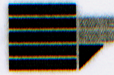


UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA



UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Dipartimento di FISICA

Scuola di Dottorato Archimede

Indirizzo: Scienze e Tecnologie dei Sistemi Complessi

CICLO XXVII

Recenti sviluppi dell'Algebra e della Geometria
Computazionale nell'Arte e nella Comunicazione

Settore Scientifico Disciplinare MAT/07

RELATORE

Ch.mo Prof. *Pietro Pantano*

Pietro Pantano

CORRELATORE

Ch.ma Prof.sa *Gaetana Restuccia*

Gaetana Restuccia

CANDIDATO

Dot. *Vincenzo Ioffida*

Vincenzo Ioffida

INDICE

INTRODUZIONE _____	p.4
Capitolo primo – I Polotopi _____	p. 11
1.1 – I Polotopi in arte e in matematica _____	p. 11
1.2 – I Polotopi e la multidisciplinarietà _____	p. 20
1.3 – APPENDICE _____	p. 31
1.3.1 – I Polotopi convessi _____	p. 31
1.3.2 – Shellability _____	p. 40
1.3.3 – Shellable e Complessi non shellable _____	p. 41
1.3.4 – Il Teorema del limite superiore _____	p. 44
Capitolo secondo – I Complessi Simpliciali _____	p. 51
2.1 – I Complessi Simpliciali in arte e in matematica	p. 51
2.2 – I Complessi Simpliciali e la multidisciplinarietà	p. 56
2.3 – APPENDICE _____	p. 61
2.3.1 – I Complessi Simpliciali _____	p. 61
2.3.2 – La triangolazione _____	p. 77
2.3.3 – La triangolazione di un insieme di punti lattice _____	p. 78
2.3.4 – Alcune nuove figure _____	p. 81
Capitolo terzo – Le Varietà Algebriche _____	p. 82
3.1 - Varietà Algebriche in arte e in matematica __	p. 82
3.2 - Varietà Algebriche e la multidisciplinarietà __	p. 92
3.3 - APPENDICE _____	p. 96
3.3.1 – La superficie di Veronese _____	p. 96
3.3.2 – La rappresentazione della varietà di Veronese _____	p. 98
3.3.3 – Sottovarietà di varietà di Veronese _____	p. 99
3.3.4 – Varietà di Segre _____	p. 101
3.3.5 – Sottovarietà di varietà di Segre _____	p. 105

3.3.6 - Manipolando equazioni di varietà algebriche	p. 107
Capitolo quarto – La Teoria dei Nodi	p. 111
4.1 - I Nodi in arte e in matematica	p. 111
4.2 - I Nodi e la multidisciplinarietà	p. 127
4.3 - APPENDICE	p. 130
4.3.1 – Elementi fondamentali	p. 131
4.3.2 – Operazioni sui Nodi	p. 139
4.3.3 – Invarianti topologici	p. 142
4.3.4 – Invarianti polinomiali	p. 146
Capitolo quinto – Aspetti didattici della Geometria Algebrica	p. 163
5.1 - Aspetti didattici	p. 162
5.2 - Aspetti multidisciplinari	p. 164
5.3 - Linee guida per una attività didattica	p. 170
5.4 - Appendice	p. 179
BIBLIOGRAFIA	p. 181

INTRODUZIONE

La consapevolezza che lo sviluppo delle discipline matematiche sia avvenuto in maniera parallela e, in alcuni casi, abbia anticipato un analogo sviluppo non solo della filosofia e della scienza ma anche del nostro modo di percepire, descrivere e rappresentare il mondo sensibile attraverso l'arte, ha ispirato l'argomento della presente tesi. Il passaggio dalla geometria euclidea del mondo greco alla geometria prospettiva del Rinascimento, alla geometria non euclidea del diciottesimo e del diciannovesimo secolo, alla geometria delle "forme topologiche" nel ventesimo secolo, deve essere letto come parallelo al passaggio dalla staticità dell'arte e dell'architettura antica alla giusta rappresentazione spaziale e alla perfezione delle opere rinascimentali, all'evoluzione delle forme artistiche nel diciottesimo secolo (divisionismo, espressionismo, impressionismo) fino alla completa rottura della simmetria nelle forme d'arte moderne e contemporanee. [163] [164]

Attualmente, la matematica assume un ruolo importante in tutte le forme d'arte, siano esse figurative, plastiche, visive, acustiche o costruttive. Teorie e metodi, anche sofisticati, dell'analisi e della geometria sono infatti utilizzati per generare arte e musica con l'ausilio di calcolatori e di dispositivi elettronici. Un ruolo particolare è ricoperto in questo campo dai metodi topologici moderni, basati sulla rinuncia alle figure predefinite e, di conseguenza, sul concetto di frattale, inteso come entità dotata di proprietà di autosimilarità.

La tesi pertanto persegue l'obiettivo di riportare la matematica, nel suo sviluppo storico e nella sua modernità, alle discipline artistiche. Esso parte dalla geometria euclidea per arrivare fino alla teoria dei nodi, e sottolinea il profondo intreccio tra matematica ed arte (anche nelle loro più moderne accezioni), riducendo al minimo il bagaglio di dimostrazioni e di calcoli, per i quali l'approfondimento è di volta in volta suggerito attraverso richiami bibliografici. Nel presentare le interazioni tra matematica ed arte, si è cercato di mantenere per quanto possibile un atteggiamento "storicista", di cogliere cioè il sottile parallelismo che, seguendo il progresso del pensiero e delle conoscenze, ha visto evolvere nel tempo il pensiero

matematico, la nostra percezione del mondo fisico ed il nostro modo di concepire o sviluppare l'arte come mezzo per riempire armonicamente, o descrivere e rappresentare esteticamente, oppure trascendere e trasfigurare il mondo sensibile. La novità nell'approccio alla geometria, ispiratrice di ogni forma d'arte, avviene senz'altro nella seconda metà del secolo XX fino ad oggi ed è rappresentata dall'algebra computazionale. Seguendo questa strada, lo sviluppo della tesi è stato incentrato sull'utilizzo di metodi dell'algebra e della geometria computazionale che in questi ultimi anni hanno contribuito all'introduzione di oggetti geometrici del tutto nuovi nel mondo della rappresentazione visiva. Pertanto lo scopo della ricerca è la scoperta di nuove figure geometriche, eventuale soggetto di figure o oggetti artistici. Infatti è noto che una varietà algebrica dello spazio proiettivo \mathbb{P}^n è definita da un ideale generato da forme, che sostanzialmente sono le equazioni della varietà. Con l'introduzione di un ordinamento di termini (*term order*), introdotto nell'anello dei polinomi $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ (\mathbb{C} il campo dei numeri complessi), si può passare al cosiddetto ideale iniziale (teoria delle basi di Gröebner) che è un ideale monomiale e definisce un altro oggetto geometrico, precisamente o un arrangiamento di iperpiani di \mathbb{P}^n o un complesso simpliciale su $n + 1$ vertici. L'orizzonte è stato ampliato con nuove forme geometriche, finora sconosciute.

Ancora, un ideale monomiale può essere univocamente determinato dall'insieme di punti lattice di K^{n+1} , essendo K un campo e tali punti lattice danno luogo ad un involucro convesso o politopo, d'onde il manifestarsi matematicamente di nuove classi di politopi convessi, che si aggiungono a quelli storici e che spesso vengono ritrovati. Ma ce ne sono di nuovi!

Si introduce adesso l'esposizione del contenuto dei singoli capitoli della tesi.

Nel primo capitolo è stato affrontato lo studio dei politopi partendo dalle geometrie che hanno maggiormente affascinato e catturato l'estro di artisti e la genialità di studiosi.

In particolar modo, è stata trattata la tematica degli iperspazi per i quali matematici, fisici ed artisti, ognuno secondo le proprie inclinazioni scientifiche, hanno indirizzato i loro studi, completandosi a vicenda, con l'intento non solo di

rappresentare visivamente un sistema a più dimensioni ma anche di trovare delle tecniche di calcolo che potevano consentire di descrivere forme di dimensione superiore.

In tale ambito l'ente geometrico più interessante è certamente l'ipercubo che può essere ritrovato con vari procedimenti algebrici e che sarà investigato anche nel capitolo dedicato ai complessi simpliciali.

Lo studio dei politopi, ancora oggi, continua a suscitare grande interesse sia dal punto di vista geometrico che algebrico.

Pur se l'intelletto si spinge all'intuizione di concetti così astratti, il problema di rendere visibili e quindi di immaginare i politopi ha condotto a studiarli con strumenti specifici, necessari a definire precise regole per la codifica dei singoli oggetti, allo scopo di renderli più comprensibili concettualmente, attraverso forme geometriche non statiche, e quindi in tal caso riduttive.

Nel secondo capitolo sono stati trattati i complessi simpliciali dal punto di vista dell'algebra astratta. La teoria dei complessi simpliciali è sviluppata attualmente (B. Stürmfels) nel contesto dell'algebra computazionale e della teoria delle basi di Gröebner.

Le tecniche presentate possono essere applicate a contesti diversi a partire da semplici elementi fino a creare nuovi oggetti sempre più complessi e multidimensionali, dove strutture geometriche che identificano un complesso simpliciale ne descrivono la struttura di connessione dei simplessi che lo generano. In tale ambito la ricerca verte a creare o mettere in evidenza immagini composte, colorate, simili ai caleidoscopi o a multicolorate vetrate o tessuti patchwork sicuramente originali.

Nel lavoro di tesi sono state proposte nuove forme legate alla triangolazione lessicografica (a volte note) e lessicografica inversa (del tutto nuove), oggetto di generalizzazione a dimensione superiori.

Tali risultati costituiscono degli oggetti artistici originali e sono oggetto di ulteriore studio e approfondimento.

L'argomento trattato nel terzo capitolo riguarda le varietà algebriche classiche, ma studiate con metodi moderni dell'algebra e della geometria computazionale che permettono di dare, attraverso proiezioni o deformazioni piatte (passaggio dal loro

ideale di definizione all'ideale iniziale e quindi alla varietà torica ad esse connessa), una visione parziale della varietà.

Tra queste, è stata approfondita la varietà di Veronese (legata a grafi con cappi) e la varietà di Segre (legata a problemi di business per scambi di unità di un bene indivisibile e studiati mediante grafi bipartiti). Le varietà algebriche meritano un posto di rilievo nel nostro studio, essendo presenti sia in ambito fisico che come elementi architettonici e artistici. Le loro rappresentazioni per piccole dimensioni riproducono realizzazioni eleganti e perfette nel mondo della computer grafica.[14]

Il quarto capitolo è essenzialmente una survey della teoria dei nodi, una teoria matematica che si sviluppa nella seconda metà dell'Ottocento con Lord Kelvin con lo studio sui vortici annodati di etere come modelli per gli atomi.

I nodi rappresentano un settore molto sviluppato della topologia al quale, soltanto a partire dalla metà del XX secolo, studiosi e artisti hanno rivolto una ragguardevole attenzione.

I nodi sono intesi come una astrazione matematica dell'oggetto fisico dato da una stringa deformabile con spessore trascurabile, in cui gli estremi sono uniti. Essi ci introducono in un mondo fatto di "labirinti" affascinanti.

In tale lavoro sono state evidenziate e ritrovate forme artistiche, provenienti da tale teoria.

A conclusione della tesi, vengono presentati alcuni spunti didattici forniti da argomenti di geometria algebrica con l'uso di metodi computazionali, trattati nei capitoli precedenti, legati allo studio delle ipersuperfici, indispensabili al fine di trasmettere attraverso la comunicazione scientifica argomenti di fisica moderna, di difficile comprensione se non supportati da opportune strategie adeguate alla didattica per gli istituti secondari superiori.

Ringrazio il relatore della mia tesi, Prof. Pietro Pantano, per gli utili consigli, gli incoraggiamenti e il supporto fornito lungo tutto il percorso del dottorato.

Ringrazio la Prof.ssa Gaetana Restuccia, per avermi suggerito spunti interessanti nell'ambito dell'Algebra Computazionale e per avermi seguito durante la stesura della tesi.

Vorrei ringraziare la Prof.ssa Eleonora Bilotta, per i colloqui scientifici, per la disponibilità e l'attenzione nel darmi spunti didattici e artistici innovativi.

Voglio infine ricordare il compianto Prof. Mauro Francaviglia, al quale va la mia gratitudine per avermi trasmesso anche la passione per gli aspetti artistici della matematica e la condivisione dell'utilità di una didattica viva, dinamica, intrecciata ad elementi sempre nuovi ed in particolare ad argomenti legati alla fisica moderna.

Un ringraziamento particolare va ai colleghi del Laboratorio di Sistemi Complessi, con i quali ho collaborato, per la disponibilità e il periodo di empatia trascorso insieme.

Il capitolo dal titolo "Aspetti didattici della geometria algebrica" è presentato a parte e riguarda alcuni sviluppi didattici connessi alla tesi nell'ambito di applicazione dell'algebra e dalla geometria.

La bellissima frase di Keplero è di guida: *Where is matter, there is geometry.*

Nella storia della scuola italiana, in ogni tipo di formazione culturale, la geometria ha ricoperto un ruolo fondamentale, benché il suo insegnamento abbia subito numerosi sconvolgimenti nei programmi ministeriali dal 1870 ad oggi.

La geometria è un passaggio fondamentale per ogni tipo di formazione curriculare, nonché per lo studio e la comprensione dello spazio che ci circonda, sia a livello macroscopico che microscopico o meglio a livello subatomico, oltre ad essere uno dei più complessi edifici concettuali sviluppati dall'uomo.

Certamente la geometria euclidea, pensata come scienza esatta per antonomasia, o per i contenuti e per il metodo, è la più indicata per le applicazioni "pratiche" sia per la sua maggiore semplicità, sia perché lo studio della fisica assicura che non vi siano discordanze apprezzabili fra i dati rilevabili con gli strumenti a nostra disposizione e i risultati che si ottengono applicando le leggi della geometria di Euclide.

Infatti gli Elementi di Euclide conservano, ancora oggi, il loro valore 2300 anni dopo la loro scrittura, così come anche le dissertazioni di Hilbert vengono ristampate oggi dopo più di un secolo.

Tuttavia esperienze sofisticate hanno avvalorato la teoria generale della relatività e il fatto che, se entrano in gioco distanze di ordine astronomico, è più conveniente adoperare la geometria di Riemann.

Le geometrie non euclidee hanno imposto pertanto il superamento del sogno, condiviso dai matematici e dai filosofi razionalisti, da Platone a Kant, che possa esistere una conoscenza perfetta e sicura.

In un discorso pronunciato all'Accademia di Berlino nel 1921, A. Einstein asseriva "La matematica in generale e la geometria in particolare debbono la propria esistenza al nostro bisogno di conoscere qualche cosa sulla maniera di essere degli oggetti reali. La parola geometria, che significa misura del terreno, ne è la conferma".

È ovvio che la matematica, partendo da concetti elementari, costruisce strutture sempre più complesse come l'insieme, lo spazio topologico, lo spazio metrico, le varietà differenziabili, le varietà algebriche ed altre.

Ma è interessante sottolineare come "*la geometria*" consegna una immediata chiave di lettura attraverso un sottile parallelismo tra il mondo scientifico e il mondo dell'arte, tra l'evoluzione del pensiero scientifico e del pensiero artistico.

L'utilizzo di software e di ambienti di programmazione consente ai docenti di progettare sperimentare attraverso una forma dinamica di didattica, resa "*attiva*" da un processo di ottimizzazione costante e quindi in continua evoluzione.

Tale percorso genera nuovi stimoli nel processo di apprendimento dei discenti attraverso una nuova didattica circolare, arricchita di stimoli e aperta anche al confronto con docenti di altre discipline che riflettono su analoghe questioni.

In tale processo la figura ed il ruolo del docente è certamente quello di progettista della formazione attraverso un insegnamento efficiente ed efficace.

È fondamentale sensibilizzare il discente a prendere coscienza di ciò che c'è dietro l'attività che sta svolgendo ed il proprio modo di apprendere (metacognizione), puntando anche sulla comunicazione al di fuori della classe con gli altri insegnanti e con la comunità scientifica.

L'esperienza dell'apprendimento delle discipline scientifiche ha permesso e permette a chi le vive una elaborazione critica e profonda della realtà.

Ma ciò che occorre evidenziare, nel nostro caso, è come la matematica moderna (o avanzata) si occupi principalmente di oggetti multidimensionali rifacendosi ad una generalizzazione di concetti geometrici astratti per poi applicarli ad ogni ramo delle scienze, dell'ingegneria e della tecnologia in genere.

Capitolo primo

I POLITOPI

Dalla nascita del caleidoscopio (*Fig.1*) alle architetture più complesse, come quella del cyberspazio, matematici, fisici ed artisti, ognuno secondo le proprie inclinazioni scientifiche, hanno indirizzato i propri studi verso questa tematica, completandosi a vicenda, con l'intento non solo di rappresentare visivamente un sistema a più dimensioni ma anche di trovare tecniche di calcolo che consentissero di descrivere forme sempre più complesse. [107]

1.1. - I POLITOPI IN ARTE E IN MATEMATICA

Numerosi artisti si sono interessati alla struttura dei politopi e ai modelli matematici più complessi ad n -dimensioni, in seguito utilizzati anche per esperimenti non solo fisico-matematici ma anche architettonici ed ingegneristici. Da Harold Scott MacDonald Coxeter (1907 - 2003), con il suo celebre studio sulla geometria del caleidoscopio, dal greco “*visore di belle immagini*”, [48] [49] [50] a Maurits Cornelis Escher (1898-1972), che dedica molti lavori prendendo come spunto i politopi studiati da Coxeter, tipo i *Circle Limit* (*Figg.2 e 3*) [47] [51] [89]



Fig. 1 - Immagine al caleidoscopio.

che riguardano alcune incisioni, a I. Xenakis (Braila 1922 - Parigi 2001), ingegnere e musicista greco-francese, considerato, per le sue opere e teorie, tra i maggiori compositori della seconda metà del Novecento.[204]

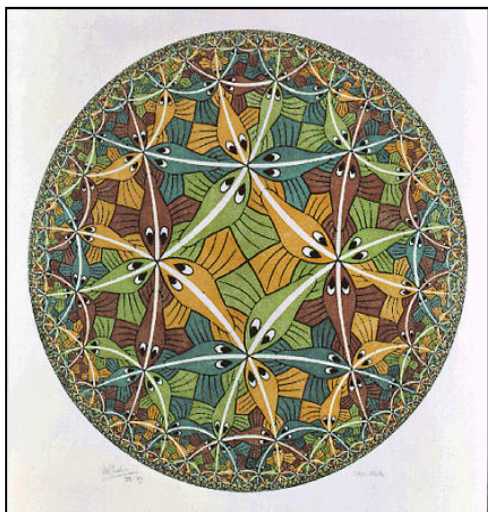


Fig. 2 - M.C. Escher, *Circle Limit III*, 1959.

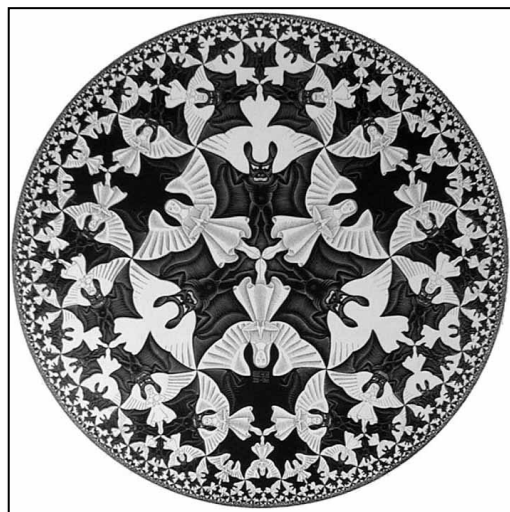


Fig. 3 - M.C. Escher, *Circle limit IV, Heaven and Hell*, 1960.

Nell'opera musicale di Xenakis, “Politopi” (*Polytope*), i politopi sono spettacoli itineranti di luci e suoni che intendono riunire la spazialità del suono con quella delle arti visive. [65] [66] [167]

Di notevole rilievo sono le opere di A. Pirelli il quale, riferendosi alle proprietà degli iperspazi nel 1980 con il cubo-ottaedro [109], nel 1983 realizza un'opera il cui modello architettonico, ispirandosi alla geometria degli iperspazi, viene proposto per la progettazione della struttura di una chiesa. [23] (*Fig.4*)



Fig. 4 - A. Pirelli, *Cubo-ottaedro*, 1983.

Lo stesso artista asserisce di aver scoperto soltanto in seguito, dopo aver

realizzato il modello, la correlazione tra la sua intuizione geometrica e la descrizione della nuova Gerusalemme nel testo dell'Apocalisse di Giovanni.

La figura dell'ipercubo è stata oggetto di studio in molte opere di artisti tra cui registi, pittori e anche architetti come si osserva per l'arco della Défense a Parigi (Fig.5) di Johann Otto von Spreckelsen il *Dia de la Constitucìon* (Fig.6) a Madrid di Miguel Ángel Ruiz Larrea il progetto *Habitat 67* (Fig.7) a Montréal di M. Safdie e le *case cubuche* (Fig.8) a Rotterdam di P. Blom.

Nel 1994 E. Maldonado, particolarmente affascinato dai problemi geometrici e dalla scoperta di nuove dimensioni, qualifica il suo percorso artistico con gli studi sulla geometria e sui politopi. (Figg.10,11,12,13 e 14)

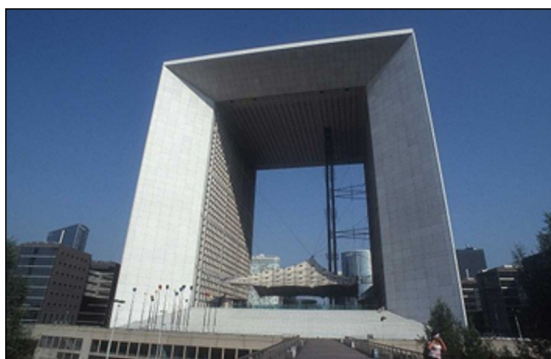


Fig. 5 - La Grande Arche de La Défense, 1989.



Fig. 6 - Dia de la Constitucìon, 1978.



Fig. 7 - Habitat 67, 1964-67.



Fig. 8 - Le case cubuche, 1984.



Fig. 9 - Ipercubo Tor Vergata - Roma, 2012.

Lo spaziotempo della teoria relativistica e l'iperspazio studiato e definito dal matematico J. H. Poincaré diventano oggetto delle sue opere. [106]

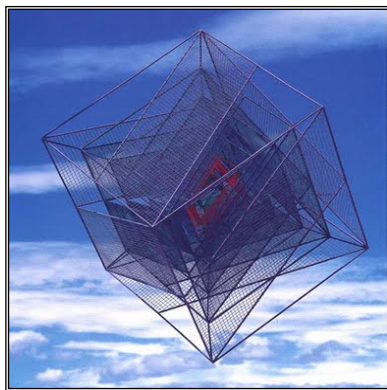


Fig. 10 - E. M., Ipercubo Hawking, 1993.

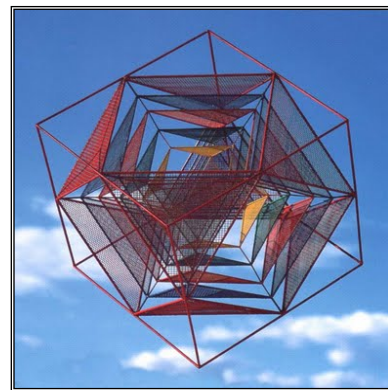


Fig. 11 - E. M., Ipercubo Leonardo, 1994.

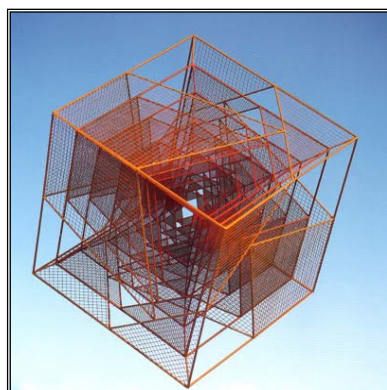


Fig. 12 - E. M., Einstein, 1994.

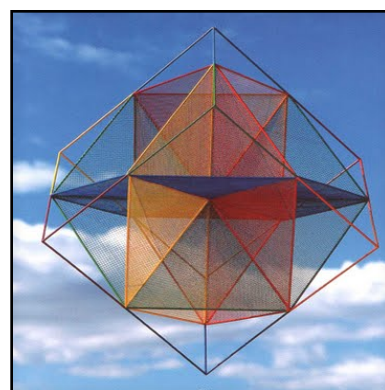


Fig. 13 - E. M., Ipercubo Galileo, 1994.

Allestisce una mostra antologica a Santo Domingo dove espone, assieme ai suoi disegni, anche le sue ultime creazioni, gli ipercubi, realizzati da più cubi che si ripetevano in forme, inclinazioni, volumi, piani e linee generando cinque movimenti alla volta e costituiti da maglie metalliche colorate e da piani in sequenza creando un forte senso dinamico e riflettendo le varie realtà del fluire del tempo. [146] [68] [152] [175]

Le dimensioni così ottenute erano ampiamente superiori a due; secondo l'artista queste non erano altro che "dimensioni possibili della realtà".



Fig. 14 - Tav. 134. Museo El Almudín – Valencia Esposizione E. Maldonado, 2002.

Nei primi anni del XX secolo nasce il Cubismo (1907-1914), un movimento artistico che basa il proprio linguaggio figurativo su forme cubiche e poliedriche con tecniche di scomposizione delle forme in poliedri multipli. [13]

Gli oggetti sono ridotti alla loro struttura geometrica come poliedri, coni e cilindri. [76]

Tali tecniche le possiamo ritrovare in alcune opere di Picasso (1881-1973) e Georges Braque (1882-1963) in cui si può notare (*Fig.15 e 16*) come le immagini vengono scomposte mediante l'utilizzo di vari poliedri.



Fig. 15 - Ambroise Vollard, 1909.



Fig. 16 - Case all'Estaque, 1908.

Lo stesso Salvator Dalì (1904-1989), che fu uno dei massimi esponenti nell'arte della pittura, elaborò tecniche di composizioni di politopi in cui Matematica e Cristianesimo si confrontano e si completano simbolicamente.

Tra le più note l'opera il “*Corpus Hypercubus*” rappresentante la Crocifissione in cui la figura del Cristo è sospesa e la struttura della Croce rappresenta lo sviluppo tridimensionale dell'Ipercubo, scoposto in otto cubi. (*Fig.17*)

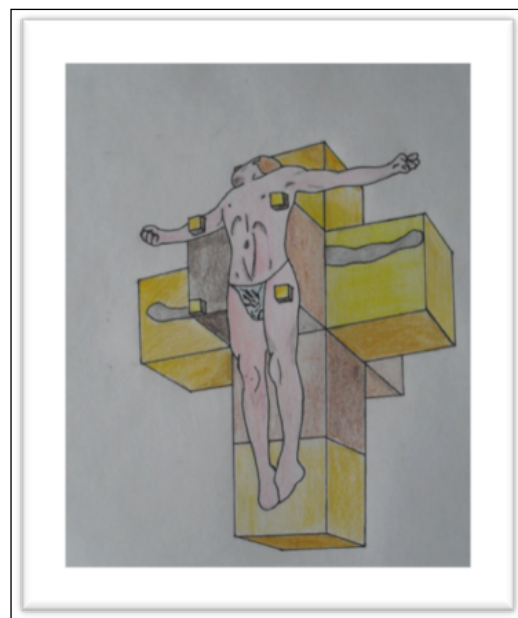


Fig. 17 - Dalì, Corpus Hypercubus, 1954; a fianco una riproduzione di V. Iorfida ©, 2011.

Mentre nell'opera “*Sacramento dell'Ultima Cena*” (*Fig.18*) l'artista rappresenta

l'episodio evangelico (transustanziazione) riferendosi a due numeri particolarmente privilegiati, il “numero dodici” (naturale) e il “numero aureo” φ (irrazionale) entrambi incastonati in un dodecaedro, figura di particolare importanza¹ nelle speculazioni neoplatoniche, che si rifacevano alla visione della materia e dell'universo espressa nel “*Timeo*” e nel “*Fedone*” platonici.

Il dodecaedro, rappresentante la quinta essenza, l'etere, come la parte più pura dell'aria “*il cielo*” ma anche la virtù celeste di origine divina che dà vita all'universo, è certamente la figura più importante dei corpi regolari euclidei, che per costruzione geometrica “racchiude gli altri quattro corpi regolari”.



Fig.18 - Dalí, *Il sacramento dell'Ultima Cena*, 1955.

Secondo Platone infatti “*Dio se ne giovò per decorare l'universo*” ovvero “*ricamare le costellazioni sull'insieme dei cieli*” descrivendo la Terra come una

¹ Il termine sezione aurea lo si ritrova in *Die reine Elementar-Mathematik* di Martin Ohm del 1935 di Martin Ohm con la dicitura *goldener schnitt* (taglio dorato), essa fa parte della proposizione XI del II Libro degli *Elementi* di Euclide. Mentre nel XIII Libro degli *Elementi* di Euclide si fa riferimento a solidi platonici come l'icosaedro poligono costituito da dodici pentagoni dove è contemplata tale sezione. $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ rappresenta la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $x^2 - x - 1 = 0$ derivante dall'uguaglianza $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$.

palla a dodici spicchi pentagonali e multicolori. Tale solido è rappresentato anche nell'opera “*Il Diogene*” del 1527 del Parmigianino (1503-1540). (*Fig.19*)

(Nella figura, il braccio destro che indica con un bastoncino l'illustrazione di un dodecaedro sulla pagina di un terzo libro ai suoi piedi...)

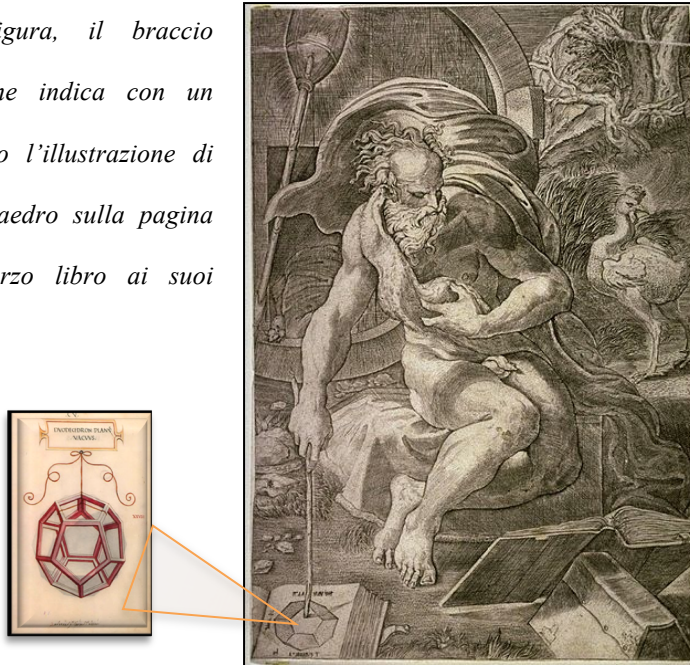


Fig. 19 - Il Diogene, 1527.

Anche Piero della Francesca (1459) sviluppa attorno all'ideale costruzione di un dodecaedro uno dei suoi affreschi più celebri come la “*Madonna del Parto*”. (*Fig.20*)



Fig. 20 - Piero della Francesca, Madonna del Parto, 1459.

Nel “*Libellus de quinque corporibus regularibus*”, applica le teorie sulla perfezione e sulle simmetrie dei poliedri regolari alla pittura. [35] [58]

Nello stesso “*Ritratto di Luca Pacioli*” di Jacopo dei Barbari (1445-1516) è rappresentato un dodecaedro ligneo appoggiato sopra la *Summa* messo in una posizione di rilievo rispetto al testo degli *Elementi*. (Fig.21)



Fig. 21 - Jacopo de' Barbari, Ritratto di Luca Pacioli, 1500.

Infine, ricordiamo il pittore M. C. Escher (1898-1972) dove nella sua litografia “*Rettili*” è rappresentato un rettile che soffiava su un dodecaedro, il quale rappresenta l’apice del suo viaggio fantastico. (Fig.22)



Fig. 22 – Reptiles, 1943.

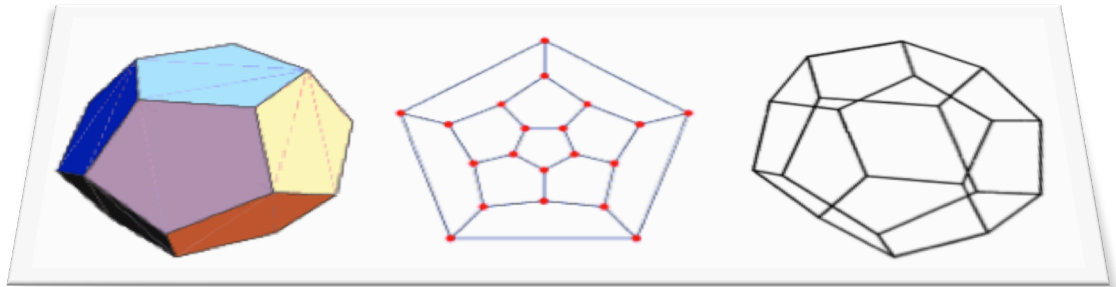


Fig. 23 - Rappresentazioni del dodecaedro, costruite con Mathematica Wolfram ©.

1.2. - I POLITOPI E LA MULTIDISCIPLINARIETÀ

È noto come i “*solidi platonici*”, (Fig.24) intesi come le *forme-modulo* più piccole che organizzano la materia visibile e invisibile, forniscono un modello primitivo ma raffinato e importante di politopi poiché composti da poliedri (o 3-politopi regolari) e politopi dotati di facce costituite da poligoni (o 2-politopi regolari).
[131] [182]

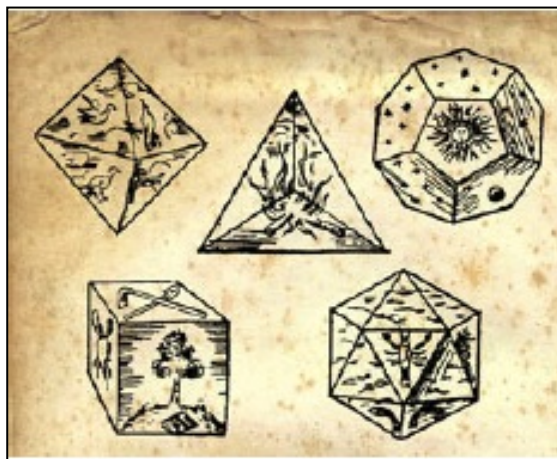


Fig. 24 - Giovanni Keplero, *Harmonices Mundi*, libro V, 1619.

La prima descrizione tralasciata si trova nel *Timeo* di Platone, di formazione pitagorica, risalente al 424 a.C.-347 a.C., anche se non si può escludere che le proprietà di questi solidi fossero già note in periodi antecedenti a questo.

Oltre ad essere descritti nel XII libro *Elementi* di Euclide (300 a.C.) [71] e in seguito ampliati da Archimede (287-212 a.C.) con i 13 solidi semiregolari (*Fig.25*), nel periodo rinascimentale diventano oggetto di studio, soprattutto per le loro proprietà metriche, sia da parte di artisti e sia di matematici come Piero della Francesca (nel trattato *De corporibus regularibus*) e soprattutto L. Pacioli, che nel 1509 (nel *De Divina Proportione* [148]) si avvale dei celebri disegni sui poliedri eseguiti da Leonardo da Vinci. (*Fig.28*)

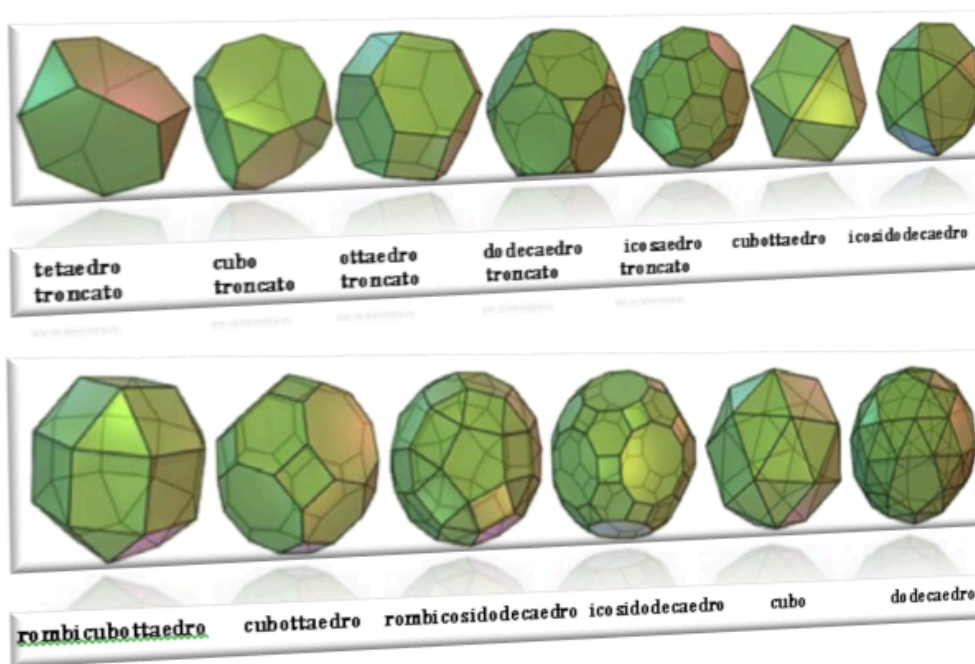


Fig. 25 - Poliedri archimedei ottenuti dal troncamento dei solidi platonici.

Una di queste figure, precisamente l'icosaedro troncato (*Fig.26*), formata da esagoni e pentagoni ed è particolarmente richiamata in campo scientifico per la scoperta di una molecola, il fullerene C₆₀ terza forma allotropica del carbonio, che ricorda ad esempio un pallone da calcio [144], è stata recentemente utilizzata in alcuni esperimenti costituita da sessanta atomi di carbonio che formano esagoni e pentagoni uniti tra loro, con una struttura in fisica quantistica, sulla *decoerenza*

quantistica, effettuate dal gruppo di ricerca Viennese dell'*Institute for Quantum Optics and Quantum Information* guidato da Anton Zeilinger.

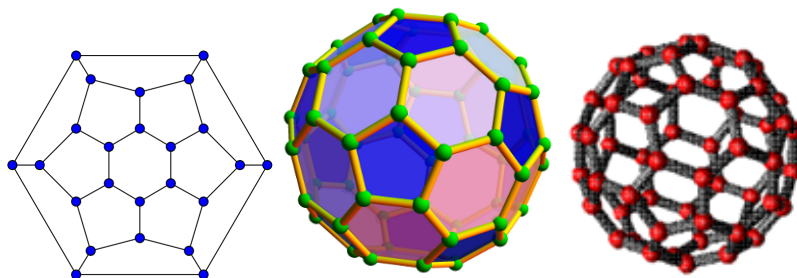


Fig. 26 - Molecola del fullerene, immagini costruite con Mathematica Wolfram ©.

Utilizzata anche in ambito architettonico per la costruzione di strutture la cui peculiarità è basata sull'uniformità della distribuzione delle tensioni dell'intera struttura, permettendo di creare strutture di notevoli dimensioni, come ad esempio la Climatron a St. Louis o il Biosphère Montréal (*Fig.27*).



Fig. 27 - Biosphère Montréal, commons.wikimedia.org e il Blob di Eindhoven, fotografia di Massimiliano Fuksa.

Successivamente il matematico neoplatonico Johannes von Kepler nel *Mysterium*

cosmografaphicum (1619) li rivisita (Fig.29), [117] anche se in chiave esoterica. È fondamentale fare riferimento a quanto B. Riemann scrive nella sua tesi di dottorato di ricerca "*Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria*" dove, partendo dalla nozione di distanza, definisce il concetto di varietà a più dimensioni a curvatura variabile, sviluppando così quei concetti, come egli stesso ammetteva, che già erano presenti nei lavori che lo stesso Gauss aveva fatto sulle superfici curve. (Fig.30)

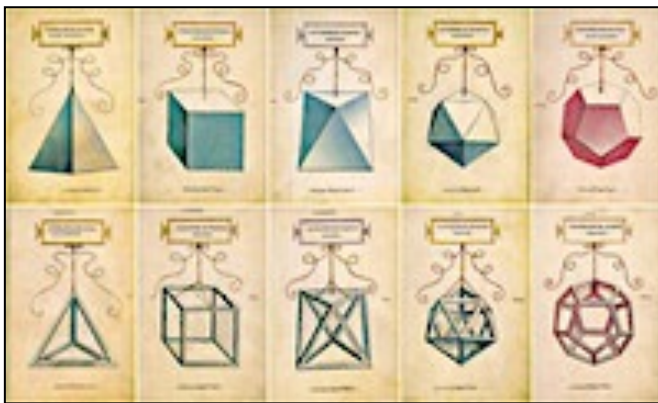


Fig. 28 - Disegni dei solidi platonici di Leonardo da Vinci.



Fig. 29 - *Mysterium Cosmographicum*.

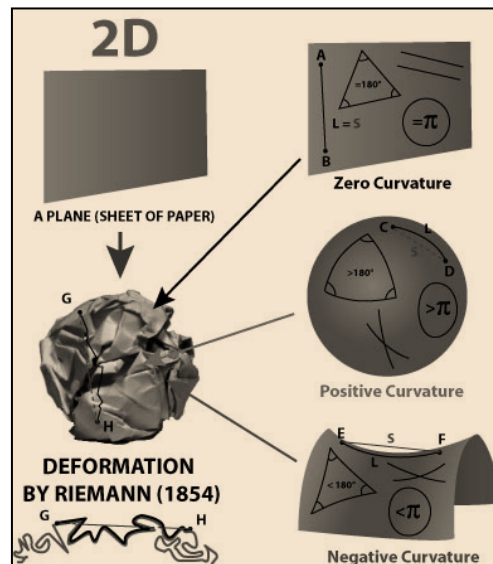


Fig. 30 - *Geometria dello spazio di Riemann* © Dirk Laureyssens, 2002/2007.

Un nuovo modello di geometria dello spazio, quindi, che sarà modello per lo studio della propagazione delle forze fisiche nella teoria della relatività di A. Einstein. [62]

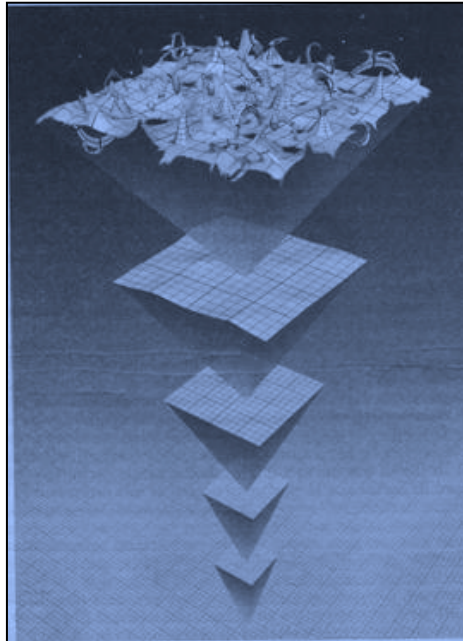


Fig. 31 - Le fluttuazioni quantistiche determinano l'incompatibilità di fondo fra relatività generale e meccanica quantistica. Archivio immagine 3.pict.

Quindi un irrinunciabile *strumento matematico* che vede alcuni diagrammi in \mathbb{R}^n di politopi, di dimensione arbitraria, come quelli di G. Schlegel e di D. Gale diventare elementi essenziali per lo studio non solo del cronotopo ma soprattutto di fenomeni della fisica moderna legati al *micro* e *macrocosmo*. (Figg.32 e 33) [105][106] [188]

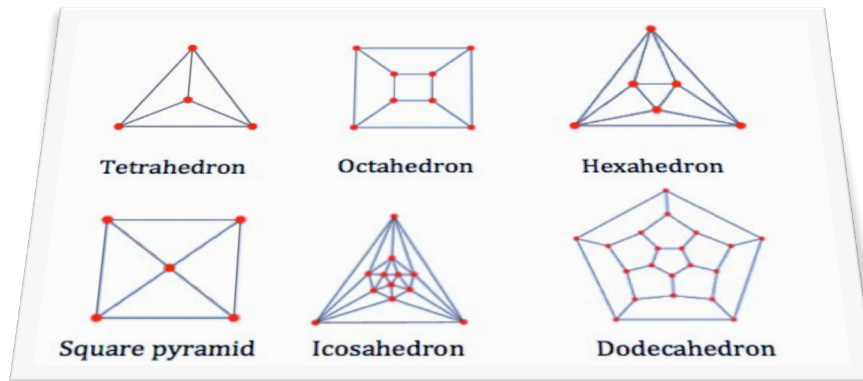


Fig. 32 - Diagrammi di Schlegel.

Gli analoghi dei poliedri platonici in \mathbb{R}^3 sono i sei politopi regolari in dimensione \mathbb{R}^4 denominati rispettivamente la *5-cella*, che ha per facce cinque tetraedri, l'*ipercubo*, con otto facce cubiche, la *16-cella*, delimitata da 16 tetraedri, la *24-cella*, con 24 ottaedri, la *120-cella*, con 120 dodecaedri e la *600-cella*, con 600 facce costituite da altrettanti tetraedri. [79]

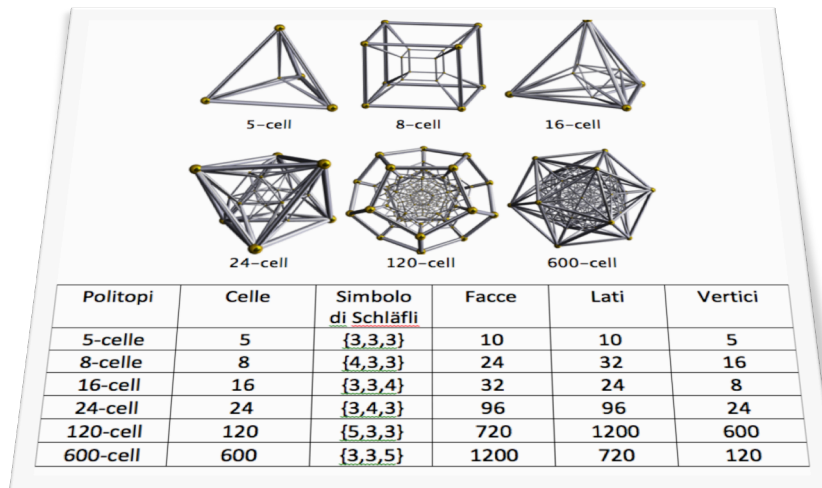


Fig. 33 - Visione prospettica dei diagrammi di Schlegel.

