
Capitolo 5

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi sono state analizzate le varie tecniche di omogeneizzazione, utilizzate al fine di valutare le proprietà macroscopiche di materiali compositi con microstruttura fortemente eterogenea.

Nella prima fase, si è posta l'attenzione sullo stato dell'arte, facendo una rapida panoramica delle varie metodologie e modelli micromeccanici, presenti in letteratura. In particolare sono state analizzate le due principali tecniche di omogeneizzazione, quali la *teoria dei campi medi* e la *teoria dell'omogeneizzazione*, evidenziandone la differente formulazione matematica nonché i differenti ambiti di applicazione. A tal riguardo è stato osservato come l'approccio fisico della teoria dei campi medi, di più immediata applicabilità, consente di valutare le proprietà macroscopiche di un composito eterogeneo, mediante relazioni tra i campi medi di tensione e deformazione, valutati su un elemento di volume rappresentativo del comportamento microscopico, meglio noto come RVE. In particolare, tale metodo risulta essere applicabile a microstrutture di una certa semplicità come, ad esempio, un'inclusione isolata all'interno di un continuo illimitato, contrariamente alla teoria dell'omogeneizzazione, la quale utilizza una microstruttura di tipo periodico nella transizione dalla micro alla macroscale. Tale approccio di tipo matematico, applicabile quindi a compositi con un arrangiamento microscopico sufficientemente regolare, stabilisce un legame tra micro e macrocampi mediante l'utilizzo delle tecniche di perturbazione multi-scala. I due metodi conducono ad una differente valutazione delle proprietà effettive, che possono risultare coincidenti quando la teoria

dell'omogeneizzazione viene formulata sotto particolari condizioni. Entrambi i metodi, inoltre, possono essere accoppiati a modelli agli elementi finiti.

L'attenzione è stata, quindi, posta sul comportamento di solidi caratterizzati da microstrutture fortemente eterogenee, mostrando l'influenza di tali eterogeneità microscopiche sulla valutazione dei campi medi di tensione e deformazione. In particolare si è osservato come a livello della microscala l'intorno infinitesimo di un punto materiale risulti, in generale, non uniforme, annoverando vari costituenti con proprietà e forme differenti, che rendono la microstruttura complessa ed in continua evoluzione. Pertanto, i campi di tensione e deformazione all'interno dell'elemento infinitesimo di materiale risultano essere assolutamente non uniformi a livello delle microscala. A tal riguardo, quindi, emerge chiaramente come il principale obiettivo della Micromeccanica sia quello di rappresentare in maniera rigorosa e sistematica le proprietà del continuo in funzione dei parametri che caratterizzano la microstruttura e le proprietà dei microcostituenti dell'intorno del punto materiale. Pertanto sono state sviluppate le tecniche dei campi medi, mostrando le variazioni subite dai campi medi di tensione e deformazione nel caso in cui la microstruttura sia caratterizzata dalla presenza di micro-cracks in evoluzione o inclusioni a tensione nulla. Un approccio di tipo energetico ha consentito, una volta definiti i macropotenziali elastico ed elastico complementare per il materiale omogeneizzato, di verificare come le due condizioni, applicabili sul contorno dell'RVE, di spostamenti lineari e trazioni uniformi, rispettivamente, possano essere utilizzate per ottenere gli estremi superiore ed inferiore (*upper and lower bound*) per i moduli elastici associati a ciascuna condizione al contorno, sotto l'ipotesi fondamentale che i microcostituenti siano di tipo elastico convesso.

In una seconda fase è stata investigata, utilizzando il metodo degli elementi finiti accoppiato ai modelli di interfaccia, l'influenza dei fenomeni di danneggiamento microscopico e del contatto tra le superfici dei micro-cracks sulle effettive leggi costitutive macroscopiche dei materiali eterogenei.

Si è osservato come, tenendo in conto l'evoluzione della microstruttura, associata alla crescita dei micro-cracks nonché all'attivazione delle forze di contatto tra le superfici danneggiate, nel modello micromeccanico proposto, i macrolegami costitutivi presentino un comportamento fortemente non-lineare.

La non-linearità di tali leggi costitutive macroscopiche, il cui andamento risulta essere caratterizzato dalla presenza di evidenti tratti di *snap back* o *snap through*, si riflette in una progressiva perdita di rigidità del materiale, che può condurre alla rottura sotto un'assegnata macrodeformazione omogenea, accompagnata da una crescita di tipo instabile dei micro-cracks presenti.

