

UNIVERSITÀ della CALABRIA
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Meccanica

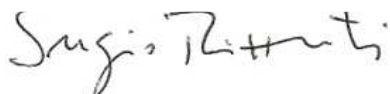
Scuola di Dottorato “Pitagora” in Scienze Ingegneristiche
Dottorato di Ricerca in Ingegneria Meccanica XXII Ciclo
SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE: ING-IND/15

Tesi di Dottorato

Definizione di un modello di sintesi per l'analisi del
comportamento dinamico dei veicoli


Coordinatore

Prof. Sergio Rizzuti




Supervisore

Dott. Gianluca Gatti



Candidato

Ing. Giorgio Malito



Dissertazione finale sottomessa per ottenere il titolo di Dottore di Ricerca in Ingegneria Meccanica

Anno Accademico 2008/2009

ESTRATTO DELLA TESI

I modelli del tipo a bicicletta, per l'analisi della dinamica laterale del veicolo, consentono una trattazione semplificata del problema attraverso l'utilizzo di macroparametri esemplificativi ed equivalenti che permettono di comprendere i principali aspetti del moto degli autoveicoli anche di fronte a non dettagliate conoscenze del sistema; essi risultano pertanto uno strumento essenziale ed obbligatorio per l'impostazione delle caratteristiche di una vettura di nuova progettazione e per l'analisi e l'interpretazione dei dati sperimentali ricavati mediante prove su pista.

In questo lavoro di tesi viene definito un modello di veicolo semplificato nuovo, rispetto a quelli già presenti in letteratura, per una maggiore capacità previsionale.

La problematica affrontata è pertanto identificabile nella definizione di un modello che riesca a conservare la caratteristica fondamentale di *semplicità*, riconducibile nel ridotto numero e relativo grado di dettaglio delle grandezze necessarie come input, a fronte di una altrettanto elevata qualità di risultati. Il modello realizzato è stato sviluppato per eseguire analisi handling sia in condizioni stazionarie che transitorie. La formulazione del problema con tale livello di semplificazione, in riferimento alle condizioni sopracitate, ha reso necessario una trattazione duale e con modalità differenti tra loro, al fine di garantire ottimi risultati in ambedue i casi.

ELENCO DEI PRINCIPALI SIMBOLI.....	4
INTRODUZIONE.....	8
CAPITOLO 1	
Comportamento del pneumatico	11
1.1 Cinematica.....	11
1.2 Il modello “a spazzola” (<i>Brush Model</i>).....	16
1.3 Comportamento transitorio	25
1.4 Formule empiriche (Magic Formula)	27
CAPITOLO 2	
Modelli per lo studio del sistema autoveicolo.....	28
2.1 Introduzione.....	28
2.2 Modelli a bicicletta	29
2.2.1 Ipotesi semplificative	29
2.2.2 Equazioni di congruenza.....	30
2.2.3 Equazioni di equilibrio	33
2.2.4 Equazioni costitutive	37
2.2.5 Modello monotraccia di autoveicolo	39
2.3 Modelli a 15 g.d.l.	54
2.3.1 Cassa.....	55
2.3.2 Pneumatico.....	58
2.3.3 Sospensioni.....	58
2.3.4 Linea sterzo	60
2.3.5 Sistema di propulsione e di frenata	61
2.4 Modelli multibody	61
CAPITOLO 3	
DEFINIZIONE DEL MODELLO SEMPLIFICATO.....	65
3.1 Ipotesi semplificative	65

3.2	Grandezze di riferimento e convenzioni.....	66
3.3	Impostazione e strategia risolutiva del problema	67
3.4	Modello in stazionario	68
3.3.1	Equazioni di rollio.....	69
3.3.2	Trasferimenti di carico laterali.....	73
3.3.3	Modello di pneumatico	76
3.3.4	Rigidezza equivalente e caratteristica effettiva dell'assale.....	78
3.5	Modello in transitorio	80
CAPITOLO 4		
VALIDAZIONE NUMERICA DEL MODELLO		
4.1	Validazione previsione analisi in stazionario.....	86
4.2	Validazione previsione analisi in frequenza	99
CONCLUSIONI.....		106
BIBLIOGRAFIA.....		109

Elenco dei principali simboli

a	semipasso anteriore;
a_n	accelerazione normale;
a_t	accelerazione tangenziale;
a_x	accelerazione longitudinale;
a_y	accelerazione laterale;
\tilde{a}_y	accelerazione laterale a regime
b	semipasso posteriore;
f	coefficiente di attrito, frequenza;
g	accelerazione di gravità;
h_{CG}	altezza del baricentro dal suolo;
h_{CRf}	altezza del centro di rollio anteriore dal suolo;
h_{CRr}	altezza del centro di rollio posteriore dal suolo;
Δh	distanza del baricentro dal centro di rollio;
i, j, k	versori degli assi x, y, z ;
k	rigidezza, raggio di inerzia;
k_ϕ	rigidezza di rollio;
l	passo del veicolo;
L	lunghezza di rilassamento pneumatico;
M	massa del veicolo;
M_{sosp}	massa non sospesa;
M_{Nsosp}	massa sospesa;
n	versore normale alla traiettoria, numero di lamelle del giunto viscoso;
r	velocità di imbardata;