Dei sei politopi sopra elencati, storicamente una posizione privilegiata è occupata dall'ipercubo. La nozione di ipercubo [103] rientra nella geometria degli iperspazi e, a sua volta, fa parte di quegli oggetti matematici la cui forma è multidimensionale.

Gli iperspazi vengono descritti all'interno di n -ipersuperfici, quindi vengono generati dall'intersezione di sottospazi a $n-1$ dimensioni dove all'intersezione non appartiene alcuna semiretta. Pertanto tali iperspazi sono definiti politopi convessi. [38][85][86]

La nozione di politopo S di grado n è definita da un sottoinsieme chiuso e limitato, quindi compatto, in \mathbb{R}^n , dove le celle sono costituite da $n-1$ politopi a formare il bordo, gli spigoli e i vertici.

In \mathbb{R}^4 l'ipercubo è una figura geometrica composta da celle tridimensionali, i poliedri, da celle bidimensionali dette facce, e da celle monodimensionali detti spigoli e vertici che sono i punti estremi. [110] (Fig.34)

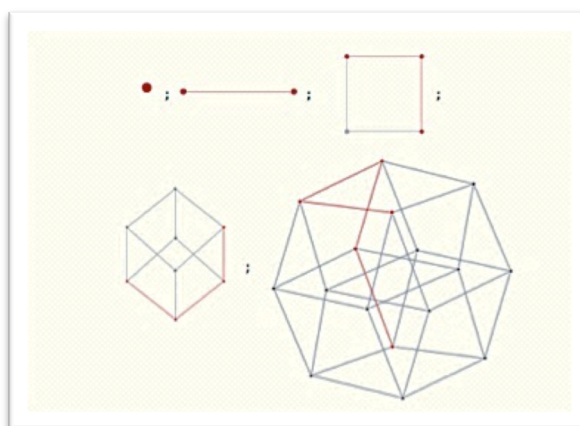


Fig. 34

Un politopo è definito regolare se e solo se tutte le sue celle e le sue figure al vertice (o stelle) sono $n-1$ politopi regolari. Ad ogni politopo regolare è associata un'ipersfera², circoscritta ad esso e tangente ai suoi vertici. Fondamentale è la

² Un'ipersfera 4-dimensionale non può essere disegnata o costruita nello spazio tridimensionale

relazione del teorema di Eulero-Poincaré con la quale si dimostra che dato un n-politopo convesso S_n , di dimensione n, vale la seguente equazione:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1}N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

Introdotta per lo studio delle superfici, nel Cinquecento, da L. Eulero, è stata in seguito generalizzata a varietà di dimensione arbitraria, nell'Ottocento, da Poincaré, agli albori della topologia come branca rigorosamente assiomatica. [26] [19]

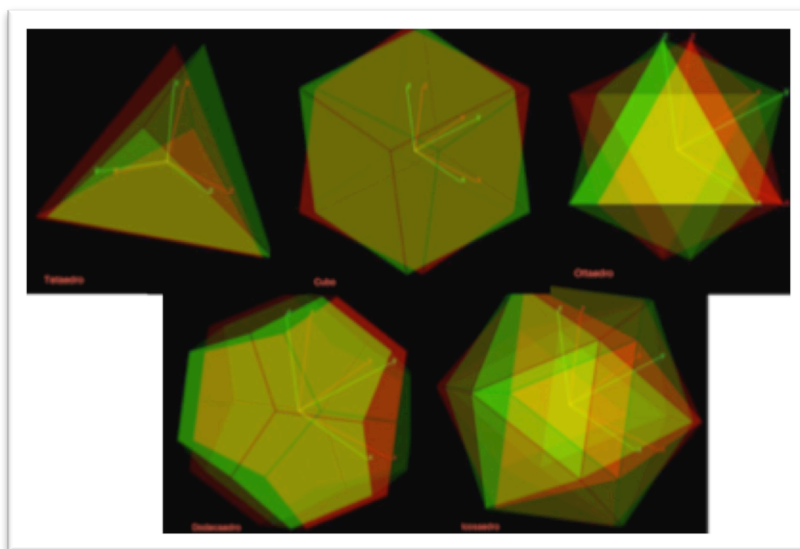


Fig. 35 - Visione anaglifca dei solidi platonici.

Con tale equazione, inoltre, è possibile anche dimostrare che i poliedri regolari sono i cosiddetti poligoni platonici: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro. [52] (Fig.35)

Nello spazio quadrimensionale \mathbb{R}^4 , i quaternioni unitari $(1, i, j, k)$ formano una ipersfera quadridimensionale.

$$S^3 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

I quaternioni unitari formano un gruppo moltiplicativo rispetto al prodotto. Tale gruppo, a differenza del suo analogo complesso, non è abeliano. Con la struttura di varietà differenziabile data da S^3 , esso formano un gruppo di Lie.

Nel caso di un politopo in \mathbb{R}^4 , quale ad esempio l'ipercubo, in base a quanto detto, viene soddisfatta l'equazione del tipo:

$$N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$$

dove con N_0 , N_1 , N_2 ed N_3 vengono rappresentati rispettivamente i vertici, gli spigoli, le facce ed i poliedri. [20]

Questa tematica suscita l'interesse di A. Cayley che, nel 1843 in "*Chapters in the Analytical Geometry of n-dimensions*" e poi nel 1846 in "*Sur quelques théorèmes de la géométrie de position*" fino alla pubblicazione del 1870 "*Memory on Abstract Geometry*", evidenzia come la geometria degli spazi n-dimensionali potesse essere studiata senza ricorrere all'uso delle coordinate fino a stabilire i principi generali della geometria n-dimensionale. (Fig.109)

Fondamentale contributo fu dato anche dal matematico italiano G. Veronese che nel 1882 pubblica "*Fondamenti di geometria a più dimensioni*", dove dà una trattazione sintetica ed elementare della geometria a quattro dimensioni e di quella ad n-dimensioni sostenendo che il metodo da lui utilizzato fosse "*principalmente sintetico e intuitivo*"

L'idea che la geometria fosse strettamente connessa al mondo fisico implicava l'esistenza di un solo tipo di geometria; ed è per tale motivo che i matematici hanno a lungo esitato prima di accettare pienamente la geometria degli iperspazi.

Se per Poincaré la geometria n-dimensionale offre un linguaggio geometrico comodo, che però è incapace di parlare ai sensi, C. Segre, invece, afferma che nell'utilizzare la geometria degli iperspazi non occorre preoccuparsi del problema della loro effettiva esistenza.

È una questione del tutto secondaria, sostiene C. Segre, che nulla toglie al rigore logico con cui viene sviluppata tale geometria.

In effetti, essa si è rivelata di grande importanza nella moderna fisica-matematica.

Lo studio degli iperspazi ha fatto meglio comprendere sia la teoria dei gruppi, sia le geometrie non euclidee e proiettive, le curve algebriche, la topologia fino alla geometria differenziale. [28] [5] [176] [181] [208]

Ha contribuito, insomma, in modo essenziale agli straordinari sviluppi della matematica e della fisica moderna.

Tra i personaggi più noti, che per primi hanno reso “*visibile*” l’iperspazio, anche al grande pubblico, troviamo A. Einstein. Nella teoria della relatività ristretta, introducendo la variabile spaziotempo (x, y, z, t) , ipotizza la gravità come un effetto geometrico dello spazio circostante. [18][15]

Lo spazio presenta delle protuberanze in corrispondenza delle galassie, delle stelle e dei pianeti come una biglia riesce ad incurvare la tela di gomma che la contiene. (Fig.36)

Pertanto lo spazio fisico diventa “*non euclideo*” chiudendosi su se stesso come la superficie di una sfera, ma con una dimensione in più.

Questo vuol dire che procedendo per una stessa direzione si finisce col ritornare al punto di partenza, come avviene sulla superficie sferica.

Così la fisica fornisce una descrizione sempre più profonda ed unitaria dei fenomeni servendosi degli iperspazi a 4, 5, ..., n dimensioni e delle geometrie non euclidee.

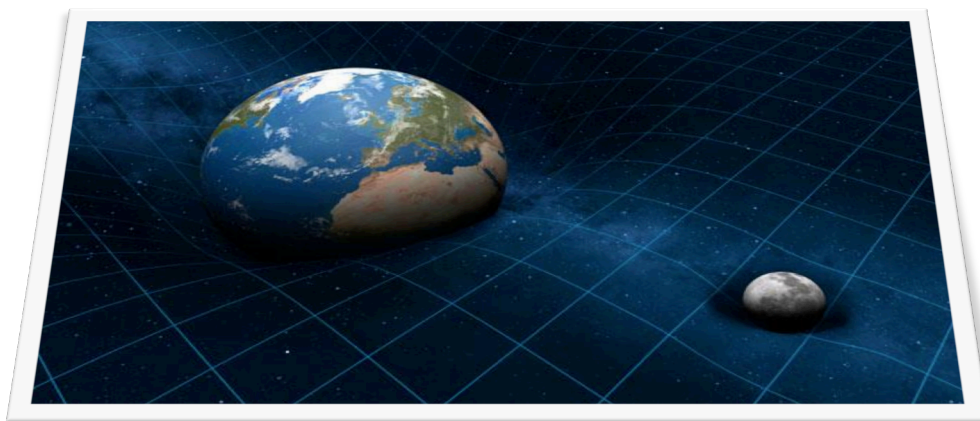


Fig. 36 - Le incurvature dello spaziotempo del nostro sistema Terra Luna, secondo la visione della relatività generale. Tale curvatura in base alla teoria Einstaniana è quella che noi percepiamo come gravità. Immagine by BBC.

Difatti una tra le più affascinanti teorie, quella delle Superstringhe, che vede E. Witten come maggiore esponente, esige un universo a dieci dimensioni nel quale le superstringhe trovano forma in uno spazio-tempo di dieci dimensioni di cui sei di esse sono viste arrotolate a formare le strutture interne di quark ed elettroni. (Fig.37)

È necessario riflettere sul fatto che per comprendere la reale forma della terra e la sua posizione nel cosmo bisognerà allontanarsi sempre più da essa. [78] [82]

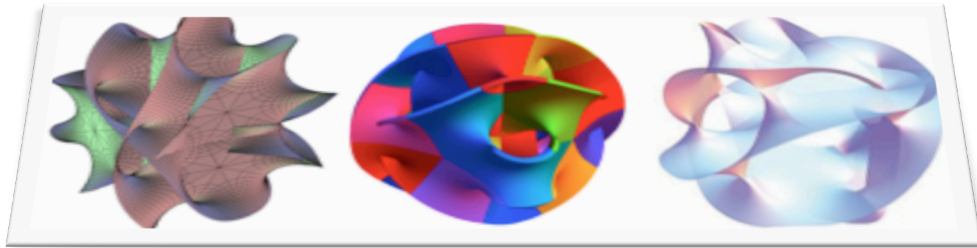


Fig. 37 - Superfici di Calabi-Yau. costruite con Mathematica Wolfram ©.

1.3. - APPENDICE

1.3.1. - I POLITOPI CONVESSI

Con \mathbb{R}^d verrà indicato lo spazio dei vettori colonna di lunghezza d con entrate appartenenti al campo dei numeri reali \mathbb{R} .

Allo stesso modo, $(\mathbb{R}^d)^*$ denoterà lo spazio vettoriale reale di tutte le funzioni lineari $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (dei vettori riga con entrate reali di lunghezza d).

Elementi di base per qualsiasi trattazione in geometria sono i punti, le linee, i piani e così via, che sono sottospazi affini, detti anche sottospazi piatti. Fra loro, i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^d , che contengono l'origine $0 \in \mathbb{R}^d$, sono indicati come sottospazi lineari. Pertanto sottospazi affini non vuoti sono sottospazi lineari.

La dimensione di un sottospazio affine è la dimensione corrispondente dello spazio vettoriale lineare. Sottospazi affini di dimensioni 0, 1, 2 e $(d-1)$ in \mathbb{R}^d sono detti rispettivamente punti, linee, piani e iperpiani. Una mappa affine è un'applicazione del tipo $x \rightarrow Ax + x_0$, dove A è una matrice quadrata non singolare e rappresenta un cambiamento affine di coordinate.

Noi studieremo e svilupperemo proprietà invarianti rispetto ad ogni trasformazione affine di coordinate.

Sottospazi affini possono essere descritti da equazioni affini, come immagine affine di qualche spazio vettoriale reale \mathbb{R}^k , o come insieme di tutte le combinazioni affini di un insieme finito di punti,

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n \text{ per } \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Cioè, ogni sottospazio affine può essere descritto sia come un'intersezione di iperpiani affini e sia come l'involuppo affine di un insieme finito di punti (cioè, come l'intersezione di tutti i piani affini che contengono l'insieme).

Un insieme di $n \geq 0$ nei punti è affinemente indipendente se il suo involuppo affine ha dimensione $n - 1$, cioè, se ogni sottoinsieme proprio ha un più piccolo spazio affine. Un insieme di punti $K \subseteq \mathbb{R}^d$ è convesso se, presi due qualsiasi punti $x, y \in K$, esso contiene anche il segmento di linea retta

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \text{ tra essi. [208][209]}$$

Ad esempio, nei disegni seguenti, l'insieme a destra è convesso (*Fig.38*)

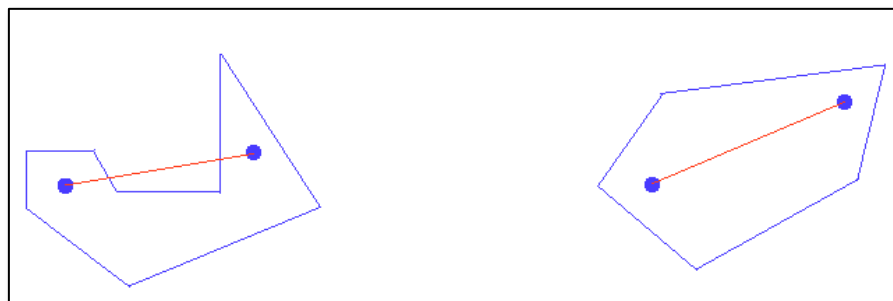


Fig. 38

Chiaramente, ogni intersezione di insiemi convessi è convessa e \mathbb{R}^d stesso è convesso. Pertanto per ogni $K \subseteq \mathbb{R}^d$ il "più piccolo" insieme convesso contenente K , chiamato involuppo convesso di K , può essere costruito come l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono K :

$$\text{conv}(K) := \bigcap \{K' \subset \mathbb{R}^d : K \subseteq K', K' \text{ convesso}\}$$

Il disegno riportato in (*Fig.39*) mostra un sottoinsieme K del piano (in blu), e il suo involuppo convesso $\text{conv}(K)$, un convesso 3-gon (compresa la parte ombreggiata).

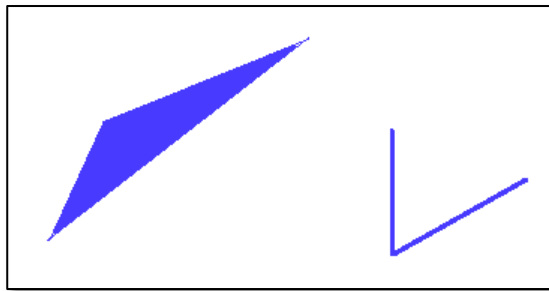


Fig. 39

Per ogni insieme finito di punti $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq K$ e di parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k = 1$, l'involuppo $\text{conv}(K)$ deve contenere il punto $\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k$: questo può essere dimostrato per induzione su K , scrivendo:

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = (1 - \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{1 - \lambda_k} x_{k-1} \right) + \lambda_k x_k$$

per $\lambda_k < 1$.

Ad esempio, il seguente disegno (Fig.40) mostra le rette generate da quattro punti nel piano, e l'involuppo convesso (ombreggiato) che è un quadrilatero in \mathbb{R}^2 . Invece la rappresentazione in \mathbb{R}^3 sarà un tetraedro.

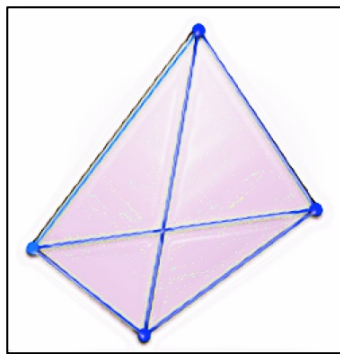


Fig. 40

Geometricamente, questo dice che per ogni sottoinsieme finito $K_0 \subseteq K$ l'involuppo convesso $\text{conv}(K)$ deve contenere anche il semplice proiettato su K_0 generato da K_0 . Questo dimostra l'inclusione " \subseteq " di

$$\text{conv}(K) = \left\{ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k \cdot \{ \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k \} \subseteq K, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Osservando la parte a destra di questa equazione, si vede facilmente essere convessa, e ciò dimostra l'uguaglianza.

Ora, se $K\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \subseteq \mathbb{R}^d\}$ è un insieme finito, allora il suo involuppo convesso è:

$$\text{conv}(K) = \left\{ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n : n \geq 1, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Noi daremo due diverse definizioni di un politopo. D'ora in poi si parlerà di politopi omettendo il termine *convesso*, seguendo Branko Grünbaum. (segue nota bibliografica). [87] [208][209]

DEFINIZIONE 1.1.

Un \mathbf{V} -politopo è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti in \mathbb{R}^d .

Un \mathcal{H} -poliedro è l'intersezione finita di semispazi chiusi in \mathbb{R}^d .

Un \mathcal{H} -politopo è un \mathcal{H} -poliedro limitato, cioè che non contiene una semiretta del tipo $\{ \mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \geq 0 \}$, per ogni $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

(Questa definizione "di limitato" ha il vantaggio di non fare riferimento ad alcuna metrica o prodotto scalare, oltre ad essere un invariante affine per un cambiamento delle coordinate).

Un politopo è un insieme P ben definito di punti $P \subseteq \mathbb{R}^d$ e che può essere presentato sia che come un \mathbf{V} -politopo che come un \mathcal{H} -politopo.

La dimensione di un politopo è la dimensione del suo involuppo affine.

Un d -politopo è un politopo di dimensione d in qualche spazio \mathbb{R}^e di con $(e \geq d)$.

DEFINIZIONE 1.2.

Due politopi $P \subseteq \mathbb{R}^d$ e $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ sono *affinemente isomorfi*, e si indica con $P \cong Q$, se esiste una mappa affine $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ che è una biiezione tra i punti dei

due politopi (Si noti che tale mappa non deve essere iniettiva o suriettiva sugli “spazi ambiente”).

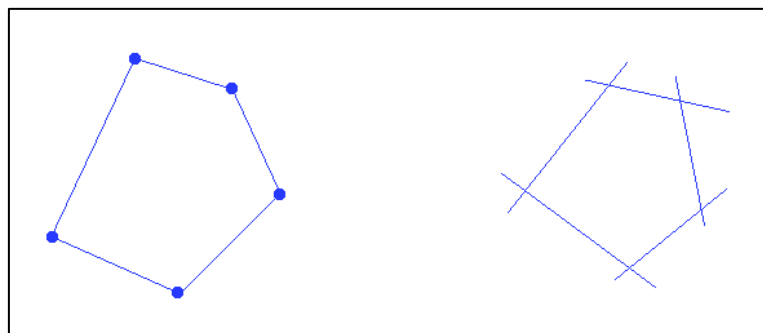


Fig. 41

I disegni riportati in (Fig.41) cercano di illustrare i due concetti: la figura a sinistra mostra un pentagono costruito come un \mathcal{V} -politopo, cioè come un involuppo convesso di cinque punti; la figura a destra mostra lo stesso pentagono come \mathcal{H} -politopo, costruito da un'intersezione di cinque semispazi leggermente ombreggiati (delimitati dalle cinque rette marcate).

I politopi che studiamo sono di dimensione “piena”, cioè d denota la dimensione del politopo e quella dello spazio ambiente \mathbb{R}^d

Le proprietà combinatorie delle facce di politopi riguardano: intersezioni con iperpiani tali che il politopo è interamente contenuto in uno dei due semispazi determinato dall'iperpiano. [95] [137]

Noi Considereremo il politopo come una “faccia banale”; tutte le altre sono chiamate “facce proprie”. Anche l'insieme vuoto è una faccia per ogni politopo.

Meno banalmente, sono considerate facce i vertici del politopo, che sono i singoli punti, ed i lati, che sono segmenti di rette 1-dimensionali, e le faccette, (forme massimali) ovvero, le facce, la cui dimensione è inferiore di uno rispetto a quella del politopo stesso. [208][209]

DEFINIZIONE 1.3.

Diremo che due politopi P, Q sono *combinatoriamente equivalenti* (e scriveremo con $P \cong Q$), se esiste una corrispondenza biunivoca tra le loro facce che conserva la relazione di inclusione.

ESEMPIO 1.1.

I politopi 0-dimensionali sono i punti, i politopi 1-dimensionali sono i segmenti di rette. Pertanto ogni coppia di 0-politopi sono sempre affinemente isomorfi, e lo sono anche qualunque coppia di politopi 1-dimensionali.

I politopi 2-dimensionali sono chiamati poligoni.

Un poligono con n vertici è chiamato un *n-gon*.

Pertanto la convessità implica che gli angoli interni (nei vertici) sono tutti più piccoli di π .

Il seguente disegno (*Fig. 42*) illustra un convesso 6-gon o esagono. [115]

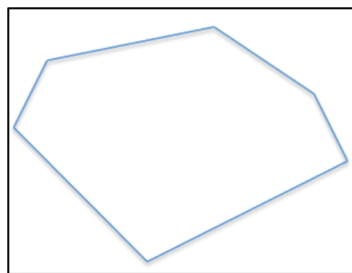


Fig. 42

Due 2-politopi sono combinatoriamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso numero di vertici. Pertanto, possiamo usare il termine "il convesso *n-gon*" per la classe di equivalenza combinatoria di un 2-politopo convesso con esattamente n vertici. C'è, infatti, una bella rappresentazione per questa classe: l'*n-gon* regolare,

$$P_2(n) := \text{conv} \left\{ \left[\cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right), \sin \frac{2\pi k}{n} \right] : 0 \leq k \leq n \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Il seguente disegno (*Fig.43*) illustra l'esagono regolare $P_2(6)$ in \mathbb{R}^2 . Esso è combinatoriamente equivalente, ma non affinemete isomorfo, all'esagono disegnato sopra.

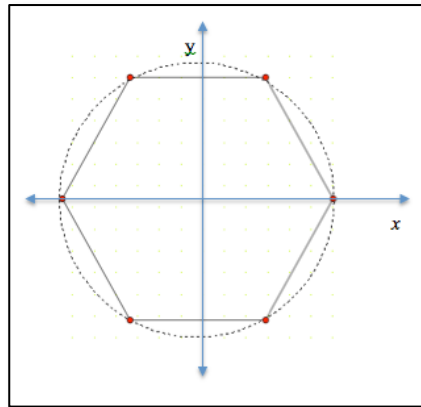


Fig. 43

ESEMPIO 1.2.

Il tetraedro è un oggetto geometrico familiare (un politopo tridimensionale) (*Fig.44*) in \mathbb{R}^3 :

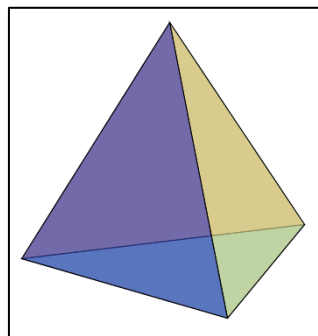


Fig. 44

Analogamente, la sua generalizzazione d-dimensionale costituisce la prima (e più semplice) famiglia infinita di politopi.

DEFINIZIONE 1.4.

Definiamo un d -simpleso come l'involuppo convesso $d + 1$ punti affinementemente indipendenti in qualche $\mathbb{R}^n (n \geq d)$.

Un d -simpleso è un politopo di dimensione d con $d + 1$ vertici.

È facile vedere come due d -simplessi sono affinementemente isomorfi. Tuttavia, spesso è conveniente specificare un modello canonico. Per il d -simpleso, noi useremo il d -simpleso standard Δ_d con $d + 1$ vertici in \mathbb{R}^{d+1} .

$$\Delta_d := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : \mathbf{1}\mathbf{x} = 1, x_i \geq 0 \} = \text{conv}\{e_1, \dots, e_n\}$$

dove $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$ ed e_i è il vettore canonico di \mathbb{R}^{d+1}

$$e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) .$$

Le figure (Fig.45) illustrano la costruzione di Δ_2 in \mathbb{R}^3 :

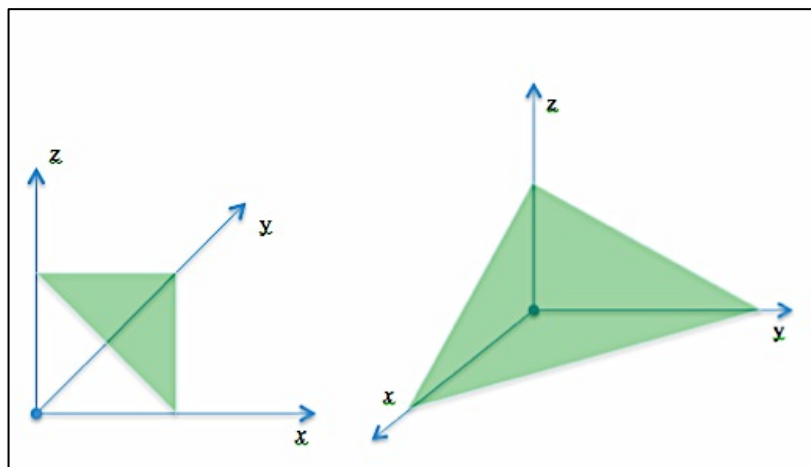


Fig. 45

ESEMPIO 1.3.

Il cubo tridimensionale C_3 e l'ottaedro C_3^Δ (Fig.46) sono gli oggetti familiari:

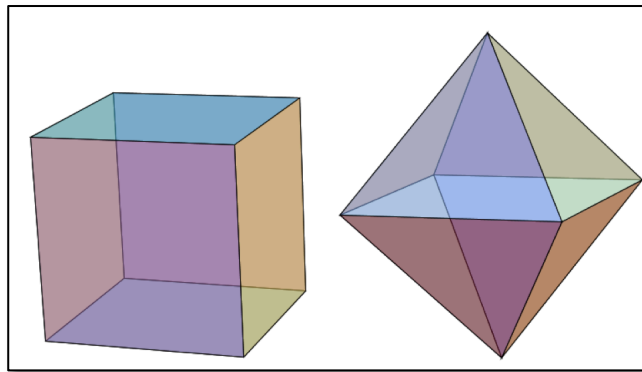


Fig. 46

La loro generalizzazione a d dimensioni è semplice. Arriviamo all'ipercubo d -dimensionale (detto il d -cubo):

$$C_d := \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_i \leq 1\} = \text{conv}\{\{+1, -1\}^d\}$$

e al crosspolytope d -dimensionale:

$$C_d^\Delta := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \sum_i |x_i| \leq 1\right\} = \text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}.$$

1.3.2. - SHELLABILITY

Il risultato più famoso su politopi convessi è dato dalla equazione di Eulero-Poincaré:

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 + \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} + (-1)^d f_d = 0,$$

dove f_i indica il numero di facce i -dimensionali di un d -politopo P .

Si ha $f_{-1} = 1$ e $f_d = 1$ corrispondono alle superfici banali (la superficie ed il politopo stesso), e f_0, f_1, f_{d-2} e f_{d-1} sono rispettivamente i numeri di vertici, di spigoli, creste (*ridges*), e faccette. Così per 2 - *politopi* si ha che $f_0 - f_1 = 0$, il numero di vertici è uguale al numero degli spigoli.

Per 3 - *politopi* otteniamo la " *formula di Eulero* ":

$$v - e + f = 2$$

essendo P un politopo di dimensione tre con $v = f_0$ vertici , $e = f_1$ spigoli , ed $f = f_2$ facce.

Per $d \leq 3$ la formula di Eulero - Poincaré è facile da dimostrare ma per dimensioni maggiori non è banale.

Come Grünbaum [87] ha osservato, tutte le prove induttive classiche (a partire da [166] fino alla prova di Schliifli del 1852, vedi anche Sommerville [179, p 147], Schoute [168, p 61], nonché i riferimenti in [87, p. 141]), assumono che il confine di ogni politopo può essere costruito per induzione in un modo semplice, da (Bruggesser & Mani, in 1970).

La shellability per complessi poliedrici è un concetto che è vantaggioso e non banale.

Mostriamo che:

- i politopi sono *shellable*,
- suddivisioni di politopi non sono *shellable* in generale.

La prima prova corretta e completa della formula di Eulero-Poincaré, ottenuta da Poincaré [154] [153], ha utilizzato gli strumenti della topologia algebrica che Poincaré aveva sviluppato.

Si Raccomanda Stillwell [184] , Munkres [141] , Daverman [55] , e Bjomer [29] come guide a diversi punti di vista.

1.3.3. - SHELLABLE E COMPLESSI NON SHELLABLE

Un complesso politopale (vedi Definizione 5.1) è una collezione finita, non vuota collezione di politopi in C (chiamati le facce di C) in \mathbb{R}^d , che contiene tutte le facce dei politopi, e tale che l'intersezione di due dei suoi politopi è una faccia di ciascuna di esse.

La dimensione $dim(C)$ di un complesso politopale C è la massima dimensione di un politopo appartenente a C .

Un complesso politopale è puro se ciascuna delle sue facce è contenuta in una faccia di dimensione $dim(C)$, cioè se tutti i valori di massima inclusione faccette $dim(C)$, dette sfaccettature di C , hanno la stessa dimensione.

L'insieme sottostante di C è l'unione delle sue facce, $|C| := \bigcup_{F \in C} F$.

Ad esempio, un grafo G rappresenta un complesso *politopale* se è un grafo piano. Esso ha dimensione 1 se il grafo ha almeno uno spigolo, e quindi è puro se il grafo non ha un vertice isolato.

Ad esempio, un grafico rappresenta un politopo complesso se è elaborato in un piano o in \mathbb{R}^3 con linee rette che non si intersecano. Esso ha dimensione 1 se il grafico ha almeno uno spigolo e quindi è puro se il grafico non ha un vertice isolato.

Esistono cinque classi importanti di complessi politopali.

Ricordiamo:

- (i) Ogni politopo P insieme a tutte le sue facce costituisce un complesso politopale C . L'unica faccia massimale di questo complesso è P stesso.
- (ii) Tutte le facce proprie di P formano il complesso confine $C(\partial P)$, la cui facce sono solo le facce P . Si tratta di un complesso simpliciale puro di dimensione $dim(P) - 1$.

Questi complessi sono puri. Nella seguente galleria di foto, (Fig.47) il primo complesso è puro 1- dimensionale (un grafo), il secondo non è puro e il terzo è puro 2 - dimensionale .

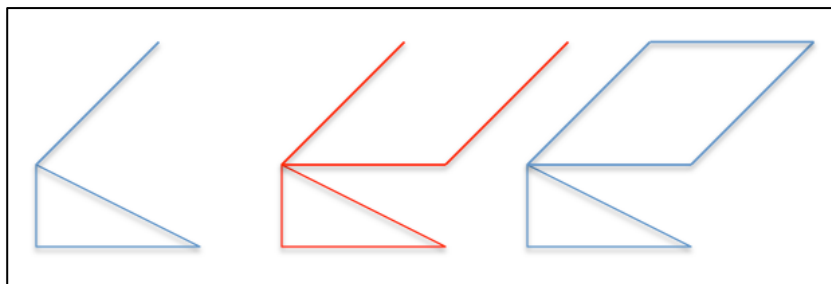


Fig. 47

Si procede ora a definire il concetto di shellability, in una versione che è leggermente più restrittiva rispetto a quella originale usata da Bruggesser & Mani. [39]

Alcune variazioni sono discusse in Danaraj & Klee. [54]

Si è scoperto nel lavoro di Bjorner & Wachs [39] [28] [27, Sez. 4.7] che quella successiva è la uno che "funziona" in contesti geometrici e combinatori molto generali.

DEFINIZIONE 1.5.

Sia C un complesso politopale puro k -dimensionale. Lo *shelling* di C è un ordine lineare F_1, F_2, \dots, F_s , delle faccette di C tale che C sia 0 - dimensionale (e quindi le faccette sono punti), o soddisfa le seguenti condizioni:

- (i) Il confine complesso politopale bordo (*boundory complex* C (∂P)) della prima faccetta F_1 ha un *shelling*.
- (ii) Per $1 < j \leq s$ l'intersezione della faccia F_j con la precedente faccia è non vuota ed è un segmento iniziale di un bombardamento del $(k - 1)$ - dimensionale complesso bordo di F_j , che è:

$$F_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i \right) = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r$$

per qualche *shelling* $G_1, G_2, \dots, G_r, \dots, G_t$ ed $1 \leq r \leq t$.

(In particolare, ciò richiede che $F_j \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i \right)$ ha uno *shelling*, così deve essere pura

$(k-1)$ -dimensionale, e connesso con $k > 1$).

Un politopo complesso è shellable se è puro.

Così la shellability non è definita per complessi che non sono puri, anche se si è scoperto nel recente lavoro di Bjorner & Wachs [31] che una estensione del concetto a complessi non puri è possibile e di notevole utilità.

ESEMPI 1.4.

(i) Ogni complesso politopale 0 - dimensionale è *shellable*, per definizione. A 1-dimensionale complesso (grafo) è *shellable* se e solo se è connesso in particolare, ciò significa che è puro (non ha vertici isolati). L'ordine di bombardamento è un ordinamento degli spigoli e_1, e_2, \dots, e_j in modo tale che l'insieme $\{e_1, e_2, \dots, e_j\}$ descrive un sottografo connesso per ogni j : questo deriva dalla condizione che l'intersezione del bordo e_j con i bordi anteriori deve essere 0-dimensionale, e quindi non vuoto.

(ii) I seguenti complessi sono tre 2-complessi nel piano \mathbb{R}^2 .

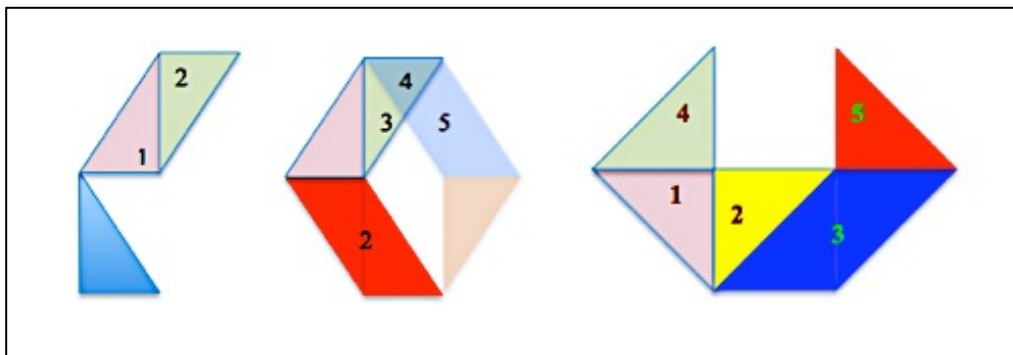


Fig. 48

(iii) Ogni simpleso è shellable, ed ogni ordinamento le sue sfaccettature è un bombardamento ordinato.

Questo segue immediatamente per induzione sulla dimensione, poiché l'intersezione di F_i con F_j ($i < j$) è sempre un aspetto di F_j in questo caso.

(Fig.48)

1.3.4. - IL TEOREMA DEL LIMITE SUPERIORE

"Qual è il numero massimo di k-facce per un d-politopo con n vertici?"

La risposta a questa domanda è data dal teorema cosiddetto del limite superiore:

"Il politopo ciclico $C_d(n)$ ha il numero massimo di k-facce, per ogni $k \geq 1$ ".

Questa affermazione fatta da Motzkin [139] nel 1957 divenne nota come la congettura del limite superiore.

Coinvolta in una lunga storia (vedi anche Grünbaum [87]), tra cui annunci prematuri e molti risultati parziali, è stata dimostrata da Gale [75] per politopi con "pochi" vertici (ossia per $n \geq d + 3$) e per politopi con "molti" vertici da Klee [120] e per "piccole" dimensioni (per $d \leq 8$); secondo Grünbaum vedi [87, p.175].

Si è osservato che il risultato deriva dalle equazioni Dehn-Sommerville per $d \leq 5$.

Nel 1970 McMullen ha dato una prova completa della congettura del limite superiore che da allora è conosciuto come il teorema del limite superiore.

La dimostrazione di McMullen è semplice ed elegante, combinando due elementi fondamentali: *shellability* e *h-vettore*. [208][209]

TEOREMA 1.1. (del limite superiore)³

Se P è un d -politopo con $n = f_0$ vertici, allora per ogni $k \geq 1$ ottengono al più k -facce del corrispondente politopo ciclico (cl. Esempio 0.6):

$$f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(C_d(n)),$$

dove l'uguaglianza per qualche k , con $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor \leq k \leq d$ implica che P è k -near⁴.

Il primo fatto da notare è che possiamo limitare la nostra attenzione ai politopi simpliciali. (Fig.49)

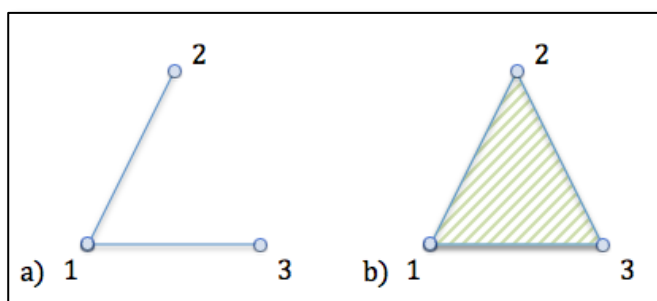


Fig. 49 - a) P non è 3-near , b) P è 3-near

LEMMA 1.1.⁵

I vertici di un d -politopo P possono essere perturbati in modo tale che il politopo corrispondente P' (avente lo stesso numero di vertici) è un simpliciale, e

$$f_{k-1}(P) \leq f_{k-1}(P')$$

³ Vedi McMullen [136].

⁴ Un politopo P detto k -near è un politopo convesso in cui ogni insieme di k vertici forma una faccetta.

⁵ Vedi Klee [119] e McMullen [135].

per $0 \leq k \leq d$ questa uguaglianza per $k > \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ può verificarsi solo se P è un simpliciale.

LEMMA 1.2.

Sia P un d -politopo simpliciale su $f_0 = n$ vertici. Sia k un intero positivo, $0 \leq k \leq d$,

Allora si ha:

$$h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k}.$$

Tale eguaglianza vale per ogni k con $0 \leq k \leq l$; se e solo se $l \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ e P è un l -nlar.

Dimostrazione:

Per induzione su k .

Il lemma è chiaramente vero per $k = 0$, definendo h_0 uguale a 1 . Quindi basta verificare

$$\frac{h_{k+1}(P)}{h_k(P)} \leq \frac{\binom{n-d+k}{k+1}}{\binom{n-d-1+k}{k}}$$

ovvero

$$(k+1)h_{k+1} \leq (n-d+k)h_k \quad (a)$$

per $k > 0$.

Primo passo

Proviamo la seguente formula:

$$\sum_{v \in \text{vert } C} h_k(C/v) = (k+1)h_{k+1}(C) + (d-k)h_k(C) \quad (b)$$

dove con C/v indichiamo il *link* di v nel complesso simpliciale C , cioè $C/v := \text{link}(v, C)$.

L'equazione (b) è facile da dimostrare, perché è valida anche in presenza di uno *shelling*, quando, invece di $C = C(\partial P)$, noi consideriamo $C_j := C(F_1 \cup \dots \cup F_j)$, in quanto un *shelling* su ∂P induce anche un ordine di *shelling* per tutti i *links* ⁶. Per induzione su k , la formula è valida per $k = 0$, essendo C_0 complesso vuoto (in assenza di facce, tutti i termini scompaiono).

Consideriamo una nuova faccetta F_j e aggiungiamo il suo contributo alla $\sum_v h_k(C/v)$. Questo riguarda solo i termini contenenti i vertici $v \in F_j$. Ci sono due casi.

Se $v \notin R_j$, c'è una nuova faccetta di dimensioni $|R_j|$ nel *link* di v .

Questo ha effetto su $h_k(C/v)$ solo se $|R_j| = k$, e in questo caso si ottiene un contributo di "1" per $|F_j/R_j| = d - k$ addendi. (Fig. 50 a sinistra, per $k = 1$ e $d = 3$.) In questo caso, abbiamo anche che $h_k(C)$ aumenta di 1, e quindi il lato destro aumenta di $d - k$, come dovrebbe.

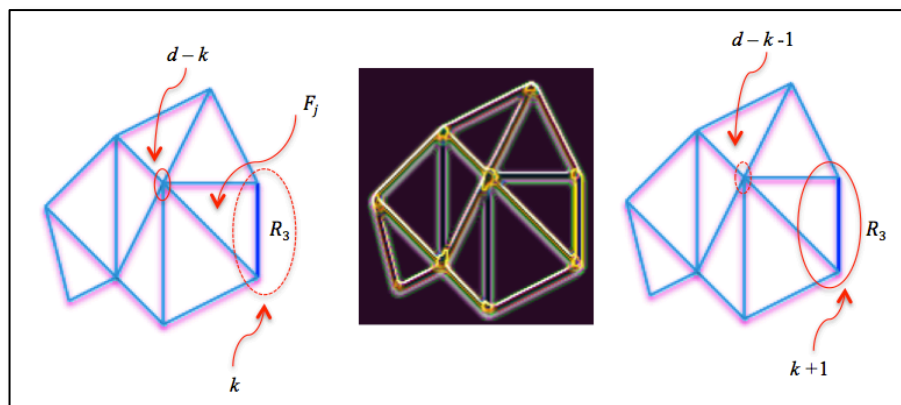


Fig. 50

⁶ Lemma (*Star*):

Sia C un complesso simpliciale shellable, con ordine *shelling* F_1, F_2, \dots, F_s . Allora la restrizione di questo ordine a *star* (v, C) produce un ordine *shelling* per la *star*, e anche per il *link* (v, C) .

Se $v \in R_j$, allora otteniamo una nuova faccetta di dimensione minima $|R_j| = -1$ nel link di v .

Ricaviamo un contributo per $h_k(C/v)$ solo se $|R_j| = k + 1$, e in questo caso otteniamo un contributo di "1" per $k + 1$ termini differenti sul lato sinistro dell'equazione.

Nel contempo, si ottiene che $h_{k+1}(C)$ aumenta di 1, così il lato destro aumenta di $k + 1$, e siamo a posto. (la Fig. 50 a destra raffigura questo caso). Questo dimostra l'equazione (b).

Secondo passo

Abbiamo bisogno della seguente disuguaglianza:

$$\sum_{v \in \text{vert } C} h_k(C/v) \leq n h_k(C) \quad (c)$$

Allo scopo, dimostriamo che $h_k(C/v) \leq h_k(C)$ vale per tutti gli n vertici $v \in \text{vert } (C)$.

A tale scopo, consideriamo prima uno shelling che shells la star di v .

Ciò significa che la nuova faccetta è minimale in C e i links con C/v coincidono ad ogni passo mentre applichiamo lo shelling alla stella.

Dopo aver applicato lo shelling alla stella, possiamo ottenere nuovi contributi per $h_k(C)$, ma non più di $h_k(C/v)$. Con questo si ottiene la disuguaglianza (c). Dall'equazione (b), deriviamo la disuguaglianza (a).

Riguardando l'uguaglianza per ottenere $h_k(C/v) = h_k(C)$, è necessario che in un shelling che inizia con la star di v , non esista una "nuova" faccetta di dimensione al più k fuori della stella di v .

Così otteniamo che, per $l \geq 1$, l'uguaglianza $h_k(C/v) = h_k(C)$ vale per ogni $ik \leq l$ se e solo se in uno shelling che inizia con la star di v , non c'è nessuna nuova faccetta di dimensione l esterna alla star di v .

In modo equivalente, si afferma che ogni faccia G con al più $|G| \leq l$ vertici è contenuta nella star di v , in modo che $G \cup \{v\}$ è una faccia.

Allo stesso modo nell'equazione (b) vale solo se abbiamo l'uguaglianza per tutti i vertici v .

Da questo otteniamo che l'uguaglianza in (b), e quindi in (a), vale per ogni $k \leq l$ se e solo se C è $l + 1$ -near.

Il risultato contenuto nella dimostrazione di questo lemma è il passaggio chiave dovuto a McMullen per soluzione della congettura limite superiore, [136].

COROLLARIO 1.3.

Se P è un d -politopo *simpliciale near* con $f_0 = n$ vertici, allora

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{\frac{d}{2}} \left[\binom{d-i}{k-i} + \binom{i}{k-d+i} \right] \binom{n-d-1+i}{i}$$

per $0 \leq k \leq d$.

OSSERVAZIONE 1.1.

Per ogni k , il corollario da il numero massimo, di $k - 1$ -facce per un d -politopo con n vertici.

Per $k = d$, otteniamo la formula per il numero di faccette del politopo ciclico $C_d(n)$

$$f_{d-1} = \sum_{i=0}^{\frac{d}{2}} \binom{n-d-1+i}{i}.$$

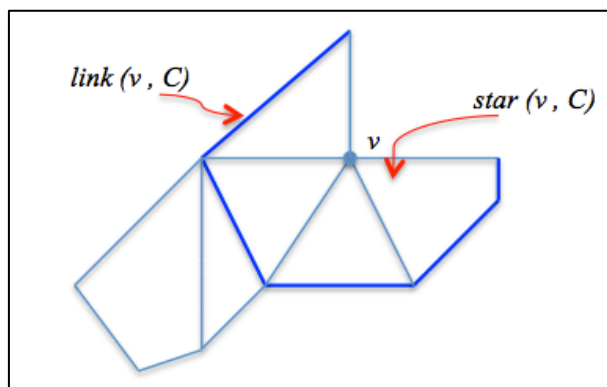


Fig. 51

DEFINIZIONE 1.6.

Si definisce link il sottocomplesso di tutte le facce $G \in star(v, C)$ della star che non ha v come vertice. (*Fig. 51*)

DEFINIZIONE 1.7.

Si definisce $star(v, C)$, il complesso poliedrico (v, C) e il sottocomplesso politopale di tutte le facce che contengono v e le loro facce.

