUEN (a cura di Simona Cerrato, KIS, Trieste)
- 194] Zhan M, Gao J, Wu Y, et al. Chaos synchronization in coupled systems by applying pinning control. *Phys Rev E*, 2007,76: 036203
- 195] Zhang, X., Fu, M., Xiao, J., & Hu, G. (2006). Self-organization of chaos synchronization and pattern formation in coupled chaotic oscillators. *Physical Review E*, 74(1), 015202.
- 196] Zhong, G. Q. (1994). Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-Part I-Fundamental Theory and Applications*, 41(12), 934-940.