r_p	velocità di imbardata a regime;
s	distanza del baricentro dal neutral steer point;
t	tempo;
t_f	carreggiata anteriore;
t_r	carreggiata posteriore;
u	componente longitudinale della velocità del baricentro;
u_{cr}	velocità critica;
v	componente trasversale della velocità del baricentro;
v_p	velocità trasversale del baricentro a regime;
(x, y, z)	sistema di assi corpo (veicolo o ruota);
(x_0, y_0, z_0)	sistema di assi suolo;
A	matrice;
B, C, D, E	coefficienti della Magic Formula
C	centro di istantanea rotazione;
C_z	rigidezza verticale dello pneumatico;
C_α	rigidezza di deriva dello pneumatico;
C_γ	rigidezza di camber;
C_{σ_x}	rigidezza longitudinale dello pneumatico;
C_{σ_y}	rigidezza trasversale dello pneumatico;
F	forza generica di modulo F e componenti F_x , F_y e F_z ;
F_t	forza tangenziale tra pneumatico e strada;
F_x	forza longitudinale tra strada e pneumatico;
F_y	forza laterale tra strada e pneumatico;
F_z	forza verticale tra strada e pneumatico;
G	baricentro;

I	matrice identità;
J	momento o prodotto di inerzia;
(L, M, N)	componenti del momento agente sull'intero veicolo;
K_{eff-f}	rigidezza di deriva equivalente dell'assale anteriore;
K_{eff-r}	rigidezza di deriva equivalente dell'assale posteriore;
K_{eff}	rigidezza effettiva dell'assale;
M_r	momento di resistenza al rotolamento;
R_e	raggio di puro rotolamento della ruota con pneumatico;
R_G	raggio di curvatura della traiettoria del baricentro;
R_l	raggio sotto carico della ruota con pneumatico;
R_p	raggio di curvatura a regime;
V_G	Velocità del baricentro del veicolo;
V_r	Velocità di puro rotolamento;
V_s	Velocità di scorrimento;
X	Forza longitudinale agente sull'intero veicolo;
X_a	Forza longitudinale aerodinamica;
(X, Y, Z)	Componenti della forza risultante agente sull'intero veicolo;
Y	Forza laterale agente sull'intero veicolo;
Z	Forza verticale agente sull'intero veicolo;
α	Angolo di deriva dello pneumatico;
α_f	Angolo di deriva dell'assale anteriore;
α_r	Angolo di deriva dell'assale posteriore;
β	Angolo di assetto del veicolo;
γ	Angolo di camber dello pneumatico;
δ	Angolo di sterzo;

ε	Angolo di convergenza;
ζ	Fattore di smorzamento;
η_β	gradiente di assetto;
θ	angolo di beccheggio, angolo di pressione;
λ	autovalore;
μ	coefficiente di aderenza;
ξ	coordinata locale;
ρ	densità dell'aria, deformazione radiale dello pneumatico;
σ	scorrimento teorico della ruota con pneumatico;
σ_m	scorrimento limite;
σ_x	scorrimento teorico longitudinale della ruota con pneumatico;
σ_y	scorrimento teorico laterale della ruota con pneumatico;
ϕ	angolo di rollio, angolo di attrito;
ϕ_p	angolo di rollio a regime;
φ	sfasamento;
ψ	angolo di imbardata;
Δ	Incremento finito (rispetto ad un valore di riferimento non nullo);
Ω	Vettore velocità angolare;
Ω_0^α	Velocità angolare della ruota in deriva pura.

INTRODUZIONE

Lo studio del comportamento direzionale e della stabilità di un veicolo prevede la possibilità di impiego di una varietà di modelli matematici che differiscono tra loro per il livello di dettaglio, per il grado di complessità, per i possibili campi di utilizzo e per le modalità di impiego [1-16].

Il livello di accuratezza del modello utilizzato deve essere commisurato al tipo d'analisi considerata, poiché modelli accurati sono allettanti ma parimenti complicati da utilizzare [1,17-20], soprattutto per il coinvolgimento di molti parametri e fenomeni difficilmente rilevabili [17,18,21]. È pertanto necessario stabilire se lavorare con modelli dettagliati oppure con modelli semplificati.

Fondamentalmente, l'utilizzo di un modello matematico di ausilio allo studio del comportamento dinamico di un veicolo, rientra in uno dei seguenti casi:

- interpretazione di prove sperimentali [17,19-21];
- impostazione delle caratteristiche di una nuova vettura [1-5];
- definizione di dettaglio delle caratteristiche progettuali [23-27];
- confronto fra diverse soluzioni tecniche in esame [28-32].

Negli ultimi due casi elencati, assume importanza il livello di dettaglio della modellazione, poiché si vuole valutare l'effetto introdotto da parametri di progetto dei singoli componenti (leve sospensioni, ammortizzatori, barre antirollio, etc.), oppure si sta affrontando la risoluzione di un problema, per il quale un modello semplificato sarebbe in grado di identificare una soluzione, ma non di individuare le cause del problema ed aiutare nella ricerca di modifiche al progetto [1-5].