Capitolo secondo

I COMPLESSI SIMPLICIALI

La teoria sui complessi simpliciali nasce dalla necessità di classificare i molteplici spazi presenti nella Topologia algebrica, argomento matematico complesso e astratto. [92]

Tuttavia, alcune delle tecniche utilizzate per la rappresentazione possono essere applicate a contesti diversi a partire da semplici elementi fino a creare nuovi oggetti sempre più complessi e multidimensionali. Le strutture geometriche che identificano un complesso simpliciale descrivono la struttura di connessione dei simplessi che lo generano. [101]

2.1. - I COMPLESSI SIMPLICIALI IN ARTE E IN MATEMATICA

La geometria topologica, altresì denominata come “la geometria del foglio di gomma”, è una geometria che ammette le deformazioni elastiche delle figure ossia delle trasformazioni che avvengono attraverso un processo dinamico e continuo senza effetti di lacerazioni o strappi. È una geometria il cui concetto principe di equivalenza tra figure è per l'appunto quello della continuità.

È quindi svincolata da tutte quelle concezioni di metriche “rigide” appartenenti alla geometria Euclidea e Proiettiva a cui si è stati abituati per millenni.

Questa nuova geometria, in cui la forma e le dimensioni degli oggetti sono trascurabili, ha interessato molti studiosi, e non soltanto matematici, quale il biologo D'Arcy W. Thompson che l'ha utilizzata per studiare le trasformazioni delle forme organiche principalmente come risultati di trasformazioni geometriche. Tale studio è ripreso nel suo lavoro “Crescita e Forma” del 1917.

Ed anche l'artista Albrecht Dürer, secondo il quale alla base di ogni concezione artistica vi è sempre un'adeguata formazione teorica di Geometria, già utilizzava

tali trasformazioni evidenziando il modo con cui queste riescono a modificare i caratteri del viso umano, secondo quanto riportato nel Trattato sulle Proporzioni (1528). Parimenti importanti sono il Trattato sulle geometrie (1525) e il Trattato sulle fortificazioni delle mura (1527). [59]

Nel XVIII secolo, il matematico svizzero Leonhard Euler con la scoperta della formula $V - S + F = 2$ mette in relazione il numero dei vertici delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso dando inizio allo studio della topologia (analysis situs). [57]

Il XIX secolo fu un periodo importante per lo studio e l'evoluzione della geometria.

Il matematico tedesco C. F. Gauss introduce una nuova branca della geometria, la cosiddetta geometria differenziale, mentre B. Riemann, oltre a dare un contributo fondamentale nello studio delle geometrie non euclidee, introduce in campo topologico le superfici riemanniane, anticipando il concetto di metrica e di tensore. [6]

Questi concetti furono ripresi ed utilizzati successivamente da A. Einstein per la descrizione dello spazio in relatività generale. [97]

Ma si deve al matematico francese J. H. Poincaré l'invenzione della topologia algebrica che, ancora oggi, è una delle branche più attive della matematica; per questo è ritenuto il padre fondatore della topologia moderna.

I tentativi di classificare le molteplici ed altresì note strutture topologiche hanno consentito la nascita della teoria dei complessi simpliciali. [118]

I complessi simpliciali permettono la costruzione di uno spazio topologico generato da forme elementari che man mano vengono opportunamente assemblate a partire da semplici elementi.

L'utilizzo di tale tecnica permette di creare nuovi complessi simpliciali raffiguranti forme sempre più articolate e di dimensione maggiore.

Esiste un forte legame tra (simpliciali) politopi e complessi simpliciali.

Un complesso simpliciale è un raggruppamento ordinato di simplessi che si intersecano fra loro solo su facce comuni. (*Fig. 52*)

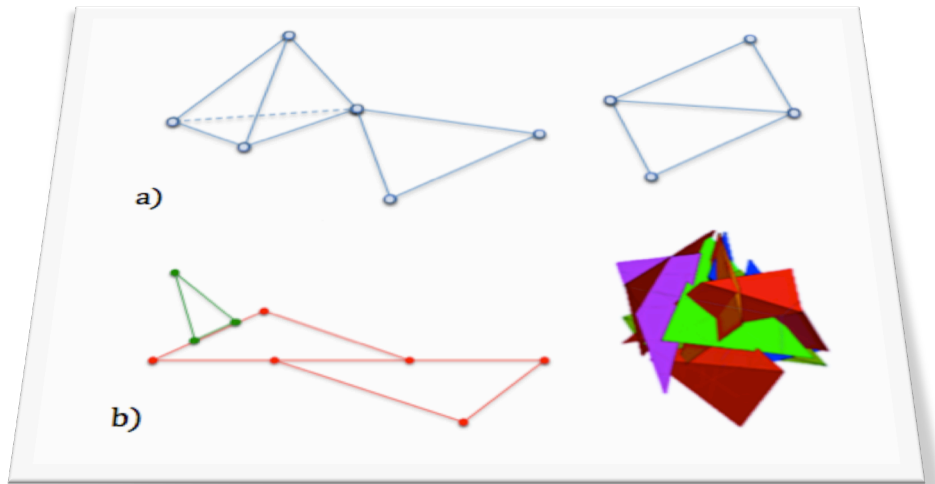


Fig. 52 - Esempi di complessi simpliciali (a) ed esempi di una collezione di semplici, che non comprendono un complesso simpliciale (b) costruiti con Mathematica Wolfram ©.

Il più elementare complesso simpliciale è rappresentato nel piano da un triangolo mentre nello spazio a tre dimensioni da un tetraedro, in uno spazio quadridimensionale da un ipertetraedro e così via. (Fig.53)

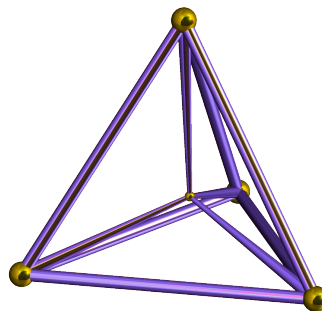


Fig. 53 – Ipertetraedro.

Un complesso simpliciale definisce quindi uno spazio topologico che, a sua volta, può essere rappresentato da complessi simpliciali differenti tra loro.

Ma non tutti gli spazi topologici possono essere rappresentati come complessi simpliciali.

Una tecnica per un'approssimazione discreta di una superficie è rappresentata dall'utilizzo delle *mesch* poligonali la cui elaborazione è dovuta ad algoritmi geometrici con un alto grado di computazionalità. (Fig.54) [9]

Parametrizzare una mesh significa trovare una funzione capace di mappare i vertici della mesh in un dominio planare.

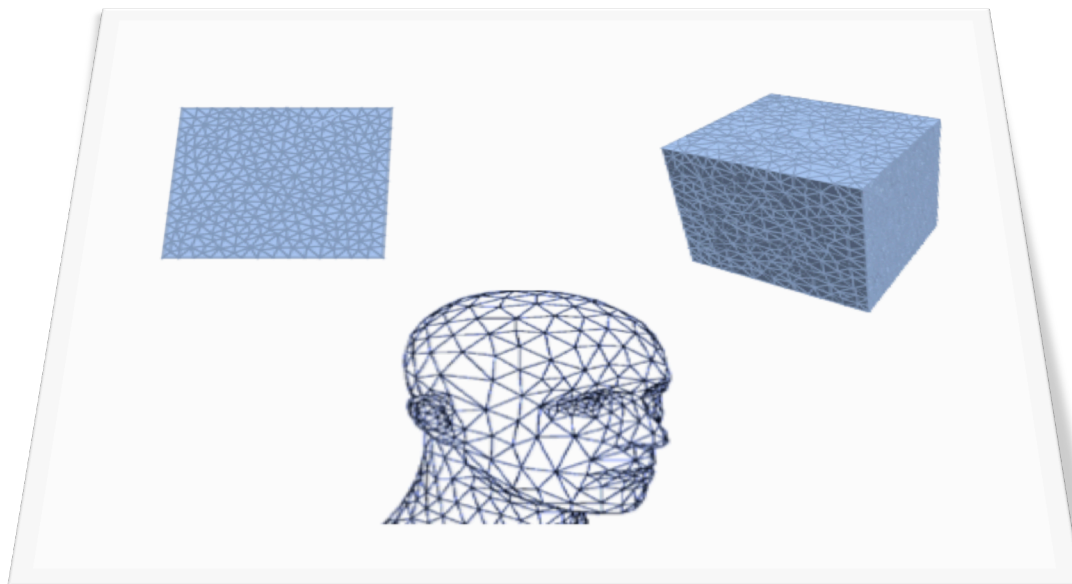


Fig. 54 - Esempi di applicazione di mesh costruiti con Mathematica Wolfram ©.

Nel caso in cui un gruppo di triangoli ha un vertice in comune si parlerà di fan. Mentre un gruppo di triangoli con un lato in comune verrà indicato come strip. (Fig.55)

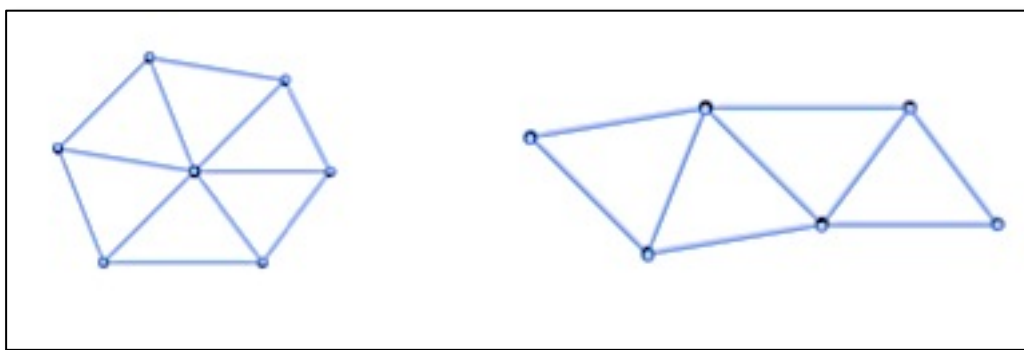


Fig. 55 - Esempi di fan e strip.

Juan G. Escudero, come altri artisti, nella sua opera “Simpliciale” del 2013 ha inteso rappresentare alcuni motivi di forme simpliciali in modo artistico che richiamano gli aspetti teorici presentati sui complessi simpliciali. (Figg.56 e 57)

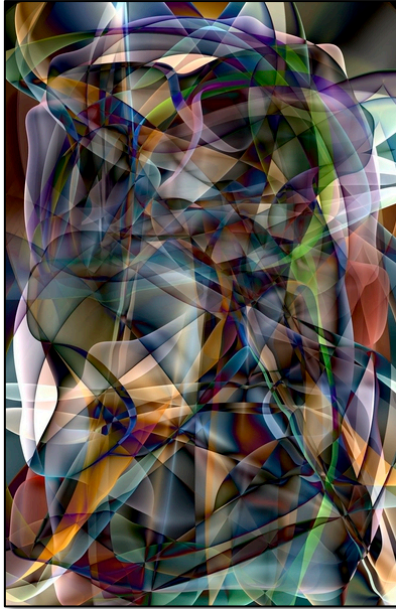


Fig. 56 - J. G. Escudero, Simplicial, 2013.

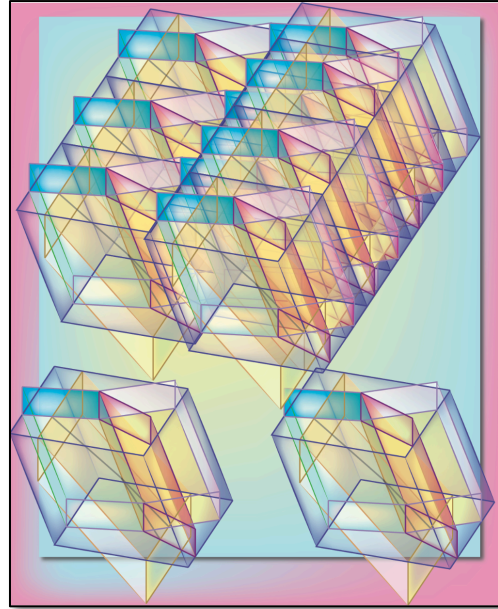


Fig. 57 - University of South Alabama J. Scott Carter.

2.2. – I COMPLESSI SIMPLICIALI E LA MULTIDISCIPLINARIETÀ

In base a quanto detto precedentemente, i triangoli e i tetraedri sono rispettivamente i poligoni ed i poliedri più semplici.

Il complesso da essi formato prende il nome di complesso simpliciale. I triangoli e i tetraedri sono i semplici rispettivamente nello spazio bidimensionale e tridimensionale.

L'applicazione dei complessi simpliciali trova utilizzo anche nell'ambito del riconoscimento di un oggetto o forma o meglio struttura a partire da quella che viene detta "nuvola di punti" dalla quale è possibile indagare le proprietà topologiche. Tale tecnica consiste nell'associare alla nuvola di punti un complesso simpliciale che dia una buona rappresentazione dell'insieme dei punti di partenza.

In fisica, la tecnica di approssimazione simpliciale è stata utilizzata anche al fine di semplificare degli aspetti della relatività generale. [159]

In particolare, il calcolo delle soluzioni dell'equazione di campo di Einstein. Questa tecnica dovuta a T. Regge, detta appunto calcolo di Regge, consiste nel trattare una porzione dello spaziotempo approssimandolo mediante una triangolazione in semplici.

Tale approssimazione si può estenderla alla curvatura dello spaziotempo.

Il modello di Regge è stato tuttavia utilizzato in numerose applicazioni, in particolare in fisica teorica nello studio della gravità quantica.

In architettura molte opere strutturali richiamano la struttura dei complessi simpliciali, (*Fig.27, Cap.1*) alcune di seguito riportate:

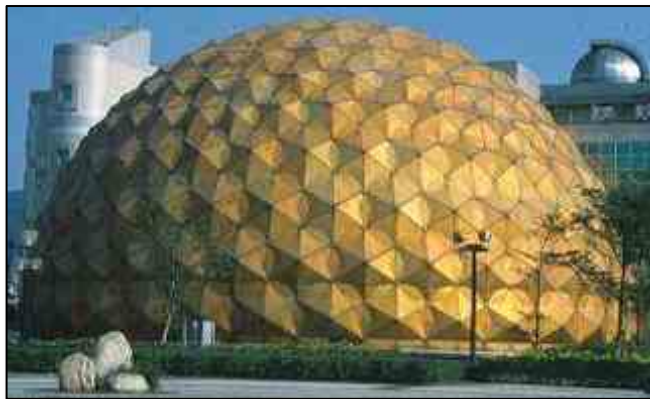


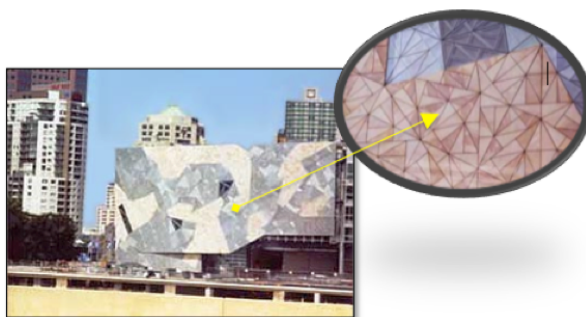
Fig. 558 - Astronomical Museum, Taipei, 1997, commons.wikimedia.org.



*Fig. 59 - Museo Salvador Dali, Florida
Progettato dall'architetto Yann Weymouth di
HOK.
<http://thedali.org/home.php> Copyright Albini
& Fontanot S.p.a.*



*Fig. 60 - Basque Health Department Headquarters di
Bilbao, progettato dagli architetti Coll-Barreu.
<http://no-miedo.blogspot.it>*



*Fig. 61 - Design di un edificio di Melbourne, foto
di Dick Hess, adattata.*



*Fig. 62 - Media for Federation Square
openbuildings.com*

In conclusione è possibile affermare che nell'architettura contemporanea la geometria afferente ai complessi simpliciali è in fase di ricerca. Inoltre, la tecnica di approssimazione è utilizzata per la riscoperta di siti archeologici inesplorati nonché nello studio dell'architettura spaziale.

L'argomento delle triangolazioni degli insiemi di punti lattice è stato da me utilizzato al fine di ottenere delle interessanti e nuove forme (*Figg.63 e 64*).

La prima è stata ottenuta con l'applicazione della triangolazione lessicografica ad un insieme di punti lattice della superficie cubica di Veronese in \mathbb{P}^9 .

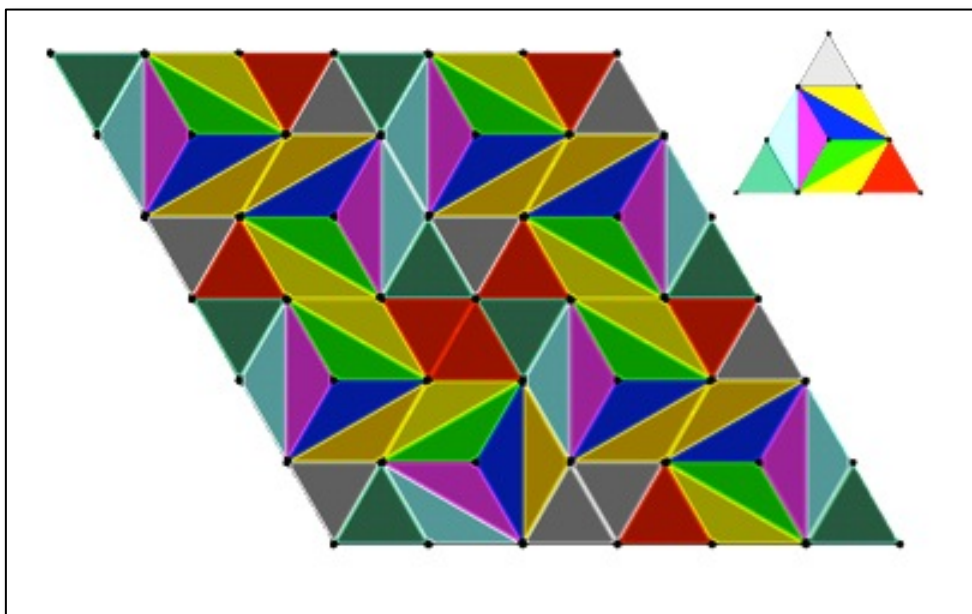


Fig. 63 - Triangolazione lessicografica, V. Iorfida © 2014.

Successivamente, mediante l'ordinamento lessicografico inverso del grado ho ottenuto la triangolazione lessicografica che ho rappresentato nei seguenti oggetti geometrici:

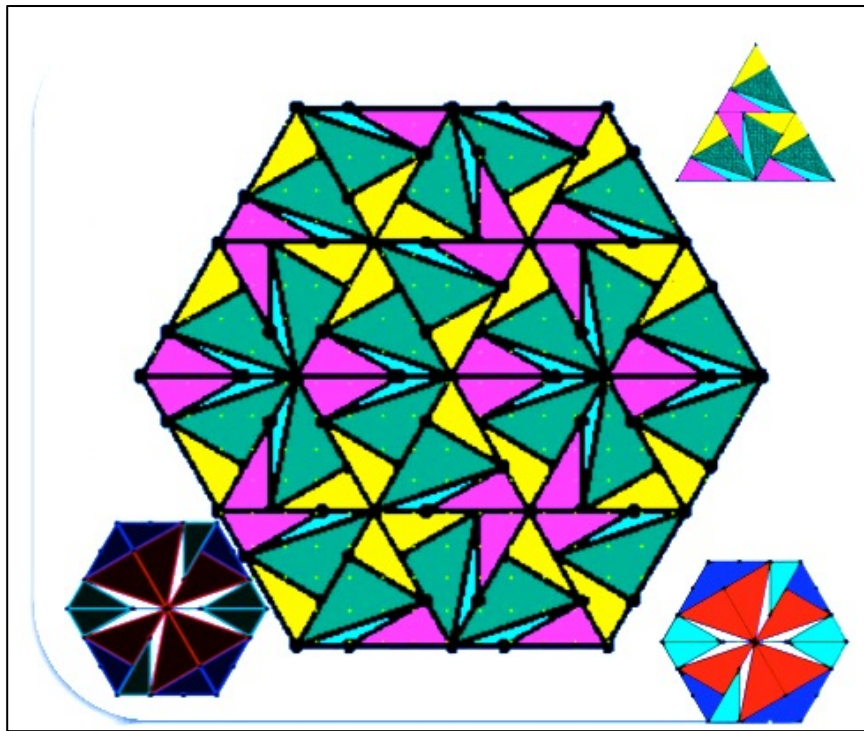


Fig. 64 - Triangolazione lessicografica inversa, V. Iorfida © 2014.

Questa figura sembra più interessante della precedente poiché non è scontata in quanto da come si può verificare, alcuni punti non sono vertici di triangoli. La combinazione delle parti delle (Figg.63 e 64) permettono la trasformazione in molte forme inedite. Le precedenti figure potrebbero apparire come elementi decorativi di strutture architettoniche in vetro, ceramica o altri materiali somiglianti ai seguenti oggetti, se vengono colorate. (Fig.65) [30]

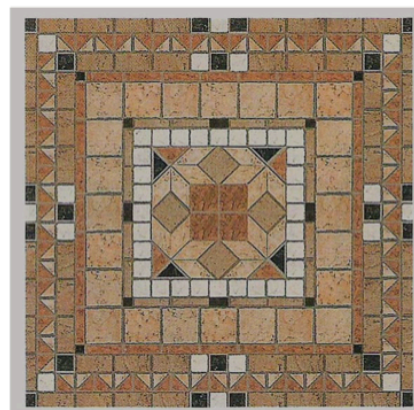


Fig. 65 - Cuscino in patchwork e piastrella in marmo.

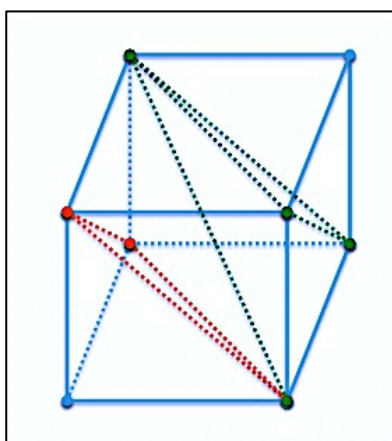


Fig. 66 - Triangolazione lessicografica del 3- cubo.

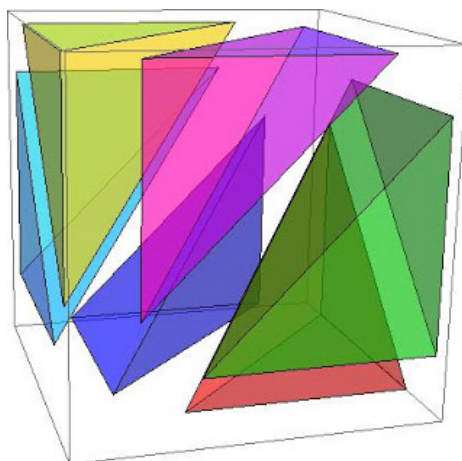


Fig. 67 - Triangolazione 3- cubo costruito con Mathematica Wolfram ©.

Le applicazioni computazionali nelle scienze e nei vari campi di ricerca affrontano lo studio di problemi geometrici di notevole complessità dovuta principalmente all'incremento dei dati necessari per l'elaborazione e l'ottimizzazione delle forme, al fine di rappresentarle con un'ottima approssimazione, in modo da renderle efficaci nello studio sperimentale ed essere utilizzate nelle tecniche di simulazione che trovano applicazione in moltissimi settori di ricerca scientifica come nel campo aerospaziale, in medicina, nelle nanotecnologie ed altre ancora. [105]

2.3. - APPENDICE

2.3.1. - I COMPLESSI SIMPLICIALI

Un semplice n -dimensionale è il politopo, n -dimensionale col minor numero di vertici. Il semplice di dimensione zero è un singolo punto, il semplice bidimensionale è un triangolo e il tridimensionale è un tetraedro. Il semplice n -dimensionale ha $n + 1$ vertici. Come tutti i politopi, il semplice ha facce di ogni dimensione: queste sono tutte a loro volta semplici. Per la sua semplicità, il semplice è generalmente ritenuto il blocco base con cui costruire spazi n -dimensionali più complicati tramite un processo, detto triangolazione. Un complesso simpliciale è un'aggregazione ordinata di semplici, ossia un'unione di un certo numero di semplici che si intersecano fra loro solo su facce comuni. [12] [207] (Fig.68)

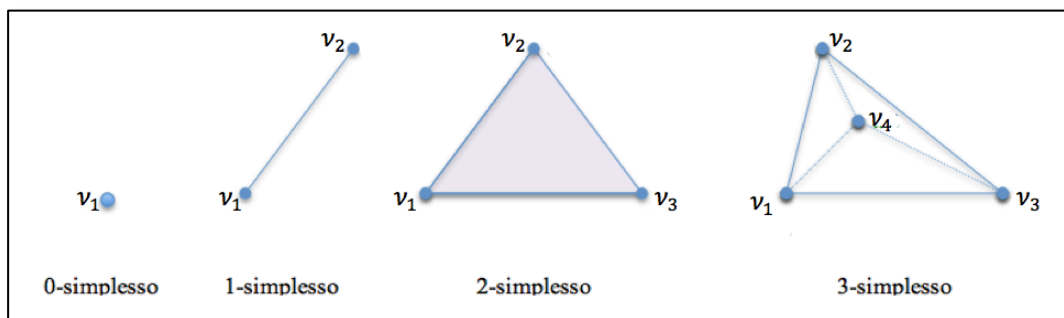


Fig. 68

DEFINIZIONE 2.1.

Sia $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un complesso simpliciale Δ su I è un insieme di sottoinsiemi di I tale che

1. $\emptyset \in \Delta$
2. $F \in \Delta \Rightarrow F' \in \Delta, \forall F' \subset F$

Pertanto, si evince che $\Delta \subseteq P(I)$.

La rappresentazione dei complessi simpliciali è geometrica.

Infatti, se consideriamo

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

graficamente è dato da

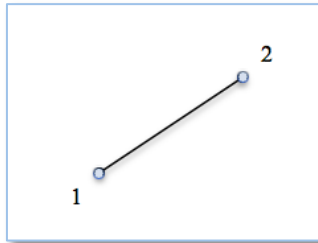


Fig. 69

DEFINIZIONE 2.1.

Per ogni $F \in \Delta$, F è detta *faccia* di Δ e se $|F| = i$, allora la $\dim(F) = i - 1$

OSSERVAZIONE 2.1.

Le facce massimali sono dette *faccette*.

ESEMPIO 2.1.

1. Il triangolo pieno è un complesso simpliciale (Fig. 70)

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

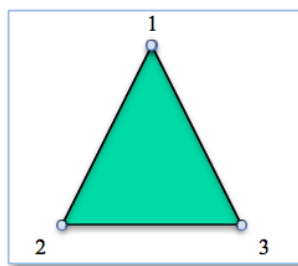


Fig. 70

La faccetta massimale è $\{1, 2, 3\}$.

2. Consideriamo

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

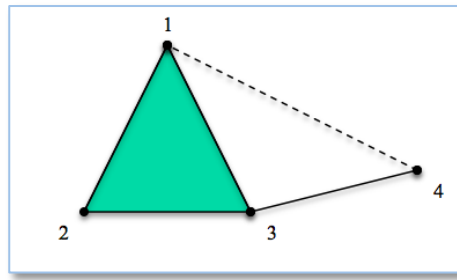


Fig. 71

In questo caso, non possiamo scrivere $\{1, 3, 4\}$ poiché in Δ manca $\{1, 4\}$.

(Fig. 71)

Ai complessi simpliciali è possibile associare gli anelli e gli ideali. [64]

- $K[x_1, \dots, x_n] = S$ è l'anello di polinomi costruito sulle indeterminate il cui numero è uguale a quello dei vertici. [3]
- I_Δ è l'ideale di Stanley-Reisner (che è un ideale monomiale di S) così definito:

$$I_\Delta = \{x_{i_1} \dots x_{i_m} \text{ t. c. } \{i_1, \dots, i_m\} \notin \Delta, \subseteq K[x_1, \dots, x_n] \}.$$
- $K[\Delta] = K[x_1, \dots, x_n] / I_\Delta$ è detto anello di Stanley-Reisner di Δ , o anello delle non facce di Δ , rispetto a K . I monomi di $K[x_1, \dots, x_n]$ che non si annullano in $K[\Delta]$ sono tutti e soli quelli i cui fattori formano una faccia di Δ .

DEFINIZIONE 2.3.

Definiamo *ideale monomiale* ogni ideale di un anello di polinomi generato da monomi.

La rappresentazione per un polinomio non nullo $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ esiste una ed una sola rappresentazione:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{(a_1, \dots, a_n)} x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}$$

dove i monomi $x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}$ per i quali $\lambda_{(a_1, \dots, a_n)} \neq 0$ si diranno monomi di $f(x_1, \dots, x_n)$.

OSSERVAZIONE 2.2.

I grafi sono particolari complessi simpliciali in cui tutte le faccette hanno dimensione 0 oppure 1.

ESEMPIO 2.2.

Consideriamo il seguente grafo: (Fig. 72)

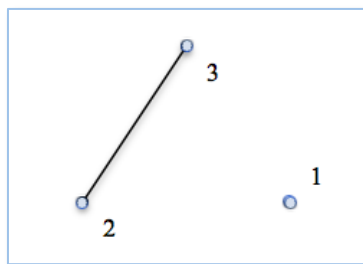


Fig. 72

Il cui complesso simpliciale è $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

DEFINIZIONE 2.4.

Sia I_G l'ideale dei lati ovvero generato dai monomi che formano i lati, allora I_Δ è detto *l'ideale delle non facce*, generato da monomi che individuano le non facce.

ESEMPIO 2.3.

1. Se prendiamo in esame il grafo seguente: (Fig. 73)

$$I_G = (x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4)$$

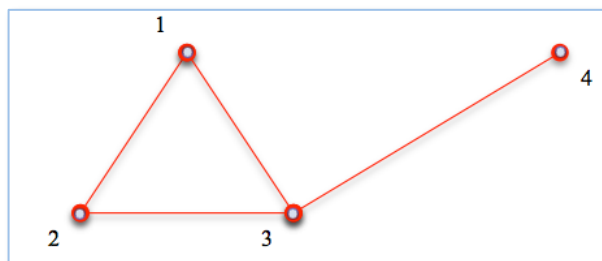


Fig. 73

le non facce sono:

$$I_{\Delta} = (x_2x_4, x_1x_4)$$

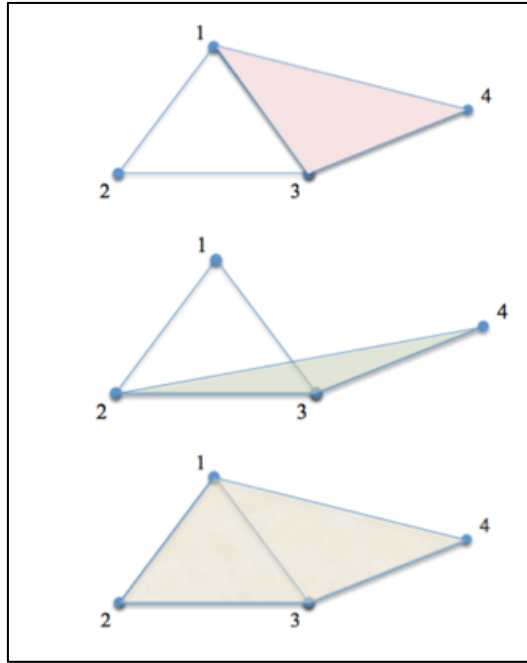


Fig. 74

2. Consideriamo il seguente grafo: (Fig. 75)

$$I_G = (x_1x_2, x_2x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4)$$

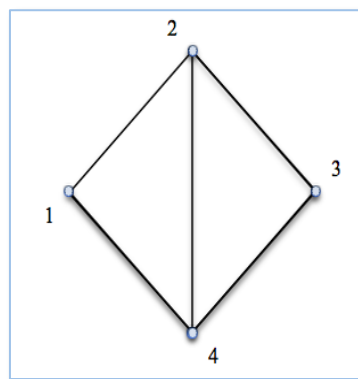


Fig. 75

$$I_{\Delta} = (x_1x_3)$$

OSSERVAZIONE 2.3.

Sia $I \subset S$ un ideale, non necessariamente monomiale *square-free*.

Introdotta un ordinamento di variabili in S ed un *term order*⁷ sui monomi di S , sapendo che :

$I \sim \text{in}_{<}(I)$ (ideale monomiale) si ha che:

1. se $\text{in}_{<}(I)$ è *square-free*⁸, $\text{in}_{<}(I) = I\Delta$, ossia può essere generato come l'ideale delle non facce di un complesso simpliciale Δ .
2. $\text{in}_{<}(I)$ non è necessariamente *square-free*.
3. se I è monomiale, allora \sqrt{I} è un ideale monomiale *square-free*.

DEFINIZIONE 2.5.

Sia $I \subset S$ un ideale. Si definisce *complesso simpliciale iniziale* di I e si indica con $\Delta_{<}$, il complesso simpliciale che come ideale di Stanley- Reisner ha $\sqrt{\text{in}_{<}(I)}$ (dipende dall'ordinamento).

ESEMPIO 2.4.

Se consideriamo il complesso simpliciale Δ , associato all'insieme dei vertici $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, le cui facce massimali sono: $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ e $\{v_3, v_4\}$. (Fig. 76)

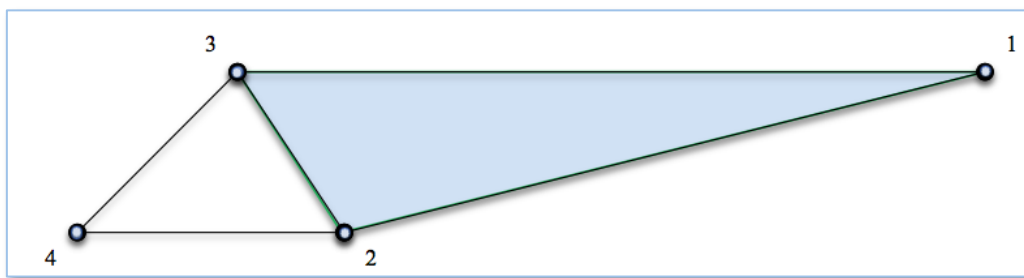


Fig. 76

⁷ Con il termine *term order* si indica un ordine totale ($<$) su \mathbb{N}^n dove il vettore nullo 0 è l'unico elemento minimale e $a < b \Rightarrow a + c < b + c \forall a, b \in \mathbb{N}^n$. Es.: l'ordine lessicografico (lex) l'ordine lessicografico del grado (deglex) e l'ordine lessicografico inverso del grado (revlex).

⁸ Con il termine *square-free* si indica un polinomio P è privo di potenze se nella sua decomposizione in fattori primi in $k[x]$ non vi sono fattori ripetuti;

ogni faccia formata da due elementi è rappresentata da un segmento, mentre ogni faccia formata da tre elementi viene rappresentata da un triangolo pieno. Nell'anello dei polinomi $K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ l'ideale associato è: $I_\Delta = (x_1x_4, x_2x_3x_4)$. Abbiamo associato ad ogni complesso simpliciale un ideale generato da monomi privi di quadrati, dove è possibile effettuare l'operazione inversa e la cui dimensione è data da: $\dim K[\Delta] = \max \{|F| \mid F \in \Delta\}$ quindi è 3. [40] [94] [138]

DEFINIZIONE 2.6.

Un complesso simpliciale I è un insieme finito di semplici che soddisfa le seguenti condizioni:

1. Se σ è un semplice di I e σ' una delle sue facce, allora anche σ' appartiene a I .
2. Siano σ_1 e σ_2 due semplici distinti appartenenti a I ; la loro intersezione o è vuota o è una faccia propria di entrambi.

ESEMPIO 2.5. (complesso simpliciale con $\dim 1$)

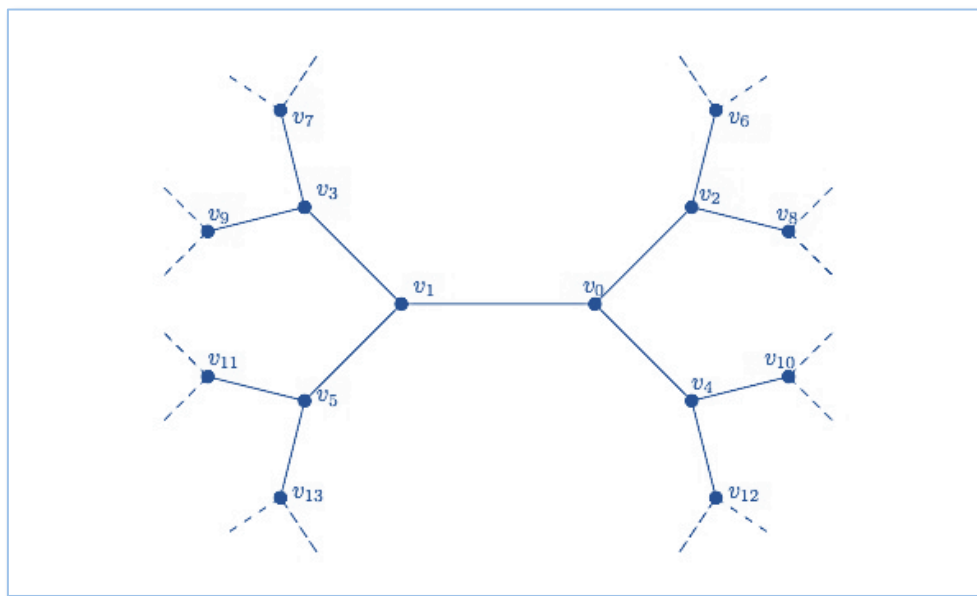


Fig. 77 - Complesso simpliciale infinita di dimensione (grafo infinito)

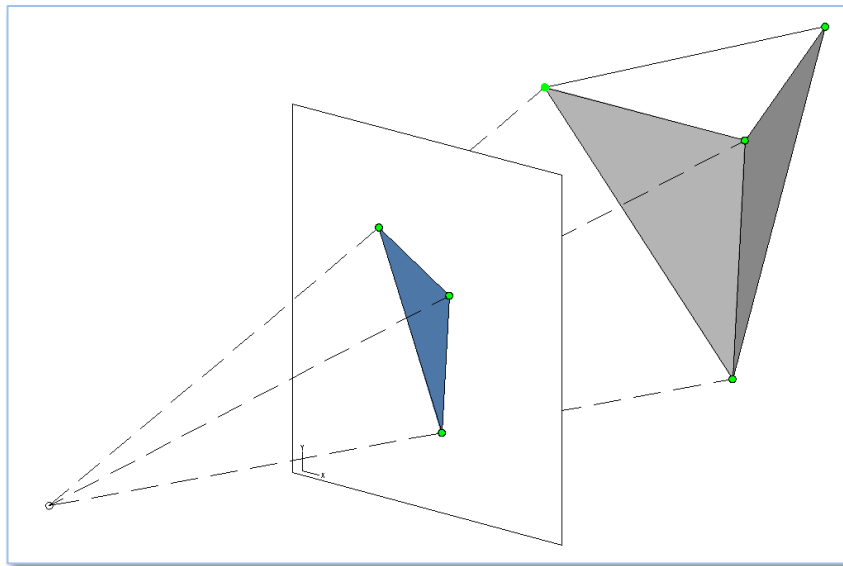


Fig. 78 - Complesso simpliciale con proiezione.

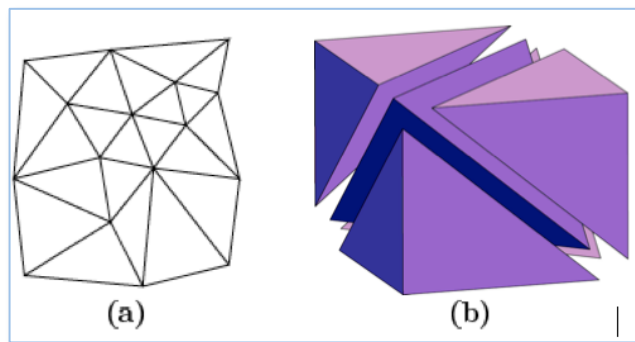


Fig. 79 - Complessi simpliciali regolari di dimensione 2 (a) e 3 (b).

DEFINIZIONE 2.7.

Si definisce *poliedro* un'intersezione finita di semi-spazi chiusi per la topologia usale di \mathbb{R}^n . Un poliedro può essere scritto nella forma seguente:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / A \cdot x \leq b\}$$

dove A è una matrice avente n colonne.

Dati i vettori $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ si consideri $P \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$P = \text{pos}(\{u_1, \dots, u_m\}) := \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m / \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+\}$$

P è detto *cono poliedrico*.

DEFINIZIONE 2.8.

Un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *cono* se $\forall x, y \in B$, ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha x + \beta y \in B$.

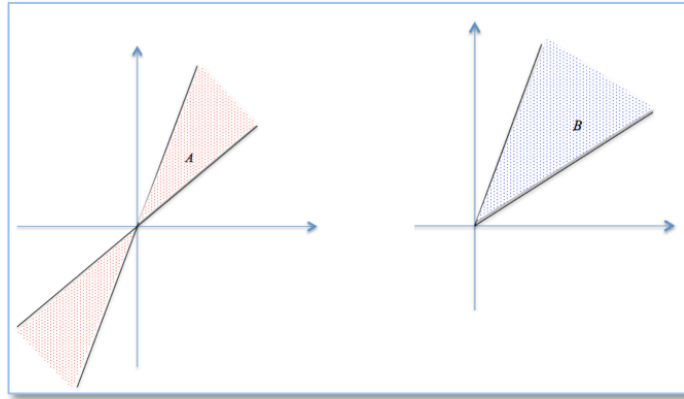


Fig. 80 - Nella figura sono rappresentati due coni: A è non connesso mentre B lo è. Inoltre un poliedro della forma $\{x: Ax \leq 0\}$ è un cono detto poliedrico.

DEFINIZIONE 2.9.

In \mathbb{R}^n un *insieme convesso* è un insieme nel quale, per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.

TEOREMA 2.1.

Un poliedro limitato è convesso di un insieme finito di punti.

TEOREMA 2.2.

Un cono poliedrico è generato da un insieme finito di vettori ossia: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esiste un insieme finito X tale che:

$$\left\{ x = \sum_i \lambda_i x_i : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \right\} = \{x: Ax \leq 0\}.$$

TEOREMA 2.3.

Un poliedro $\{x + y: x \leq 0\}$ può essere scritto come *somma di Minkowski* di un politopo Q ed un cono C , $P = Q + C$.

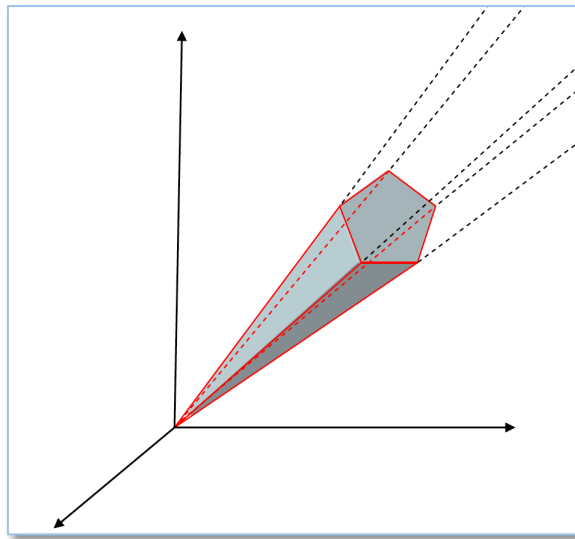


Fig. 81 - Cono poliedrico nello spazio tridimensionale.

DEFINIZIONE 2.10.

Si definisce *inviluppo convesso* di un insieme Q di \mathbb{R}^n il più piccolo insieme convesso di \mathbb{R}^n che contiene Q e si scrive $conv(Q)$. Quindi $conv(Q)$ è anche l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti Q . In particolare se Q è formato da 2 punti $\{v_1, v_2\}$, $conv\{v_1, v_2\}$ è il segmento di estremi v_1, v_2 .

DEFINIZIONE 2.11.

Un poliedro Q che è limitato è detto *politopo*. Ogni politopo Q è l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti

$$Q = conv(\{v_1, \dots, v_m\}) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i / \lambda_i, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

OSSERVAZIONE 2.4.

Esempi di inviluppi convessi in \mathbb{R}^3 sono il tetraedro e il cubo.

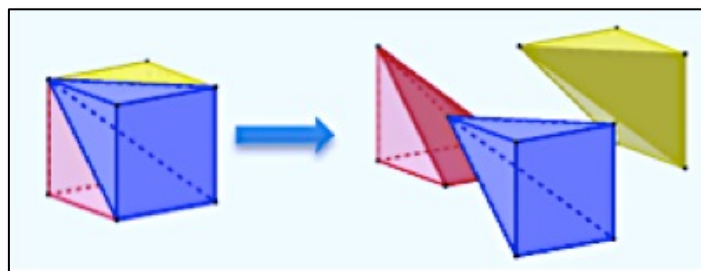


Fig. 82

DEFINIZIONE 2.12.

La *dimensione di una faccia* F di un poliedro P è la dimensione dello spazio affine che lo genera.

Se consideriamo il segmento immerso in \mathbb{R}^2 , lo spazio che lo genera è di dimensione 1, pertanto la sua dimensione è 1, i vertici hanno dimensione 0 mentre i lati hanno dimensione 2. (Fig. 83)[185] [190]

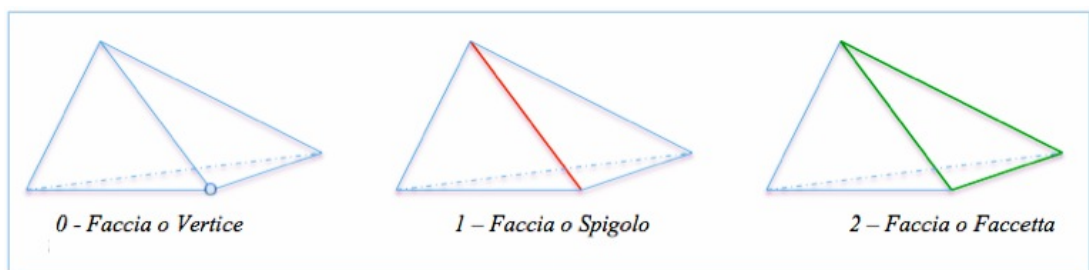


Fig. 83

DEFINIZIONE 2.13.