In particolare, l'evoluzione del danno è stata simulata accoppiando al modello micomeccanico, gli usuali concetti della meccanica della frattura. Sono stati considerati nelle simulazioni numeriche due tipi di materiale composito con microstruttura eterogenea: un composito a matrice porosa ed un composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte all'interno della matrice.

In particolare, nel primo esempio si è considerato un materiale con matrice fragile, contenente all'interno della microstruttura delle microcavità dalle quali si dipartono dei micro-cracks in continua evoluzione. Nel secondo caso, invece, è stato analizzato il caso di un composito fibro-rinforzato caratterizzato dalla presenza di microdifetti, a livello microscopico, all'interfaccia tra fibra e matrice. In entrambi i casi il processo di carico è stato guidato mediante l'imposizione di un'assegnata macrodeformazione, sia estensionale che di compressione. Nell'ipotesi di microstruttura controllata mediante l'assegnata macrodeformazione, quindi, sono stati studiati tre tipi di condizione al contorno: *spostamenti lineari*, *fluttuazioni periodiche* e *trazioni antiperiodiche* ed infine *trazioni uniformi*.

La propagazione dei micro-cracks è stata modellata, come detto, utilizzando l'approccio tipico della meccanica della frattura, in particolare mediante l'utilizzo della tecnica dell'integrale J , accoppiata ad un modello d'interfaccia in grado di simulare il contatto tra le superfici del crack nella zona non danneggiata.

Le simulazioni numeriche hanno mostrato la notevole influenza dell'evoluzione del danneggiamento a livello microscopico e della presenza del contatto sulla risposta costitutiva macroscopica del materiale omogeneizzato. In particolare si è osservato come i macrolegami costitutivi siano fortemente influenzati, inoltre, dal tipo di condizione al contorno utilizzata nella risoluzione del problema, sotto l'ipotesi di una microstruttura controllata mediante l'imposizione di una macrodeformazione. Per quanto concerne l'energia di rilascio si è osservato come, nelle quasi totalità dei casi e ad eccezione di piccoli valori per la lunghezza del crack, l'energia di rilascio per

condizioni al contorno di tipo periodico risulti essere limitata, inferiormente da quella corrispondente al caso della condizione di spostamenti lineari, e superiormente da quella associata alla condizione di trazioni uniformi sul contorno. Per quanto riguarda la valutazione dei macrolegami costitutivi, si è osservato come i due materiali analizzati presentino un comportamento notevolmente differente, al variare della direzione di macrodeformazione imposta.

In particolare, le proprietà macroscopiche effettive del materiale composito a matrice porosa risultano essere fortemente dipendenti dalla condizione imposta sul contorno dell'RVE, al fine di realizzare la transizione dalla micro alla macroscale. Inoltre, in questo caso, è emerso come i moduli siano scarsamente influenzati dalla lunghezza del crack nel caso in cui la macrodeformazione venga imposta nella direzione x_1 , specie per piccoli valori della lunghezza del crack stesso. Nel caso in cui venga considerata la direzione di macrodeformazione $\hat{\varepsilon}_2$, invece, i moduli risultano essere fortemente dipendenti dalla lunghezza del crack, specie per grandi valori della stessa. Sempre per il composito a matrice porosa si è osservato come, quando sul contorno dell'RVE vengono imposte le condizioni al contorno c) o di spostamenti lineari, può succedere che la crescita del crack subisca una fase di arresto, parziale o definitiva, durante la procedura di carico, come emerge dall'andamento dell'energia di rilascio totale, caratterizzata da un picco seguito da un tratto decrescente. Tale fenomeno si riflette nella presenza di un evidente tratto di *snap through* all'interno del macrolegame costitutivo per tale condizione al contorno. Le applicazioni numeriche hanno poi mostrato come per i modi di compressione, il contatto viene attivato quando il crack risulta essere completamente chiuso, e l'energia di rilascio assume, quindi, valori praticamente trascurabili. Da tali considerazioni segue come in compressione le dimensioni del microcrack non progrediscono, per cui il comportamento meccanico macroscopico del materiale è di tipo elastico lineare, caratterizzato dai moduli associati alla configurazione non danneggiata $\bar{C}(l = l_0)$. Limitando le analisi allo stato piano di deformazione, è emerso chiaramente come il materiale abbia un comportamento macroscopico praticamente ortotropo.