Nei primi due casi, invece, è utile adottare dei modelli semplificati, nei quali sono sintetizzate le caratteristiche degli elementi fondamentali dell'autotelaio; in tali modelli i sottocomponenti sospensione, pneumatico e sterzo sono implementati mediante parametri equivalenti, rappresentativi del comportamento dell'intero assale [16,17,34-37]. L'utilizzo di tali modelli, rispetto a quelli più complessi, risulta essere più efficace per esigenze ben specifiche. Nel caso della sperimentazione su pista si ha la necessità di elaborare velocemente e sul posto i dati acquisiti in una sessione di prove e di predire, con ragionevole rapidità e con buona approssimazione, il comportamento dinamico del veicolo a fronte di modifiche sullo stesso, senza dover ricorrere ad un'indagine approfondita su codici numerici e modelli del veicolo troppo complessi [17-20]. D'altra parte, nel caso dell'analisi e dell'interpretazione di dati sperimentali, è difficoltoso e poco affidabile identificare il comportamento di un componente singolo (per esempio la variazione di convergenza della sospensione anteriore, per effetto del carico laterale) [18-20].

In riferimento all'impostazione di una nuova autovettura, la necessità dell'utilizzo dei modelli di sintesi risiede nel tipo di dati di cui si dispone in tale caso. Durante le prime fasi di progettazione si ha a disposizione un ridotto numero di dati che risultano essere sotto forma di macroparametri esemplificativi dei sottocomponenti del veicolo. Tale tipologia di dati non si presta ad un trattamento mediante modelli "dettagliati" i quali necessitano di una definizione accurata di tutte le parti del veicolo.

Inoltre, sempre per il caso dell'impostazione degli autoveicoli, la necessità dell'utilizzo di questi modelli, risiede nella osservazione secondo cui non è esatto stabilire la validità di una scelta progettuale, fatta su di un organo dell'autotelaio, in maniera avulsa dall'intero sistema. Ciò implica che durante la fase di impostazione bisogna valutare necessariamente e contemporaneamente tutte le grandezze inerenti i vari aspetti del veicolo. In riferimento a ciò, l'utilizzo dei modelli più complessi risulta essere svantaggioso dato l'elevato onere implementativo e computazionale, a differenza dei modelli semplificati che permettono una convergenza rapida verso la soluzione ricercata, anche se con una perdita di dettaglio che bisogna ottenere in una seconda fase di affinamento [1-5].

L'utilizzo, in tal senso, nell'ambito della progettazione degli autoveicoli è, per questi modelli, una metodologia riconosciuta in letteratura e specificata nel metodo V-model [22,23].

Un ulteriore ambito di utilizzo dei modelli di sintesi è inerente l'identificazione dei parametri mediante l'elaborazione dei dati sperimentali, per le medesime motivazioni specificate in riferimento alla interpretazione delle prove sperimentali. In questo utilizzo, i modelli in oggetto permettono la stima di alcune grandezze del veicolo, sotto forma di macroparametri caratterizzanti le principali caratteristiche del veicolo [18-20].

L'importanza per tale tipologia di modelli, evidenziata sopra, è constatabile in letteratura nella moltitudine di formulazioni presenti, connesse a specifiche applicazioni e studi. Esse differiscono fra loro per determinati aspetti implementati riguardo alla descrizione del sistema veicolo e ai fenomeni dinamici che si manifestano durante il suo funzionamento. Molti lavori di questo tipo, sviluppati più di recente e in prevalenza nell'ambiente di calcolo e di simulazione MATLAB/SIMULINK, sono disponibili nella "SAE Collection of Technical papers". Alcuni di essi sono stati citati nei riferimenti bibliografici [16, 33-49].

Per ognuna di esse, ciò che emerge è la ricerca di una formulazione che richieda il minor numero di parametri in ingresso e che allo stesso tempo riesca a fornire il maggior numero di parametri in uscita nel minor tempo possibile e con la migliore approssimazione. Pertanto, a fronte della conoscenza più che consolidata dei modelli del tipo a bicicletta[1-5, 43-49], il presente lavoro si propone di realizzare un modello di veicolo semplificato che non ricada in una delle formulazioni già esistente e che sia pertanto nuovo e differente da essi per una maggiore precisione dei risultati in riferimento alle analisi handling veicolo, molto prossima a quella dei modelli con formulazione concettuale a più gradi di libertà.

L'obiettivo è quindi lo sviluppo di un modello con un livello di dettaglio essenziale, molto vicina alle modellazioni più basilari a due, o poco più, gradi di libertà di cui si intende

mantenerne la formulazione elementare consentendo così una descrizione delle grandezze caratteristiche del veicolo attraverso delle leggi lineari definibili mediante l'utilizzo di coefficienti. Allo stesso tempo la formulazione deve avere la capacità di interpretazione degli aspetti e dei fenomeni contraddistintivi del sistema meccanico autoveicolo nella maniera più corretta e completa al fine di ottenerne uno strumento con capacità di previsione del comportamento dinamico più elevate dei modelli equivalenti già disponibili, sia in condizioni stazionarie che transitorie.