Un *complesso simpliciale poliedrico* Δ è una collezione finita di poliedri che soddisfa le seguenti condizioni

1. Se $P \in \Delta$ ed F è una faccia di P allora $F \in \Delta$
2. Se $P_1, P_2 \in \Delta$, allora $P_1 \cap P_2$ è una faccia di P_1 e P_2 .

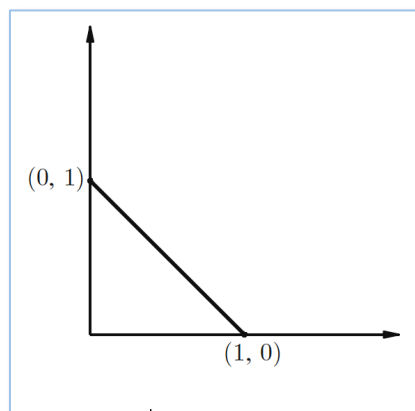
ESEMPI 2.6.

Fig. 84

$$v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$$

$$Q = \text{conv}\{(1,0); (0,1)\} =$$

$$= \{\lambda_1(1,0), \lambda_2(0,1); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+\} =$$

$$= \{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+; (\lambda_1 + \lambda_2 = 1)\}.$$

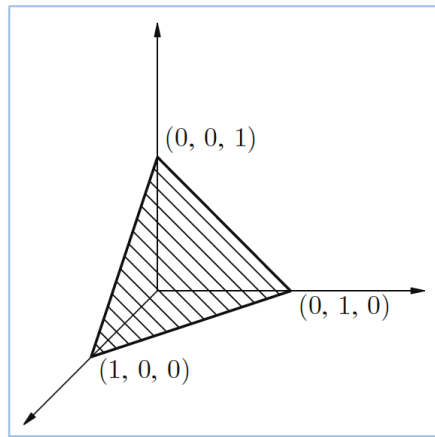


Fig. 85

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$$

$$Q = \text{conv}\{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\} =$$

$$= \{\lambda_1(1,0,0), \lambda_2(0,1,0); \lambda_3(0,0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+\} =$$

$$= \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+; (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1)\}.$$

DEFINIZIONE 2.14.

Il *supporto* del complesso poliedrico Δ è

$$|\Delta| := \bigcup_{P \in \Delta} P$$

Ricordiamo la *Relazione di Eulero*.

La relazione di Eulero collega il numero F delle facce, degli spigoli S e dei vertici V di un poliedro in \mathbb{R}^3 , è la seguente:

$$F + V - S = 2$$

Il numero $\chi = V - S + F$ dipende soltanto dalla topologia del poliedro ed è chiamata caratteristica di Eulero-Poincaré.

La formula di Eulero può essere usata per dimostrare che i solidi Platonici sono soltanto cinque: tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro (o cubo), pentadodecaedro (dodici facce pentagonali)

La superficie di un solido Platonico può essere suddivisa in triangoli: dando luogo a complessi simpliciali in \mathbb{R}^3 . Un esempio è dato dall' icosaedro in (Fig 86).

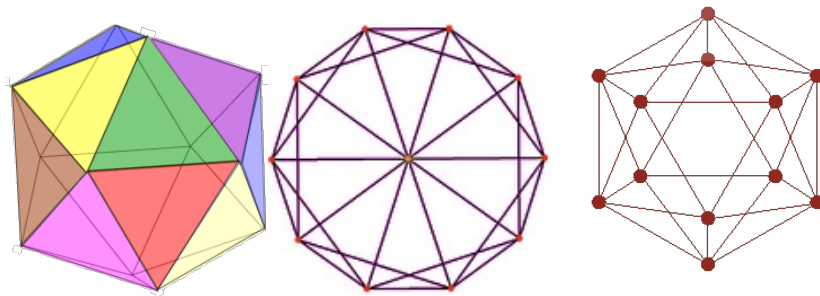
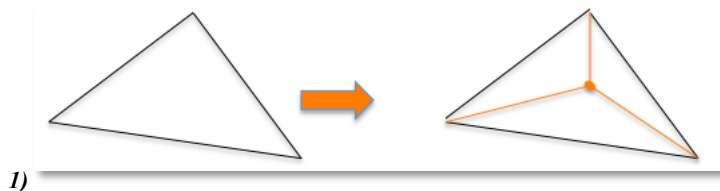


Fig. 86 – Rappresentazioni dell'icosaedro riprodotti con Mathematica Wolfram ©.

Alcuni esempi di politopi: l'ottaedro è un politopo simpliciale, infatti ogni sua (n-1) faccia è un 1-simplesso, mentre il cubo è soltanto un politopo, le sue faccette infatti sono quadrati, che non sono semplici.

TEOREMA 2.4.⁹

La caratteristica di Eulero-Poincaré di una superficie non dipende dalla triangolazione scelta.



⁹ Vedi [111]

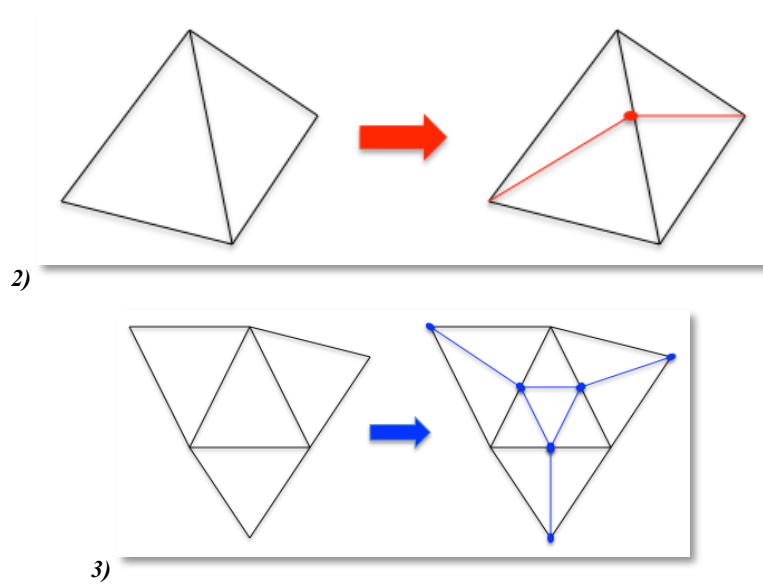


Fig. 87 - Con le prime due operazioni abbiamo aggiunto un vertice, tre lati e due triangoli, mentre con la terza ne abbiamo aggiunti rispettivamente tre, nove e sei; quindi in definitiva la caratteristica di Eulero-Poincarè resta invariata. Infatti nell' esempio 1) si è aggiunto un nuovo vertice all'interno di un triangolo, ed i tre lati che uniscono il nuovo vertice ai vertici del triangolo in questione; nell'esempio 2) si è aggiunto un nuovo vertice all'interno di un lato ed i due lati che lo congiungono ai vertici dei due triangoli (di cui tale lato è faccia comune) che non e nell'esempio 3) si è aggiunto un nuovo vertice per ciascuno dei tre lati di un triangolo, il triangolo che li congiunge, e tre nuovi lati che collegano i nuovi vertici ai vertici opposti dei tre triangoli adiacenti.

DEFINIZIONE 2.15.

Si definisce *s-scheletro* di un complesso simpliciale Δ la collezione delle sue *k*-facce, per $k = 0; 1, \dots, s$ e si denota con $K_s(P)$.

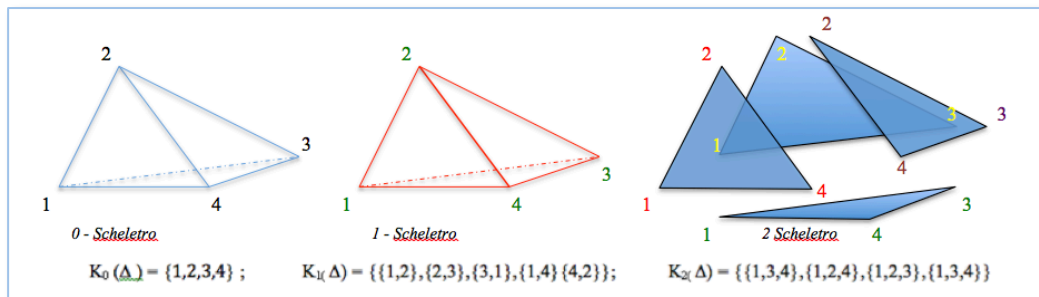


Fig. 88

DEFINIZIONE 2.16.

Si definisce *supporto* di un complesso simpliciale Δ :

$$[\Delta] = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$$

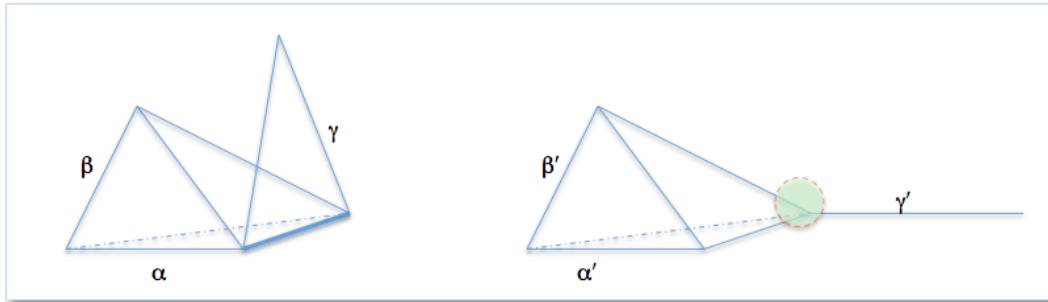


Fig. 89 - Esempi di complessi simpliciali.

DEFINIZIONE 3.17.

Ad ogni polinomio $f \in K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} ; \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) ; \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{N}^n$$

associamo un *Polinomio di Newton* in \mathbb{R}^n

$$New(f) = conv \{ \mathbf{a}_i : i = 1, \dots, m \}$$

Definiamo l'operazione algebrica di moltiplicazione che, in geometria, corrisponde all'operazione di somma di Minkowski

$$New(f \cdot g) = New(f) + New(g)$$

Ciò implica che se V è un vertice di $P_1 + P_2$ allora esistono unici i vertici $p_1 \in P_1$ e $p_2 \in P_2$ tali che $V = p_1 + p_2$.

ESEMPIO 2.7.

Dati due 2-simplessi in \mathbb{R}^2 (cioè due triangoli) individuati dai vertici

$$\{(1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

e

$$\{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$$

la somma di Minkowski deve contenere tutti i punti ottenibili sommando coppie di vertici, cioè i punti:

$$\{(1, 0), (2, 1), (2, -1), (0, 1), (1, 2), (1, 0), (0, -1), (1, 0), (1, -2)\}$$

e tutti i punti ottenibili come combinazioni convesse dei precedenti, cioè tutti i punti dell'esagono convesso che ha come vertici i punti

$$(0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, -1), (1, -2), (0, -1)$$

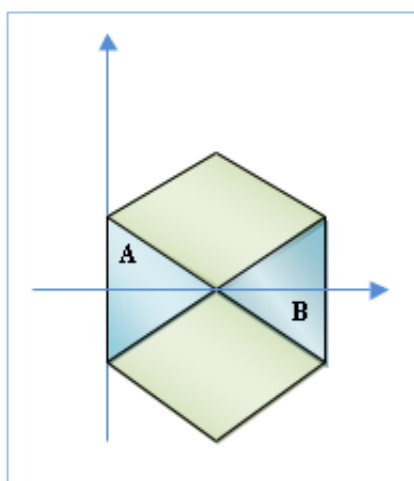


Fig. 90

OSSERVAZIONE 2.5.

La somma di Minkowski può aumentare la dimensione degli insiemi di partenza.

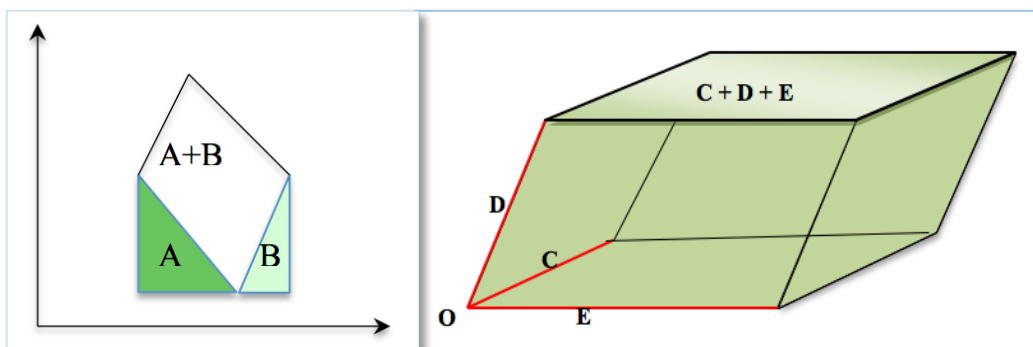


Fig. 91- Esempi di somma di Minkowski.

2.3.2. - LA TRIANGOLAZIONE

Una triangolazione di una superficie topologica X è una collezione di triangoli $\{T_i\}_{i \in I}$ tale che ogni punto di X appartiene T_i per qualche $i \in I$ un triangolo geometrico e le possibili intersezioni omeomorfe delle immagini di due triangoli distinti sono:

- a) l'insieme vuoto;
- b) un punto, che sia immagine di un vertice per entrambi;
- c) un lato, che sia comune ad entrambi.

DEFINIZIONE 2.18.

Un insieme finito di triangoli $\{T_1, \dots, T_n\}$ di una superficie compatta S è detta una *triangolazione* di S se:

- a) $\bigcup_{i=1}^n T_i = S$;
- b) per $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$, l'intersezione $T_j \cap T_k$ è vuota, oppure è costituita da un solo vertice, oppure è costituita da un intero, unico lato. Una superficie S si dice triangolabile se ammette una triangolazione.

TEOREMA 2.5. (TEOREMA DI RADÒ)¹⁰

Ogni superficie topologica compatta è triangolabile.

OSSERVAZIONE 2.2.6.

Per la validità del teorema precedente è necessaria la condizione che una superficie sia uno spazio topologico a base numerabile.

¹⁰ vedi [158].

2.3.3 - LA TRIANGOLAZIONE DI UN INSIEME DI PUNTI LATTICE

Consideriamo, adesso, la triangolazione di un insieme di punti lattice¹¹ contenuti in \mathbb{N}^d .

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t\}$, dove $\mathbf{a}_t \in \mathbb{N}^d$ [208][209]

DEFINIZIONE 2.19.

Sia σ un sottoinsieme di punti lattice, $\sigma \subseteq A$ e sia $pos(\sigma)$, il cono poliedrico generato da σ , allora si definisce *triangolazione* di A una collezione Δ di sottoinsiemi di A , tali che l'insieme $\{pos(\sigma), \sigma \in \Delta\}$ è l'insieme di coni di un ventaglio simpliciale (fan)¹² il cui supporto è uguale a $pos(A)$, essendo

$$supp(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} pos(\sigma)$$

$$supp\{pos(\sigma), \sigma \in \Delta\} = pos(A)$$

ESEMPIO 2.8.

Sia $A = \{(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\} \subset \mathbb{N}^2$ allora

Posto: $(3,0) \implies 1; (2,1) \implies 2; (1,2) \implies 3; (0,3) \implies 4$

la triangolazione associata alla cubica gobba è:

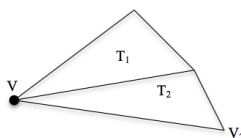
$$\Delta^1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

$$\Delta^2 = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$$

¹¹ Si definisce lattice, e si indica con

$L(\wedge, \vee)$ e $L \neq 0$ se $\forall \alpha, \beta \in L \exists \alpha \vee \beta \in L$ e $\alpha \wedge \beta \in L : \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma); \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

¹² Un fan di triangoli è un gruppo di triangoli che hanno in comune un vertice V . Il primo triangolo T_1 viene dato, per i successivi basta assegnare un nuovo il nuovo vertice.



$$\Delta^3 = \{\{1, 3\}, \{3, 4\}\}$$

$$\Delta^4 = \{\{1, 4\}\}$$

$$\Delta^4 = \{\{3,0\}; \{0,3\}\}; \sigma = \{(3,0); (0,3)\};$$

$$\begin{aligned} pos(\sigma) &= \{(3,0); (0,3)\} = \{\lambda_1(3,0) + \lambda_2(0,3); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+\} = \\ &= \{3\lambda_1, 3\lambda_2\}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ = \\ &= \{3(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pos(\lambda) &= \{\lambda_1(3,0) + \lambda_2(2,1) + \lambda_3(1,2) + \lambda_4(0,3); \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^+\} = \\ &= \{(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3; \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4); \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^+\} \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

$$pos \sigma = pos(\lambda) \text{ sse } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3,0); \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow (0,3)$$

DEFINIZIONE 2.20.

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d\}$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq i \leq d$ si definisce *cono generato* da A , $pos(A)$, l'insieme di vettori lattice del tipo $\{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{a}_t\} \in \mathbb{R}^d$ dove $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$. [189]

DEFINIZIONE 2.21.

Sia $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d\} \subset \mathbb{N}^d$, si definisce *inviluppo convesso* di A , $conv(A)$, l'insieme dei punti lattice del tipo $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{a}_t$ dove $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_t = 1$.

ESEMPIO 2.9.

Sia $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ l'insieme dei punti lattice.

Voglio determinare la triangolazione di A . [24]

Scelgo $\Delta_1 = \{(1, 0, 0)\}$, $\sigma_1 = (1, 0, 0)$.

Allora $pos(\sigma_1) = \{\lambda(1, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}^+\} = \{(\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ e deve coincidere con $pos(A)$. Falso. Analogamente se considero $\Delta_2 = (\{(0, 1, 0)\}, \{(0, 0, 1)\})$.

Se, invece, prendo

$$\Delta' = (\{(0, 0, 1)\}, \{(1, 0, 0)\}, \{(0, 1, 0)\})$$

questa può triangolizzare A .

È possibile introdurre anche il concetto di *triangolazione regolare*. [125]

Tali triangolazioni sono definite a partire da un vettore $w \in \mathbb{R}^n$ che risulta essere sufficientemente generico. [31]

Il vettore w definisce una collezione Δ_w di sottoinsiemi di A se esiste un vettore

$\underline{c} = (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$ tale che

1) $a_j \cdot c = w_j$ se $j \in \{i_1, \dots, i_t\}$, dove il \cdot indica il prodotto scalare

2) $a_j \cdot c < w_j$ se $j \in \{i_1, \dots, i_n\} \setminus \{i_1, \dots, i_t\}$

DEFINIZIONE 2.22.

Una triangolazione Δ di A è chiamata regolare se $\Delta = \Delta_w$ per qualche $w \in \mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 2.7.

La triangolazione regolare può anche essere costruita geometricamente. [187]

Consideriamo Δ_w , $w = (0, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Nella triangolazione ci sono:

$$\mathbf{a}_1 = (3, 0) \quad \mathbf{a}_4 = (0, 3) \text{ con } \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^2$$

Trovo c tale che

$$(3, 0)(c_1, c_2) = 0$$

$$(0, 3)(c_1, c_2) = 0$$

$$(2, 1)(c_1, c_2) < 1$$

$$(1, 2)(c_1, c_2) < 1$$

pertanto

$$\begin{cases} 3c_1 = 0 \\ 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 < 1 \\ c_1 + 2c_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Le condizioni sono verificate, pertanto si ottiene una triangolazione regolare definita dal vettore $w = (0, 1, 1, 0)$

2.3.4. - ALCUNE NUOVE FIGURE

La superficie di Veronese in \mathbb{P}^9

$$A = \{(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3 \text{ t. c. } i_1 + i_2 + i_3 = 3\}$$

l'ordinamento delle variabili $x_1 > x_2 > \dots > x_{10}$

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (3,0,0), (2,1,0), (2,0,1), (1,2,0), (1,1,1), (1,0,2), (0,3,0), \\ (0,2,1), (0,1,2), (0,0,3) \end{array} \right\} [183] [189]$$

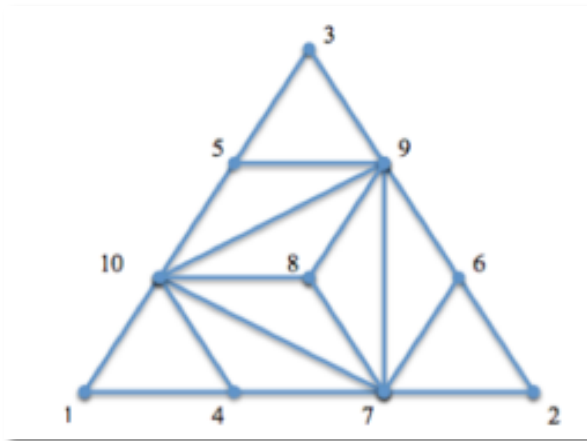


Fig. 92 - Triangolazione lessicografica.

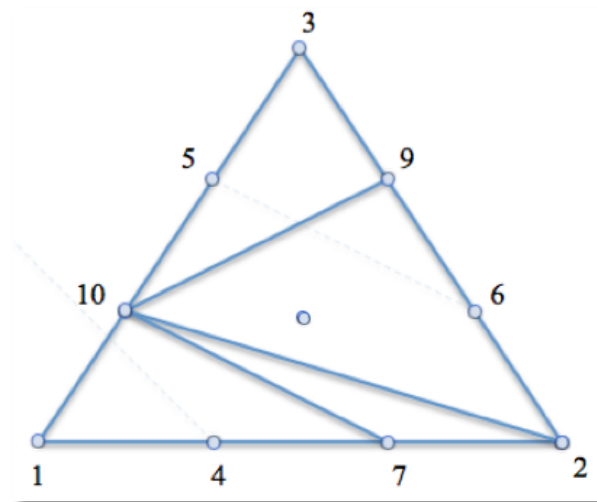
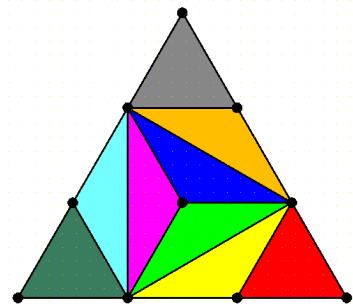
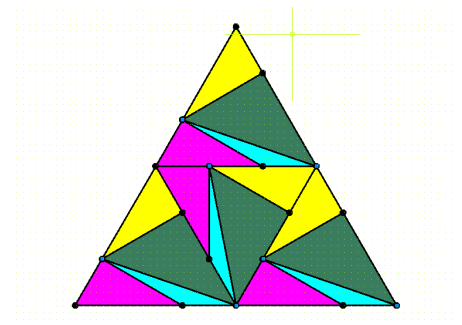


Fig. 93 - Triangolazione lessicografica inversa.



Capitolo terzo

LE VARIETÀ ALGEBRICHE

Con l'introduzione del calcolo infinitesimale, si giunge a fondamentali progressi sullo studio delle curve algebriche. Nel XIX secolo pervenendo ad un nuovo concetto di "spazio ambiente"¹³, svincolato dalle nozioni metriche¹⁴ ed indipendente dalla geometria euclidea, si ottiene, una classificazione delle varietà algebriche. [100] [116] [182] [74]

3.1. - VARIETÀ ALGEBRICHE IN MATEMATICA

Una superficie dello spazio affine \mathbb{R}^3 può essere definita come luogo di zeri di un'equazione polinomiale di grado n nelle variabili x, y, z .

Nel caso in cui la superficie in C non presenti singolarità si parla di superficie liscia ed il differenziale dell'equazione deve essere non nullo in ogni punto.

Pertanto, è semplice e consequenziale verificare come l'equazione

$x + y + z - 1 = 0$ rappresenta un piano: superficie liscia e quindi priva di punti singolari.

Passando poi nello spazio euclideo le superfici prendono il nome di "quadriche"¹⁵

L'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ descrive una superficie quadratica liscia. [99]

¹³ Uno spazio entro cui strutture algebriche e/o topologiche (in genere continue e di interesse per la geometria, ma anche discrete) definiscono l'ambiente entro il quale si costruiscono o si definiscono strutture più specifiche (figure, forme, politopi, superfici, ecc.).

¹⁴ Uno spazio metrico è un insieme di elementi, detti punti, nel quale è definita una distanza, detta anche metrica. Lo spazio metrico più comune è lo spazio euclideo. Uno spazio metrico è in particolare uno spazio topologico, con nozioni di compattezza, connessione, insieme aperto e chiuso. Si applicano quindi agli spazi metrici gli strumenti della topologia algebrica, quali ad esempio il gruppo fondamentale. Qualsiasi oggetto contenuto nello spazio euclideo è esso stesso uno spazio metrico. Molti insiemi di funzioni sono dotati di una metrica: accade ad esempio se formano uno spazio di Hilbert o di Banach. Per questi motivi gli spazi metrici giocano un ruolo fondamentale in geometria e in analisi funzionale.(W)

¹⁵ Con il termine quadrica si indica il luogo dei punti dello spazio ordinario le cui coordinate cartesiane soddisfano un'equazione di secondo grado (detta quadratica) in tre variabili. Le

Ma l'attenzione di molti matematici del tempo si è soffermata sullo studio delle *cubiche*¹⁶ e delle *quartiche*, figure queste che affascineranno anche il mondo dell'arte.

La *Superficie di Clebsch*, esempio di una *cubica liscia*, oltre ad avere la peculiarità di essere descritta come la somma di cinque equazioni di un piani ad esdel tipo:

$$\alpha: x = 0; \quad \beta: y = 0; \quad \gamma: z = 0; \quad \delta: (x + y + z + 1 = 0); \quad \varepsilon: (2x + 2y + 2z + 1 = 0)$$

ciascuna elevata alla terza potenza, la cui forma si esplicita dalla seguente equazione:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (x + y + z)^3 - (2x + 2y + 2z)^3 = 0$$

è stata una figura geometrica importante oggetto di numerose pubblicazioni scientifiche che portò all'affermazione che ogni cubica liscia è razionale e contiene un numero di rette pari a ventisette. (Fig. 94)



Fig. 94 - Superficie di Clebsch.

Invece, nel campo della fisica, le superfici *quartiche* furono oggetto di studi particolari soprattutto nel campo dell'ottica geometrica. Sia *Kummer* che *Klein* ne

differenti caratteristiche metriche che le rappresentano classificano le quadriche in: quadriche a centro e quadriche a centro improprio. In modo più rigoroso, si definisce quadrica il luogo di zeri di una equazione di secondo grado in tre variabili, una equazione, quindi, del tipo:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + k = 0.$$

¹⁶ Con il termine cubiche si intendono equazioni, o forme algebriche di terzo grado, rappresentanti curve, o superficie, o varietà n-dimensionali. L'equazione sarà del tipo $ax^3 + by^2 + cz + d = 0$ con a numero reale o complesso non nullo.

studiarono le proprietà sino a giungere a conclusioni più affascinanti delle cubiche. Famosa fu la “Klein quartica”¹⁷ e la “superficie di Kummer”¹⁸ (superficie con 16 punti conici (doppi) singolari). (Figg.95 e 96)

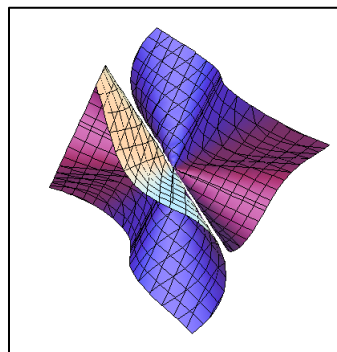
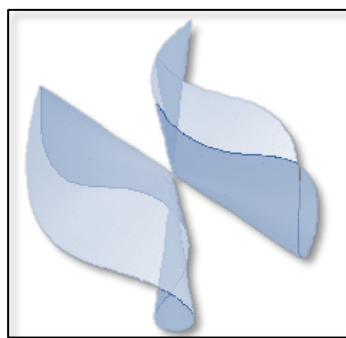


Fig. 95 - Superficie di Klein.

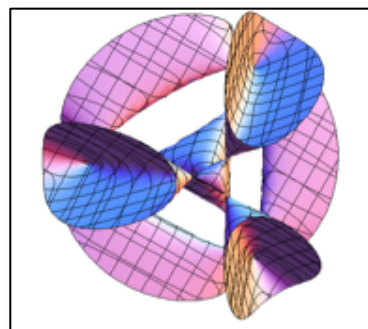
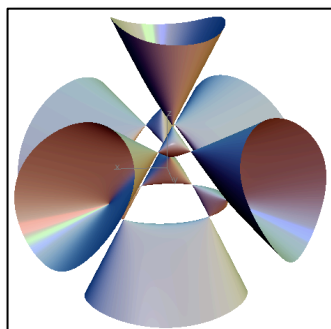


Fig. 96 - Superficie di Kummer.

¹⁷ La superficie “quartica di Klein” è determinata dall'equazione: $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Klein (1879, traduzione ristampato nel 1999) ha scoperto che questa superficie ha una serie di proprietà notevoli, tra cui un incredibile simmetria 336 volte quando le riflessioni speculari ammesse (Levy 1999, p ix,.. Thurston 1999, pag 2), un numero che poi è risultato essere il massimo possibile per una superficie di questo tipo (Hurwitz 1893, Karcher e Weber 1999, p. 9).

¹⁸ La superficie di Kummer, è una quartica di \mathbb{P}^3 , dotata di 16 punti doppi isolati (massimo numero compatibile di numeri doppi) è utilizzata in meccanica quantistica. Infatti questa superficie (e le sue generalizzazioni a n dimensioni) oltre a occupare una parte fondamentale nella geometria dello spazio euclideo quadridimensionale, è stata oggetto di ricerca in tutta la sezione di geometria del XIX secolo, Cayley riuscì a rappresentarla per mezzo di funzioni periodiche quadruple. Successivamente A. Eddington evidenziò che tale superficie e l'equazione d'onda di Dirac (nella meccanica dei quanti) erano in stretta relazione..[I grandi matematici Di Eric Bell]

Le difficoltà di rappresentare tali superfici in uno spazio spinsero gli studiosi matematici a costruire modelli, anche in legno, oltre che per uso didattico anche al fine di illustrarne le proprietà. [103]

All'inizio del XX secolo, nella ex-Russia, il *Costruttivismo*, un movimento d'arte d'avanguardia e culturale, caratterizza il mondo artistico del momento proponendosi di indagare sul rapporto di spazio e tempo attraverso ricerche dinamiche.

Dallo scultore e pittore *V. Tatlin e A. M. Rodčenko* (fondatori del movimento) fino ai fratelli *Naum Pevsner* di origine russa, in arte *Gabo e Anton Pevsner* si parla di un'arte nuova, creando forme reali nello spazio reale, definita “*esatta*”, perché simile al lavoro degli ingegneri, come attesta il progetto, per il *Monumento per la Terza Internazionale –mai realizzato-* di *Tatlin*: due grandi spirali metalliche che in senso contrario evolvendosi circoscrivono un volume conico. (Fig.97)



Fig. 97 - Monumento per la Terza Internazionale.



Fig. 98 - Costruttivista russo M. Rodčenko.

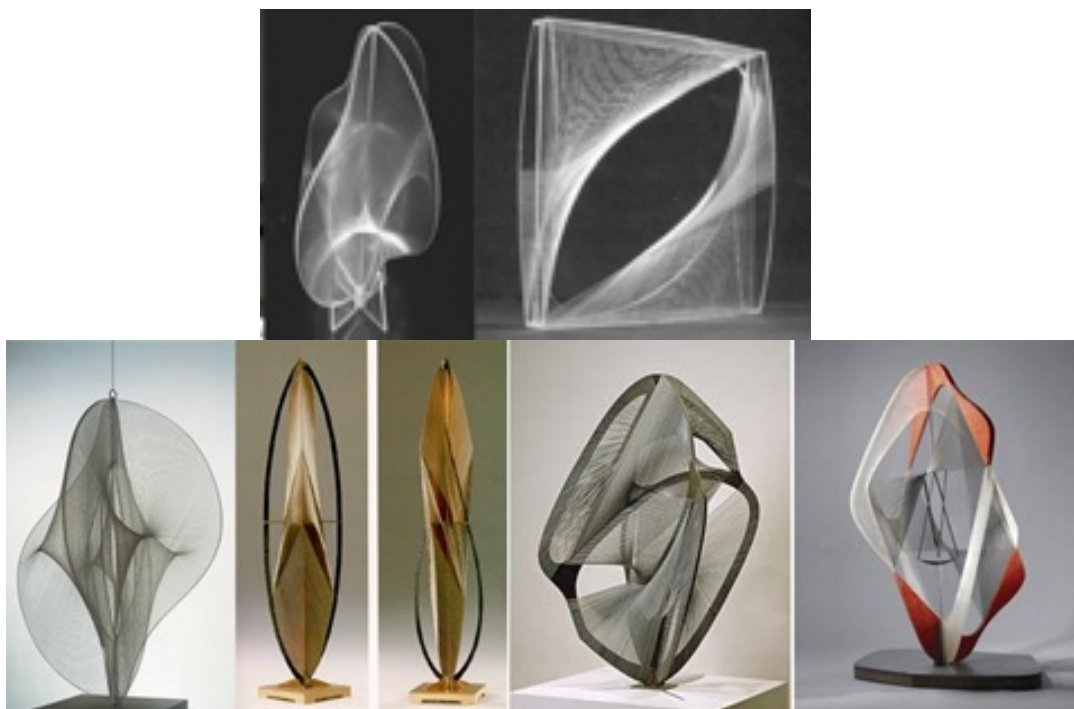


Fig.99 - Naum Gabo Pevsner, "linear constructions".

Quelle forme geometriche particolari, di cui ogni Ateneo europeo ne possedeva fino a tempi relativamente recenti una collezione per la ricerca e la didattica nei vari rami della matematica, dall'analisi alla geometria, erano diventate, seppur inconsapevolmente, modelli di ispirazione artistica.

Alle varie esposizioni artistiche furono presentate composizioni create con sculture sospese (*A.M. Rodčenko*), strutture in tensione (*K. Ioganson*), costruzioni architettoniche (fratelli *V.&G. Stenberg*) come alla mostra intitolata "5×5=25", fino a giungere alla creazione di sculture astratte realizzate con materiali industriali eterogenei composti di ferro, fili metallici e plastica.

Assolutamente retrò diventò la pittura da cavalletto, come annunciava *N. Tarabukin* nel volume *Dal quadro da cavalletto alla macchina*, 1923.

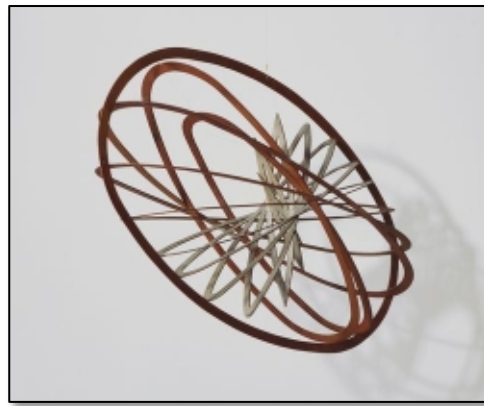


Fig. 100 - Aleksandr Rodchenko, Oval Hanging Construction No.12, 1920.



Fig.101 - Publicity image. Karl Ioganson. Second constructivist Spring exhibition, 1921.

In Europa la teoria costruttivista e la pratiche artistiche diffondono attraverso l'opera di *El Lissitskij*, che nel 1922 ha organizzato la “*Prima esposizione di arte russa*” alla galleria Van Diemen di Berlino. In Germania fu poi il Bauhaus a sviluppare ulteriormente i principi formulati, attraverso l'insegnamento del celebre artista ungherese *László Moholy-Nagy*, che nel 1920 ha lavorato in solidarietà con *El Lissitskij* dal 1920.

I costruttivisti furono inizialmente molto attratti dalla scienza (e dalla matematica in particolare), sia nello sviluppo della loro visione artistica, sia nel loro vocabolario di forme di sviluppo. Le prime sculture dell'artista *Gabo* (Briansk 1890-Waterbury, Connecticut 1977), furono influenzate dal cubismo, come per esempio nella *Testa costruita n. 2* del 1916 (Phillips Collection, Washington)

.(Fig.104) che ricorda modelli di superfici realizzati con materiale assemblato composto di fogli di metallo ritagliati, cartone e celluloidi.



Fig. 102 - L. El Lissitzkij Proun, Museum of Art, 1924-25.

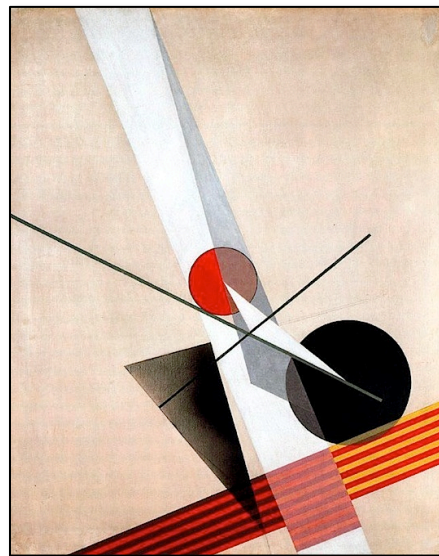


Fig. 103 - László Moholy-Nagy, Composizione A XXI, 1925.



Fig. 104 - Testa costruita n°2- Gabo, 1916.

Lo *Studio per una scultura di pietra* del 1933 ricorda molto il modello di una superficie rigata che Gabo, attento ricercatore di nuove forme artistiche, ha potuto aver visto all'Istituto Poincaré durante la sua permanenza a Parigi. (Figg.105 e 106)

Lo scultore *A. Pevsner*, fratello di *Gabo*, pur negando ogni diretta influenza matematica sulla sua opera, con la serie *Superficie sviluppabile* della metà degli anni '30 si rifà ai modelli di superfici rigate. In effetti, queste opere sembrano costruite proprio come sviluppo di insiemi di rette.



Fig. 105 - Superficie sviluppabile (Surface développable), 1941 Collezione Peggy Guggenheim, Venezia 76.2553 PG 62 Antoine Pevsner.



Fig. 106 - Costruzione spaziale (Spatial construction) in the 3rd and 4th dimensions, 1961 National Museum of Modern Art-Paris.

Contemporaneamente in Francia, il *Surrealismo*, una corrente artistica e culturale definita e teorizzata dal poeta e saggista francese *A. Breton*, mirava all'espressione spontanea e casuale di elementi riconducibili alla pittura metafisica.

Nel suo celebre *Crisi dell'oggetto* [maggio 1936, n 1-2 p. 21-26] scrive: "I laboratori delle istituzioni matematiche in tutto il mondo già mostrano fianco a fianco oggetti costruiti secondo principi sia euclidei sia non-euclidei: entrambi apparentemente disorientano il profano, ma possiedono tuttavia una affascinante ed equivoca relazione l'uno con l'altro nello spazio come generalmente lo concepiamo". I surrealisti, pur non ammettendolo, utilizzano le superfici algebriche come modelli di riferimento proprio perché generati rigorosamente e quindi razionali. Fu probabilmente M. Ernst, da sempre interessato nella scienza e nella matematica, a divulgarne i principi, probabilmente dopo aver visto la collezione dell'Istituto Poincaré (Parigi) e assieme a *Man Ray* a proporre uno stile deliberatamente impressionista rispettivamente nell'arte cinematografica e fotografica.

In *Oggetti matematici*, Man Ray, propose fotografie ispirate a modelli di superfici che comparvero nell'edizione del 1936 dei *Cahiers d'Art* accompagnate da un saggio di C. Zervos (critico d'arte greca) su matematica e arte astratta.

Alla *Esposizione internazionale surrealista* tenutasi a Londra in quegli anni, il catalogo evidenzia in modo esplicito il fascino esercitato sul movimento dai modelli matematici: la copertina riproduce un collage di M. Ernst con una statua dalla testa di rettile che tiene in mano dei modelli di superfici, tra le quali la *superficie di Kuen*¹⁹ (Fig.107, 108) oltre ai diversi collage e dipinti tra cui *Festino degli Dei* (1948), *Le nozze chimiche* (1948) e *Giovane incuriosito dal volo di una mosca non-euclidea* (1942-47) che contiene forme che rammentano superfici come la *ciclode(cicloide) di Dupin a fuso* e la *ciclode di Dupin a corno*, ed ancora riferendosi a tecniche geometriche, per alludere con una descrizione matematica al design del mondo, fornisce l'opera "*Design in Nature*", "*Le fasi della notte*" e molte altre. Nelle sue fatiche M. Ernst attraverso il suo "*dripping paint*"²⁰ allude sempre ad una "matematica sperimentale".[99]

¹⁹ La superficie di Kuen, è un caso particolare di una superficie a curvatura costante negativa, può essere rappresentata in forma parametrica:

$$\left(\frac{(\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \sin \beta}{1 + \alpha^2 \sin^2 \beta}, \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \sin \beta}{1 + \alpha^2 \sin^2 \beta}, \frac{1}{2} \log \left(\tan \left(\frac{\beta}{2} \right) + \frac{\cos \beta}{1 + \alpha^2 \sin^2 \beta} \right) \right).$$

²⁰ Il *dripping paint* (pittura sgocciolante) è una forma di arte astratta utilizzata nella prima metà del XX da artisti come Max Ernest, Jackson Polloc e altri. Successivamente questa tecnica verrà impiegata nell'ambito di tutti i movimenti europei.

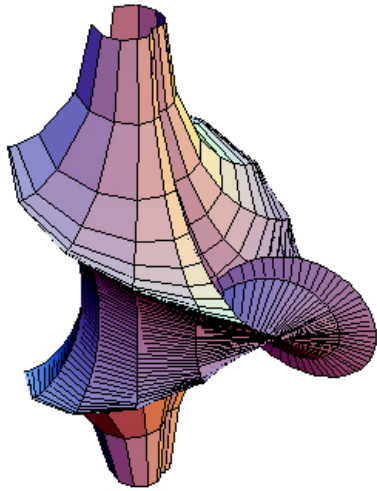


Fig. 107 - Superficie di Kuen, immagine riprodotta con c Mathematica Wolfram ©



Fig. 108 - M. Ernst, Collage per la copertina del catalogo internazionale Surrealista Exhibition, New Burlington Galleries, Londra, 1936.

3.2. - VARIETÀ ALGEBRICHE E LA MULTIDISCIPLINARIETÀ

L'interesse dei surrealisti per i modelli delle superfici fu fondamentalmente solo estetico. Il rapporto tra i modelli delle superfici algebriche e il mondo dell'arte fu superficiale. Probabilmente non ci fu mai un dialogo tra i matematici che avevano costruito quei modelli e gli artisti, costruttivisti o surrealisti, che li usarono come fonte di ispirazione.

Il mondo dell'arte li considerò come oggetti i cui costruttori non avevano saputo coglierne la qualità estetica. A mio parere ciò è vero solo parzialmente, se si pensa in ogni caso sono una manifestazione tangibile e forte della "bellezza intrinseca della matematica".

In questa direzione ricordiamo anche le notevoli opere d'arte di *Salvador Domingo Jacinto Dalí Domènech* marchese di Púbol che si interessò anche di matematica come testimoniano alcuni suoi dipinti (collezione del 1950) dove i

soggetti vengono rappresentati come se fossero composti da corni di rinoceronte, forma questa che per Dalì richiama la geometria in quanto si evolve secondo una curva a spirale logaritmica. Così come nel “Corpus hipercubus” (1954) si può osservare lo sviluppo nello spazio tridimensionale geometrico dell’ipercubo, un solido che rappresenta la quarta dimensione, come l’insieme delle quaterne ordinate di numeri reali (x,y,z,w) avente come facce 8 cubi, 24 facce bidimensionali quadrate, 32 spigoli e 16 vertici. Si giunge ad una prima generalizzazione dell’ipercubo:

Se C_k è il numero di k-cubi di un n-cubo, allora:

$$\sum_{K=0}^n C_k = 3^n \quad \text{o} \quad \sum_{K=0}^n (-1)^K C_k = 1$$

Un politopo che nella quarta dimensione viene detto tesseracto ('dal greco τέσσερις ακτίνες ovvero "quattro e raggio").

L'ipercubo di dimensione n è il politopo P contenuto nello spazio euclideo a dimensione più alta $(n+1)$ -dimensionale, definito da:

$$P = \{(x_1, \dots, x_i) \text{ t. c. } |x_j| \leq 1, \forall j = 1, \dots, i\}$$

La quarta dimensione spaziale fu studiata per la prima volta da *C.H.Hinton*, un matematico inglese che abbandonò la carriera accademica per dedicarsi totalmente al tentativo di visualizzare e rendere popolare la quarta dimensione. La rappresentazione di maggior successo fu quella del cubo quadri-dimensionale raffigurato in tre dimensioni; egli partì dall’ordinario cubo a tre dimensioni e ne considerò lo sviluppo in due dimensioni “aprendo” le sue 6 facce (quadrati) sul piano²¹.

D'altra parte *Dalì* rivede, alla luce delle scoperte Einsteniane sullo spazio quadridimensionale, la relazione che *Platone* descrive nel dialogo " Il Timeo" tra i cinque solidi ed i quattro elementi di *Empedocle*: (il fuoco, l'aria, l'acqua, la terra), che, insieme con la "quintessenza" formano la struttura dell’ Universo. [133]

²¹ Per approfondimento vedi anche [9]

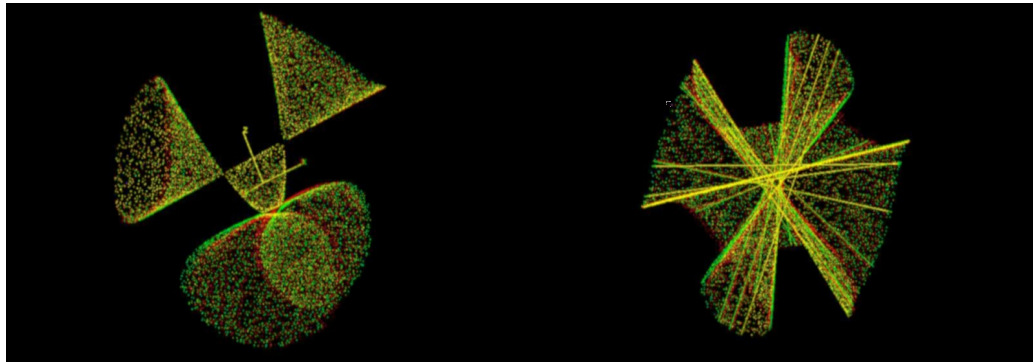


Fig. 109 - Esempi di varietà algebriche. Cubica di Cayley e cubica di Clebsch.