Per quanto riguarda il composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte all'interno della matrice, si è osservato come le proprietà costitutive macroscopiche siano poco influenzate dalla condizione al contorno, specie per piccoli valori della

lunghezza del crack. Così come osservato per il caso del materiale a matrice porosa, anche in questo caso il comportamento iniziale del macrolegame costitutivo risulta essere di tipo lineare, caratterizzato dai moduli $\bar{C}(l_0)$, i quali sono stati valutati con riferimento alla lunghezza iniziale del crack l_0 . Dai grafici in cui viene mostrato l'andamento dell'energia di rilascio emerge, chiaramente, come $G(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\pm, l)$ sia una funzione crescente della lunghezza del crack per tutte le condizioni al contorno analizzate, sia per i percorsi di macrodeformazione positivi o di trazione, che per quelli negativi o di compressione. Di conseguenza il debonding all'interfaccia tra la micro-fibra e la matrice progredisce per valori decrescenti del fattore di carico critico β e, per un valore fissato di macrodeformazione, tale evoluzione risulta essere di tipo instabile. Da ciò deriva la presenza di un evidente *snap back* all'interno del macrolegame costitutivo, in cui il tratto discendente viene ad essere praticamente sovrapposto a quello ascendente. Si è osservato, inoltre, come i moduli, associati alle condizioni periodiche, risultino essere limitati superiormente da quelli associati alla condizione di spostamenti lineari ed inferiormente da quelli associati alla condizione di trazioni uniformi. Inoltre appare evidente come, anche in questo caso, il materiale presenti un comportamento macroscopico di tipo ortotropo. Nel caso del percorso di macrodeformazione bi-assiale $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_4$ si è osservato, poi, come i valori dell'energia di rilascio siano sufficientemente inferiori a quelli valutati per il percorso di macrodeformazione assiale positivo $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^+ = e_1 \otimes e_1$, in conseguenza dell'effetto stabilizzante associato alla compressione trasversale nella direzione x_2 , legato al percorso di macrodeformazione $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^+ = e_2 \otimes e_2$, che garantisce un incremento di resistenza per il materiale macroscopico. Mentre un comportamento analogo si è registrato per il percorso di macrodeformazione $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_5$, per il quale l'incremento di resistenza, rispetto al caso mono-assiale $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^+ = e_2 \otimes e_2$, viene affidato alla compressione trasversale nella direzione x_1 . Occorre osservare come, per tutti i casi analizzati, la presenza del contatto tra le superfici danneggiate garantisca un incremento della resistenza macroscopica, limitando la perdita di rigidità del materiale omogeneizzato. Il modello di danneggiamento proposto risulta essere, quindi, in grado di valutare i macrolegami costitutivi per microstrutture, caratterizzate

dalla presenza di difetti in continua evoluzione, tenendo in conto la presenza del contatto tra le superfici danneggiate. Al fine di verificare la validità della procedura di omogeneizzazione adottata, in conclusione, i macrolegami costitutivi ottenuti sono stati impiegati nello studio di un solido macroscopico, soggetto ad uno spostamento assegnato. In particolare, dal confronto tra i valori dell'energia di rilascio ottenuti mediante l'analisi diretta di una lastra piana incastrata alla base, costituita da un arrangiamento regolare di 5x5 microcelle, e quelli calcolati mediante l'analisi microscopica di un singolo RVE, al quale sono state applicate le condizioni al contorno controllate da una macrodeformazione, ottenuta da un'analisi omogeneizzata del macroelemento, si evince come per il materiale a matrice porosa sia la condizione di fluttuazioni periodiche che garantisce la più accurata transizione dalla micro alla macro-scala. Tale aspetto emerge dai grafici relativi agli errori percentuali tra i valori dell'energia, relativi all'analisi diretta, e quelli associati alle analisi di tipo microscopico, in cui è possibile osservare come, imponendo la condizione al contorno di fluttuazioni periodiche, tali errori si aggirino al massimo attorno al 2%, fatta eccezione per le poco significative zone terminali della lastra. Al contrario, per quanto riguarda il composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte, è stato possibile verificare come si realizzi un'ottimale transizione dalla micro alla macro-scala per tutti i tipi di condizione al contorno analizzati. Sempre osservando i grafici relativi agli errori percentuali, infatti, appare evidente come, in questo caso, praticamente per tutte le condizioni al contorno utilizzate nelle analisi di tipo microscopico, tali errori raggiungano al massimo il 3%.