In funzione di ciò, dopo una attenta analisi critica dei modelli esistenti che ha posto in evidenza le connessioni tra formulazione, con relative approssimazioni assunte alla base, e le carenze nella qualità dei risultati ottenibili, sono stati evidenziati i possibili punti di modifica e di innovazione. Lo sviluppo di tali aspetti ha condotto ad una strategia risolutiva affrontata in maniera duale, relativamente alle condizioni stazionarie e transitorie, al fine di ottenere maggiore qualità nei risultati per entrambi. In riferimento alla previsione del *comportamento in stazionario* tutte le grandezze vengono calcolate relativamente ad una accelerazione laterale (A_y) fissa, incrementata a step costanti fino al limite di aderenza. In tale modo le relative curve caratteristiche specificate vengono ricomposte come unione dei valori delle grandezze calcolati per le differenti A_y ; in maniera del tutto analoga a ciò che avverrebbe nello studio del comportamento in stazionario tramite prove reali in pista, in cui vengono registrati i valori delle grandezze nello stabilizzato a differenti livelli di accelerazione laterale. Attraverso la risoluzione di alcuni set di equazioni inerenti il rollio, il trasferimento di carico e la rigidità equivalente di assale si ottengono le curve di sottosterzo, assetto e rollio. Per quanto riguarda *l'analisi in frequenza* come approccio risolutivo è stata utilizzata la simulazione dinamica di uno sweep in frequenza in riferimento ad un modello matematico in cui i contributi della variazione di convergenza, dovuti al rollio, alla forza laterale e al momento autoallineante sono valutati e sommati istante per istante. Le curve di risposta in frequenza di output (velocità d'imbardata, angolo di assetto e angolo di rollio in funzione dell'angolo volante e l'angolo di rollio in funzione dell'accelerazione laterale) sono ricavate elaborando le time history delle grandezze ricavate nell'analisi di sweep.

Tale strumento così ottenuto risulta efficace sia nel caso di impostazione delle caratteristiche di una vettura (*target setting*) nelle prime fasi di sviluppo di un nuovo progetto, sia nel caso di interpretazione dei dati sperimentali, analizzando i quali, è difficoltoso e poco affidabile identificare il comportamento di un componente singolo.

Questo lavoro di tesi è diviso in due parti principali: la prima presenta i risultati della ricerca bibliografica e dello studio dello stato dell'arte, la seconda parte descrive invece il progetto, la realizzazione del modello e la sua validazione numerica attraverso un modello a 14 g.d.l. di già comprovata validità, mediante lo studio di due prototipi di vetture commerciali.

Data l'importanza degli pneumatici nel comportamento dinamico dell'intero veicolo e le possibili differenti formulazioni, nel primo capitolo della tesi ne è stata fornita una trattazione dettagliata sul loro comportamento e sulle possibili formulazioni.

Nel secondo capitolo è stato illustrato lo scenario presente in riferimento alle differenti modellazioni attualmente esistenti e utilizzate per lo studio della dinamica laterale dei veicoli. I modelli sono stati identificati nelle tre categorie: modelli a bicicletta, modelli a più gradi di libertà con modellazione *concettuale* e modelli multibody. La prima tipologia è stata analizzata mostrando la formulazione ormai classica con il set di equazioni di congruenza, di equilibrio e costitutive. Per i modelli a più gradi di libertà è stato illustrato quello a 14 g.d.l., con la descrizione della modellazione dei sottocomponenti. Infine sono stati analizzati i modelli multibody nella loro raffinata e complessa rappresentazione fisica del sistema meccanico autoveicolo.

Nel terzo capitolo è presentato il modello sviluppato. In virtù dell'analisi del comportamento della dinamica laterale degli autoveicoli, in condizioni stazionarie e transitorie e della corrispondente strategia risolutiva, la descrizione del modello ha seguito una analoga suddivisione mettendo in evidenza per ognuno dei due casi le caratteristiche che ne determinano la distinzione dai modelli già esistenti.

Nel quarto capitolo è stata effettuata la validazione del modello sviluppato. In tale procedura è stato considerato corretto ed efficace utilizzare come termine di confronto *non* un modello reale, con prove in pista, ma una validazione numerica attraverso l'utilizzo di un modello *superiore* a quello sviluppato e già consolidato. In tal senso, per avere una validazione in campi di impiego estremi, sono stati presi a riferimento una vettura commerciale del segmento C ed una supersportiva. La validazione è stata condotta sia in riferimento all'analisi del comportamento in stazionario che transitorio.

Il modello realizzato è stato sviluppato ed implementato completamente in Matlab/Simulink creandone una interfaccia al fine di realizzare un *tool* altamente performante attraverso cui l'utente interagisce in maniera veloce e pratica per effettuare valutazioni di tipo handling sui veicoli.