Alcuni fenomeni fisici, difficili a comprendersi nelle tre dimensioni, potrebbero trovare una spiegazione più semplice e risultare addirittura banali se li immaginassimo avvenire in quattro o più dimensioni. Ad esempio nello spazio a quattro dimensioni di *T. Kaluza* (vedi [169] per una recensione su "Classica teorie alternative della gravitazione), dove le leggi del campo gravitazionale (descritte in RG da Einstein) e dell'elettromagnetismo di Maxwell trovano un' interessante anche se fisicamente inadeguato tentativo di "unificazione"; nell "iperspazio" 5-dimensionale di Oscar Klein, dove extra-dimensioni sono viste come curve e arrotolate su se se stesse. [99] (*Fig.110*)

Nuove idee che, anche a dispetto della loro incapacità matematica di generare una vera e propria "unificazione", avrebbero portato nella seconda metà del XX secolo, all'unificazione intrinseca delle "Teoria di Gauge" e, infine, alla bellezza della "Teoria delle stringhe", come la conosciamo oggi.

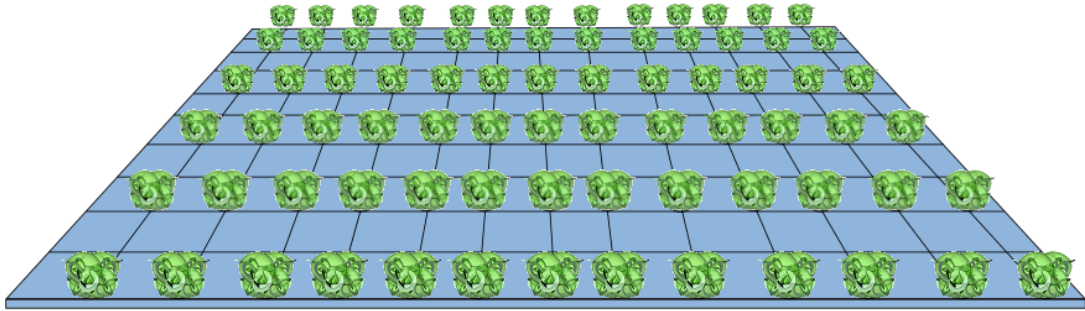


Fig. 110 - Spazio di Kaluza-Klein (wikipedia.org).

Una tecnica moderna per la rappresentazione matematica di spazi e oggetti multi-dimensionali è quella delle “coordinate parallele” introdotte da A. Inselberg negli anni '80, secondo la quale un'ipersfera, che transita nello spazio tridimensionale, sarebbe da noi percepita come una sfera che nasce dal nulla si espande e poi decresce fino a sparire.

Recentemente, evoluti algoritmi matematici danno la possibilità di studiare molte varietà algebriche dal punto di vista scientifico, presenti sia in ambito fisico-matematico che come elementi architettonici e artistici.[104] [169] [105] [124]

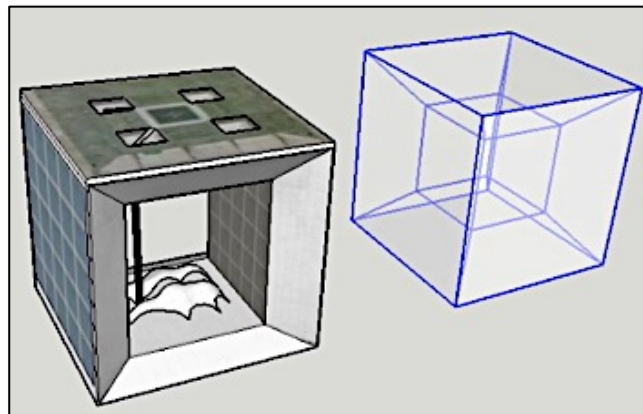


Fig. 111 - Grande Arche model by 3DWarehouse user Kevin Girad.



Fig. 112 - Ravivakil, Kobe port, Japan, 2014.



Fig. 113 - Zaha Hadid: Acquatic Centre, Londone Dubai Opera House.

3.3. - APPENDICE

3.3.1. - LA SUPERFICIE DI VERONESE

La superficie di Veronese è una superficie algebrica in uno spazio proiettivo 5-dimensionale.[99]

La costruzione della curva razionale normale può essere ulteriormente generalizzata: per qualsiasi n e d , definiamo la mappa di Veronese²² di grado d

$$\nu_d: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$$

inviando

$$[X_0, \dots, X_n] \mapsto [\dots X^d \dots],$$

dove X^d spazia su tutti i monomi di grado d in X_0, \dots, X_n . Come nel caso delle curve razionali normali, chiameremo mappa di Veronese qualunque mappa diversa da questa a meno di un automorfismo di \mathbb{P}^N .

Dal punto di vista geometrico, la mappa di Veronese caratterizza le ipersuperfici di grado d in \mathbb{P}^n e che rappresentano esattamente la proiezione di una sezione di iperpiano dell'immagine $\nu_d: \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N$.

Non è difficile vedere che l'immagine della mappa di Veronese è una varietà algebrica, spesso chiamata varietà di Veronese.

Il numero di monomi di grado d in $n + 1$ variabili è il coefficiente binomiale

²² *Figura emblematica fra i matematici del '900 Giuseppe Veronese (Chioggia il 7 maggio 1854 - Padova 17 luglio 1917). Fin da piccolo dimostrò una grande inclinazione per la pittura e l'arte in genere. Frequentò l'Istituto Tecnico di Venezia, dove dovette riparare soltanto matematica. Frequentò il Politecnico di Zurigo, e prima alla Sezione di meccanica successivamente, dopo due anni, si trasferì a matematica. Tra i suoi lavori più importanti si ricordiamo "Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva", i "Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum". Nel 1880 si trasferì a Berlino e poi a Lipsia ove conobbe Felix Klein. Frutto di questo periodo tedesco fu la celebre memoria "Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens", pubblicata nel 1882 nei Mathematische Annalen, nella quale la geometria proiettiva degli spazi a più dimensioni "è per la prima volta organizzata sistematicamente, come scienza geometrica, e non come una specie di analisi travestita".*

Nel 1881, vinto il concorso per la cattedra di geometria analitica sia nell'università di Catania sia in quella di Padova, si trasferì a Padova.

$\binom{n+d}{d}$, così che l'intero N è $\binom{n+d}{d} - 1$.

Ad esempio, nel caso più semplice a parte il caso $n = 1$ della curva razionale normale, la mappa quadratica di Veronese:

$$\nu_2: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$$

é data da:

$$\nu_2: [X_0, X_1, X_2] \mapsto [X_0^2, X_1^2, X_2^2, X_0X_1, X_0X_2, X_1X_2].$$

L'immagine di questa mappa, spesso detta semplicemente superficie di Veronese in \mathbb{P}^5 , è una varietà che incontreremo spesso nel corso di questa trattazione.

La varietà di Veronese $\nu_d: (\mathbb{P}^n)$ si trova su una serie di note ipersuperfici quadriche: infatti per ogni quadrupla di multi-indici I, J, K , e L .

tale che per i corrispondenti monomi si abbia $X^I X^J = X^K X^L$, otteniamo una relazione quadratica sull'immagine. Non è difficile verificare che la varietà Veronese è esattamente lo zero locus²³ (o luogo degli zeri) di questi polinomi di secondo grado.[90]

²³ Con locus si intende un insieme di coordinate di punti che condividono alcune proprietà. In generale, tutti i punti che condividono la stessa distanza da una retta, verificano una data equazione. Ad esempio, la circonferenza di un cerchio rappresenta tutti i punti che sono equidistanti dal centro della stessa, e quindi può essere considerata un locus.

3.3.2. - LA RAPPRESENTAZIONE DELLE VARIETÀ DI VERONESE

La superficie di Veronese, cioè, l'immagine della mappa $\nu_2: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$, può anche essere descritta come il locus dei punti $[Z_0, \dots, Z_5]$ tale che la matrice simmetrica

$$\begin{bmatrix} Z_0 & Z_3 & Z_4 \\ Z_3 & Z_1 & Z_5 \\ Z_4 & Z_5 & Z_2 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. In generale, se verifichiamo ancora con $\{Z_{i,j}\}_{0 \leq i \leq j \leq n}$, le coordinate sullo spazio d'arrivo della mappa quadratica di Veronese

$$\nu_2: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1}$$

allora possiamo rappresentare l'immagine ν_2 come il locus degli zeri dei minori 2×2 della $(n+1) \times (n+1)$ matrice simmetrica con (i, j) -esima entrata per $Z_{i-1, j-1}$ per $i \leq j$. [90]

Pertanto, per $n=2$, si otteniamo le equazioni delle varietà di Veronese in \mathbb{P}^5 :

$$\begin{cases} Z_0 Z_1 - Z_3^2 = 0 \\ Z_0 Z_5 - Z_3 Z_4 = 0 \\ Z_3 Z_5 - Z_1 Z_4 = 0 \\ Z_3 Z_2 - Z_4 Z_5 = 0 \\ Z_1 Z_2 - Z_5^2 = 0 \\ Z_0 Z_2 - Z_4^2 = 0 \end{cases}$$

3.3.3. - SOTTOVARIETÀ DI VARIETÀ DI VERONESE

La mappa di Veronese può essere applicata non solo ad uno spazio proiettivo \mathbb{P}^n , ma a qualsiasi varietà $X \subset \mathbb{P}^n$ per restrizione.

In particolare possiamo osservare che se limitiamo v_d a un sottospazio lineare $\Lambda \cong \mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, otteniamo solo la mappa di Veronese di grado d su \mathbb{P}^k . Per esempio, le immagini sotto la mappa $v_2: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$ di rette in \mathbb{P}^2 forniscono una famiglia di coniche (curve piane [172]) sulla superficie S di Veronese, ed una di queste passa attraverso due punti di S .

Più in generale, possiamo affermare che l'immagine di una varietà $Y \subset \mathbb{P}^n$ è una mappa intesa come sottovarietà di Veronese di \mathbb{P}^N .

Per vedere ciò, si noti innanzitutto che i polinomi omogenei di grado k in coordinate omogenee Z in \mathbb{P}^N ripresentano (tutti) polinomi di grado $d \cdot k$ nelle variabili X .

Osserviamo che lo zero di un polinomio $F(X)$ di grado m è anche comune luogo degli zeri dei polinomi $\{X_i F(X)\}$ di grado $m + 1$. Quindi una varietà $Y \subset \mathbb{P}^n$ esprimibile come luoghi di zeri dei polinomi di grado $\leq m$ può anche essere realizzato come comune luoghi degli zeri dei polinomi di grado $k \cdot d$ per qualche k .

Ne consegue che la sua immagine $v_d(Y) \subset \mathbb{P}^N$, sotto la mappa di Veronese è l'intersezione della varietà di Veronese $v_d(\mathbb{P}^n)$ che abbiamo già visto è con il comune luogo degli zeri dei polinomi di grado k . [90] [83] [46]

ESEMPIO 3.1.

Se $Y \subset \mathbb{P}^2$ è la curva data dal polinomio di terzo grado; $X_0^3 + X_1^3 + X_2^3$, (Fig. 114)

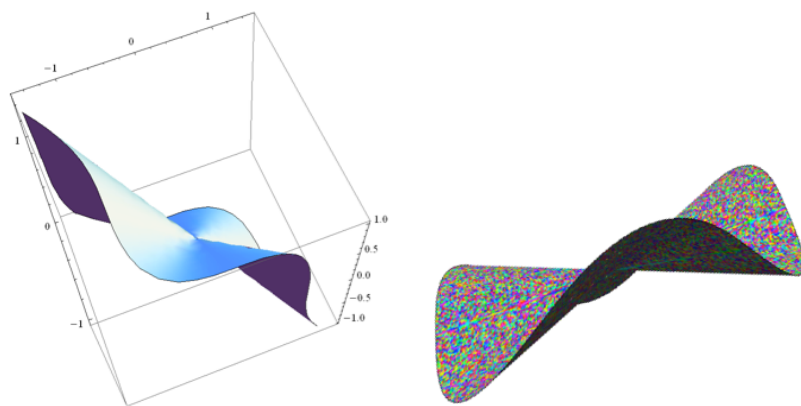


Fig. 114 - V. Iorfida ©, 2014.

allora possiamo anche scrivere Y come il locus comune delle quartiche: (Fig. 115)

$$X_0^4 + X_0 X_1^3 + X_0 X_2^3, X_0^3 X_1 + X_1^4 + X_1 X_2^3, \text{ ed } X_0^3 X_2 + X_1^3 X_2 + X_2^4.$$

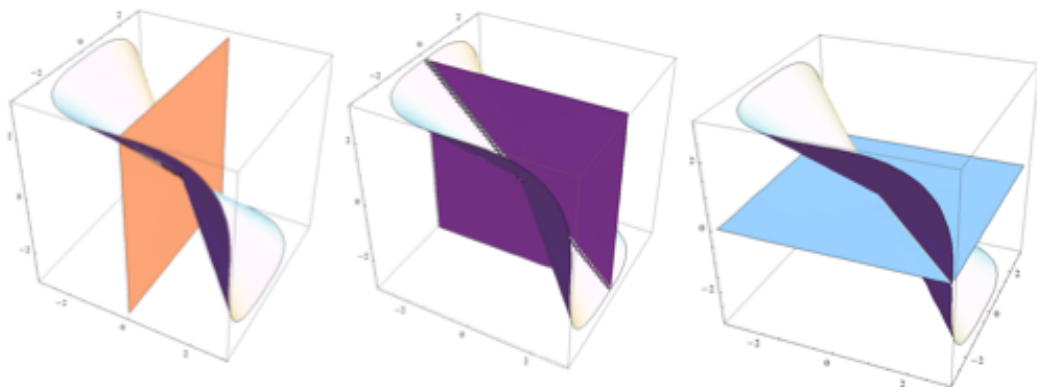


Fig. 115 - V. Iorfida ©, 2014.

L'immagine $\nu_2(Y) \subset \mathbb{P}^5$ è quindi l'intersezione della superficie Veronese con le tre ipersuperfici quadriche: (Fig. 116):

$$Z_0^2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4, Z_0 Z_3 + Z_1^2 + Z_2 Z_5 \text{ ed } Z_0 Z_4 + Z_1 Z_5 + Z_2^2.$$

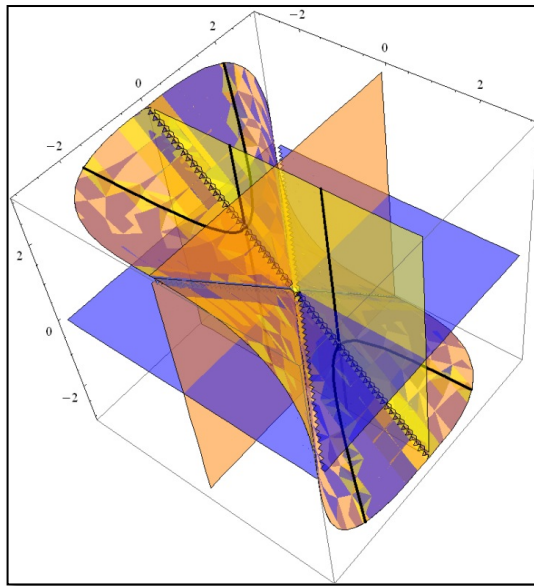


Fig. 116 - V. Iorfida ©, 2014.

In particolare, è l'intersezione di nove quadriche.

3.3.4. - VARIETÀ DI SEGRE

Un'altra fondamentale famiglia di mappe tra spazi proiettivi sono le mappe di Segre²⁴

$$\sigma: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

definite inviando una coppia $([X], [Y])$ al punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ le cui coordinate sono i prodotti delle coppie di coordinate di $[X]$ e $[Y]$, cioè:

$$\sigma: ([X_0, \dots, X_n], \dots, [Y_0, \dots, Y_m]) \mapsto [\dots, X_i Y_j, \dots],$$

in cui le coordinate $X_i Y_j$ spaziano su tutti i prodotti a coppie di coordinate X_i e Y_j . Non è difficile vedere che l'immagine della mappa di Segre è una varietà algebrica, chiamata varietà di Segre, e talvolta con $\Sigma_{n,m}$. Se noi etichettiamo le coordinate sullo spazio indicato con $Z_{i,j}$, vediamo che la varietà di ottenuta è il luogo degli zeri dei polinomi quadratici $Z_{i,j} \cdot Z_{k,l} - Z_{i,l} \cdot Z_{k,j}$. In particolare, la varietà di Segre è un altro esempio di varietà determinantale. E' infatti il luogo degli zeri dei minori 2×2 della matrice $(Z_{i,j})$.

Il primo esempio di una varietà Segre è la varietà $\Sigma_{1,1} = \sigma \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ cioè, l'immagine della mappa

$$\sigma: ([X_0, X_1], [Y_0, Y_1]) \mapsto [X_0 Y_0, X_0 Y_1, X_1 Y_0, X_1 Y_1].$$

Questo è il locus del singolo polinomio quadratico $Z_0 \cdot Z_3 - Z_1 \cdot Z_2$, che è

²⁴ *Beniamino Segre (Torino, 16 febbraio 1903 – Roma, 22 ottobre 1977) è stato un matematico italiano, noto soprattutto per i suoi risultati nel settore della geometria finita. Studiò all'università di Torino dove ebbe come docenti G. Peano, G. Fano, G. Fubini e C. Segre. Ottenne una cattedra di geometria analitica e descrittiva all'Università di Bologna e successivamente quella di geometria a Roma dove lavorò fino alla fine e dove svolse un'intensa attività di ricerca, di insegnamento e di organizzazione delle attività scientifiche e culturali, operando nell'ambito dell'Unione Matematica Italiana, della International Mathematical Union, dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, della Società di Logica e Filosofia della Scienza, dell'Accademia dei XL e dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Presso questa accademia fondò il "Centro Linceo Interdisciplinare" che ora è dedicato al suo nome.*

semplicemente una superficie quadrica (paraboloide in \mathbb{R}^3 Fig. 117). Si noti che le fibre delle due mappe proiezione da $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$ e da $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$ portano sotto la mappa σ , in sottospazi lineari di $\mathbb{P}^{(n+1)(n+2)-1}$; in particolare, le fibre di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sono famiglie di linee

$$\{Z_1 = \lambda Z_0, Z_3 = \lambda Z_2\} \text{ e } \{Z_2 = \lambda Z_0, Z_3 = \lambda Z_1\}.$$

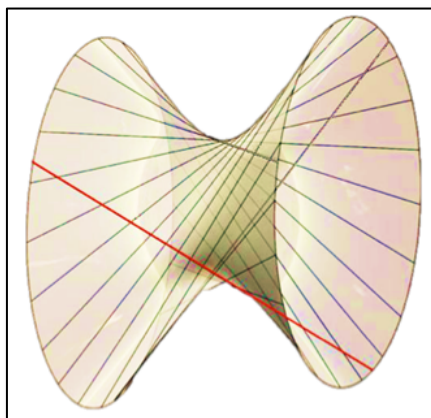


Fig. 117

Possiamo avere inoltre la descrizione del polinomio $Z_0 \cdot Z_3 - Z_1 \cdot Z_2$ come determinante della matrice:

$$M = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}$$

che mostra due famiglie di rette ben definite: una famiglia è composta dalle due colonne e un'altra dalle due righe che soddisfano che soddisfano una relazione lineare.

Un altro esempio comune di una varietà Segre è l'immagine:

$$\sum_{2,1} = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^5$$

chiamata *threefold*²⁵ di Segre.

²⁵ Corrado Segre contribuisce allo studio delle cubiche di \mathbb{P}^4 , o *cubic threefolds*, e dei loro casi singolari. In geometria algebrica, la cubica di Segre è l'insieme dei punti $(x_0: x_1: x_2: x_3: x_4: x_5)$ di \mathbb{P}^4 che soddisfa le equazioni: $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0$; $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

L'intersezione con qualsiasi iperpiano di equazione $x_i = 0$ è la superficie cubica di Clebsch. La sua intersezione con qualsiasi iperpiano $x_i = x_j$ è la superficie cubica nodale di Cayley. Il suo doppio è la cosiddetta Igusa quartica (ipersuperficie quartica in 4-dimensionale nello spazio

Un altro importante esempio è la varietà detta razionale normale denotata con $X_{1,1,1}$.

Alcuni risultati classici fondamentali sono i seguenti:

1. Se L, M e $N \subset \mathbb{P}^3$ e sono tre rette dello spazio ordinario a due a due sghembe, l'unione delle due rette in \mathbb{P}^3 che intersecano tutte e tre le rette è proiettivamente equivalente alla varietà di Segre $\Sigma_{1,1} \subset \mathbb{P}^3$, e che questa unione è l'unica varietà di Segre contenente L, M , e N . (*)
2. Più in generale, supponiamo che L, M, N siano tre disgiunti $(k - 1)$ -piani in \mathbb{P}^{2k-1} .
L'unione di tutte le rette che intersecano L, M e N è proiettivamente equivalente alla varietà di Segre $\Sigma_{k-1,1} \subset \mathbb{P}^{2k-1}$ e questa unione è l'unica varietà di Segre contenente L, M , e N .
3. La cubica gobba²⁶ $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$ può essere realizzata come intersezione di una threefold con un 3-piano $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$. [90][83]

proiettivo) 3 volte in \mathbb{P}^4 . La sua Hessiana è il quintic Barth-Nieto 5-dimensionale nello spazio proiettivo.

²⁶ Una curva si dice sghemba, o gobba, se non è contenuta in un piano dello spazio affine \mathbb{C}^3 . Indicata con s l'ascissa curvilinea, cioè la lunghezza del tratto di curva compresa fra un punto fisso e un punto generico della curva, la curva può essere rappresentata, in coordinate cartesiane, dalle seguenti equazioni parametriche: $x=x(s), y=y(s), z=z(s)$. In forma implicita, una curva gobba è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Esse rappresentano la curva intersezione completa delle due superfici algebriche di equazioni $f=0$ e $g=0$; esistono però anche curve algebriche sghembe che sono intersezioni incomplete di due superfici algebriche. Si definisce tangente a una curva sghemba nel punto P la posizione limite della retta PQ al tendere di Q a P lungo la curva. Seguendo la classificazione secondo l'ordine delle curve algebriche gobbe, per $n=3$ si hanno le cubiche gobbe, che sono l'ulteriore intersezione di due quadriche che hanno una generatrice in comune; per $n=4$ si hanno le quartiche gobbe di prima e di seconda specie (una quartica è di prima specie quando è l'intersezione di due quadriche, cioè la base di un fascio di quadriche; è di seconda specie quando è l'intersezione di una quadrica con una superficie cubica passante per due generatrici sghembe della quadrica). Esempi famosi di quartiche di prima specie sono la finestra di Viviani, ottenuta dall'intersezione di una sfera con un cilindro rotondo avente il diametro uguale al raggio della sfera e passante per il centro della sfera, e la curva di Archita, ottenuta dall'intersezione di un cilindro e di un cono quadrici.

4. Qualsiasi retta $l \subset \Sigma_{2,1} \subset \mathbb{P}^3$ è contenuta nell'immagine di una fibra di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ su \mathbb{P}^2 o \mathbb{P}^1 (*). Lo stesso vale per qualsiasi spazio lineare contenuto in una qualsiasi varietà di Segre $\sigma(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$.
5. Un risultato interessante che lega la varietà di Segre con la varietà di Veronese è il seguente: l'immagine della diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sotto la mappa di Segre è la varietà $\nu_2 \mathbb{P}^n$ Veronese, che giace in un sottospazio di \mathbb{P}^{n^2+2n} .

3.3.5. - SOTTOVARIETÀ DI VARIETÀ DI SEGRE

Dopo aver dato al prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ la struttura di una varietà proiettiva, una naturale domanda da porsi è come possiamo descrivere le sue sottovarietà.

Una risposta ingenua è immediata. Per cominciare, diciamo che un polinomio

$$F(Z_0, \dots, Z_n, W_0, \dots, W_m)$$

in due insiemi di variabili è biomogeneo di bigrado (d, e) se è contemporaneamente omogeneo di grado d nella prima serie di variabili e di grado e nella seconda serie di variabili, cioè della forma:

$$F(Z, W) = \sum_{\substack{I, J: \\ \sum i_\alpha = d, \\ \sum j_\beta = e}} a_{I, J} \cdot Z_0^{i_0} \dots Z_n^{i_n} \cdot W_0^{j_0} \dots W_m^{j_m}.$$

Ne segue facilmente che infatti che il luogo di zeri di un qualsiasi biomogeneo polinomio è un ben definito sottoinsieme di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Allo stesso tempo, come nella discussione di sottovarietà della varietà di Veronese, possiamo vedere che il luogo degli zeri di un polinomio biomogeneo $F(Z, W)$ di bigrado (d, e) è il comune luogo degli zeri di un polinomio degli zeri di grado (d', e') divisibile per esso, per qualsiasi $d' \geq d$ e $e' \geq e$, in modo che più in generale possiamo dire che le sottovarietà di una varietà Segre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono luoghi degli zeri dei polinomi biomogenei in qualche bigrado.

Come esempio, si consideri la cubica gobba $C \subset \mathbb{P}^3$, data come immagine della

mappa $t \mapsto [1, t, t^2, t^3]$.

E' facile verificare che C si trova sulla superficie quadrica $Z_0 \cdot Z_3 - Z_1 \cdot Z_2 = 0$, che noi ora riconosciamo come la superficie Segre $\sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$.

Restringiamo a S gli altri due polinomi quadratici della cubica gobba. Osserviamo anzitutto che il polinomio $Z_0 Z_2 - Z_1^2$ di \mathbb{P}^3 fa parte di $X_0 X_1 Y_0^2 - X_0^2 Y_1^2$, quale fattore del prodotto per X_0 , con $F(X, Y) = X_1 Y_0^2 - X_0 Y_1^2$. Il luogo degli zeri del presente polinomio è quindi l'unione della cubica gobba con la retta S di equazione $X_0 = 0$ (o in modo equivalente da $Z, Z_1 = 0$).

D'altra parte, il polinomio $Z_1 Z_3 - Z_2^2$ rientra in $X_0 X_1 Y_1^2 - X_1^2 Y_0^2$, quale fattore di $-X_1 \cdot F$, quindi il suo zero locus è l'unione della curva C e della retta di equazioni $Z_2 = Z_3 = 0$. In sintesi, quindi, la cubica gobba rappresenta il luogo degli zeri di un singolo polinomio biomogeneo $F(X, Y)$ di bigrado (1,2) sulla superficie S di Segre $S = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, il polinomio quadratico definente C ristretto a S .

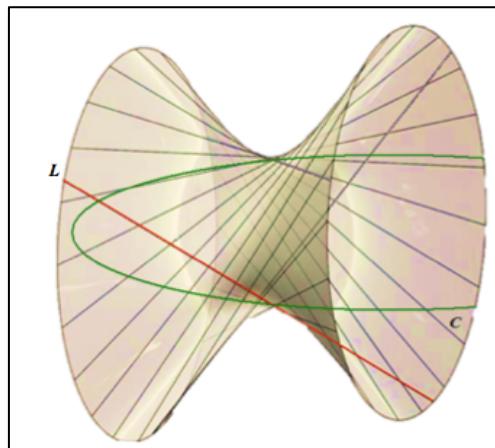


Fig. 118

Al contrario, sia $C \subset (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ il luogo degli zeri di un un polinomio irriducibile biomogeneo $F(X, Y)$ di bigrado (1, 2).

E' possibile dimostrare che l'immagine di C sotto la mappa di Segre $\sigma: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ rappresenta una curva cubica.

Infine sia $C = C_{\alpha, \beta} \subset \mathbb{P}^3$ una curva quartica razionale.

Osserviamo che C si trova sulla superficie S di Segre data da $Z_0 Z_3 - Z_1 Z_2 = 0$, che S è l'unica superficie quadrica contenente C e che C è lo zero locus di un

biomogeneo polinomio di bigrado (1, 3) su $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. [90]

3.3.6. - MANIPOLANDO EQUAZIONI DI VARIETÀ ALGEBRICHE

Le varietà algebriche sono definite in uno spazio proiettivo di dimensione n , non necessariamente $n = 2, 3$.

In dimensione superiore è difficile ottenere degli oggetti che possono essere interessanti dal punto di vista artistico risulta impossibile visualizzare la geometria in spazi di dimensione alta. Ma manipolando le loro equazioni o, geometricamente parlando, considerando le loro proiezioni su iperpiani o sulle intersezioni, il che equivale all'eliminazione di variabili, possono rendersi visibili delle nuove forme geometriche interessanti e talvolta belle.

Un esempio noto di una proiezione della superficie di Veronese in tre dimensioni sono le superfici di J. Steiner²⁷, di cui ne proponiamo alcune: (Fig.119)

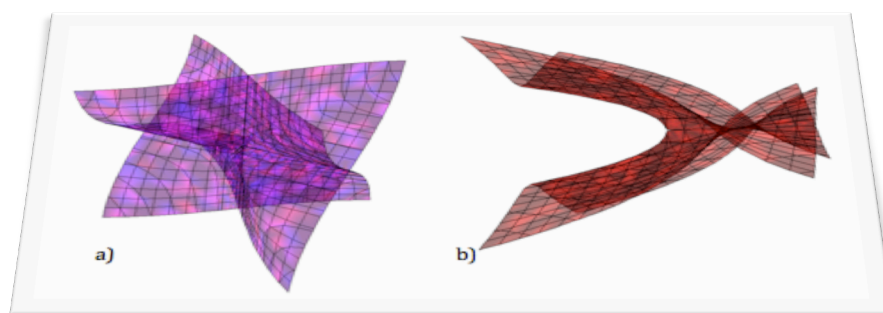


Fig. - 119 Superfici di Steiner, costruite con Mathematica Wolfram ©, rispettivamente di equazioni:

$$a) x^2y^2 - x^2z^2 + y^2z^2 - xyz = 0 \text{ e } b) y^2 - 2xy^2 - xz^2 + x^2y^2 + x^2z^2 - z^4 = 0$$

²⁷In particolare, trattasi di proiezioni lineari di una immersione in uno spazio 5-dimensionale detto superficie di Veronese.

Qui di seguito mostriamo alcune nuove forme, probabilmente finora sconosciute nel campo dell'arte, ottenute con le attività di ricerca lavorando su varietà di dimensione alta e manipolando le sue equazioni. Volta per volta scriveremo le equazioni della varietà di partenza ed evidenzieremo le operazioni effettuate.

Se esaminiamo le equazioni delle varietà di Veronese in \mathbb{P}^5 :

$$\begin{cases} Z_0Z_1 - Z_3^2 = 0 \\ Z_0Z_5 - Z_3Z_4 = 0 \\ Z_3Z_5 - Z_1Z_4 = 0 \\ Z_3Z_2 - Z_4Z_5 = 0 \\ Z_1Z_2 - Z_5^2 = 0 \\ Z_0Z_2 - Z_4^2 = 0 \end{cases}$$

possiamo considerare le varietà algebriche nell'intersezione dei due iperpiani:

$$\begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_2 = 1 \end{cases}$$

ed otteniamo sei equazioni con quattro variabili e precisamente:

$$\begin{cases} Z_0 - Z_3^2 = 0 \\ Z_0Z_5 - Z_3Z_4 = 0 \\ Z_3Z_5 - Z_4 = 0 \\ Z_3 - Z_4Z_5 = 0 \\ 1 - Z_5^2 = 0 \\ Z_0 - Z_4^2 = 0 \end{cases}$$

Sia Z_0 la coordinata omogenea, ponendo quindi $Z_0 = 1$ si ottengono le seguenti equazioni che danno una varietà algebrica in C^3 del tipo:

$$\begin{cases} 1 - Z_3^2 = 0 \\ Z_5 - Z_3Z_4 = 0 \\ Z_3Z_5 - Z_4 = 0 \\ Z_3 - Z_4Z_5 = 0 \\ 1 - Z_5^2 = 0 \\ 1 - Z_4^2 = 0 \end{cases}$$

da cui è possibile ricavare il seguente oggetto geometrico : (Fig.120)

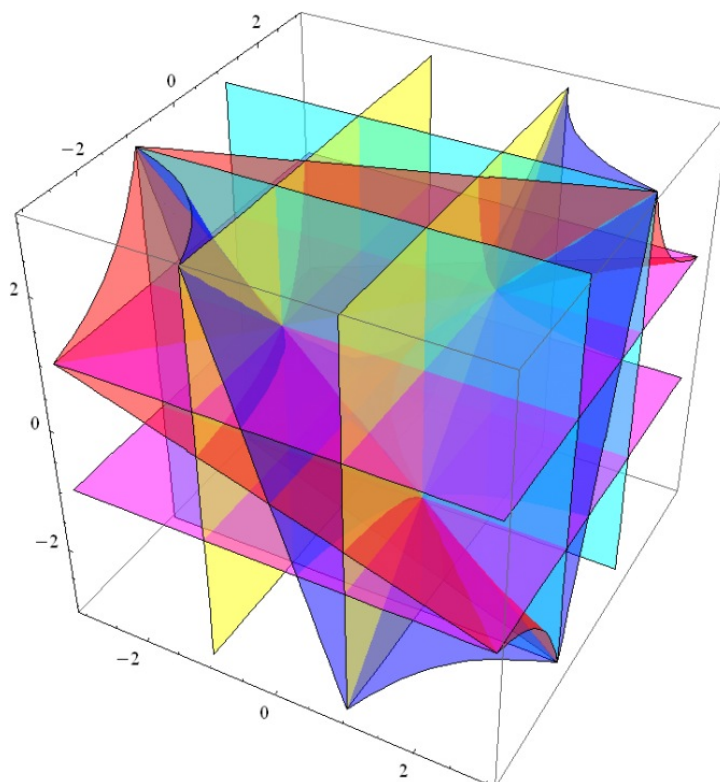


Fig. 120 - Varietà algebrica in C^3 , V. Iorfida ©, 2014.

Così fissata la coordinata omogenea Z_0 , allora le relative intersezioni degli iperpiani che si possono considerare sono i seguenti:

$$a) \begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_3 = 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_4 = 1 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} Z_1 = 1 \\ Z_5 = 1 \end{cases};$$

da cui si ricavano ulteriori varietà algebrica in C^3 come di seguito riportato:

$$a) \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ Z_5 - Z_4 = 0 \\ Z_5 - Z_4 = 0 \\ Z_2 - Z_4 Z_5 = 0 \\ Z_2 - Z_5^2 = 0 \\ Z_2 - Z_4^2 = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 1 - Z_3^2 = 0 \\ Z_5 - Z_3 = 0 \\ Z_3 Z_5 - 1 = 0 \\ Z_3 Z_2 - Z_5 = 0 \\ Z_2 - Z_5^2 = 0 \\ Z_2 - 1 = 0 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} 1 - Z_3^2 = 0 \\ 1 - Z_3 Z_4 = 0 \\ Z_3 - Z_4 = 0 \\ Z_3 Z_2 - Z_4 = 0 \\ Z_2 - 1 = 0 \\ Z_2 - Z_4^2 = 0 \end{cases}$$

e pertanto è possibile costruire il seguente oggetto geometrico: (Fig.121)

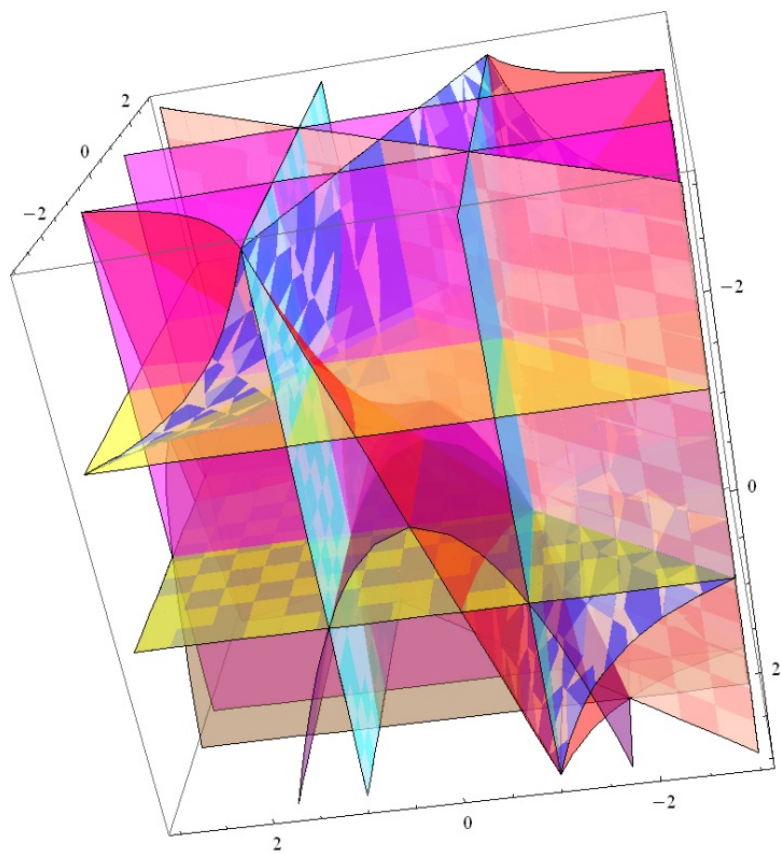


Fig. 121 - Varietà algebrica in \mathbb{C}^3 , V. Iorfida © creata con Mathematica Wolfram.

Capitolo quarto

LA TEORIA DEI NODI

Una particolare attenzione è stata rivolta, da parte dei matematici, allo studio della Teoria dei Nodi, anche se i risultati più rilevanti sono giunti soprattutto a partire dalla metà del XX secolo. [11] [156] [180]

La ricerca scientifica in questo campo è stata molto produttiva tanto che gli sforzi e i tentativi per giungere ad una teoria completa ed esaustiva sono stati premiati, più volte, con il più alto riconoscimento matematico quale l'assegnazione della medaglia Fields.

La Teoria dei Nodi, che apparentemente scaturisce da un semplice e singolare problema topologico, come quello della equivalenza e della classificazione, afferisce ad un approccio matematico complesso e sofisticato come la teoria di Lie, la teoria integrale del prodotto, le algebre quantiche e così via.

Molti contributi sulla Teoria dei Nodi sono stati di supporto per la costruzione di nuove teorie in ambito matematico, come ad esempio lo studio della teoria della codifica delle 3-varietà, ma anche in altri campi di ricerca scientifica, tra i quali la fisica subatomica, la biologia, l'ingegneria, la chimica supramolecolare ed altri ancora. [114] [43] [5] [192] [151]

La rappresentazione di un nodo è più semplicemente intesa come un oggetto matematico nello spazio S^3 (o in \mathbb{R}^3) generato da una corda deformabile, con spessore trascurabile, in cui gli estremi sono chiusi; un aspetto della geometria moderna che ci introduce in un mondo fatto da "labirinti" e di concetti affascinanti ancora oggi inesplorati.

4.1. - I NODI IN ARTE E IN MATEMATICA

Al nodo non è stato associato un semplice ruolo ornamentale, come banalmente si potrebbe pensare, ma esso ha da sempre avuto un fascino particolare, associato

all'alone di grande mistero, sia nella vita dell'uomo, in ogni epoca, che in ogni campo e in ogni contesto culturale.

Per molti popoli, infatti, i nodi erano segno di vita. Anche per gli Egizi il nodo, rappresentante la dea Iside, era simbolo di immortalità e dell'amore divino, ma anche un modello di comunicazione. (Fig.122)

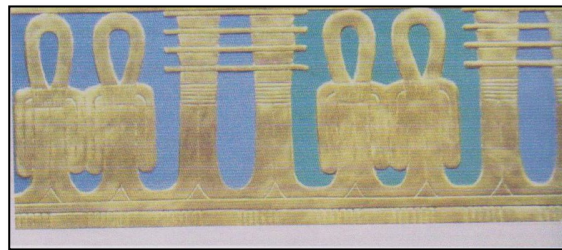


Fig.122 - Raffigurazione della dea Iside.

I nodi, difatti, sono stati impiegati in sistemi mnemonici e di calcolo che si configuravano come vere e proprie protoscritture.

Per quanto riguarda la nostra cultura, si pensa che il nodo sia giunto attraverso i Romani in seguito al contatto con la cultura celtica. (Fig.123)



Fig.123- Disegni di nodi appartenenti all'arte celtica.

[Presso la civiltà Inca, i nodi erano parte integrante della vita quotidiana e rappresentavano un vero e proprio sistema di scrittura e contabilità affidata ai "maestri delle cordicelle a nodi".

Con questo sistema, essi detenevano archivi, creavano calendari, effettuavano censimenti, statistiche, ed erano mezzi di trasmissione di messaggi, quindi

strumenti importantissimi di comunicazione, dal momento che non è noto un altro sistema di scrittura degli Inca.

Un sistema “tridimensionale”, oltre le due dimensioni della nostra scrittura]²⁸.

Dunque, si tratta di un linguaggio scritto su stringhe dette “*quipu*” (nodo).

Un ruolo storico oltre che “stravagante” è associato al nodo di Gordio, Re di Frigia, il quale avendo dedicato il proprio carro agli dei lo aveva legato ad un palo con un nodo così intrecciato che l’oracolo aveva predetto che chi fosse riuscito a scioglierlo avrebbe conquistato l’Impero di Asia; molti tentarono ma nessuno riuscì a scioglierlo, finché Alessandro Magno, nel 333 a.C. tentò di sciogliere il nodo, ma non riuscendo a trovarne il capo, lo tagliò con la spada conquistando così il regno. (Figg.124 e 125)



Fig. 124- Jean-Simon Berthélemy, Alessandro recide il nodo gordiano, 1743-1811.

²⁸ Estratto da (http://www.linguistica.unical.it/edoc_old/scrittura/scrittura.htm).



Fig. 125- Bonaccorsi Pietro, Opera raffigurante Alessandro Magno che recide il nodo gordiano decorazione parietale della Sala Paolina, Museo Nazionale di Castel S. Angelo, Roma, 1545-1547.

Tra i nodi più antichi e celebri, oltre al nodo di Gordio, annoveriamo:

- il *nodo di Salomone*, utilizzato in araldica. È uno dei simbolismi più antichi ed è costituito da intrecci geometrici che allontanavano stregonerie e malefici; (Figg.126 e 127)



Fig. 126 - A sinistra un mosaico raffigurante il nodo di Salomone e a destra il nodo di Salomone, segno di tabellionato del notaio G.G. Celeri, 1560, Museo camuno di Breno.

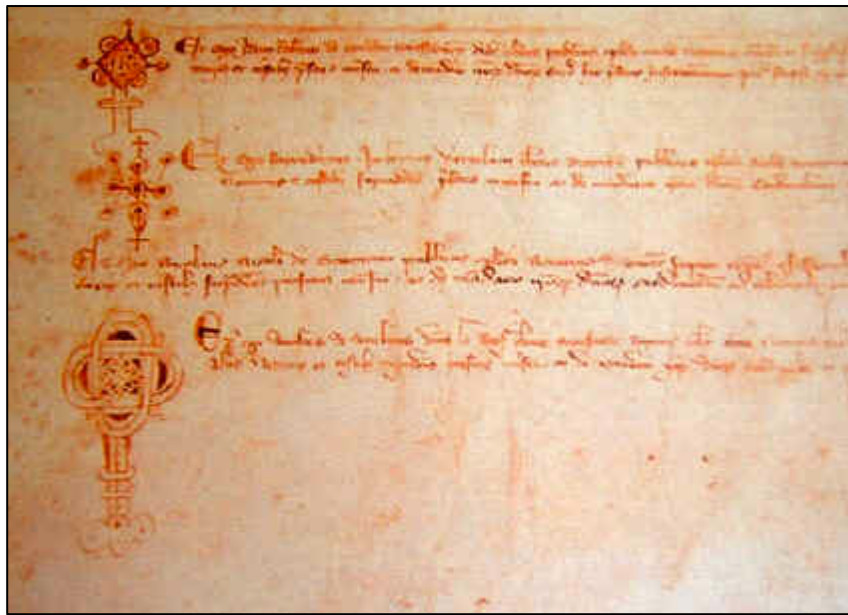


Fig.127 - Pergamena medievale di Chinon del 1308, redatta da Robert de Condet, contenente l'Assoluzione dei Templari dall'accusa di eresia. Scoperta nel 2011 negli Archivi Segreti del Vaticano.

- il *nodo di Ercole* (Nodus Herculeus) veniva utilizzato nelle cerimonie e nei rituali religiosi antico-romani. È il simbolo della fertilità. (Figg.128, 129)

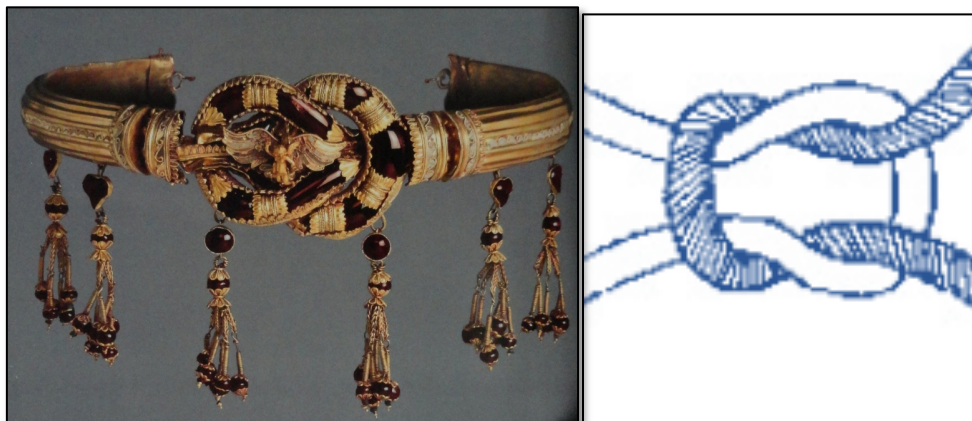


Fig.128 - Rappresentazione del nodo di Ercole su un antico gioiello del 300 a.C. circa.