CAPITOLO 1

Comportamento del pneumatico

Il pneumatico è un parametro fondamentale nella dinamica del veicolo; esso infatti rappresenta l'interfaccia tra veicolo e superficie stradale. In particolare al pneumatico vengono demandati svariati compiti tra cui il filtraggio delle asperità stradali, la trasmissione di coppie motrici e resistenti ed infine l'azione delle forze necessarie a controllare la traiettoria del veicolo.

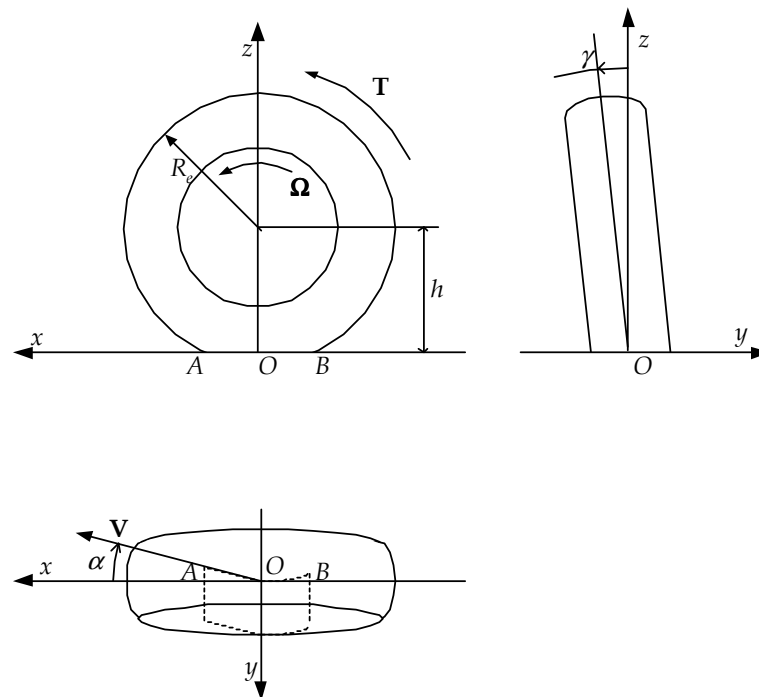
Il comportamento del pneumatico è influenzato da innumerevoli fattori tra i quali i principali risultano: le proprietà meccaniche del pneumatico (rigidezze e smorzamenti), le proprietà della superficie stradale (coefficiente di aderenza tra pneumatico e strada, struttura del manto stradale) ed infine le condizioni di moto tra pneumatico e strada (modulo e direzione della deformazione/slittamento).

Nel presente capitolo verranno dapprima definite le grandezze caratteristiche del moto della ruota con pneumatico rispetto alla strada; successivamente verrà descritto un modello semifisico del pneumatico (*brush model*) che permette di fornire una spiegazione (sia pure semplicistica) di molti dei principali fenomeni. Infine verranno descritte le formule empiriche (*Magic Formula*) che, pur non avendo nessun legame con la realtà fisica e quindi con il comportamento effettivo del pneumatico stesso, cercano di approssimare in modo semplice ma accurato gli andamenti rilevati sperimentalmente di forze e momenti. Queste formule empiriche vengono principalmente impiegate nella formulazione di modelli matematici per lo studio della dinamica dell'intero veicolo.

1.1 Cinematica

All'asse della ruota viene imposto un moto puramente *traslatorio* con velocità \mathbf{V} parallela alla strada. La strada è supposta perfettamente piana e orizzontale, oltre che ferma. La velocità di rotazione del cerchio della ruota attorno al suo asse è indicata con Ω (è appena il caso di osservare che non avrebbe senso parlare di velocità di rotazione del pneumatico perché non si tratta di un corpo assimilabile ad un corpo rigido).

In Fig. 1.1 è indicato il sistema di riferimento adottato.



Sistema di riferimento.

L'origine O viene presa sul piano stradale e coincidente con il "centro" dell'impronta della ruota. Più precisamente, l'origine O viene individuata dall'intersezione di tre piani: il piano stradale, il piano medio longitudinale del cerchio e il piano verticale contenente l'asse di rotazione della ruota. L'intersezione del piano longitudinale con la strada individua l'asse x , diretto nel senso di avanzamento della ruota, mentre l'asse z è ortogonale alla strada e diretto verso l'alto. L'asse y , ortogonale agli altri due, coincide con la proiezione sul piano stradale dell'asse della ruota ed è diretto in modo da considerare positive le rotazioni antiorarie. In definitiva $(x, y, z; O)$ non è altro che il sistema di riferimento cartesiano disposto in modo abbastanza naturale. Rispetto alla strada, ha anch'esso moto traslatorio con velocità \mathbf{V} .

E' importante osservare che la definizione del sistema di riferimento $(x, y, z; O)$ non cambia se il piano medio della ruota non è perpendicolare alla strada, ma inclinato di un angolo γ detto di campanatura o di camber (Fig. 1.1).

Le azioni trasmesse dalla strada alla ruota hanno come risultante una forza \mathbf{F} che, in generale, non passa per l'origine O del sistema di riferimento scelto. E' quindi necessario introdurre una coppia di trasporto \mathbf{M} se, come di consueto, si vuole rappresentare la risultante con un vettore per O . Si ha così che tutte le azioni elementari sono equivalenti ad una forza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ per O e ad una coppia $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$.

Dato che i due assi x e y giacciono sul piano stradale si ha una netta separazione di ruoli: le azioni tangenziali dovute all'aderenza determinano le componenti F_x , F_y e M_z , dette rispettivamente, forza longitudinale, forza laterale, e momento di autoallineamento, mentre le azioni normali alla strada (cioè la distribuzione di pressione) contribuiscono solo alle

componenti M_x , M_y e F_z , cioè, al momento di ribaltamento, al momento di resistenza al rotolamento e alla forza verticale.

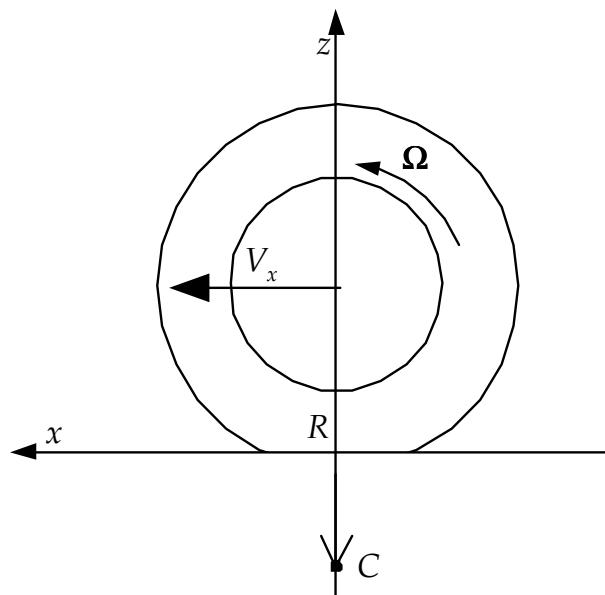
L'angolo α viene chiamato angolo di deriva e rappresenta l'angolo fra l'asse x e la velocità di avanzamento V . L'asse ha quindi un moto traslatorio di componenti

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha, \\ V_y &= -V \sin \alpha. \end{aligned}$$

Il cerchio, oltre che a traslare, ha anche un moto rotatorio intorno al proprio asse con velocità angolare $\Omega = (0, \Omega, 0)$ dipendente dalla velocità \mathbf{V} , dalla coppia \mathbf{T} applicata all'asse della ruota (coppia motrice se $\mathbf{T} > 0$, o frenante se $\mathbf{T} < 0$), dall'angolo di deriva α dal carico verticale F_z , nonché dal tipo di pneumatico, dalla pressione di gonfiaggio, etc.

Noti $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$ ed $\Omega = (0, \Omega, 0)$ è possibile, in ogni istante, individuare l'asse elicoidale (o asse di Mozzi) dell'atto di moto del cerchio. Come noto, i punti dell'asse elicoidale hanno velocità parallela al vettore velocità angolare. Pertanto, nel caso in esame, l'asse elicoidale è sempre parallelo all'asse y ed i suoi punti hanno velocità $(0, -V \sin \alpha, 0)$. Se si indica con R la distanza con segno fra l'asse del cerchio e l'asse elicoidale si ottiene subito (Fig. 1.2)

$$R = \frac{V_x}{\Omega}. \quad (1.1)$$



Traccia C dell'asse elicoidale del cerchio.

Nel caso particolare in cui si abbia angolo di deriva nullo ($\alpha = 0$), ovvero $V_y = 0$, l'asse elicoidale diventa un asse di istantanea rotazione e tutti i suoi punti hanno velocità nulla. E' evidente che l'asse elicoidale si trova sempre "sotto" all'asse del cerchio, ossia a distanza R

verso il basso, come illustrato in Fig. 1.2 , in cui si è indicata con C la traccia dell'asse elicoidale nel piano coordinato $x-z$.

Convenzionalmente si parla di *puro rotolamento* quando la ruota con pneumatico rotola in direzione perfettamente longitudinale ($\alpha = 0$) e senza coppia applicata all'asse (ruota folle: $T = 0$). In queste particolari condizioni, fissato il carico verticale F_z agente sulla ruota e la velocità V del suo asse, il cerchio ruoterà con una certa velocità angolare che viene indicata con Ω_0 .

La distanza $R = R_0$ fra l'asse di istantanea rotazione del cerchio (e non del pneumatico che non può essere considerato corpo rigido) e l'asse della ruota è, dalla (1.1) in cui si ponga $V_x = V$ e $\Omega = \Omega_0$,