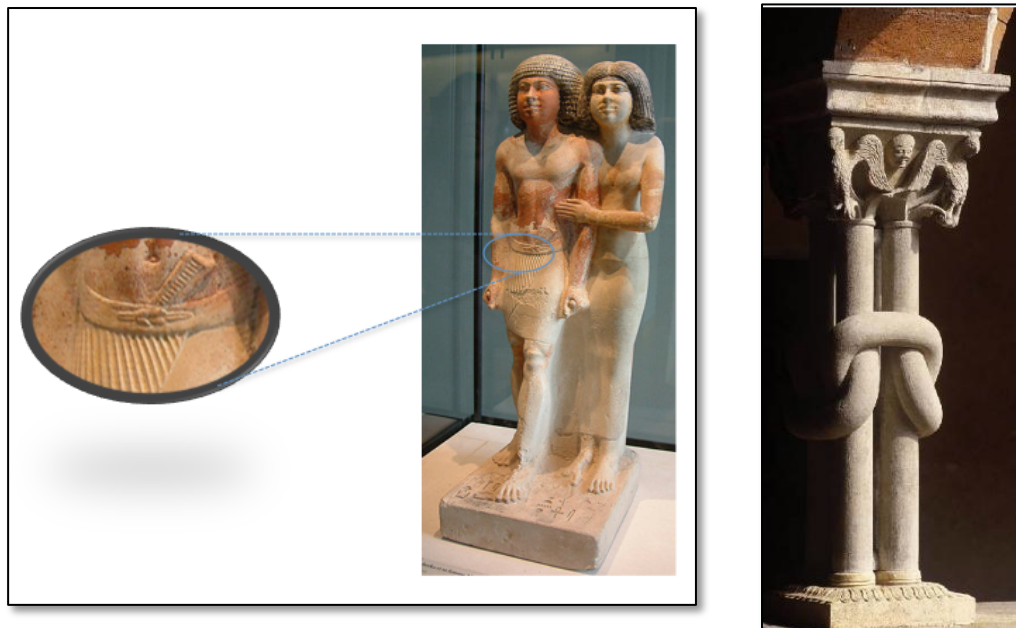


Fig.129 - A sinistra il Louvre Egypte 279 coppie dettaglio reef knot. A destra la Colonna annodata, Abbazia di Chiaravalle, 1221.

- il *nodo Borromeo*, oltre a rappresentare lo stemma della nobile famiglia milanese, è stato usato per raffigurare il dogma della Trinità (Fig.130 del sec. XIII) e per rappresentare i tre registri della realtà psichica. Inoltre, Jacques Lacan utilizza questo nodo per introdurre una nuova geometria che definisce intuitiva, in cui gli elementi non sono più quelli euclidei ma il Reale, il Simbolico e l'Immaginario (fig. 4.9). Una “geometria” che aiuta ad interpretare la realtà psichica attraverso quella reale, così come anche Sigmund Freud aveva scritto nella sua pubblicazione “ *Die Traumdeutung*” (L’interpretazione dei sogni) del 1900.

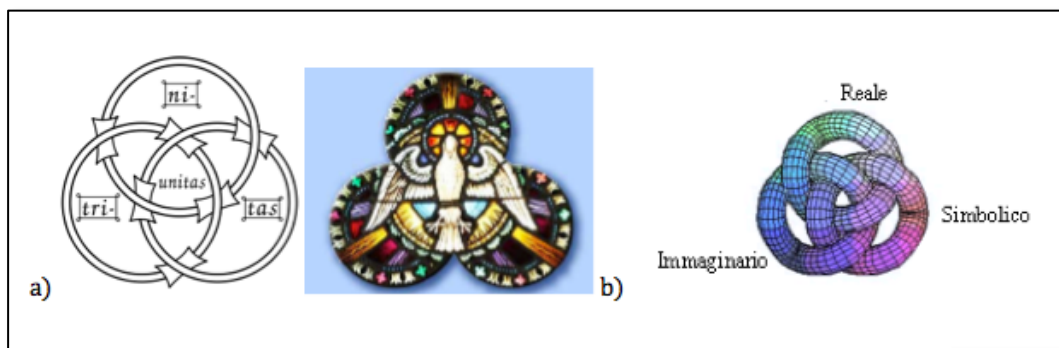


Fig.130 - a) nodo Borromeo della Trinità, sec. XIII; b) rappresentazione dei registri della realtà psichica.

Tale nodo, inoltre, è stato scelto da Francesco Sforza, di umili origini ma sposo di Bianca Maria Visconti, ad indicare la propria ascesa sociale a signore di Cremona, e incastonato, a testimonianza di ciò, in un visibile tassello nella porta del chiostro di San Sigismondo a Cremona, chiesa delle proprie nozze, e su di una lastra della fontana situata nella corte ducale del castello di Milano. (Fig.131)



Fig. 131 - Tre anelli intrecciati con diamante.

- il *nodo Savoia*, o nodo a otto, usato principalmente dai marinai come nodo di arresto in quanto è un nodo che si scioglie facilmente e non indebolisce il cavo, a differenza del nodo semplice, deve il suo nome perché appare nello stemma di Casa Savoia. In araldica è noto come nodo d'amore poiché simboleggia l'amore fedele e l'eterna amicizia. (Figg.132 e 133)



Fig. 132 - Nodo Savoia. A destra le insegne dell'Ordine Supremo della Santissima Annunziata, istituito nel 1362 dal "Conte Verde" Amedeo VI di Savoia, composte da un Grande Collare, un Piccolo Collare ed una placca. In tutte è rappresentato il nodo.



Fig. 133 - A sinistra la Tiara di Maria José. Una tiara in oro e diamanti fatta realizzare nel 1893 dalla famosa gioielleria francese Fabergè caratterizzata da una struttura rappresentante i nodi Savoia. A destra il Diadema della duchessa d'Aosta. È un diadema in oro, argento e diamanti realizzato nel 1895, dalla gioielleria Musy di Torino, costituito da un motivo a nodo Savoia.

Durante il periodo rinascimentale il grande Leonardo da Vinci ha avuto particolare interesse per lo studio dei nodi, al punto da contribuire a renderli ancora più famosi oltre che artistici, inserendoli in opere come *la Dama con l'ermellino*, *La Gioconda* e *La Vergine delle Rocce londinese*; ma soprattutto nelle decorazioni sul soffitto della *sala delle Asse del Castello Sforzesco*, risalenti al 1498, l'artista, attraverso un intreccio di linee curve e di nodi, rappresenta le forme geometriche che la natura offre, dando vita ad un intricato reticolato il cui percorso ciclico complesso e contorto viene proiettato "nell'infinito" per ingannare anche il più attento degli osservatori.

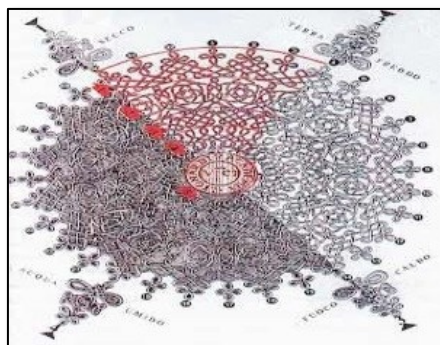


Fig. 134 - "Disegno di Intrecci e Nodi", L. da Vinci, British Museum, Londra (immagine tratta da Graal n.6)



Fig. 135 - Dama con l'ermellino (1488-1490) e La Gioconda (1503-1514).

Così come i ricami visibili sulla scollatura della veste de La Gioconda sono riconducibili agli intrecci arborei della Sala delle Asse e al Clipeo di S. Maria delle Grazie. (Fig. 136)



Fig. 136 - Clipeo di S. Maria delle Grazie.

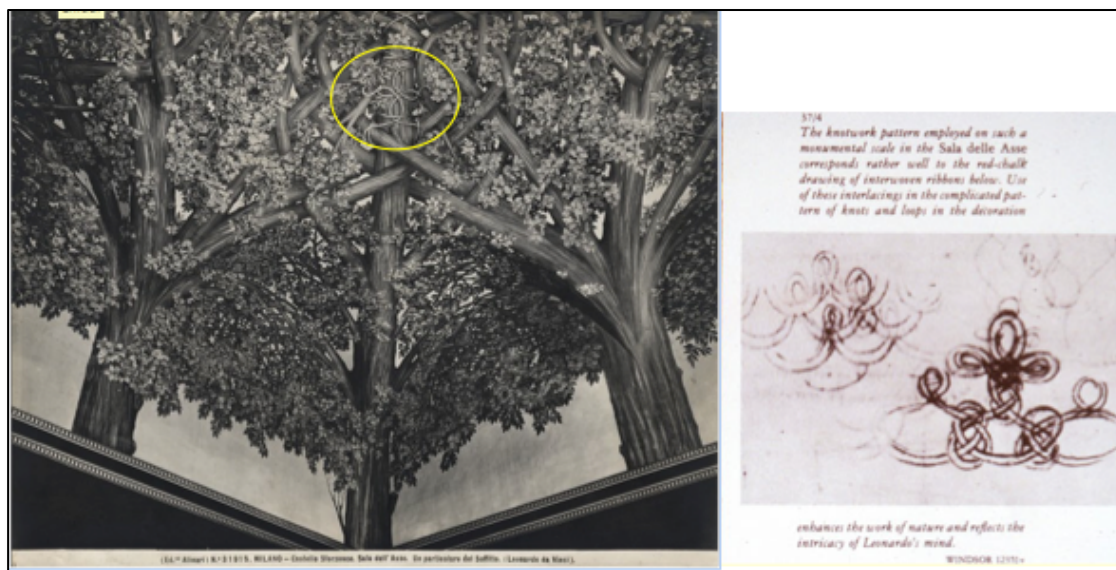


Fig. 137 - Sala delle Asse del Castello Sforzesco, Milano 1498.

Successivamente anche altri artisti hanno ripreso i temi sui nodi, come Albrecht Dürer nella sua xilografia con la serie dei “Sechs Knoten” (Fig. 138).

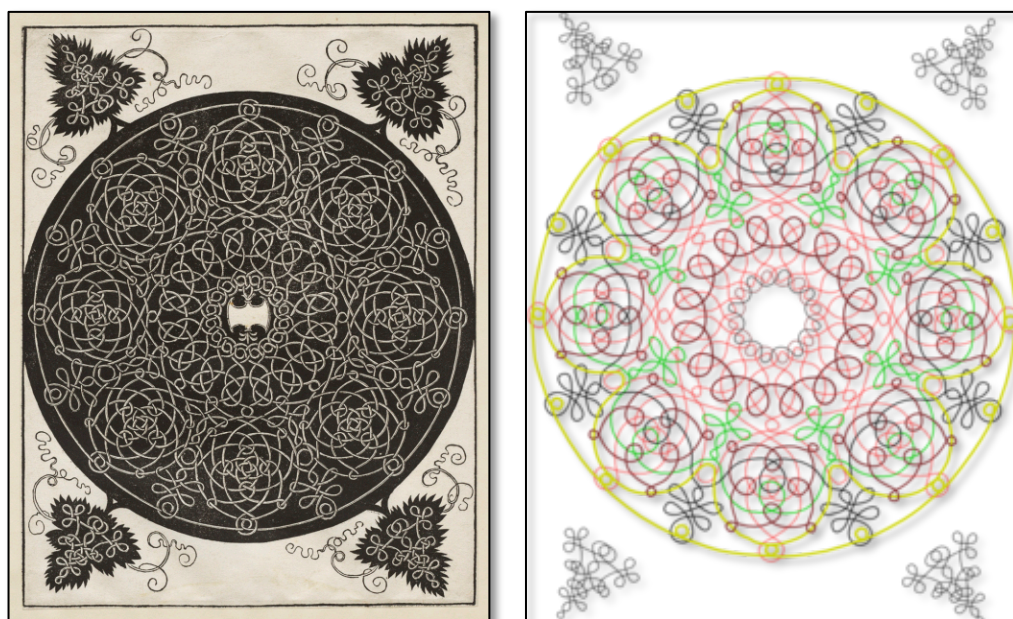


Fig. 138 - Xilografia di A. Dürer, facente parte della “serie dei sei nodi”, 1507.

Ed ancora, nel dipinto la *Virgen Maria Knotelöserin* del 1700, realizzata da Johann Georg Melchior Schidtner in stile veneziano con influenza barocca, è ripreso il simbolismo del nodo (*Fig. 139*) attraverso l'immagine raffigurante la Vergine che scioglie i nodi intrecciati di un nastro. Tale opera accomuna, per la grande devozione mariana, gli ultimi due Pontefici, papa Benedetto XVI e Papa Francesco, quest'ultimo venutone a conoscenza durante i suoi studi di teologia in Germania.



Fig. 139 - Virgen Maria Knotelöserin (Maria che scioglie i nodi) 1700 Johann Georg Melchior Schidtner

Anche Édouard Manet ripropone qualche esempio di nodo nell'opera *Olimpya*. (*Fig.140*)



Fig. 140 - "Olimpya" E. Manet, realizzato nel 1863 ed attualmente conservato nel Musée d'Orsay di Parigi

Una figura particolare è il “*nodo di San Giovanni*”. (Fig. 141)

Questo simbolo, dal punto di vista topologico, descrive un non nodo o un nodo banale poiché rappresenta un anello di corda di forma “quadrata” che presenta su ciascuno degli angoli un cappio privo di nodi.

Questa immagine era già in uso in epoca vichinga. Un esempio rappresentativo dell’uso del simbolo è la pietra decorata di Hablingbo, datata tra il 600 e il 400 a.C., conservata presso il Fornsalen Museum di Visby (Gotland) in Svezia.



Fig.141 - Pietra di Hablingbo, foto: © Wolfgang Sauber, Ferrebeekeeper.

Questo simbolo, utilizzato come simbolo di buon auspicio ed anche come simbolo contrastante le forze del male, trova un parallelismo con alcune interpretazioni poste su una incisione di Gioacchino da Fiore in cui è rappresentata una struttura geometrica simboleggiante l’armonia e la perfezione della Creazione Divina. (Fig.142)



Fig. 142- Tavola VIII del "Liber Figurarum" di Gioacchino da Fiore.

Tale simbolo, a tutt'oggi, viene utilizzato quotidianamente in tutto il mondo. Scelto da Steve Jobs nel 1984 come logo del personal computer Macintosh, con soluzione a 16 bit, in "sostituzione" della famosa mela, è inserito tra i pulsanti della tastiera. (Fig.143)



Fig. 143- Tastiera Apple riportante il nodo di S. Giovanni.

Un esempio di Link di Hopf lo ritroviamo nel Monastero di S. Geronimo che è stato costruito nel XVI secolo e simboleggia una delle più importanti costruzioni nazionali portoghesi classificata dall'UNESCO come Patrimonio Mondiale dell'Umanità. (Fig.144)



Fig. 144 - Interno del monastero di San Geronimo.

Ed anche molte opere d'arte moderna riprendono il tema sui nodi. Alcuni esempi sono ispirati alle variazioni sul nodo trifoglio. (Fig.145)

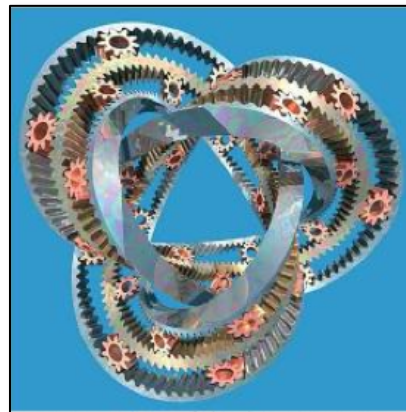


Fig. 145 - a) John Robinson, Mobius trefoil knot, 2006.

b) Tom Longtin, Trefoil Möbius Gear, 1997

Un aspetto che suscita interesse, per il risvolto didattico e multidisciplinare, è la *comunicazione visiva* in ambiente elettronico come è presentata nell'opera di Jean Costant in cui la figura di un nodo otto viene raffigurata in forma dinamica attraverso una manipolazione digitale che proietta l'immagine tridimensionale del nodo su una superficie bidimensionale. (Fig.146)



Fig. 146 - Immagine 8 knot –Jean Costant

La branca della matematica che interessa lo studio dei nodi è la topologia. [200], [180]

In tale direzione sono di fondamentale importanza le opere del matematico Henri Poincaré, che ne fu il fondatore, del quale si ricorda tra le opere maggiori “*Analysis Situs*”.

Tuttavia, la nascita della teoria dei nodi è da associare al matematico Alexander Théophile Vandermone, intorno all’anno 1771, il quale studiò le relazioni derivanti dalla posizione dei singoli nodi, e successivamente a Carl Friedric Gauss che oltre ad una descrizione dettagliata sui nodi ne diede le proprietà.[161]

La teoria matematica sui nodi vede però come principale promulgatore Lord William Thomson (Kelvin) che nel 1860 ideò un modello atomico ispirandosi ai nodi. In tale teoria egli ipotizzava che si trattava di nodi diversi annodati nell'etere che a sua volta riempivano lo spazio. [196]

Egli propose che gli atomi fossero sottili stringhe annodate le cui proprietà fisico-chimiche erano attinenti ai tipi di nodi che si formavano caratterizzando così i tipi di atomi.

Kelvin battezzò il suo nuovo modello atomico come “Vortex Atom” (atomo a vortice). [122]

La finalità di tale scelta era quella di unificare le due teorie della materia, quella

corpuscolare e quella ondulatoria.

Pertanto, la visione che Kelvin diede della propagazione di un atomo è quella di un serpente che si morde la coda, costituendo per l'appunto un nodo o meglio una stringa fortemente curvata e contorta . (Fig.147)

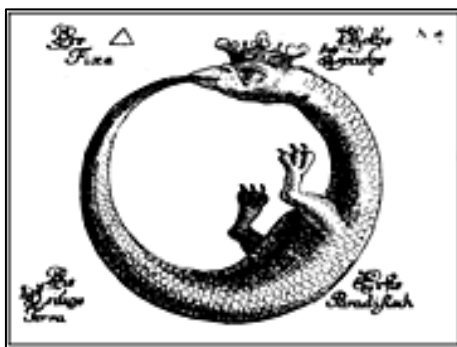


Fig. 147 - L'Ouroboros (riferimento alla ciclicità delle cose e alla natura dell'eterno ritorno)-Eleazar Manuscript

In tale visione, le molecole rappresentavano un agglomerato di più atomi-vortice, a loro volta connessi tra loro (link). Successivamente, si è cercato di dare una classificazione fisico-chimica dei nodi, per giungere alla tavola degli elementi, dove il nodo trifoglio rappresentava il carbonio, il nodo otto l'ossigeno, il nodo banale l'idrogeno e così via. [211]

La teoria di Kelvin sui "Vortex Atom" fu oggetto di interesse da parte del mondo accademico.

Il fisico James Clerk Maxwell riteneva che tale modello soddisfacesse più condizioni di qualunque altro modello atomico fin allora conosciuto.[145]

La stabilità topologica e la varietà dei nodi sembravano poter giustificare la stabilità della materia e la varietà degli elementi chimici.

Il fisico scozzese Peter Guthrie Tait, sulle orme di Kelvin, intraprese uno studio intensivo per creare un catalogo dei nodi topologicamente differenti. [193] [194] [195] [67] [73]

Il nodo secondo Tait era una stringa sottile ed elastica e per poter giungere ad una classificazione bisognava utilizzare la tecnica che consiste nel proiettare ortogonalmente il nodo su di un piano, come riportato in figura148.

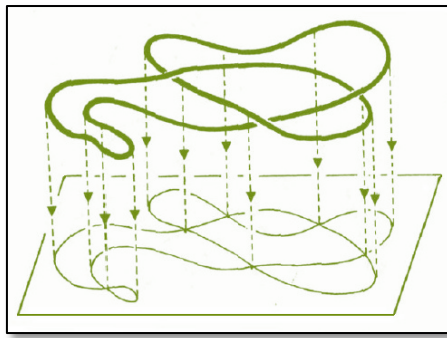


Fig.148 - Proiezione ortogonale di un nodo su un piano.

La teoria atomica di Kelvin conobbe il suo declino con la pubblicazione della tavola periodica degli elementi di Dmirij Mendeleev, attraverso la quale viene dimostrato che esistono relazioni di periodicità aritmetiche tra i diversi parametri degli elementi chimici, e con l'avvento della teoria della Relatività Speciale di Albert Einstein, dove, assieme ai risultati del celebre esperimento di Michelson-Morley, si afferma la non esistenza dell'etere. [33]

Lo studio della teoria dei nodi divenne così, esclusivamente una branca della matematica pura. [180] [130]

4.2. - I NODI E LA MULTIDISCIPLINARIETÀ

L'interesse sulla teoria dei nodi è cresciuto negli anni '50 con la scoperta della struttura a doppia elica del DNA (acido desossiribonucleico). Spesso il DNA forma dei nodi con forme diverse e tali nodi possono essere descritti e studiati attraverso la teoria dei nodi.

I ricercatori, infatti, attraverso la teoria dei nodi, studiano gli enzimi, quest'ultimi responsabili della duplicazione e della trascrizione del DNA, e le loro proprietà. Conseguentemente alla duplicazione, i due filamenti che compongono il DNA si separano, e questo grazie alla topoisomerasi (isometria topologica) che è una funzione degli enzimi i quali, come nelle mosse di Reidemeister, modificano mediante tagli, ricuciture, spostamenti e torsioni le strutture a doppia elica.

Inoltre, attraverso alcune tecniche di visualizzazione sperimentale è possibile quantificare l'evoluzione con cui si annoda e si collega il DNA.

Ad esempio, nella tecnica di laboratorio chiamata elettroforesi su gel si ha un campo elettrico che induce le molecole ad attraversare una regione di gel. Le proprietà di una singola molecola determinano la velocità con cui un campo elettrico fa viaggiare la stessa all'interno del gel ed inoltre i nodi con un diverso numero di incroci hanno velocità differenti di spostamento nel gel e quindi producono bande distinte nel mezzo.

I nodi, oltre ad essere studiati nella genetica molecolare, in quanto contribuiscono a capire come individuare un avvolgimento di DNA, hanno un ruolo fondamentale nello studio della fisica delle particelle, nel tentativo di rappresentare la natura fondamentale delle particelle elementari. [132]

La teoria dei nodi è strettamente connessa alla teoria delle stringhe, la quale sembra, attualmente, una delle teorie più accreditate per arrivare a determinare la teoria del tutto. La stessa teoria delle stringhe considera le particelle elementari come modi differenti di vibrazione di una stringa. Pertanto, lo spazio è pieno di curve minuscole e deformabili come elastici, le stringhe, che interagendo tra loro formano delle "ciambelle" che in topologia vengono detti tori.

Il modello fisico della teoria delle stringhe è impegnato nella ricerca del tentativo di unificare la meccanica quantistica con la relatività generale, al fine di approdare ad una teoria del tutto (TOE) attraverso cui poter spiegare tutte le interazioni fondamentali esistenti in natura, e in tal senso contribuire ai progressi matematici nella teoria dei nodi, negli spazi di Calabi Yau e in molti altri campi.

Secondo questa teoria il cosmo è pieno di curve infinitamente piccole, flessibili e deformabili simili ad elastici, alle cui vibrazioni corrispondono particelle differenti della materia. Quando più stringhe interagiscono, si formano delle strutture topologiche complesse nodali. Alcuni teorici delle stringhe evidenziarono una stretta relazione tra l'invariante di Jones e i fondamenti della teoria delle stringhe (nota come Teoria quantistica dei campi). [201] [81] [178]

Di recente, uno studio sulle onde elettromagnetiche, pubblicato su "Physical Review Letters" da Hriday Kedia ed altri studiosi afferenti al Dipartimento di Fisica dell'Università di Chicago, ha ottenuto delle soluzioni che soddisfano le

equazioni fondamentali che descrivono il campo elettromagnetico quali le famose equazioni di Maxwell. Si è dimostrato, infatti, che esistono delle strutture di luce che, durante la loro propagazione nello spazio, presentano le linee di campo che si richiudono su se stesse deformandosi in modo continuo e formando dei nodi trifoglio ed altri nodi, noti alla teoria matematica sui nodi come ad esempio i nodi torici. Precedentemente tali strutture toroidali e a forma di nodo trifoglio erano state riscontrate in alcuni studi fatti sulla fluidodinamica, pubblicati su “Nature Physics” da Dustin Klecner William T. M. Irvine del James Franck Institute del Dipartimento di Fisica dell’Università di Chicago, sulla descrizione delle turbolenze nei sistemi fisici e le loro applicazioni nelle tecnologie, come la meteorologia ai magneti superconduttori utilizzati negli acceleratori di particelle.

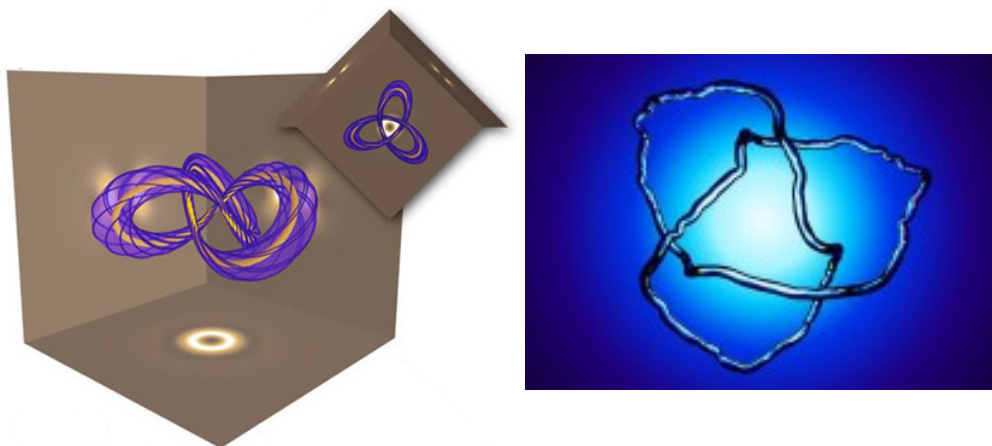


Fig. 149 - Nella foto a sinistra è riportata una simulazione al computer che raffigura il nodo trifoglio formato da un campo magnetico (Hridesh Kedia-Università di Chicago). Nell'immagine a destra è riportata la propagazione nello spazio delle strutture di luce e come queste mantengono la loro forma durante la propagazione pur distorcendosi (Lab/UNIVERSITY of Chicago). Immagini prese dalla rivista Scientific American 21 Ottobre 2013.

Lo studio della teoria dei nodi è un esempio molto articolato di interdisciplinarietà, il cui linguaggio, sfruttando l’aspetto visivo, permette di intrecciarsi con la ricerca scientifica e filosofica più avanzata.

4.3. - APPENDICE

La teoria dei nodi si sviluppa come branca della topologia che studia le immersioni di uno spazio topologico dentro un altro e considera quelle proprietà che rimangono immutate quando lo spazio subisce una deformazione senza però ricorrere a strappi o buchi.

Una immersione di spazio topologico X in Y avviene attraverso una trasformazione continua del primo spazio in un sottoinsieme del secondo, la cui inversa è anch'essa continua. Attraverso la proiezione normale in \mathbb{R}^2 è possibile classificare i diversi tipi di nodi.

Ad esempio, un nodo topologicamente equivalente alla circonferenza è definito da una curva chiusa nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 (o nella 3-sfera S^3)²⁹, con la topologia usuale.

È noto che la sfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ è possibile riguardarla come la compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R}^3 , $\widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$, infatti la proiezione stereografica vedi Fig. dal punto $\infty = (0,0,1)$ dà un omeomorfismo tra $S^3 - \{\infty\}$ e \mathbb{R}^3 .

Pertanto ogni nodo in \mathbb{R}^3 si può intendere contenuto in S^3 . (Fig.150)

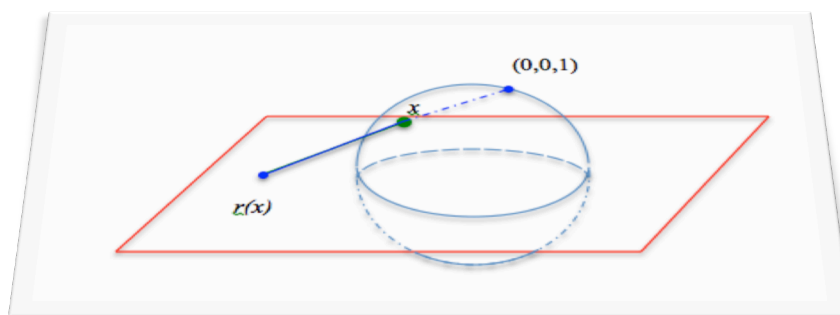


Fig. 150

²⁹ Considerata come la compattificazione di \mathbb{R}^3 . Per questo, anche se definiremo il concetto di nodo ed equivalenza di nodi in una 3-varietà qualsiasi, molti degli invarianti classici e degli esempi trattati riguarderanno i nodi in \mathbb{R}^3 .

Fino ad oggi non esiste una classificazione completa, né tanto meno esiste un algoritmo con complessità computazionale accettabile.[122]

I nodi studiati in questo capitolo hanno generalmente le estremità chiuse.

4.3.1. - ELEMENTI FONDAMENTALI

DEFINIZIONE 4.1.

Si definisce un *nodo* N (knot) l'immersione di una circonferenza S^1 nello spazio euclideo tridimensionale, dove $N \subset \mathbb{R}^3$ si identifica con la sua immagine. Pertanto:

$$\exists \rho: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ immersione con } \rho(S^1) = N.$$



Fig.151 - a) nodo banale, b) 2-nodo banale, c) n-nodo banale.

Una circonferenza semplice rappresenta un nodo banale o nodo sciolto (unknot). Quando non vi è la possibilità di far coincidere un nodo, attraverso un movimento continuo nello spazio \mathbb{R}^3 , ad un nodo banale allora si parlerà di nodo intrecciato.



Fig.152 - Esempi di nodi banali

DEFINIZIONE 4.2.

Un nodo (knot) N è detto *intrecciato* se non esiste un omeomorfismo $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $N = \lambda(S^1)$, dove $S^1 = \{(x; y; 0) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$ è la circonferenza standard nel piano xy .

I nodi riportati nelle figure 151 e 152 non sono intrecciati, mentre quelli delle figure 153 e 154 lo sono.

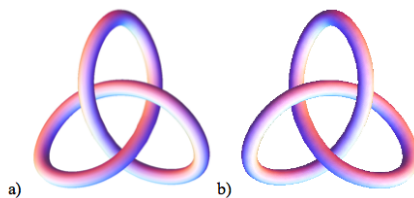


Fig.153- a) nodo trifoglio sinistro, b) nodo trifoglio destro.

L'unione di più nodi disgiunti è detto *link* o nodo a più componenti.

DEFINIZIONE 4.3.

Si definisce *link* (L) ad n componenti, con $L \subset \mathbb{R}^3$,

$L = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$, con N_i nodo $\forall i = 1, 2, \dots, n$ e $N_i \cap N_j = \emptyset$ con $i \neq j$.

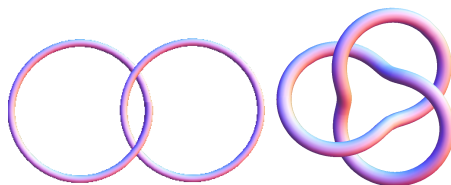


Fig.154- Link di Hopf

DEFINIZIONE 4.4.

Due *link* si definiscono *equivalenti* (omeomorfi) se esiste un omeomorfismo su \mathbb{R}^3 che trasforma un nodo nell'altro.

Si parlerà di equivalenza tra nodi quando i nodi si possono deformare l'uno nell'altro senza dover ricorrere a tecniche di strappi o rotture. Inoltre, l'equivalenza definita sulla base degli omeomorfismi fa sì che un nodo e la sua immagine speculare (*mirror image*) siano considerati equivalenti.³⁰

³⁰ Definizione: Siano λ e μ due applicazioni continue in due spazi topologici X, Y . Una omotopia di λ in μ è rappresentata da una funzione continua del tipo:
 $K : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, t. c. $\forall x \in X$, con $K(x, 0) = \lambda(x)$ e $K(x, 1) = \mu(x)$.

DEFINIZIONE 4.5.

Una *isotopia* tra due nodi N_1 ed N_2 in \mathbb{R}^3 è una mappa da

$$\begin{aligned} \lambda: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\rightarrow h_t(x) \end{aligned}$$

tale che:

- (i) $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$
- (ii) $\forall t$ h_t è un *diffeomorfismo*
- (iii) $N_2 = h_1(N_1)$

Due nodi N_1 e N_2 sono isotopi se e solo se esiste un'isotopia tra loro

DEFINIZIONE 4.6.

Una *isotopia ambiente* di uno spazio topologico X è una isotopia tra la funzione identità di X ($id_X: X \rightarrow X$) e un omeomorfismo $\lambda: X \rightarrow X$.

DEFINIZIONE 4.7.

Due nodi $N_1, N_2 \subset \mathbb{R}^3$ si dicono *isotopicamente equivalenti* se esiste una isotopia ambiente di \mathbb{R}^3 tra $id_{\mathbb{R}^3}$ e $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ omeomorfismo tale che

$\lambda(N_1) = N_2$ e si indica con $N_1 \simeq N_2$.

Tale isotopia consente una trasformazione continua dello spazio tridimensionale, trasformando un nodo nell'altro e conservandone l'orientazione.

In tal caso K è detta omotopia tra λ e μ e si indica con $(f \sim g)$.

Gli spazi omeomorfi sono omotopi, il viceversa non è vero.

Proposizione: La relazione di omotopia tra spazi topologici è una relazione di equivalenza. Dal punto di vista "visivo" una omotopia deforma con continuità la funzione f nella funzione g . Tale definizione può estendersi generalizzandola ad una famiglia di applicazioni continue.



Fig. 155 - Esempio di “trasformazione continua” del nodo banale.

In riferimento al nodo trifoglio destro e sinistro, essi rappresentano l’immagine speculare l’uno dell’altro; pertanto non sono sovrapponibili e quindi si tratta di due nodi differenti. In base alle definizioni date si può affermare che i nodi trifoglio sono equivalenti ma non isotopi, se non attraverso una operazione di riflessione (invertendo quindi l’orientazione nello spazio).

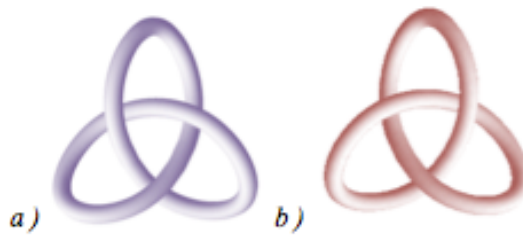


Fig. 156 - Esempi di nodi: a) nodo trifoglio sinistro, b) nodo trifoglio destro.

Le definizioni che seguono sono certamente note in letteratura e sfruttate in molte applicazioni, vengono riportate attraverso alcuni grafici.

DEFINIZIONE 4.8.

Un nodo si definisce *achirale o simmetrico* quando è equivalente alla propria immagine speculare, altrimenti viene definito *chirale o asimmetrico*.

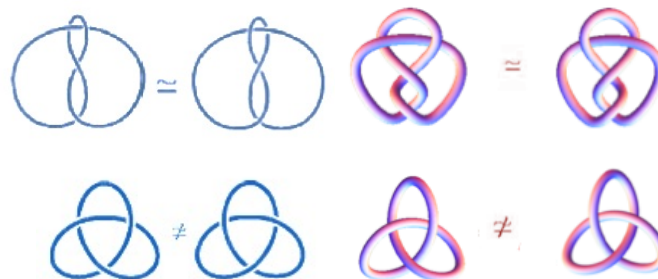


Fig. 157 - Nodo a otto e nodo trifoglio

DEFINIZIONE 4.9.

Si definisce *diagramma* di un nodo una sua proiezione con la scelta di un attraversamento superiore o inferiore, in corrispondenza di ogni incrocio.



Fig.158 - Esempio di una proiezione del nodo trifoglio destro.

Nel proiettare un nodo in \mathbb{R}^2 si creeranno delle intersezioni (*punti di incrocio*) in corrispondenza delle quali, a seconda se il tratto di nodo passa sopra o sotto, possono presentarsi delle interruzioni.

Altri due elementi importanti da osservare in un diagramma, oltre all'*incrocio*, sono l'*arco*, inteso quale tratto di curva (o porzione della proiezione del nodo) che va da un sottopassaggio fino al successivo, e il *ponte* inteso come quel tratto di curva compreso tra due incroci consecutivi che rappresenta uno spazio topologicamente³¹ equivalente a un segmento.

³¹ Le curve topologiche connesse sono tutte topologicamente equivalenti alla retta o alla circonferenza. La retta e la circonferenza non sono topologicamente equivalenti tra loro essendo non compatta la prima e compatta la seconda. Una curva topologica è uno spazio topologico X localmente equivalente alla retta euclidea, dove ogni intorno di un suo punto x ammette un sistema di coordinate dipendente da un solo parametro reale.

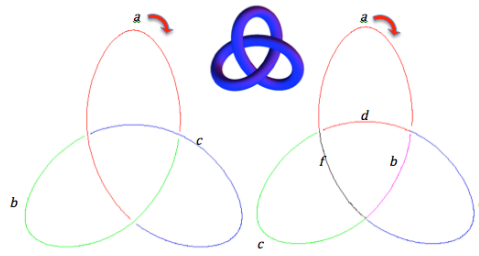


Fig. 159 - Archi e Ponti individuati in un nodo trifoglio.

La figura 158 riporta l'esempio del nodo trifoglio, suddiviso in ponti e in archi; si nota che i ponti sono tanti quanti gli incroci, mentre gli archi sono esattamente il doppio.

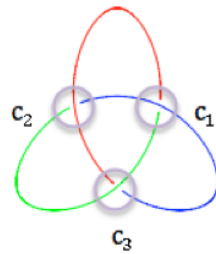


Fig. 160 - Nodo trifoglio destro con i rispettivi tre incroci .

DEFINIZIONE 4.10.

Sia $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ la proiezione sul piano. Si definisce *diagramma* del nodo $A \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $D = p(A)$, con l'evidenziazione dei sottopassaggi dei punti propri doppi, assumendo sempre che la proiezione sia non degenere.

Uno stesso nodo può essere rappresentato con una quantità infinita di diagrammi planari.

Kurt Reidemeister dimostra che due nodi N_1 ed N_2 rappresentano lo stesso nodo e pertanto sono isotopicamente equivalenti se e solo se la proiezione di uno può essere convertita nella proiezione dell'altro attraverso l'uso di tre semplici movimenti, a meno di isotopie del diagramma D nel piano. Utilizzando diagrammi e movimenti di Reidemeister sono stati classificati i nodi con diagrammi fino a quindici incroci.

TEOREMA 4.1. (teorema di Reidemeister).

Siano N_1 ed N_2 nodi di \mathbb{R}^3 e D_1 e D_2 i rispettivi diagrammi. N_1 è isotopicamente equivalente ad N_2 se e soltanto se esiste una sequenza finita di mosse $M = (M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_n)$ che trasforma D_1 in D_2 . [142], [134]

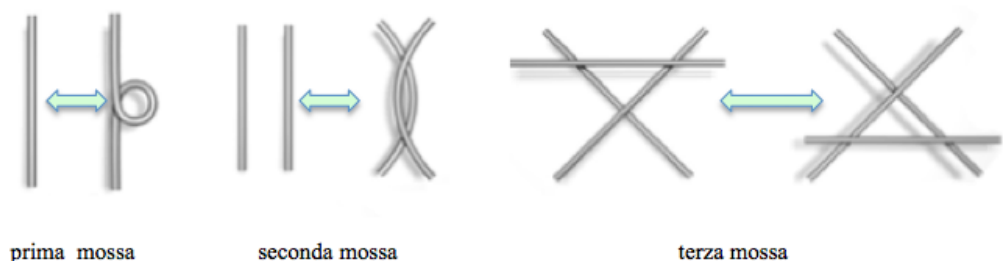


Fig. 161 - Le mosse di Reidemeister.

La prima mossa di Reidemeister permette di effettuare una torsione del nodo, la seconda mossa Reidemeister permette di aggiungere uno o due passaggi e rimuovere due incroci, la terza mossa Reidemeister coinvolge tre componenti del nodo e permette di far scorrere un filo del nodo da un lato di un passaggio (incrocio) per l'altro lato del passaggio. [128]

L'applicazione di tali mosse, quindi, consiste nel selezionare una porzione del diagramma identificabile nelle mosse di Reidemeister. Lasciando inalterato il resto del diagramma, si sostituisce la porzione prescelta con la sequenza della mossa, secondo quanto riportato in figura.

Anche se il teorema di Reidemeister ci consente di provare come due diagrammi possono appartenere allo stesso nodo, attraverso un numero finito di mosse (se queste sono a noi note), questo non dà soluzione al problema del riconoscimento di un nodo a partire dal diagramma poiché non esiste un algoritmo che permette di conoscere il numero di mosse necessario.

Infatti, osservando i movimenti di Reidemeister risulta evidente che ogni nodo ha infinite proiezioni possibili sul piano.

Con il termine *crossing number* si indica il numero di incroci che si possono contare nel diagramma.

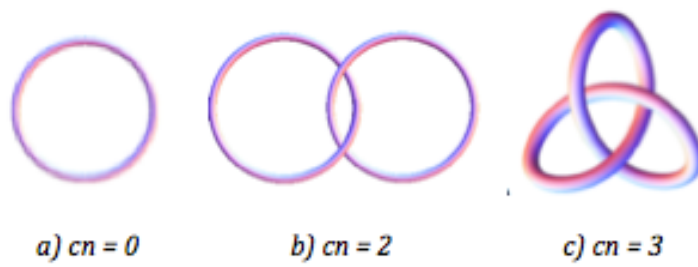


Fig. 162 - Esempi di crossing number: a) nodo banale, b) link di Hopf e c) nodo trifoglio.

I movimenti di Reidemeister rappresentano dei diagrammi detti a proiezione minimale del nodo. Determinare il minimo crossing number di un nodo non è una operazione sempre semplice da effettuare. Diamo alcuni esempi non estremamente complessi del nodo banale, del link di hopf e del trifoglio, in proiezione non minimale. (Fig.162)



Fig. 163 - Proiezioni non minimali di nodi e link.

DEFINIZIONE 4.11.

L'*isotopia planare* è una deformazione di una proiezione di un nodo nel piano che mantiene invariato ogni incrocio.

4.3.2. - OPERAZIONI SUI NODI

Premettiamo alcune proposizioni.

DEFINIZIONE 4.12.

Un nodo N in \mathbb{R}^3 o (S^3) si definisce *primo* se non è il nodo banale e se non si può scrivere come somma di due nodi non banali.

DEFINIZIONE 4.13.

I nodi che non sono primi sono detti *composti*.

DEFINIZIONE 4.14.

Un nodo (o link) nel quale è individuato un verso di percorrenza sarà detto nodo *orientato*.



Fig. 164 - Esempi di nodi e link orientati.

PROPOSIZIONE 4.1.

I diagrammi di due nodi orientati rappresentano nodi orientati ambientalmente isotopi se e solo se uno può essere trasformato nell'altro attraverso una sequenza finita di Reidemeister.

Prov: Discende dall'applicazione delle definizioni date precedentemente.

DEFINIZIONE 4.15.

Dato un nodo N , si definisce *opposto* di N , e lo si indica con \bar{N} , il nodo che si ottiene invertendo l'orientamento.

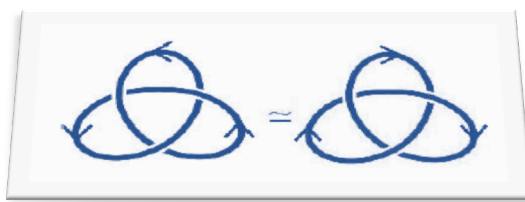


Fig. 165 - Orientamenti del nodo trifoglio.

DEFINIZIONE 4.16.

Un nodo N , si definisce *invertibile* se è isotopicamente equivalente a \bar{N} .

Si può parlare sia di classe di equivalenza isotopica e sia di classe di equivalenza di N (in quest'ultimo caso può essere utile distinguere la forma destrorsa e sinistrorsa del nodo, qualora esso sia chirale) a seconda dei contesti. Parlando di nodo trifoglio, quindi, è possibile indicare la classe di equivalenza di tutti i nodi trifoglio, eventualmente riservando le nomenclature *trifoglio destro* e *trifoglio sinistro* alle due classi di equivalenza isotopiche.

LA SOMMA CONNESSA DI DUE NODI.

L'operazione di somma connessa tra nodi permette di costruire un nodo partendo da due nodi assegnati.

DEFINIZIONE 4.1.7

La somma connessa di due nodi N_1 e N_2 consiste nella rimozione di un piccolo arco da ogni nodo e quindi nel collegare i quattro punti finali con due nuovi archi in modo che siano introdotti nuovi incroci. Il risultato è un singolo nodo, indicato con $N_1 \# N_2$.

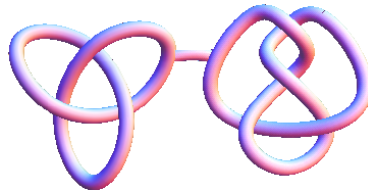


Fig. 166 - Esempi di connessione del nodo trifoglio e nodo a otto.

L'operazione di *somma connessa* verifica sia la proprietà commutativa che quella associativa.

Il nodo banale si ricava dall'elemento neutro dell'operazione:

$O \# N = N \# O = N$ per ogni altro nodo N .

DEFINIZIONE 4.18.

Un nodo N è *primo* se non è ottenibile come somma connessa $N = N_1 \# N_2$ di due nodi non banali.

Un nodo non primo verrà detto coniugato.

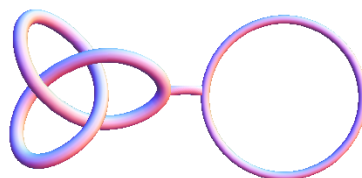
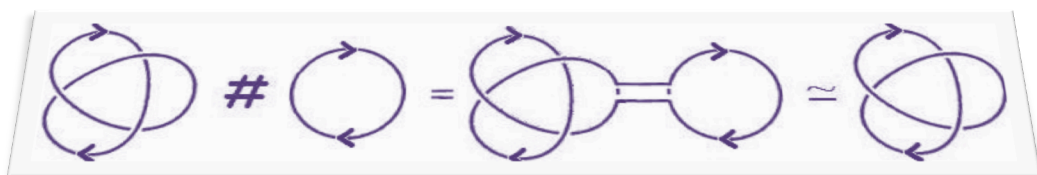


Fig. 167 - Connessione del nodo trifoglio e nodo banale.

TEOREMA 4.2. (Fattorizzazione di Horst Schubert).

Ogni nodo N è ottenibile in modo unico come somma connessa di nodi primi

$N = N_1 \# \dots \# N_k$ con N_j nodo primo, per $j = 1, \dots, k$. [170]

4.3.3 - INVARIANTI TOPOLOGICI

Un ruolo di rilievo per lo studio della teoria dei nodi e la loro classificazione è ricoperto dagli *invarianti topologici*, i quali permettono di stabilire l'equivalenza tra due nodi quando questi vengono rappresentati con due diagrammi differenti.

Un invariante topologico è una proprietà intrinseca del nodo N , comune rispetto a tutti gli altri nodi equivalenti al primo.