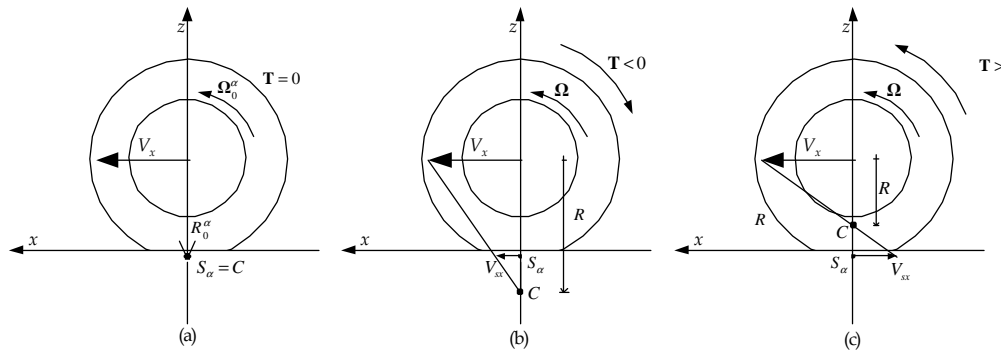
$$R_0 = \frac{V}{\Omega_0} \quad (1.2)$$

In generale R_0 è maggiore della distanza h da terra del centro ruota, ma è inferiore al raggio esterno R_e della ruota indeformata ($h < R_0 < R_e$). Pertanto in condizioni di puro rotolamento, l'asse elicoidale si trova sotto il piano stradale. Si noti che R_0 non può essere misurato direttamente, ma ottenuto solo tramite la (1.2).

Se, a parità di tutti gli altri parametri, alla ruota non viene applicata alcuna coppia ma presenta un angolo di deriva $\alpha \neq 0$, si avrà una velocità di rotazione del cerchio Ω_0^α , minore di Ω_0 . Inoltre, dato che il cerchio non ha più moto piano, l'asse di istantanea rotazione viene rimpiazzato dall'asse elicoidale. In base alla (1.1) anche in queste nuove condizioni si può calcolare la distanza $R = R_0^\alpha$ (Fig. 1.3(a))

$$R_0^\alpha = \frac{V \cos \alpha}{\Omega_0^\alpha} \quad (1.3)$$

fra l'asse della ruota e l'asse elicoidale associato al moto del cerchio. In queste particolari condizioni, la traccia dell'asse elicoidale sul piano $x-z$ viene indicata con S_α , come mostrato in Fig. 1.3(a).



Effetto dell'applicazione di una coppia T sulla posizione della traccia C dell'asse elicoidale del cerchio.

In definitiva, R_0 non è che il valore assunto da R_0^α quando $\alpha = 0$; entrambi sono stati definiti per $T = 0$.

L'applicazione all'asse del cerchio di una coppia $T \neq 0$, come in Fig. 1.3 (b) e Fig. 1.3 (c), porta ad una velocità angolare Ω del cerchio stesso diversa da Ω_0^α e quindi ad un riposizionamento dell'asse elicoidale, che verrà a trovarsi ad una distanza $R = V \cos \alpha / \Omega$ dall'asse della ruota. In queste nuove condizioni di funzionamento il punto S_α , definito in precedenza (e quindi ancora a distanza R_0^α) ha, come mostrato in Fig. 1.3(b) e Fig. 1.3(c), una velocità \mathbf{V}_s rispetto alla strada, che viene detta *velocità di scorrimento* e le cui componenti sono date da

$$\mathbf{V}_s = \begin{cases} V_{sx} = V_x - V_r = V \cos \alpha - \Omega R_0^\alpha = (\Omega_0^\alpha - \Omega) R_0^\alpha \\ V_{sy} = -V_y = -V \sin \alpha = -\Omega_0^\alpha R_0^\alpha \tan \alpha. \end{cases} \quad (1.4)$$

La velocità di scorrimento \mathbf{V}_s è quindi diretta secondo l'asse x se $\alpha = 0$ e come l'asse y se $T = 0$, ovvero se $\Omega = \Omega_0^\alpha$. Inoltre il verso di V_{sx} dipende dal segno di T . Infatti, come illustrato in Fig. 1.3(b), si ha $T < 0$ (si applica alla ruota una coppia frenante) e V_{sx} è concorde con \mathbf{V} (velocità di avanzamento della ruota) mentre l'asse elicoidale risulta ancora al di sotto del piano stradale. Invece se $T > 0$ (si applica alla ruota una coppia motrice), come illustrato in Fig 1.3(C), V_{sx} è opposto a \mathbf{V} ed inoltre l'asse elicoidale si è spostato al di sopra del piano stradale (cioè nel semipiano $z > 0$).

E' utile definire un vettore ausiliario $\mathbf{V}_r = (\Omega R_0^\alpha, 0, 0)$. La velocità \mathbf{V}_r può a buon diritto essere chiamata *velocità di rotolamento* in quanto rappresenta quella parte di \mathbf{V} che non comporta strisciamento fra ruota e strada. Si ha infatti la relazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_s \quad (1.5)$$

Dato che le velocità \mathbf{V} , \mathbf{V}_s , \mathbf{V}_r hanno sempre la terza componente nulla, da questo punto in poi si considerano, per semplicità, come vettori a due componenti.