Ne discende ovviamente che due nodi che hanno proprietà diverse per uno stesso invariante non possono essere equivalenti.

Un esempio banale di invariante topologico per i nodi è dato dal numero dei componenti di un link. [73]

Due link aventi un numero diverso di componenti non possono ovviamente essere equivalenti; ciò può essere provato facilmente facendo notare che i movimenti di Reidemeister non cambiano il numero di componenti.

Probabilmente il numero di componenti è il più debole invariante dei nodi, mentre quelli che saranno presentati in seguito sono sicuramente più potenti e interessanti.

Tuttavia, un invariante che sia in grado di distinguere tutti i nodi e che non sia troppo difficile da valutare, ancora non è stato scoperto.

Esiste però un algoritmo per la decisione dell'equivalenza di due nodi (W. Haken e G. Hemion, 1992).

L'algoritmo è derivato dall'algoritmo di riconoscimento del nodo banale (W. Haken, 1961). Purtroppo non si conosce una versione dell'algoritmo che si applichi ai diagrammi dei nodi.

CROSSING NUMBER

Un primo invariante lo fornisce il *crossing number* (*proiezione minima*) $c(N)$. Esso rappresenta il numero di incroci che si possono individuare sul diagramma di un nodo in *proiezione minima*³². Pur fornendo la complessità $c(N)$ di un nodo non è in grado di distinguere alcuni nodi diversi tra loro, pertanto non è un invariante completo. Questa particolare caratteristica ha indotto alla stesura di un primo catalogo sui nodi da parte di Dale Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish (1976).[206]

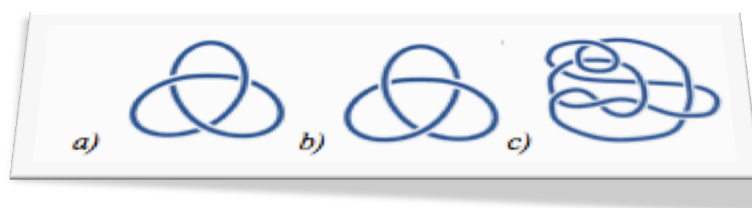


Fig. 168- Esempi di nodo trifoglio. (a) Nodo destro, (b) nodo sinistro, (c) proiezione non minima con dieci incroci.

LINKING NUMBER

Un altro invariante topologico è rappresentato dal *linking number* (*numero di concatenamento o incroci*). Riferendosi al diagramma di un nodo, esso considera gli incroci in cui una componente passa sopra un'altra assegnando il valore -1 o +1, a seconda che sia, rispettivamente, sinistrorso o destrorso, come mostrato in figura (). Si noti che, per poter attribuire un segno all'incrocio, ciascuna componente deve essere orientata.

Il linking number tra le due componenti A e B in un link L è definito come la metà della somma dei valori associati agli incroci tra i due componenti e si indica con $\mathcal{L}(A, B)$.

³² Rappresenta quel diagramma del nodo N con il numero minimo di incroci tra tutti i possibili diagrammi piani che possono rappresentare il nodo medesimo.

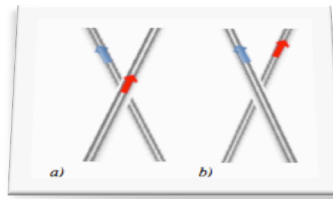


Fig. 169- Esempi di incroci orientati: a) destrorso (+1), b) sinistrorso (-1).



Fig. 170 - Esempio di due nodi distinti dal loro linking number rispettivamente 1 e 2.

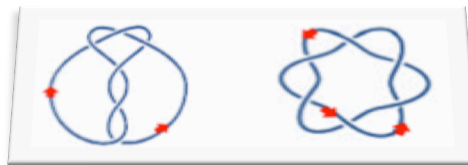


Fig. 171 - Esempio di due nodi differenti ma aventi lo stesso linking number. Per entrambi è 3.

DEFINIZIONE 4.19.

Sia D il diagramma di un link orientato L con due componenti A e B e siano D_A e D_B le corrispondenti proiezioni di A e B .

Fissato ad ogni incrocio $c \in D_A \cap D_B$, il segno $\mathcal{L}(c) \in \{0, 1, -1\}$ di un nodo, in cui i tratti che vi confluiscono sono parte di due componenti distinti, è tale che:

- a) $\mathcal{L}(c) = +1$, se l'incrocio è destrorso e i rami appartengono a due componenti diverse.
- b) $\mathcal{L}(c) = -1$, se l'incrocio è sinistrorso e i rami appartengono a due componenti diverse.
- c) $\mathcal{L}(c) = 0$, se i rami fanno parte della stessa componente.

Resta definito il numero intero:

$$L(A, B) = \frac{1}{2} \sum \mathcal{L}(c).$$

Esso è detto *linking number* delle due componenti.

OSSERVAZIONE 4.1.

Al variare dell'orientazione di una componente, anche il segno del linking number cambia.

Tale invariante non è completo, infatti osservando bene la fig. (50, 51) si nota come due nodi non equivalenti hanno lo stesso linking number.

Osservando attentamente cosa succede per le singole mosse di Reidemeister, si può facilmente affermare che questa è una buona definizione poiché non dipende dal particolare diagramma scelto. Il linking number è quindi un invariante per link con due componenti. Si dimostra, inoltre, che il valore di $\mathcal{L}(A, B)$ non cambia applicando le mosse di Reidemeister.

ESEMPIO 4.1. (link di Hopf)

$$L(A, B) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

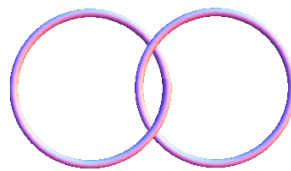


Fig. 172

Nodo finto di Hopf:

$$L(A, B) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0.$$

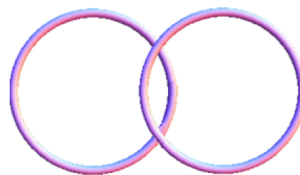


Fig. 173

Per approfondimenti consultare [16] e [2]

4.3.4. - INVARIANTI POLINOMIALI

Caratteristiche geometriche invarianti per isotopia possono essere ricercate attraverso l'ausilio di strumenti di topologia algebrica.

Gli invarianti polinomiali, oltre ad essere la categoria più "potente" degli invarianti, costituiscono la più interessante.

POLINOMIO DI ALEXANDER

Un ruolo fondamentale, oltre che storico, è affidato al polinomio di James Waddell Alexander, utilizzato per il discernimento dei nodi non isotopi.

Successivamente, lo sviluppo della teoria si concentrò sullo studio delle proprietà di tale polinomio, giungendo a diverse interpretazioni, come nel calcolo di Ralph Fox. [53] [70]

Consideriamo un diagramma per un nodo (N) orientato in modo arbitrario.

Etichettiamo il numero degli archi del diagramma e quello degli incroci.

Per ogni incrocio si stabilirà la rotazione, oraria (destrorsa) o antioraria (sinistrorsa), e si determineranno i valori di i , j e k secondo quanto nello schema sotto riportato

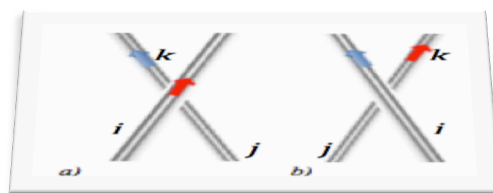


Fig. 174 - Schema di rotazione destrorsa e sinistrorsa.

Richiamando il teorema di Eulero [7] ne consegue che gli archi suddividono il piano in regioni, quindi si avranno $n - 2$ regioni, inclusa quella esterna al nodo. Si passa quindi alla costruzione di una matrice $n \times n$ (dove n è il numero di incroci

/archi del diagramma) secondo la seguente tabella (fig. 163):



Tipi di incroci	I	J	K	
	$1-t$	T	-1	Sinistrorso
	$1-t$	-1	T	Destrorso

Fig. 175

Ciò significa che se l'incrocio è orario, si assegna il valore $I - t$ nella colonna i della riga di appartenenza, ecc. Tra tutte le altre colonne in fila x si riporta lo zero. Può verificarsi che i, j, k sono uguali. In questo caso, la somma delle voci nella tabella di cui sopra viene inserita nella colonna appropriata.

Ad esempio, se $i = j$ in un incrocio antiorario (sinistrorso), si assegna il valore $(I - t) + t$ nella colonna i .

Successivamente si elimina l'ultima riga e colonna della matrice per ottenere una matrice del tipo $(n - 1) \times (n - 1)$.

Questa matrice è detta matrice di Alexander.

Il determinante della matrice di Alexander è un polinomio di Alexander (Δ_N) . [44]

ESEMPIO 4.2.

Calcoliamo il polinomio di Alexander per il Trifoglio.

- (i) etichettiamo gli archi con i numeri a_1, a_2, a_3 e gli incroci con c_1, c_2, c_3 ;

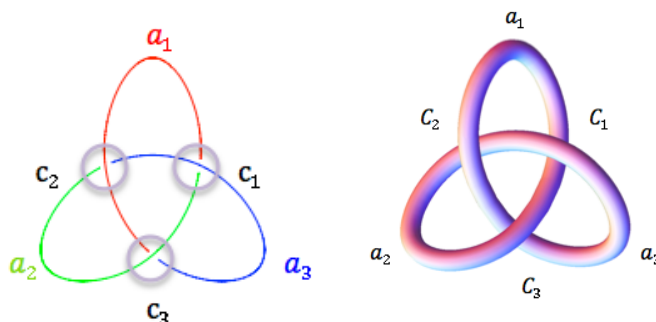


Fig. 176 - Archi e incroci nel nodo trifoglio.

(i) calcoliamo i, j, k per ogni incrocio;

	i	j	k
c ₁	3	1	2
c ₂	1	2	3
c ₃	2	3	1

(ii) eliminiamo l'ultima riga e colonna calcolando il determinante.

Costruiamo una matrice 3×3 del tipo

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \\ -1 & 1-t & t \end{pmatrix} = t^2 - t + 1$$

si ottiene:

$\Delta_N = t^2 - t + 1$, che non è altro che il polinomio di Alexander.

Facendo riferimento al calcolo di Fox e alla costruzione algebrica di una matrice Jacobiana per un gruppo G , avente un numero finito di generatori del tipo $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}; a, b \in G\}$, allora G/G^1 è un gruppo abeliano

$$\mathcal{A}: G \rightarrow G/G^1$$

detta mappa (abelianizzato) di G .

Ad un nodo N , è possibile associare un gruppo non abeliano $G(N)$.

DEFINIZIONE 4.20.

Sia N un nodo in \mathbb{R}^3 . Sia X il complementare di N , ossia $X = \mathbb{R}^3 \setminus N$.

Si definisce gruppo fondamentale³³ di N e lo si indica con $\pi(N)$, il gruppo

³³ Sia X uno spazio topologico ed $x_0 \in X$. Il gruppo fondamentale di X con punto base x_0 , in simboli $\pi(X, x_0)$, è il gruppo che ha come elementi le classi di equivalenza degli archi chiusi di

fondamentale $\pi(X, x_0)$ con $x_0 \in X$.

DEFINIZIONE 4.21.

Il gruppo $G(N)$ è il gruppo fondamentale³⁴ $\pi_1(S^3 \setminus N)$ del complementare nello spazio euclideo tridimensionale S^3 .

Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 4.2.

Sia N un nodo, con un gruppo $G(N)$. Sia $G'(N)$ il derivato primo di $G(N)$ allora il gruppo quoziente di $G(N)$ per il derivato primo del gruppo $G'(N)$,

$G(N)/G^1(N)$ è isomorfo al gruppo ciclico infinito \mathbb{Z} .

$G(N)/G^1(N)$ è detto l'abelianizzato di $G(N)$ e si indica con $\mathcal{A}[G(N)]$

per approfondimenti confronta. [41] [114]

DEFINIZIONE 4.22.

Sia \mathbb{F} la derivata parziale su un gruppo libero il campo primo $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ è definita in modo ricorsivo come:

(i) $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1;$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_i}(1) = 0;$

(iii) $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0$ se $i \neq j;$

(iiii) $\frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_i} = -x_i^{-1};$

base x_0 rispetto alla relazione di equivalenza d'omotopia relativa $\{0,1\}$ e come operazione il prodotto tra tali classi definito da $[\lambda * \mu] = [\lambda] * [\mu]$.

³⁴Per approfondimenti consultare la presentazione classica per il gruppo fondamentale di un nodo in S^3 [18, Th. 3.4], [29].

$$(iiii) \quad \frac{\partial(w_1 \cdot w_2)}{\partial x_i} = \frac{\partial w_1}{\partial x_i} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_i}.$$

la derivata parziale è una mappa del gruppo libero $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$ sull'algebra
grupitale $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$.

Sia $G = (x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n)$,

$\phi: \mathbb{F} = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow G(x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_{n-1})$.

La mappa ϕ può essere estesa alla mappa $\phi: \mathbb{Z}[\mathbb{F}] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ che è l'omomorfismo

³⁵di anelli t.c.: $x_i \phi(x_j) = x_j, \forall i$ e $\phi = id$.

$\Psi: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \Omega = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

$x_i \mapsto t;$

La matrice di Alexander M è una matrice $m \times n$ così definita:

$$M = \left[\mathcal{A}\phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right]$$

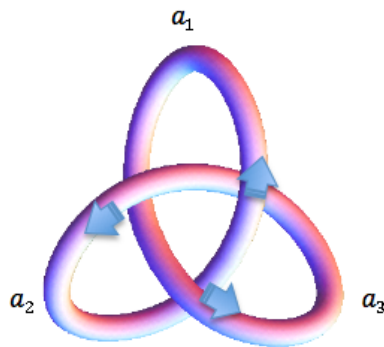


Fig. 177 - Nodo trifoglio orientato.

TEOREMA 4.3.

Un polinomio di Alexander di un nodo N denotato con $\Delta_N(t)$ è un polinomio di
Laurent.³⁶

³⁵ Per approfondimento vedi [61]

³⁶ Polinomi del tipo $a_{-n}t^{-n} + a_{-(n-1)}t^{-(n-1)} + \dots + a_{-1}t^{-1} + \dots + a_n t^n$ dove gli elementi di a_n appartengono ad un campo \mathbb{F} .

La prova discende dall'applicazione del calcolo di Fox dalla costruzione della matrice jacobiana associata ad un gruppo G con parametr. Per la costruzione si consultino [162] [205] [197]

ESEMPIO 4.3.

Siano $\mathbb{F} [a_1, a_2, a_3]$

dove $r_1 = a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1}; r_2 = a_2 a_3 a_2^{-1} a_1^{-1}; r_3 = a_3 a_1 a_3 a_2^{-1}$

Si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial r_1}{\partial a_1}\right) &= \frac{\partial(a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} = 1 + a_1 \frac{\partial(a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} \\ \frac{\partial(a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} &= 0 + a_2 \frac{\partial(a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} \\ \frac{\partial(a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} &= -a_1^{-1} + a_1^{-1} \frac{\partial(a_3^{-1})}{\partial a_1} \\ \frac{\partial(a_3^{-1})}{\partial a_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1})}{\partial a_1} = 1 + a_1 \left(0 + a_2(-a_1^{-1} + a_1^{-1}(0))\right) = 1 - a_1 a_2 a_1^{-1}$$

La matrice Jacobiana è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 - a_1 a_2 a_1^{-1} & a_1 & -a_1 a_2 a_1^{-1} a_3^{-1} \\ -a_2 a_3 a_2^{-1} a_1^{-1} & 1 - a_2 a_3 a_2^{-1} & a_2 \\ a_3 & -a_3 a_1 a_3^{-1} a_2^{-1} & 1 - a_3 a_2 a_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Ed un polinomio di Alexander è il determinante della seguente matrice 3×3

$$\mathcal{A}\phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 - t & t & -1 \\ -1 & 1 - t & t \\ t - 1 & -1 & 1 - t \end{pmatrix}$$

Risolvendo otteniamo $\Delta_N = t^2 - t + 1$. [132]

Nel 1969 Jonh Conway trova una tecnica per calcolare il polinomio di Alexander

di un nodo o un link mediante una relazione a matassa³⁷, una relazione tra il polinomio di un link e il polinomio di altri link ottenuti modificando i passaggi in una proiezione link dell'originale.



Fig. 178 - Diagrammi per la relazione matassa Conway.

Il polinomio di Alexander Δ_N di un nodo N può essere definito dalle relazioni di Alexander-Conway:

(i) Se N è un nodo banale allora $\Delta_N = 1$

(ii) $\Delta_{(L_+)} - \Delta_{(L_-)} + \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \Delta_{(L_0)} = 0 \Rightarrow \Delta_{\Delta_{(L_0)}(\text{scindibile})} = 0.$

L_+ , L_- e L_0 sono tre link che differiscono solo in un incrocio, come mostrato in figura X. Il fatto che questo polinomio è un invariante nodo/link può essere mostrato facilmente verificando che sia invariante sotto Reidemeister mosse, dove L_+ , L_- e L_0 corrispondono a N_+ , N_- e N_0 .

Considerando un nodo N, ed un incrocio del nodo, si chiama N_+ il nodo in cui l'incrocio è 'positivo' e N_- il nodo con incrocio "negativo".

Calcolare il polinomio per un nodo comporta l'applicazione ripetuta di una relazione a matassa fino ad ottenere un insieme di nodi banali (o altri nodi i cui polinomi siano stati precedentemente determinati). Ad ogni passo, è consentita una qualsiasi sequenza di movimenti di Reidemeister.

Quindi, per induzione, si dimostra che i legami scindibili con qualsiasi numero di componenti hanno il polinomio di Alexander uguale a zero.

Le relazioni di Alexander-Conway permettono di calcolare in maniera induttiva il

³⁷ Il concetto di relazione a matassa (skein relation) fu introdotto da John Merton Conway [45], essa considera tre incroci o allacciamenti orientati, e consiste in una relazione tra funzionali definiti su un insieme di diagrammi di nodi che differiscono solo localmente.

polinomio, dal momento che qualsiasi nodo può essere trasformato nel nodo banale con un numero finito di cambi nel diagramma. [142], [53]

ESEMPIO 4.4. (nodo Trifoglio)

$$\begin{aligned} \Delta_{trefoil} &= \Delta_N - \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \Delta_{N_2} = 1 - \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \left(\Delta_{N_3} + \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \Delta_{N_4}\right) = \\ &= 1 - \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) \left(0 + \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)\right) 1 = t^{-1} - 1 + t. \end{aligned}$$

Il polinomio non distingue le immagini speculari: entrambe le versioni del trifoglio hanno il medesimo polinomio di Conway.

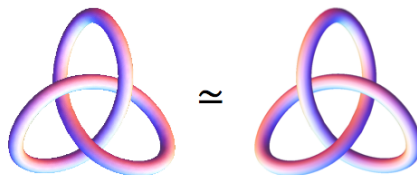


Fig. 179 - Immagini speculari del nodo trifoglio.

POLINOMIO DI JONES

Nel 1984 Vaughan F.R. Jones, durante una ricerca sulla teoria delle algebre di Von Neumann, scopre un nuovo polinomio per nodi orientati, il polinomio di Jones. [108]

Un nuovo e potente invariante polinomiale, quindi, per i nodi a più componenti, definito dalla relazione a matassa. [202]

Il polinomio di Jones V_N per un nodo N è un polinomio di Laurent in \sqrt{t} , [7] tale che:

- (i) Se N è un nodo banale allora $V_N(t) = 1$, qualunque sia l'orientamento di N .
- (ii) Per gli schemi a matassa L_+ , L_- ed L_0 , vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{t} V_{N_+} - t V_{N_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_0$$

- (iii) sostiene che se due diagrammi sono uguali tra di loro, tranne ad un

incrocio (dove uno passa “sopra” mentre l’altro passa “sotto”), si può modificare la formula “snodando” quell’incrocio; nella formula viene indicata solo la parte “diversa” dei due nodi.

Facendo riferimento a due relazioni:

$$V_{N_+}(t) = t^2 V_{N_-} + tzV_0$$

$$V_{N_-}(t) = t^{-2} V_{N_+} + t^{-1} zV_0$$

dove:

$$z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

PROPOSIZIONE 4.3.

Si hanno i seguenti fatti:

- 1) Dato un collegamento banale O_α , dotato α componenti, allora
- 2) $V_{O_\alpha} = (-1)^{\alpha-1} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\alpha-1}$
- 3) Se L è in link, si ha: $V_{L \sqcup O_1} = - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_L$ ³⁸
- 4) Dato un collegamento banale O_α dotato α componenti allora

$$V_{L \sqcup O_\alpha} = -(1)^\alpha \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^\alpha V_L$$

Valgono i seguenti fatti:

TEOREMA 4.4.

- 1) Siano N_1 ed N_2 due nodi, allora:

$$V_{N_1 \# N_2}(t) = V_{N_1}(t) \cdot V_{N_2}(t).$$

Siano N_1 ed N_2 due nodi, allora vale:

³⁸ Si indica con “ \sqcup ” unione e divisione dei link

$$2) V_{N_1 \cup N_2} = -\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{N_1} \cdot V_{N_2}$$

Indicando con $-N$ un nodo ottenuto invertendo l'orientamento di N , allora: $V_{-N} = V_N$.

Indicando con il simbolo N^* l'immagine speculare di N , allora

$$V_{N^*} = (V_N)^{-1}.$$

Se N è anfichirale, allora il suo polinomio di Jones è simmetrico.

Le prove della Prop. 4.6.1. e del Teorema 4.6.2. possono essere consultati in, lavori e libri. [142] [134]

ESEMPIO 4.4.

Nel caso del nodo trifoglio il polinomio di Jones è in grado di distinguere entrambe le versioni del nodo, ossia il trifoglio sinistro di equazione: $V = t^{-2} + t^{-1} \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-t^{-\frac{1}{2}} - t^{-\frac{5}{2}}\right) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ e quella del trifoglio destro con equazione $V = -t^4 + t^3 + t$.

Quindi possiamo concludere che il nodo trifoglio è chirale. (Fig.180)

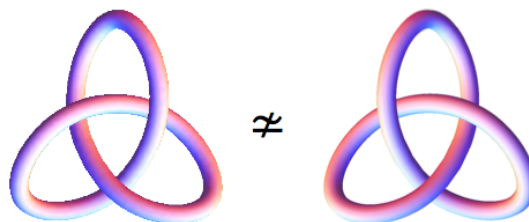


Fig. 180

Per approfondimenti confrontare [8] e [201]

PROPOSIZIONE 4.4.

Sia L un collegamento orientato con α componenti allora:

$$V_{L_1}(1) = (-2)^{\alpha-1}. [142]$$

Consideriamo il polinomio del nodo moltiplicato per $(t - 1)$, gli sottraiamo il

polinomio del nodo “inverso solo in un punto” moltiplicato per t e il risultato è un “*Skein relation*”.

OSSERVAZIONI 4.2.

Il polinomio di Jones è più potente poiché più selettivo del polinomio di Alexander-Conway.

Tuttavia, il metodo non risolve tutti i casi. Infatti alcuni semplici nodi composti, come il nodo quadrato e il nodo della nonna, hanno lo stesso polinomio di Jones.

POLINOMIO DI KAUFFMAN

Il polinomio che introdurremo di seguito, secondo la notazione combinatorica di Louis H. Kauffman, è rivolto ai nodi non orientati. [114] [157]

Consideriamo un nodo N ed un punto di incrocio, tale che \mathbb{R}^2 venga ripartito in quattro regioni come da figura 180 e dove partendo dalla posizione A si procederà in senso antiorario fino a raggiungere il punto simmetricamente opposto, anch'esso etichettato con la stessa lettera A.

L'*indicatore*, per il punto relativo all'incrocio, ricadrà quindi sulla scelta di A o di B.



Fig. 181 - Ripartizione del piano \mathbb{R}^2 Fig. 182 -Indicatore A e indicatore B

Uno “*stato*” S del nodo N è la scelta di un indicatore in corrispondenza di ogni incrocio di N .

La proiezione di N dà luogo a un insieme di curve semplici, chiuse e disgiunte

$\Gamma_S \in S^2$, dove $|S|$ indica il numero di curve in Γ_S . Si denotano con $a(S)$ e $b(S)$ il numero di indicatori A e B, per lo stato S, mentre con $c(N)$ si indica il numero degli incroci, o degli attraversamenti del nodo N .

Il numero degli stati per N sarà pari a $2^{c(N)}$.

Inizialmente Kauffman ha individuato un polinomio $\langle N \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$, dato da:

$$\langle N \rangle = \sum_S A^{a(S)} B^{b(S)} d^{|S|-1}$$

dove la somma si realizza su tutti i $2^{c(N)}$ possibili stati.

PROPRIETÀ 4.4. (del polinomio di Kauffman)

(i) $\langle \emptyset \rangle = 1$

(ii) $\langle \emptyset \sqcup N \rangle = d \langle N \rangle$, se N è non vuoto:

(iii) dato un nodo non orientato N e scelto un attraversamento dell'incrocio, siano D_A e D_B i diagrammi ottenuti da N collegando le due regioni A e B nell'incrocio, allora $\langle N \rangle = A \langle D_A \rangle + B \langle D_B \rangle$. [134]

Indicata con $w(N)$ il writhe (o torsione) del diagramma, ossia la somma dei segni dei punti doppi del nodo N , il polinomio di Kauffman è dato da:

$$\psi_N(A) = (-A)^{3w(N)} \langle N \rangle. [134]$$

TEOREMA 4.5.

Siano N_+ , N_- ed N_0 gli skein relation allora $\psi_N(0) = 1$. [56]

PROPOSIZIONE 4.4.

Il polinomio $\psi_N(A)$ è definito su classi di isotopia ambientale poiché risulta invariante per i movimenti di Reidemeister. [134] [112]

ESEMPIO 4.4. (nodo Trifoglio)

$$\psi_N(A) = (-2a^2 - a^4) + (a^3 + a^5)t + (a^2 + a^4)t^2$$

Una caratteristica fondamentale del polinomio di Kauffman è data dalla sua

complessità computazionale rispetto al numero degli attraversamenti del diagramma.

POLINOMIO HOMFLY

Facciamo infine un accenno sul polinomio di HOMFLY (HOMFLY-PT) [73], il cui nome deriva dalle iniziali dei suoi sei scopritori: J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. Freyd, W.B.R. Lickorish, D. Yetter.

Al momento sono conosciuti tre polinomi associati ai nodi: L'Alexander-Conway, quello di Jones e il polinomio HOMFLY, l'ultimo dei quali contenente come casi particolari i primi due.

L'approccio con il calcolo del polinomio HOMFLY-PT parte da uno schema di collegamento orientato e utilizza le seguenti regole (relazioni a matassa):



Fig. 183

dove L_+ , L_- , e L_0 sono diagrammi di collegamento, e sono identici, ad eccezione nell'intorno dell'incrocio in cui si differenziano secondo gli schemi riportati in figura 183.

Il polinomio Homfly di un link orientato L , indicato con $P_L(l, m)$, può essere definito con i seguenti assiomi:

- 1) $P_L(l, m)$ è un invariante per isotopia ambientale di L nelle due variabili l ed m (verifica le mosse di Reidemeister).
- 2) Se L è il nodo banale allora $P_L(l, m) = 1$
- 3) $l \cdot P_{(L^+)}(l, m) + l^{-1}P_{(L^-)}(l, m) + m \cdot P_0(l, m) = 0$

esplicitando:

$$l \cdot P(\text{link with crossing}) + l^{-1} P(\text{link with crossing}) + m \cdot P(\text{link with loop}) = 0$$

Con un opportuna scelta delle variabili, si può avere:

$$(i) \quad a \cdot P_{(L^+)}(l, m) - a^{-1} \cdot P_{(L^-)}(l, m) = z \cdot P_0(l, m).$$

$$(ii) \quad \alpha^{-1} \cdot P_{L^+}(l, m) - \alpha \cdot P_{(L^-)}(l, m) = z \cdot P_0(l, m).$$

(iii) Utilizzando tre variabili posso scriverlo nella seguente forma:

$$x \cdot P_{(L^+)}(l, m) + y \cdot P_{(L^-)}(l, m) + z \cdot P_0(l, m) = 0.$$

PROPRIETÀ 4.5.

(1) Se L è la somma connessa dei link L_1 ed L_2 , allora:

$$P_L(l, m) = P_{(L_1 \# L_2)}(l, m) = P_{(L_1)}(l, m) P_{(L_2)}(l, m).$$

(2) Se L è l'unione disgiunta dei link L_1 e L_2 allora, si ha:

$$P_L(l, m) = \frac{-(l + l^{-1})}{m} P_{(L_1)}(l, m) P_{(L_2)}(l, m)$$

(3) Se L^s è l'immagine speculare di L , allora: $P_{L^s}(l, m) = P_L(l^{-1}, m)$.

Dimostrazione: Facile da provare.

Per approfondimenti si veda [73], [157] e [128].

ESEMPIO 4.5.

Il polinomio di HOMFLY nel caso del nodo trifoglio è il seguente:

$$P_L(l, m) = (2l^2 - l^4) + l^2 m^2.$$

Anche se il polinomio di Kauffman sembra essere equivalente, sotto opportune ipotesi, al polinomio di HOMFLY, per l'identificazione di un nodo, vi sono comunque nodi che il polinomio di HOMFLY riesce a distinguere a differenza del polinomio di Kauffman. [203] [113]

Questo polinomio rileva la chiralità dei nodi, ma non le diverse strutture dei nodi speculari non sovrapponibili pertanto non è un invariante completo. [80]

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA



UNIVERSITA' DELLA CALABRIA

Dipartimento di FISICA

Scuola di Dottorato Archimede

Indirizzo: Scienze e Tecnologie dei Sistemi Complessi

Settore Scientifico Disciplinare MAT/02

CAPITOLO V

della

Tesi di Dottorato

*Recenti sviluppi dell'Algebra e della Geometria
Computazionale nell'Arte e nella Comunicazione.*

Vincenzo Iorfida

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

INDICE

5.1 - Aspetti didattici della Geometria Algebrica	p. 162
5.2 - Aspetti didattici	p. 162
5.3 - Aspetti multidisciplinari	p. 164
5.4 - Linee guida per una attività didattica	p. 171
5.5 - Appendice _____	p. 179
BIBLIOGRAFIA _____	p. 181

Capitolo quinto

ASPETTI DIDATTICI DELLA GEOMETRIA ALGEBRICA

In questo capitolo, annesso alla tesi, sono proposti alcuni elementi di geometria algebrica legati allo studio delle ipersuperfici, indispensabili per trasmettere attraverso la comunicazione scientifica argomenti di fisica moderna, di non facile comprensione se non supportati da opportune strategie adeguate per la didattica. [171] [129] [140] [150] [160]

Inoltre sono delineate dal punto di vista storico-filosofico alcune varietà algebriche note in fisica quali le varietà delle di Calabi-Yau.

5.1. - ASPETTI DIDATTICI

Nella storia della scuola italiana, in ogni tipo di formazione culturale, la geometria ha ricoperto un ruolo fondamentale benché il suo insegnamento abbia subito numerosi sconvolgimenti nei programmi ministeriali dal 1870 ad oggi³⁹.

La geometria è un passaggio fondamentale per ogni tipo di formazione curricolare di ogni persona, nonché per lo studio e la comprensione dello spazio che ci circonda, sia a livello macroscopico che microscopico o meglio a livello subatomico, oltre ad essere uno dei più complessi edifici concettuali sviluppati dall'uomo. [147]

Certamente la geometria euclidea, pensata come scienza esatta per antonomasia oltre che per i contenuti anche per il metodo, è la più indicata per le applicazioni

³⁹ Tra le più importanti: legge Coppino (1867), riforma Gallo (1900), riforma Gentile (1923), legge Bottai (1940).

“pratiche” sia per la sua maggiore semplicità, sia perché lo studio della fisica assicura che non vi siano discordanze apprezzabili fra i dati rilevabili con gli strumenti a nostra disposizione e i risultati che si ottengono applicando le leggi della geometria di Euclide.

Infatti gli Elementi di Euclide conservano, ancora oggi, il loro valore 2300 anni dopo la loro scrittura, così come anche le dissertazioni di Hilbert vengono ristampate oggi dopo più di un secolo.

Tuttavia esperienze sofisticate hanno avvalorato la teoria generale della relatività e il fatto che quando entrano in gioco distanze di ordine astronomico è più conveniente adoperare la geometria di Riemann (ellittica). [5] [121] [127]

Le geometrie non euclidee hanno imposto pertanto il superamento del sogno, condiviso dai matematici e dai filosofi razionalisti, da Platone a Kant⁴⁰, che possa esistere una conoscenza perfetta e sicura. [149][155]

In un discorso pronunciato all'Accademia di Berlino nel 1921, A. Einstein asseriva *“La matematica in generale e la geometria in particolare debbono la propria esistenza al nostro bisogno di conoscere qualche cosa sulla maniera di essere degli oggetti reali. La parola geometria, che significa misura del terreno, ne è la conferma”*

È ovvio che la matematica, partendo da concetti elementari, costruisce strutture sempre più complesse come l'insieme, lo spazio topologico, lo spazio metrico, le varietà differenziabili, le varietà algebriche ed altre.

Inoltre, “la geometria” consegna una immediata chiave di lettura attraverso un sottile parallelismo tra il mondo scientifico e il mondo dell'arte, tra l'evoluzione del pensiero scientifico e del pensiero artistico. [42]

L'utilizzo di software e di ambienti di programmazione consente ai docenti di progettare e sperimentare attraverso una forma dinamica di didattica resa “attiva” da un processo di ottimizzazione costante e quindi in continua evoluzione.[22]

Tale percorso genera nuovi stimoli nel processo di apprendimento dei discenti

attraverso una nuova didattica circolare, arricchita di stimoli e aperta anche al confronto con docenti di altre discipline che riflettono su analoghe questioni. [1] In tale processo la figura ed il ruolo del docente è certamente quello di progettista della formazione attraverso un insegnamento efficiente ed efficace. È fondamentale sensibilizzare il discente a prendere coscienza di ciò che c'è dietro l'attività che sta svolgendo ed il proprio modo di apprendere (metacognizione), puntando anche sulla comunicazione al di fuori della classe con gli altri insegnanti e con la comunità scientifica. [21]

L'esperienza dell'apprendimento delle discipline scientifiche ha permesso e permette a chi le vive una elaborazione critica e profonda della realtà.

Ma ciò che occorre evidenziare, nel nostro caso, è come la matematica moderna (o avanzata) si occupi principalmente di oggetti multidimensionali rifacendosi ad una generalizzazione di concetti geometrici astratti per poi applicarli ad ogni ramo delle scienze, dell'ingegneria e della tecnologia in genere. [25]

In questo capitolo si cercherà di mettere a fuoco alcuni aspetti di geometria algebrica, legati allo studio delle ipersuperfici, indispensabili per trasmettere attraverso la comunicazione scientifica argomenti di fisica moderna, altrimenti complessi e di difficile comprensione se non supportati da opportune strategie adeguate anche per la didattica da trasferire nei licei. [90] [91]

5.2. - ASPETTI MULTIDISCIPLINARI

Fra tutte le teorie scientifiche nate nel secolo scorso sono poche quelle che hanno contribuito a modificare la concezione della natura e della vita quotidiana quanto la Meccanica Quantistica e la Relatività.

La Meccanica Quantistica e la Relatività sono i due pilastri su cui oggi si fonda la comprensione dei principi e quindi la conoscenza del mondo fisico e dell'universo che ci circonda. [165][15]

Malgrado ciò, le due teorie sono ancora formalmente incompatibili e la loro mutua relazione costituisce forse il principale mistero della fisica contemporanea oltre ad essere una delle principali sfide scientifiche.

Da un lato, la Teoria della Relatività ha operato un radicale cambiamento della concezione di tempo e di spazio, costringendo a ragionare in termini di uno spaziotempo "indiviso" piuttosto che di due entità distinte fisicamente e concettualmente.[106] [77]

Dall'altro, la Meccanica Quantistica ha rovesciato il modo di interpretare la realtà deterministica ed ha introdotto la necessità di ricorrere a delle interpretazioni probabilistiche legate al concetto di "indeterminazione".

Uno dei tentativi di combinare la Meccanica Quantistica e la Relatività Speciale di Einstein prende il nome di Teoria Quantistica dei Campi. [143]

Tuttavia, anche questa teoria presenta problematiche di fondo non ancora risolte: i suoi fondamenti matematici non sono ancora stati chiariti. Il rapporto tra la richiesta di località della Relatività Speciale e il carattere non-locale della Meccanica Quantistica rimane un mistero. Il programma di unificazione con la Relatività Generale non è completo.

La ricerca di un sodalizio tra Meccanica Quantistica e Relatività ha avuto molto successo sul lato pratico, ma è sempre stato problematico. Come dimostrano diversi progetti e filoni di ricerca (ad es. il network "*Fundamental Problems in Quantum Physics*", finanziato dal programma COST dell'Unione Europea, 2011) rimane una costante tensione tra le due teorie, ancora lontana dall'essere risolta.

Un settore della ricerca molto studiato ma non ancora compreso a fondo è il confine tra il micromondo quantistico delle particelle e degli atomi e il macro-mondo classico dell'esperienza quotidiana.

In questo confine si trovano sistemi, tipicamente molecole di grosse dimensioni, che sono troppo complessi per essere studiati tramite la meccanica quantistica, ma allo stesso tempo troppo piccoli per comportarsi come oggetti classici; sono sistemi a cavallo tra l'essere puramente quantistici e l'essere di fatto classici. La grossa sfida è di elaborare modelli matematici che tengano conto di queste caratteristiche. Oltre all'interesse teorico, fondamentali sono le implicazioni dal punto di vista tecnologico. [72]

L'epoca in cui viviamo è caratterizzata da un costante sviluppo scientifico e tecnologico, di difficile o addirittura impossibile comprensione da parte delle persone comuni.

Lo sviluppo diacronico delle discipline scientifiche, inoltre, è generalmente legato alla loro inevitabile specializzazione: man mano che una disciplina si sviluppa, è facile che essa diventi sempre meno comprensibile per i non specialisti. Non è difficile immaginare cosa succede se ci riferiamo a chi addirittura non appartiene al campo scientifico.

Il punto su cui riflettere è dunque che, sebbene la conoscenza avanzi, avanza anche la disinformazione verso qualsiasi fenomeno che non appartenga strettamente al proprio campo di studi.

Nasce da qui l'esigenza di affiancare la comunicazione scientifica, atto di scambio e di diffusione nell'ambito della comunità scientifica dei risultati acquisiti e delle scoperte raggiunte, alla divulgazione, diretta invece a raggiungere con un linguaggio più "semplice" un pubblico molto ampio, con caratteristiche culturali disomogenee, come quelle che possono riscontrarsi nel mondo umanistico, industriale, economico e così via.

Da una "sperimentazione" fatta in un'aula universitaria è emerso, senza molto stupore, che per i discenti del primo anno di corso, pur essendo stati abituati nella scuola secondaria a trattare, in più discipline, tematiche riguardanti la quarta dimensione, non è del tutto banale immaginare una sfera quadridimensionale.

Pertanto, si è deciso di sperimentare un metodo per la fruizione di alcuni concetti scientifici complessi a ragazzi della scuola superiore attraverso l'ausilio di nuove tecnologie a supporto dell'attività didattica e quindi di aggiornamento per i docenti di matematica e fisica.

Tra i tanti pacchetti informatici si è deciso di utilizzare Mathematica, un software utilizzato nella ricerca scientifica e tecnologica che, per la sua completezza, vanta milioni di utenti dedicati nella comunità educativa mondiale di ogni ordine e grado.

Un esempio di esperienza didattica è quella della trattazione delle varietà delle superfici di Calabi-Yau. [37][123]

Si è scelto questo tema in quanto negli ultimi anni la ricerca delle superfici su $K3$ ⁴¹ e delle varietà di Calabi-Yau ha prodotto notevoli progressi in Geometria Algebrica [102], anche se la loro completa classificazione e descrizione rappresenta ancora un problema aperto, caratterizzando, a sua volta, una parte della fisica teorica, in particolare la teoria delle stringhe. [84]

Il tema è senza dubbio tra i più affascinanti.

Le varietà (o spazi) di Calabi-Yau rappresentano una classe di miriadi di spazi possibili che vengono utilizzati in fisica moderna (all'interno della teoria delle stringhe) per studiare “*quali universi siano possibili*”.

Ovviamente, poiché alcuni elementi della teoria generale della relatività così come vari cenni sulla meccanica quantistica rientrano nei programmi ministeriali degli Istituti di istruzione superiore di secondo grado, molte volte ci si è trovati a confrontarsi su tematiche come la teoria delle stringhe le quali si estendono in dimensioni extra, in uno spazio multidimensionale le cui forme geometriche sono rapportabili a quelle delle varietà di Calabi-Yau, o dei mondi paralleli posti uno accanto all'altro e di eventuali teorie unificatrici. [98]

Certamente il modo con cui le cose cambiano, quando osserviamo la natura da un punto di vista microscopico, è sconvolgente e lo è ancora di più quando si scopre che la casualità governa le leggi fisiche su una scala dell'ordine di 10^{-34} m (detta lunghezza di Planck).

Ed è proprio qui che entrano in gioco le stringhe come piccoli filamenti di massa/energia in perenne oscillazione, aventi forma unidimensionale poiché intese prive di spessore.

Non ci troviamo più di fronte a particelle puntiformi bensì a filamenti la cui forma può essere rappresentata da “*anelli chiusi o aperti*” e dove i differenti modi di vibrazione, legati alla frequenza e alla quantità di energia, generano particelle di diverso tipo quali quark, elettroni, fotoni, e così via. Da qui la formazione di una

⁴¹ *In geometria algebrica differenziale lo spazio $K3$, o la superficie $K3$, è la varietà di Calabi-Yau di dimensione minore. L'acronimo fu dato da André Weil in onore ai tre geometri algebrici Kummer, Kähler e Kodaira.*

varietà di particelle più o meno pesanti ed essenzialmente legate alla particolarità della struttura dello spazio.

La teoria delle stringhe rappresenta senza dubbio un modello preciso dello spaziotempo.

Questa nuova tipologia di spazio composta da sei extra-dimensioni compattate, ripiegate su se stesse a livello microscopico, era già preesistente alla teoria delle stringhe. Infatti, Theodor Kaluza aveva già proposto un modello spaziotemporale pentadimensionale in cui le dimensioni spaziali non erano tre⁴² ma quattro, tre estese e una compattata, arrotolata su se stessa, dove le onde elettromagnetiche sono curvature di questa quarta dimensione spaziale “*dotata della topologia del cerchio*”.

Theodor Kaluza e Oskar Klein osservarono come tali dimensioni, nonostante non fossero facilmente rilevabili, potevano sortire un effetto sul mondo, così come viene percepito. All’inizio del secolo scorso, pensarono che la gravitazione di Einstein e l’elettromagnetismo di Maxwell fossero manifestazioni di una stessa teoria.

Una generalizzazione dello spazio pensato da Kaluza-Klein ci proietta fino ad uno spazio a dieci dimensioni in cui esistono le stringhe.

Uno spazio in cui, oltre alle quattro dimensioni dello spaziotempo, esistono ulteriori sei dimensioni, quindi uno spazio esadimensionale, in una scala dell’ordine della lunghezza di Planck. [205]

Il modo in cui tali extradimensioni spaziali si possono compattificare genera diversi spazi. Le dimensioni extra hanno particolari forme geometriche. Inoltre, se si considera per ogni punto dello spazio esteso una varietà di Calabi-Yau, questo aumenta il grado di libertà delle stringhe. [37][32]

Nel nostro universo queste dimensioni nascoste hanno la forma che può essere rappresentata dalle varietà di Calabi-Yau, la cui costruzione si basa su coppie di politopi riflessivi. [60]

⁴² Si fa riferimento al fatto che fu proprio A. Einstein ad introdurre la componente temporale (la quarta dimensione) nel tentativo di unificare gravità ed elettromagnetismo.

Quando più stringhe interagiscono queste formano una fitta rete di “anelli”, detti tori, che intersecandosi o meglio fondendosi gli uni con gli altri formano strutture topologiche complesse, dove il numero dei tori e le proprietà geometriche dei nodi entrano in stretta simbiosi.

Molteplici sono le potenzialità del calcolatore nel processo educativo. Esistono altri strumenti tecnologici, come la realtà virtuale, che hanno ancora delle potenzialità tutte da scoprire in ambito didattico e formativo⁴³. Questo si traduce nell’offrire nuove possibilità allo sviluppo dei percorsi educativi basati sull’apprendimento collaborativo. È ormai una realtà la comunicazione e la collaborazione tra scuole di diverse regioni, ma anche di diverse nazioni. Certamente l’impresa che ci siamo proposti è ardua ma non impossibile.

Per far comprendere le idee e gli obiettivi della Teoria delle stringhe ai ragazzi delle scuole secondarie è fondamentale un processo di metabolizzazione di tutti quei concetti che hanno consentito un processo evolutivo alla Fisica dai tempi di Newton ad oggi.

Ma come introdurre tale tematica? E quale percorso intraprendere per trattare alcuni argomenti legati alla fisica moderna nella scuola?

Certamente non è immediato ma è fondamentale far riscoprire all’interno di un percorso didattico multidisciplinare come partendo da Newton e da come egli attinse alle leggi della caduta di gravi, scoperte da Galileo, e come successivamente interpretò tali scoperte con quelle del moto dei pianeti scritte da Keplero, per poi sviluppare la legge sulla gravitazione universale.

Un passaggio fondamentale che porta all’introduzione di un nuovo processo innovativo e metodologico è il calcolo infinitesimale, fondamento della moderna analisi matematica, attraverso il quale si perviene ad una visione dinamica della geometria, mutata dalla fisica del moto.

E proprio per questo bisogna partire da Newton il quale, nella sua opera *Principia Mathematicae* del 1687, spiega come il principio di gravità governa il moto dei

⁴³ [N. SALA, *From The Virtual Reality To The Virtual Cities, Proceedings of 4th International Conference on New Educational Environments (ICNEE 2002), Lugano, Switzerland (2002 in stampa).*]

pianeti nel sistema solare, il moto della Luna attorno alla Terra e la gravità terrestre. [18]

L'opera di Newton è ormai universalmente accettata come punto di partenza dello sviluppo moderno della meccanica, fino ad approdare a James Clerk Maxwell il quale dimostrò come elettricità e magnetismo sono soltanto aspetti differenti di un singolo fenomeno chiamato elettromagnetismo giungendo, casualmente, alla scoperta delle onde elettromagnetiche "*in quanto luce*". E poi Einstein che, con la teoria della Relatività Generale, geometrizza una forza, quella di gravità, come una curvatura nella struttura dello spaziotempo e, oltre a salvaguardarne i risultati di Newton, spiega il comportamento della gravità.

5.3 - LINEE GUIDA PER UNA ATTIVITÀ DIDATTICA

L'utilizzo del software permette di sperimentare e comprendere la struttura della teoria partendo dalla creazione delle immagini. Tale affermazione è avvalorata dalle attività didattiche realizzate, alcune delle quali proposte anche in questo lavoro di tesi, in diversi Istituti di istruzione secondaria superiore.

I discenti interessati hanno mostrato particolare apertura verso questa forma di sperimentazione didattica, sia per l'aspetto interdisciplinare che per quello innovativo, scoprendo *un mondo affascinante ma spesso controintuitivo e complesso oltre che imprevedibile e sorprendente*.

Altresì, tale sperimentazione consente al docente di poter raggiungere obiettivi disciplinari importanti e di poter trattare tematiche moderne senza perderne il rigore o l'aspetto, altrettanto importante, filosofico-epistemologico per il quale la predisposizione, l'apprezzamento e il grado di attenzione dei ragazzi è sempre alto.

L'utilizzo del software Mathematica, come ambiente di calcolo simbolico e numerico, prevede oltre alla conoscenza della propria sintassi anche la conoscenza dei contenuti propri della disciplina.

Pertanto l'utilizzo di tale software non si vuole sostituire in alcun modo alle conoscenze, alle competenze e alle abilità previste per ogni tematica da affrontare.

Ovviamente, il tutto va rapportato in base agli obiettivi che ci si è prefissati.

Un'elegante opportunità didattica in termini di interazione tra fisica teorica e geometria algebrica è la trattazione degli spazi di Calabi-Yau attraverso la Teoria delle stringhe e di alcuni modelli matematici multidimensionali preposti. [5]

L'introduzione di tale argomento avviene attraverso la spiegazione del sistema multidimensionale che prevede delle extradimensioni spaziali che sono avvolte, o meglio dette compatte⁴⁴, con dimensione dell'ordine della lunghezza di Planck, e con una scala di compattezza la cui ampiezza potrebbe anche essere pari a quella della Via Lattea.[120]

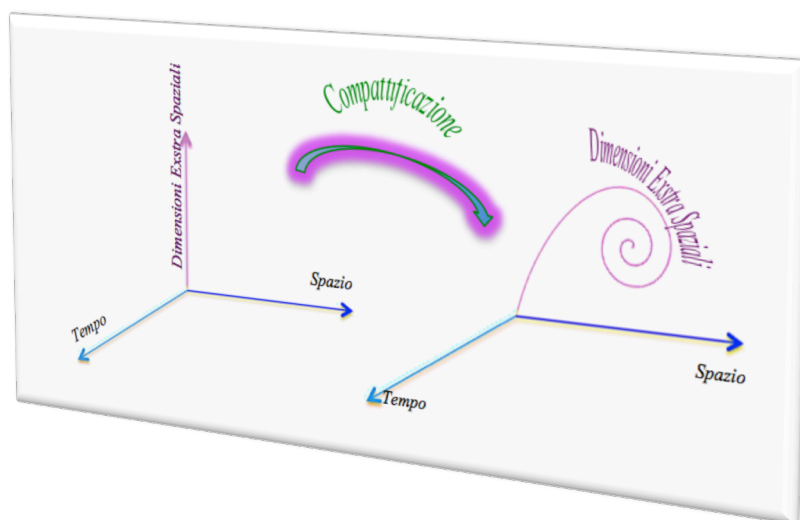


Fig. 184 - Compattezza. In pratica, le dimensioni aggiuntive sono in una scala a noi non percepibile, come avviene quando si osserva un sottile filo da lontano che appare lineare ma che invece ha dimensionalità. Non è stato determinato soltanto il numero delle dimensioni extra (sei) ma anche le loro forme dette spazi di Calabi-Yau in onore dei due matematici che ne studiarono le proprietà.

La compattezza dello spazio conferisce una serie di caratteristiche che è possibile riscontrare sulle dimensioni visibili o meglio nelle singole particelle. [204]

Questo concetto può essere semplificato riferendosi, ad esempio, al caso dello spazio bidimensionale, dove la forma dello spazio (dovuta alla compattezza)

⁴⁴ Le sei extradimensioni sono arrotolate e formano toroidi esadimensionali detti spazi di Calabi-Yau.

influenza i modi di vibrazioni delle stringhe, evidenziando come una stringa avvolta attorno ad una 2-sfera avrà proprietà differenti a quelle di una stringa avvolta ad un toro⁴⁵; anche se non sempre è possibile analizzarle da un punto di vista topologico⁴⁶.

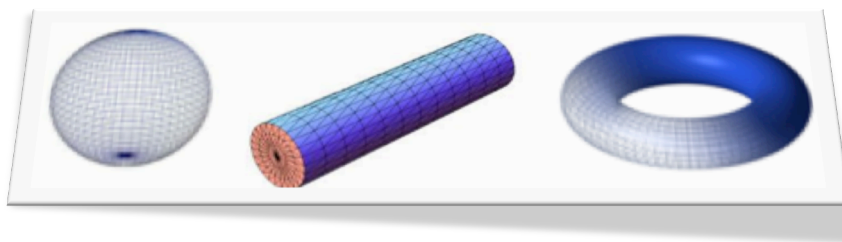


Fig. 185

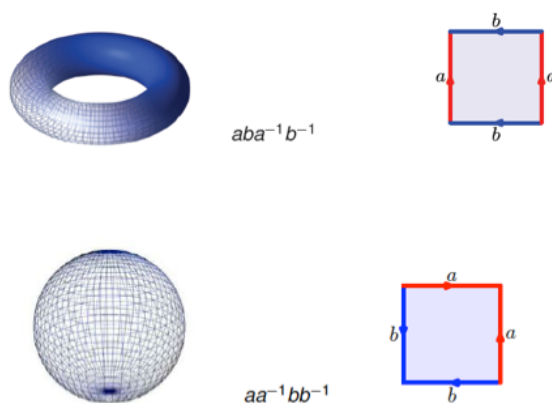


Fig. 174

A dimensioni superiori è ovvio che l'esempio potrebbe diventare più complesso da un punto di vista dei contenuti topologici, anche se la tecnica rimarrebbe la stessa e la classificazione di oggetti topologici equivalenti continuerebbe a

⁴⁵ Nel primo caso si parlerà di particella pesante mentre nel secondo di particella leggera, anche se vi sono infiniti cammini che una stringa può effettuare.

⁴⁶ La 2-sfera ed il toro sono topologicamente differenti, mentre la 2-sfera ed il cilindro sono topologicamente identici.

dipendere dalla caratteristica di Eulero $\chi = V - E + F$, come riportato nella tabella 5.1. (Fig.186)











Name	Image	V	E	F	$\chi = V - E + F$
Hexahedron or Cube		8	12	6	2
Tetrahedron		4	6	4	2
Great Icosahedron		12	30	20	2
Sphere		4	6	4	2
		6	12	8	2 (see image)
		8	18	12	2
		10	24	16	2
Interval		2	1	0	1 (see image)
		3	2	0	1
		4	3	0	1
Disk		2	3	2	1 (see image)
		3	5	3	1
		4	7	4	1
		5	9	5	1
Circle		2	2	0	0 (see image)
		3	3	0	0
		4	4	0	0
		5	5	0	0
Torus (Product of 2 Circles)		0	2	2	0
Double Torus		0	4	2	-2
Triple Torus		0	6	2	-4

Fig. 175 - Tab. 5.1. da universe-review.ca/R15-27-Euler2.htm

Le varietà di Calabi-Yau sono ipersuperfici in varietà toriche in termini di politopi riflessivi (si rinvia a quanto riportato in Appendice). [32] [34] [177] [186]
Tali politopi in due dimensioni vengono detti poligoni di Fano.⁴⁷ [36]

⁴⁷ Gino Fano, matematico italiano nato nel 1871 che ha studiato la relazione tra geometria e algebra moderna.

Lo studio di questi politopi ha radici nella teoria delle stringhe, al fine di costruire collettori di Calabi-Yao, i cui spazi geometrici possono modellare dimensioni extra del nostro universo.

Infatti, verso la fine del 1990, i due fisici teorici M. Kreuzer e H. Skarke elaborarono una descrizione dettagliata dei politopi riflessivi a tre e a quattro dimensioni.

Attraverso la teoria delle stringhe è possibile generalizzare la rappresentazione dell'idea di Kaluza e Klein fino a consentire di strutturare molti altri universi con caratteristiche differenti per forma e dimensioni. [120]

Tale attività didattica permette di comunicare e quindi di trasmettere concetti di elevata complessità, senza necessariamente addentrarsi in contenuti specialistici, ad allievi che non sempre riportano un adeguato livello di conoscenze che ne permettono la *comprensione*, come ad esempio il legame tra il tipo di strutture geometriche e topologiche che caratterizzano lo spaziotempo e le dinamiche delle particelle che vivono alla scala quantica. [204] [173] [174] [198] [199]

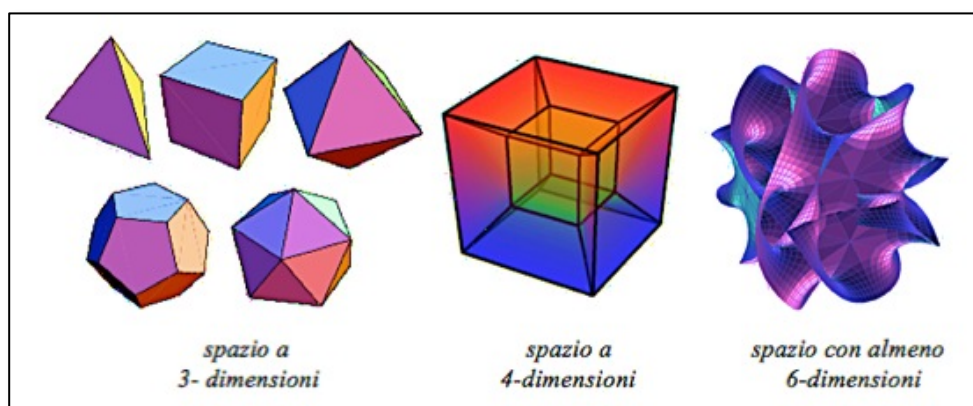


Fig. 187 - Rappresentazione in sintesi dell'interpretazione storica del concetto di spazio fisico a partire dai solidi platonici allo spazio-tempo di Minkowski fino agli spazi di Calabi-Yau. Immagini riprodotte con il software Mathematica - Wolfram ©.

Il passaggio successivo riguarda la costruzione attraverso l'utilizzo del linguaggio di programmazione di una varietà di Calabi-Yau a partire dalla costruzione dei poligoni di Fano per poi realizzare dei politopi in dimensione superiore. Tale attività è presentata in una serie di esercitazioni propedeutiche, per le quali si

rimanda al sito (www.unimat.altervista.org), dove gli aspetti didattici e le esercitazioni sono stati investigati dall'autore e sono raccolti in "Applicazioni di Mathematica alla Geometria by Vincenzo Iorfida".

A questo punto possiamo far vedere come è possibile generare una varietà threefolds[4] Calabi-Yau⁴⁸ attraverso politopi riflessivi.

Il doppio tetraedro, che ha cinque vertici e sei facce, rappresenta un semplice esempio per costruire un collettore Calabi-Yau.[126] [17]

ESEMPIO 5.1.

Utilizzando un politopo i cui vertici sono dati da:

(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), e (-1,-1,-1,-1)

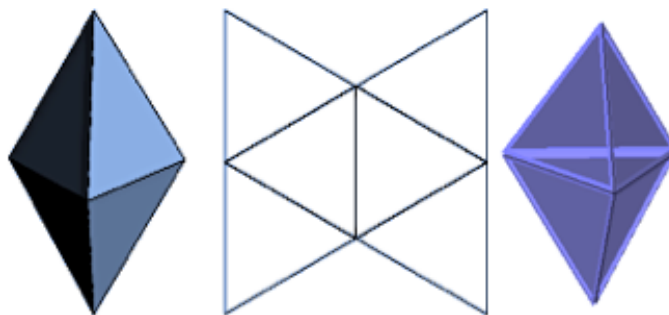


Fig. 188

può essere descritto dal polinomio di quinto grado del tipo:

$$z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + 1 = 0 [10]$$

⁴⁸ Ossia le varietà di Calabi-Yau di dimensione tre, mentre alcuni esempi di varietà di Calabi-Yau in dimensione uno possono essere rappresentate con le curve ellittiche, e in dimensione 2 con Superfici K3. [16]

Di seguito sono presentate alcune sezioni della quintica, create con il software Mathematica - Wolfram ©.

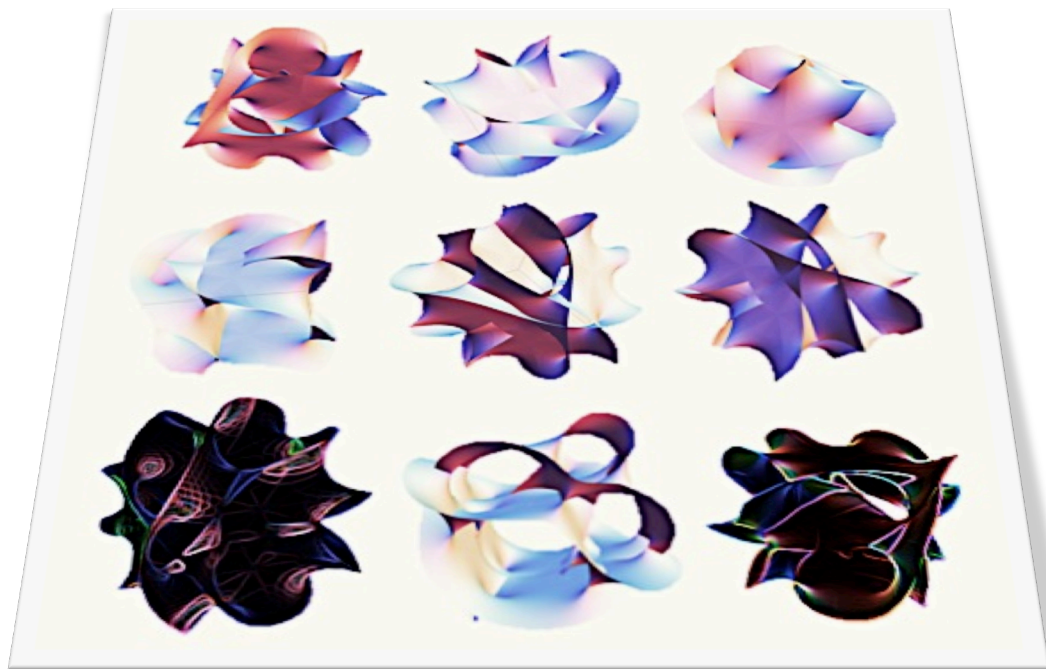


Fig.189 – Proiezione 3D di una sezione della quintica Calabi-Yau three-fold. Immagine riprodotte con il software Mathematica - Wolfram ©, V. Iorfida ©.

In arte il fascino dello scenario fisico-matematico, come quello di uno spazio di Calabi-Yau, ha indotto alla riflessione e alla ricerca nonché alla descrizione visiva di paesaggi quantici. Se ne forniscono alcuni esempi.



*Fig.190 - Richard David Serros,
Calabi Yau, © 2014*



*Fig.191 - Popescu Florinel Pentagos,
Calabi Yau, ©2014*



*Fig. 192 - ©Stewart Dickson - Calabi-Yau Manifold,
Stereolithograph*

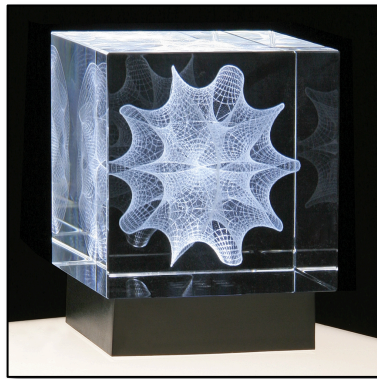


Fig. 193- © 2014 Scientifics Direct, Inc

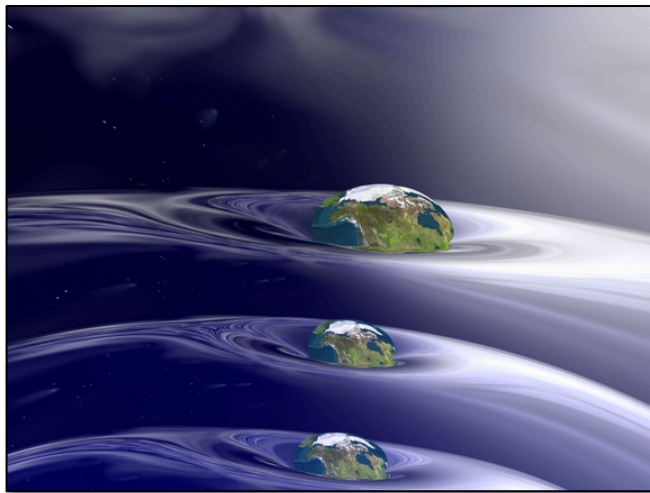


Fig. 194- Illustrazione artistica del concetto di universi-membrana che fluttuano in uno spazio multidimensionale, by Shutterstock/Sandy MacKenzie



Fig. 195- Il passaggio dai solidi platonici agli spazi multidimensionali, rappresentazione artistica creata da V. Iorfida ©

5.4. - APPENDICE

DEFINIZIONE 5.1.

Un politopo convesso P in uno spazio vettoriale V di dimensione finita è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti (ovvero il sottoinsieme convesso minimo di V che contiene tutti questi punti).

Il politopo P è detto integrale se è l'involuppo convesso di punti in un reticolo e la dimensione di P è la dimensione del sottospazio generato da $\{v_1 - v_2, t.c. v_1, v_2 \in P\}$. [63] [69]

DEFINIZIONE 5.2.

Assumiamo che P sia n dimensionale e che contenga l'origine nel suo interno. Dati i politopi convessi⁴⁹ P_1, \dots, P_k in V , possiamo creare un nuovo politopo prendendo l'involuppo convesso di $P_1 \cup \dots \cup P_k$ denotato con $conv(P_1, \dots, P_k)$. Possiamo inoltre definire la loro somma di Minkowski come

$$P_1 + \dots + P_k = \{v_1 \dots v_k, t.c. v_i \in P_i\}.$$

Sia $kP = P + \dots + P$ (k volte), allora avremo che $kP = \{kv, t.c. v \in P\}$ dato che P è convesso. Una faccia F (propria) di P è l'intersezione di P con un iperpiano affine di supporto:

$$F = \{v \in P t.c. \langle u, v \rangle = r\}$$

dove $u \in V^*$ è una funzione con $\langle u, v \rangle \geq r \forall v \in P$, $r \in \mathbb{R}$.
 P viene considerato una faccia di se stesso.

DEFINIZIONE 5.3.

Per un politopo convesso P , l'insieme polare o semplicemente il polare di P è definito come:

$$P^0 = \{u \in V^* t.c. \langle u, v \rangle \geq -1 \forall v \in P\}.$$

Per una faccia F di P abbiamo la faccia polare (faccia di P^0)

⁴⁹ Vedi anche [88] [93] e [96]

$$F^* = \{u \in P^0 \text{ t. c. } \langle u, v \rangle = -1 \forall v \in F\},$$

si dimostra che polare è ancora un politopo.

ESEMPIO 5.2.

Se P è l'involuppo convesso dei punti $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, dato da un cubo, avremo che P^0 è l'involuppo convesso dei punti $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$, ovvero l'ottaedro.

DEFINIZIONE 5.3.

Un politopo integrale P è detto *riflessivo* se e solo se P^0 è integrale. Per di più poiché P^0 è riflessivo se e solo se $P = (P^0)^0$ è integrale, abbiamo che P è riflessivo se e solo se P^0 è riflessivo.

La varietà torica associata a un politopo riflessivo viene detta di Fano.

ESEMPIO 5.3.

Assegnato P con i vertici $F_0 = (-1, -1)$, $F_1 = (2, -1)$, $F_2 = (-1, 2)$ e

P^0 con i vertici $G_0 = (0, 1)$, $G_1 = (1, 0)$, $G_2 = (-1, -1)$.

Allora P e P^0 sono entrambi politopi riflessivi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Accascina, G., Anichini, G., Anzellotti, G., Rosso, F., Villani, V., Zan, R., *La Matematica per le Altre Discipline Prerequisiti e Sviluppi Universitari*, Notiziario U.M.I., Anno XXXIII, 1, Bologna, 2006.
- [2] Adams, C., *The knot Book: An Elementary Introduction to the Theory of Knots*, New York: Freeman, 1994.
- [3] Adams, W.W., and Loustaunau, P., *An Introduction to Gröbner Bases*, American Mathematical Society, 1994.
- [4] Ahn, J., Kwak, S., *Algebra and geometry under projections and applications*, arXiv:0804.3757v1.
- [5] Agazzi, E., Palladino, D., *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Brescia, ed. La Scuola, 1998.
- [6] Ahlfors, Lars, V., Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960.
- [7] Aigner, A., Ziegler, G., *Tre applicazioni della formula di Eulero*, Edizione italiana a cura di A. Quarteroni, Springer, 2006.
- [8] Alexander, J.W., *Topological Invariants of Knots and Links*, Trans. Amer. Math. Soc. 30, 1928.
- [9] Amenta, N., Ziegler, G.M., *Shadows and slices of polytopes*, in Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Computational Geometry, 1996.
- [10] Anselmo, F., Ellis, J., Nanopoulos, D.V., Volkov, G., *Towards an Algebraic Classification of Calabi-Yau Manifolds I: Study of K3 Spaces*, CERN – TH – 2000 / 049 ACT – 3 / 2 KCPT – TAMU – 05 / 2 Khepht / 0002102, 2000.
- [11] Ashley, C.W., *The Ashley Book of Knots*, Doubleday, New York, 1944.

- [12] Avramov, L., Green, M., Huneke, C., Smith, K., Sturmfels, B., (eds.), *Lectures in Contemporary Commutative Algebra*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [13] Balinski, M.L., *On the graph structure of Convex Polyhedra in n -space*, Pacific J. Math., 1961.
- [14] Banchoff, T., *Beyond the Third Dimension*, W. H. Freeman & Co., Scientific American Library, New York, USA, 1990.
- [15] Bell, J.S., *Dicibile in Meccanica Quantistica*, Edizioni Adelphi, 2010.
- [16] Batyrev, V.V., *Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces*, J. Alg. Geom. 3, 1994.
- [17] Batyrev, V.V., Borisov, L.A., *On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties*, in "Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)", de Gruyter, Berlin, 1996.
- [18] Bergman, P.G., *L'enigma della gravitazione*, Ed. Scientifiche e tecniche Mondadori, Milano, 1979.
- [19] Berger, M., *Geométrie*, Cedic Nathan, Paris, 1977.
- [20] Berger, M., *Geometrie, 3, Convexes et Polytopes, Polyedres regulirs, aires et volumes*, Cedion Fernand Nathan, 1978.
- [21] Bertacchini, P.A., Bilotta E., *Nuovi Saperi*, Roma: BCM, 1999.
- [22] Bertacchini, P.A., Bilotta, E., Gabriele, L., Pantano, P., Servidio, R., *Apprendere con le mani. Strategie cognitive per la realizzazione di ambienti di apprendimento-insegnamento con i nuovi strumenti tecnologici*, Franco Angeli, Milano, 2006.
- [23] Bertini, E., *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina, 1923.
- [24] Billera, L.J., Filliman, P., Sturmfels, B., *Constructions and complexity of secondary polytopes*, Advances in Mathematics 83, 1990.

- [25] Bilotta E., Bertacchini F., Gabriele L., Tavernise A., *Education And Technology: Learning By Hands-On Laboratory Experiences*, Atti del convegno “3rd annual International Conference on Education and New Learning Technologies - EDULEARN11”, Barcelona (Spain), 2011.
- [26] Björner, A., Kalai, G., *An extended Euler Poincaré theorem*, Acta Math. 161, 1988.
- [27] Björner, A., Las Vergnas, M., Sturmfels, B., White, N., Ziegler G.M., *Oriented Matroids, Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 46, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [28] Björner, A., *Posets CW Regular complexes and Bruhat order*, European J. Combinatorics, 1984.
- [29] Björner, A., *Topological methods*, in: "Handbook of Combinatorics", R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovasz, eds., North- Holland/Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [30] Björner, A., Wachs, M.L., *On lexicographically shellable posets*, Transactions Amer. Math. Soc. 277, 1983.
- [31] Björner, A., Wachs, M. L., *Shellable non pure complexes and posets, I*, Transactions Amer. Math. Soc. 348, 1996.
- [32] Böhm, J., *Mirror Symmetry and Tropical Geometry*, Mathematics Subject Classification, Saar bücken, 2007.
- [33] Born, M., *La sintesi Einsteniana*, Boringhieri, Torino, 1973.
- [34] Bouchard, V., *Lectures on complex geometry, Calabi-Yau manifolds and toric geometry*, <http://arxiv.org/abs/hep-th/0702063v1>, 2007.
- [35] Bouleau, C., *La geometria segreta dei pittori*, Electa, Milano, 1988.
- [36] Boyer, C.B., *Storia della matematica*, Milano, 1976.
- [37] Braun, V., *Toric Geometry and Sage*, ASC special lecture series, Dublin Institute for Advanced Studies, Arnold Sommerfeld Center, Ireland, 2011.

- [38] Brøndsted, A., *An introduction to convex polytopes*, Graduate texts in mathematics, Vol. 90, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [39] Bruggesser, H., Mani, P., *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. 29, 1971.
- [40] Bruns, W., Aldo Conca, A., *Gröbner bases and determinantal ideals, Commutative algebra, singularities and computer algebra* (Sinaia, 2002), NATO Science Series II Mathematics, Physics, and Chemistry Vol. 115, Kluwer Academic, Dordrecht, 2003.
- [41] Burde, G., Zieschang, H., *Knots*, De Gruyter Stud. Math. no.5 de Gruyter, 1985.
- [42] Catastini, L. Ghione, F., *Le Geometrie della Visione*, Springer, Milano, 2004.
- [43] Ciliberto, C., Rogora, E., *Applicazioni della matematica alla filogenetica*, Un mondo di idee, Springer, 2011.
- [44] Collins, J., *Knot Theory*, University of Edinburgh, 2006.
- [45] Conway, J.H., *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, Proc. Conf., Oxford, 1967-1970.
- [46] Cox, D., Little, J., D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [47] Coxeter, H.S.M., Moser, W.O.J., *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer Verlag, 1980.
- [48] Coxeter, H.S.M., Greitzer, S., *Geometry revisited*, Songer, 1967.
- [49] Coxeter, H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1963.
- [50] Coxeter, H.S.M., M.C. Escher, *Art and Science*, Amsterdam, 1987.
- [51] Coxeter, S.M., *Regular Complex Polytopes*, Cambridge University Press, 1991.

- [52] Cromwell, P.R., *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [53] Crowell, R.H., Fox, R.H., *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company, 1963.
- [54] Danaraj, G., Kle, V., *Shellings of spheres and polytopes*, Duke Math. J. 41, 1974.
- [55] Daverman, R.J., *Decompositions of Manifolds*, Academic Press, Orlando, 1986.
- [56] De La Harpe, P., Kervaire, M., Weber, C., *On the Jones Polynomial*, L'Enseignement Mathématique 32, 1986.
- [57] Demaria, D.C., *Topologia generale*, Edirice Tirrenia, Torino, 1972.
- [58] Dedò, M., *Forme simmetria e topologia*, Zanichelli Decibel, 1999.
- [59] Di Cristina, G., *Architettura come topologia della trasformazione*, Springer, 2006.
- [60] Doran, C.F., Witcher, U.A., *From Polygons to String Theory*, Mathematics Magazine, vol. 99, n° 1, 2009.
- [61] Dummit, D., Foote, R., *Abstract Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [62] Einstein, A., *The Principle of Relativity*, Dover, New York, 1923.
- [63] Eggleston, H.G., *Convexity*, Cambridge, England, 1958.
- [64] Eisenbud, D., *Introduction to Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1995.
- [65] Emmer, M., *La perfezione visibile*, Edizioni Theoria, 1991.
- [66] Emmer, M., *Matematica e cultura*, Springer, 2001.

- [67] Epple, M., *Topology, Matter, and Space*, Springer-Verlag, 1997.
- [68] Espinel, M., *Cat. Mostra Exposición Antologica Dibujos 1948–1994*, Ambasciata Ecuatoriana, Casa de Bastidas, Santo Domingo, 1994.
- [69] Favro, P., Zucco, A., *Appunti di Geometria Convessa*, quaderno didattico n.34, Dip. Matematica, Univ. Torino.
- [70] Fox, R.H., *A Quick Trip through Knot Theory*, in *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, M.K. Fort Jr., Ed. Prentice-Hall, 1962.
- [71] Frajese, A., Maccioni, L., *Gli Elementi di Euclide*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1970.
- [72] Francaviglia, M., *The Legacy of General Relativity in the Third Millennium*, *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences* 35 (2010), No. 1, pp. 167-202 - Proceedings of “IMST 2009 – FIM 17, Seventeenth International Conference of Forum for Interdisciplinary Mathematics on Interdisciplinary Mathematical and Statistical Techniques, Pilsen, Czech Republic, May 23-26, 2009” - C.S. Bose Keynote Lecture, 2009.
- [73] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., Ocneanu, A., *A New Polynomial Invariant of Knots and Links*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12, 1985.
- [74] Fulton, W., *Algebraic Curves*, W. A. Benjamin, INC, New York, Amsterdam, 1969.
- [75] Gale, D., *On the number of faces of a convex polytope*, *Canadian J. Math.* 16, 1964.
- [76] Gario, P., *L'immagine geometrica del mondo (storia dei poliedri)*, Stampatori Editrice Torino, 1979.
- [77] Geroch, R.P., Horowitz, G.T., *Global structures of space-time*, in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, ed. by S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge, Cambridge University Press, 1979.
- [78] Ghirardi, G.C., *Un'occhiata alle carte di Dio, gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*, Il Saggiatore, Milano, 2003.

- [79] Goldberg, M., *A class of multisymmetric polyhedral*, Tohoku Mathematical Journal, 43, 1937.
- [80] Goulding, D., *Knot Theory: The Yang-Baxter Equation*, Quantum Groups and Computation of the Homfly Polynomia, Durham University, 2010.
- [81] Green, B., *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimension, and the Quest for the Ultimate Theory*, W.W. Norton New York, 1999.
- [82] Green, B., *La trama del Cosmo*, Einaudi, Torino, 2004.
- [83] Griffiths, P., Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [84] Gross, D., *Strings and Unification*, in *New Theories of Physics (Proceedings of the XI Warsaw Symposium on Elementary Particle Physics)*, ed. by Z. Ajduk, S. Pokorski, A. Trautman, Singapore, World Scientific, 1989.
- [85] Gruber, P.M., Wills, J.M., *Convexity and its applications*, Birkhauser, 1983.
- [86] Gruber, P.M., Wills, J.M., *Handbook of Convex Geometry*, North Holland Mathematical Library, 1983.
- [87] Grünbaum, B., *Convex Polytopes*, second ed., Graduate Texts in Mathematics Vol. 221, Springer Verlag, New York, 2003.
- [88] Günter, E., *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 168, Springer, Verlag, New York, 1996.
- [89] Hargittai, I., *Lifelong symmetry: a conversation with H S M Coxeter*, The Mathematical Intelligencer 18, 1996.
- [90] Harris, J., *Algebraic geometry, A first course*, Corrected reprint of the 1992 original. Graduate Texts in Mathematics, 133, Lectures 6, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [91] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No.52 Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

- [92] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [93] Henk, M., Richter-Gebert, J., Ziegler, G.M., *Basic properties of Convex Polytopes*, CRC Press Ser. Discrete Math.Appl., Boca Raton, Florida, 1997.
- [94] Herzog, J., Trung, N.V., *Gröbner bases and multiplicity of determinantal and Pfaffian ideals*, Adv. Math. 96, 1992.
- [95] Hibi, T., *Algebraic combinatorics on convex polytopes*, Carlaw Publications, Glebe, Australia, 1992.
- [96] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., *Geometria intuitiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 1991.
- [97] Holton, G., *La lezione di Einstein*, Feltrinelli, Milano, 1997.
- [98] Holton, G., *Einstein e la cultura scientifica del XX secolo*, Il Mulino, Bologna, 1991.
- [99] Iorfida, V., *Algebraic Curves and Varieties in XX Century Art*, Chaos and Complexity Letters, Nova Scienze Publishers, Inc. 2014.
- [100] Iorfida, V., *Fractal Aesthetics By Algebraic Surfaces*, APLIMAT, Journal of Applied Mathematics, Bratislava, 2014.
- [101] Iorfida, V., Restuccia, G., *Simplicial complexes, convex polytopes and art*, (work in progress), 2014.
- [102] Iorfida, V., *Forme Artistiche della Geometria Algebrica*, Journal of Science & Philosophy Divulgation J-DiSciPhil - Fascicolo 1, 2014.
- [103] Iorfida, V., Francaviglia, M., *Algebraic Varieties In The Art Of Nineteenth Century: From The Concept Of Hyperspace To "Exact" Rational Art*, Journal of Applied Mathematics, Bratislava, 2011.
- [104] Iorfida, V., Francaviglia, M., *Fractal Aesthetics in Geometrical Art Forms*. In Bridges Coimbra (Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture), Conference Proceedings; R. Sarhangi & C. Sequin Ed.s, with

P. Machado as co- Editor; Tessellation Publishing , Phoenix, AZ, USA, 2011.

- [105] Iorfida, V., Francaviglia, M., *The probabilistic behavior generated in a short circuit by elementary particles*, Journal of Applied Mathematics, Bratislava, 2013.
- [106] Iorfida, V., Francaviglia, M., *Matematica ed Arte nel Novecento: Spaziotempo, Movimento e Destutturazione*, IX Congresso SIMS – Perugia, 26-28.11.2009.
- [107] Iorfida, V., Francaviglia, M., *The Geometry Of Polytopes*, Aplimat, Journal of Applied Mathematics, 5 (1), Bratislava, 2012.
- [108] Jones, V.F.R., *The Jones Polynomial, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, U.S.A., 2005.*
- [109] Joray, M., Matthews, G., *Pierelli e il problema dell'iperspazio - A. Pierelli*, Verso gli iperspazi, Odràdek, Roma–Venezia, 1980.
- [110] Kalai, G., *A simple way to tell a simple polytope from its graph*, Journal of Combinatorial Theory, 1988.
- [111] Katok, Anatole e Climenhaga, *Lectures on Surfaces: (Almost) Everithing you wanted to know about them*, American Mathematical Society, Vaughn, 2008.
- [112] Kauffman, L.H., *An invariant of regular isotopy*, Transactions of the AMS, 318, no. 2, 417–471, 1990.
- [113] Kauffman, L.H., *Knots and Physics*, World Scientific, 2001 Series on Knots and Everything - vol. 1, World Scientific, Singapore 1991.
- [114] Kawauchi, A., *A Survey of Knot Theory* , Birkhäuser, 1996.
- [115] Kelly, P.J., Weiss, M.L. *Geometry and Convexity*, Willes & Sons, 1979.
- [116] Kempf, G., *Algebraic Varieties*, Cambridge University Press., 1993.
- [117] Kepler, J., *Mysterii Cosmographici*, Opera Omnia, 1858.

- [118] Kinsey, L.C., *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag, 1993.
- [119] Klee, V., *The number of vertices of a convex polytope*, Canadian J. Math. 16, 1964.
- [120] Klemm, A., Theisen, S., *Considerations of one-modulus Calabi-Yau compactifications Picard-Fuchs equations, Kähler potentials and mirror maps*, Nucl. Phys., 1993.
- [121] Kline, M., *Storia del pensiero matematico*, Vol. I., Torino, Ed. Einaudi, 1999.
- [122] Kreuzer, M., Robbiano, L., *Computational Commutative Algebra I*, Springer, Berlin, 2000.
- [123] Kreuzer, M., Skarke, H., *Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions*, hep-th/0002240 HUB-EP-00/13 TUW, 2000.
- [124] Kunz, H., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Translated from the German by Michael Ackerman. With a preface by David Mumford, Birkhäuser Boston, Inc., 1985.
- [125] Lee, C., *Regular triangulations of convex polytopes*, Applied Geometry and Discrete Mathematics - The Victor Klee Festschrift (P. Gritzmann and B. Sturmfels, eds.), vol. 4, AMS, Dimacs Series, Providence, R.I., 1991.
- [126] Lee, J.M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, 2000.
- [127] Lenzi, D., *D. Hilbert e i suoi assiomi della geometria, con un'appendice dedicata a M. Pasch*, in Periodico di Matematiche, Serie VIII N. 4, 2003.
- [128] Lickorish, W.B.R., *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag New York, Inc. 1997.
- [129] Liu, Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press., 2002.
- [130] Livio, M., *Dio è un matematico*, BUR, 2010.

- [131] Lyusternik, L.A., *Convex figures and polyhedra*, Dover, 1963.
- [132] Manchester, E.L., *Topological invariants of knots: three routes to the Alexander Polynomial*, University MT4000 Double Project Supervisor: Grant Walker May 14, 2005.
- [133] Masi, G., *Il Timeo*, Clueb, 2001.
- [134] Mauntrov, V.O., *Knot Teory*, Hardcover, 2004.
- [135] McMullen, P., *On a problem of Klee concerning convex polytopes*, Israel J. Math. 8, 1970.
- [136] McMullen, P., *The maximum numbers of faces of a convex polytope*, Mathematika 17, 1970.
- [137] Miller, E., Sturmfels, B., *Combinatorial Commutative Algebra*, 2004.
- [138] Mora, T., Robbiano, L., *The Gröbner fan of an ideal*, Journal of Symbolic Computation 6, 1988.
- [139] Motzkin, T.S., *Comonotone curves and polyhedra*, Abstract, Bulletin Amer. Math. Soc. 63, 1957.
- [140] Mumford, D., *Algebraic Geometry: Complex Projective Varieties*, Springer, 2004.
- [141] Munkres. J.R., *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publishing Company, 1984.
- [142] Murasugi, K., Traslated by Bohdan Kurpita, *Knot Teory and its Applications*, Birkhäuser Boston, 1996.
- [143] Mussardo, G., *Il modello di Ising. Introduzione alla teoria dei campi e delle transizioni di fase*, Bollati Boringhieri, 2007.
- [144] Naserasra, R., Skrekovski, R., *Discrete Mathematics* 268, 2003.
- [145] Nash. C., *Topology and Physics*, National University of Ireland, 1997.

- [146] Oña, L., *Visión Integral de Estuardo Maldonado in Estuardo Maldonado*, Antología 1945–2002, Quito, Pontificia Universidad Católica de Ecuador, 2002.
- [147] Ottaviani, G., *Riflessioni sulla geometria e sul suo insegnamento oggi*, Atti "Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie", Montevarchi, 2001.
- [148] Pacioli, L., *De Divina Proportione*, Roma, 2000.
- [149] Pagani, P., *La geometria dell'anima. Riflessioni su matematica ed etica in Platone*, Orthotes Editrice, 2012.
- [150] Perrin, D., *Algebraic Geometry. An introduction*, Translated from the 1995 French original by Catriona Maclean. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2008.
- [151] Petruzzi G., *Vortici e colori: alle origini dell'opera di James Clerk Maxwell*, Ed. Dedalo, 2010.
- [152] Pietracci, F., *Estuardo Maldonado: Arte, Dimensionalismo e Hiperspacio-Documento Final*, Quito, 2006.
- [153] Poincaré, H., *Complement a l'analysis situs*, Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1899.
- [154] Poincaré, H., *Sur la generalisation d'un theoreme d'Euler relatifaux polyedres*, Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, 1893.
- [155] Popper, R.K., *Il gioco della scienza*, Armando Editore, 1997.
- [156] Przytycki, J.H., *History of the knot theory from Vandermonde to Jones*, Aportaciones Matemáticas Comunicaciones, 1992.
- [157] Przytycki, J., Traczyk, P., *Invariants of links of the Conway type*, Kobe J. Math. 4, 1988.
- [158] Radò, T., *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Litt.Sci. Szeged., 2, 1925.
- [159] Regge, T., *Gravità Discreta*, Le Scienze n° 331, 1996.

- [160] Reid, M., *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 1988.
- [161] Ricca, R.L., Nipoti, B., *Gauss' Linking Number Revisited*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 20, No. 10, 2011.
- [162] Rolfsen, D., *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish, Inc. 1976.
- [163] Sala, N., *Matematica, arte e architettura*, Didattica delle Scienze e Informatica, n. 200, 1999.
- [164] Sala, N., Cappellato, G., *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli, 2003.
- [165] Sakurai, J.J., *Meccanica Quantistica Moderna*, Zanichelli, 1996.
- [166] Schläfli, L., *Theorie der vielfachen Kontinuität*, written 1850-1852; Ziircher und Furrer, Ziirich 1901; Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft 38 (1901), 1-237; reprinted in: "Ludwig Schläfli, 1814-1895, Gesammelte Mathematische Abhandlungen," Vol. I, Birkhäuser, Basel, 1950.
- [167] Schattschneider, D., Walker, W., Escher, M.C., *Caleidocicli*, Evergreen, 2008.
- [168] Schoute, P.H., *Mehrdimensionale Geometrie*. Vol. 2 (Die Polytope), Leipzig, 1905.
- [169] Schrödinger, E., *Space-Time Structure*, Cambridge University Press Cambridge, UK, 1950.
- [170] Schubert, H., *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Zeit. 61, 1954.
- [171] Segre, B., *Prodromi di Geometria Algebrica*, Cremonese, Roma 1972.
- [172] Segre, C., *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari*

di rette, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XX, pp. 487-504, Torino 1884-1885.

- [173] Sernesi, E., *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1992.
- [174] Sernesi, E., *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1994.
- [175] Severini, G., *La peinture d'avant-garde*, 1917 pubblicato in *Le Mercure de France*, 1917 poi Maria Drudi Gambillo, Teresa Fiori, *Archivi del Futurismo*, vol. I, Roma, De Luca Editore, 1958.
- [176] Shafarevich, I., *Algebraic Geometry*, I e II, Springer, 1988.
- [177] Skarke, H., *Reflexive Polyhedra and their Applications in String and F-theory*, TMR meeting, Paris, 1999.
- [178] Smolin, L., *L'universo senza stringhe: Fortuna di una teoria e turbamenti della scienza*, Einaudi, Torino, 2007.
- [179] Sommerville, D.M.Y., *An Introduction to the Geometry of n Dimensions*, London 1929; reprint, Dover Publications, New York, 1958.
- [180] Sossinsky, A., *Knots: Mathematics with a Twist*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 2002.
- [181] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [182] Stagnaro, E., *Algebra Commutativa*, Univer, Verona, 2003.
- [183] Stillman, M., Sturmfels, B., Thomas, R.R., *Algorithms for the toric Hilbert scheme, Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2* (Eisenbud, D., Grayson, D., Stillman, M., and Sturmfels, B., eds.), *Algorithms and Computation in Mathematics Vol 8*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [184] Stillwell, J., *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Graduate Texts in Mathematics 72, Springer-Verlag, New York 1982; second edition, 1993.
- [185] Sturmfels, B., *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

- [186] Sturmfels, B., *Gröbner Bases of Toric Varieties*, Tohoku Math. Journal 43, 1991.
- [187] Sturmfels, B., *Solving Systems of Polynomial Equations*, vol. 97, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [188] Sturmfels, B., *Some applications of affine Gale diagrams to polytopes with few vertices*, Siam J. Discrete Math. 1, 1988.
- [189] Sturmfels, B., Weismantel, R., Ziegler, G., *Gröbner bases of lattices, corner polyhedra, and integer programming*, Beit. Alg. und Geom., 1995.
- [190] Sturmfels, B., White, N., *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, Adv. Math. 76, 1995.
- [191] Sturmfels, B., White, N., *Gröbner bases and invariant theory*, Adv. Math. 76, 1989.
- [192] Summers, D.W., *Notices of the American Mathematical Society*, 1995.
- [193] Tait, P.G., *On knots*, Part I, Trans. Roy. Soc. Edin. 28, 145-190; Scientific Papers I, 273-317, 1877.
- [194] Tait, P.G., *On knots*, Part II, Trans. Roy. Soc. Edin. 32, 327-342; Scientific Papers I, 318-331, 1884.
- [195] Tait, P.G., *On knots*, Part III, Trans. Roy. Soc. Edin. 32, 493-506; Scientific Papers I, 335-347, 1885.
- [196] Thomson, W., *On vortex motion*, See also Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, February 1867.
- [197] Todorova, S., *The Alexander Polynomial For Knots*, Department of Mathematics at Harvard University in partial fulfillment of the honors requirements for the degree of Bachelor of Arts, 2000.
- [198] Torretti, R., *Relativity and Geometry*, Oxford, Pergamon, 1996.

- [199] Vafa, C., *Geometric Physics*, in Documenta Mathematica, Extra Volume ICM, Vol. I., 1998.
- [200] Van de Griend, P., *The Istory of Knot Teory*, Arhus University, 1992.
- [201] Vaughan F.R. Jones, *The Jones Polynomial, Department of Mathematics, University of California at Berkeley, Berkeley CA 94720, U.S.A., 2005.*
- [202] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomials*, Communications in Mathematical Physics, 1989.
- [203] Wu, F.Y., *Knot theory and statistical mechanics*, Reviews of Modern Physics 64, 1992.
- [204] Xenakis, I., *Formalized Music: Thought and Mathematics in Music*, Pendragon Press, New York, 1992.
- [205] Yau, S.T., Nadis, N., *The SHAPE of INNER SPACE String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, Published by Basic Books, *A Member of the Perseus Books Group*, Philadelphia, 2012.
- [206] Yu, J., *Alexander Polynomial Of Knots*, Term Paper For Math 215b, Spring, 2004.
- [207] Zariski, O., Samuel. P., *Commutative Algebra volume 1*, Springer, New York, Paris, Berlin, 1975.
- [208] Zhuo. J., *Algebraic Geometric Coding Theory*, University of Sydney, Sydney, 2006.
- [209] Ziegler, G.M., *Convex Polytopes: Extremal Constructions and f-Vector Shapes*, IAS/Park City Mathematics Series, Volume 14, 2004.
- [210] Ziegler, G.M., *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [211] Zumdal, S.S., *Chemical Principles*, Mass Abingdon Houghton Mifflin, Boston, 2009.