Per caratterizzare completamente il moto del cerchio sono sufficienti i valori di \mathbf{V} , α e Ω . E' però più utile introdurre due parametri adimensionali che meglio esprimono lo scostamento dalle condizioni di funzionamento con $\mathbf{T} = 0$. Si definisce, quindi, il vettore *scorrimento teorico*

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{V}_s}{V_r} = \left(\frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} - 1; -\frac{\Omega_0^\alpha}{\Omega} \tan \alpha \right). \quad (1.6)$$

Ad esempio, nel caso di ruota bloccata ($\Omega = 0$) con $\alpha = 0$ si ha $\boldsymbol{\sigma} = (+\infty, 0)$ mentre $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ in condizioni nominali di puro rotolamento ($\Omega = \Omega_0^\alpha = \Omega_0$ e $\alpha = 0$).

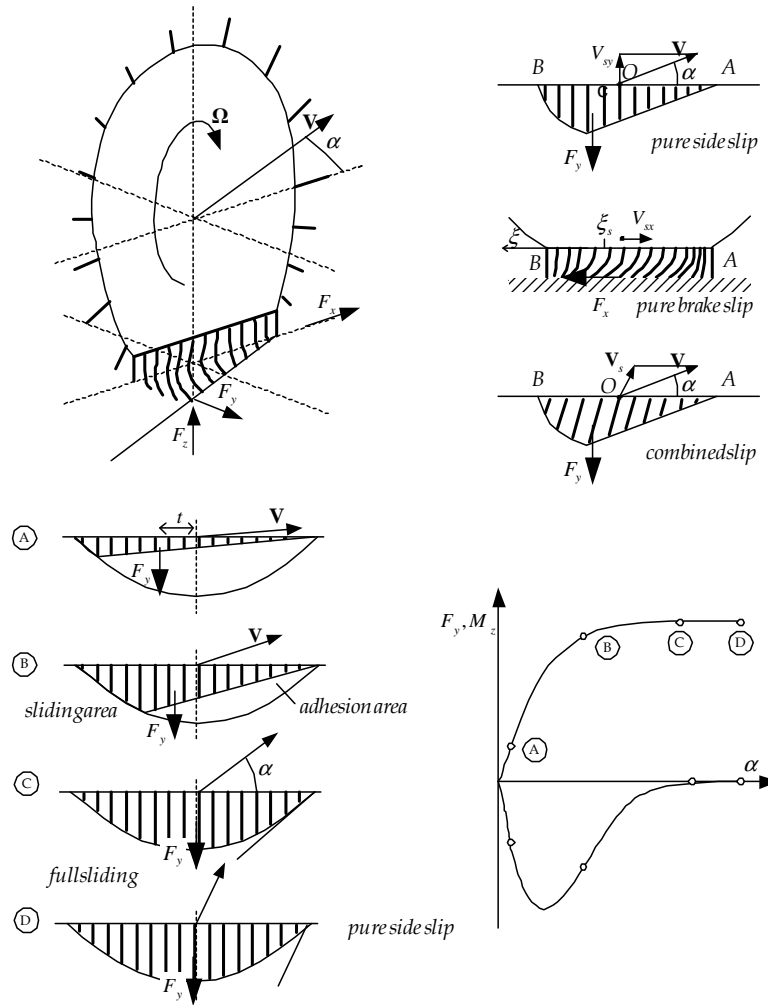
Si definisce, invece, il vettore scorrimento pratico $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{V}_s}{V_x} = \left(1 - \frac{\Omega}{\Omega_0^\alpha}; -\tan \alpha \right). \quad (1.7)$$

Ad esempio, se $\mathbf{T} = 0$ si ha scorrimento longitudinale $s_x = 0$, mentre se $\alpha = 0$ si ha scorrimento laterale $s_y = 0$. Nel caso di ruota bloccata ($\Omega = 0$) con $\alpha = 0$ si ha $\mathbf{s} = (1, 0)$.

1.2 Il modello "a spazzola" (*Brush Model*)

Il modello "a spazzola" ([1], [2]) pur con la semplicità, consente di comprendere i principali aspetti del comportamento del pneumatico. L'insieme cerchione + pneumatico viene schematizzato con un *disco* sottile (di larghezza infinitesima) di raggio R_e deformabile solo in senso radiale al quale è ancorato il battistrada che può essere visto come un insieme di *setole* radiali, ciascuna di lunghezza trascurabile, deformabili solo in senso longitudinale e trasversale e perfettamente rigide in senso radiale (vedi fig. 1.4).



Modello a spazzola.

Le punte delle setole entrano in contatto con la superficie stradale e vi possono aderire se le condizioni di aderenza lo permettono. Grazie alla loro deformabilità, una eventuale velocità relativa non nulla V_s del disco rispetto alla strada nella zona di contatto A - B può, entro certi limiti, essere compensata dalla deformazione delle setole senza dar luogo a strisciamenti delle loro punte sulla strada. Una ipotesi fondamentale del modello è che la deformazione di ciascuna setola sia indipendente dalle altre. Per semplicità nel seguito si suppone che l'angolo di camber sia nullo.

Siano $2b$ e $2a$ rispettivamente la larghezza e la lunghezza dell'impronta di contatto (supposta rettangolare) tra pneumatico e strada, simmetrica rispetto all'origine O del sistema di riferimento definito nel § 1.1. Se si ipotizza trascurabile la resistenza al rotolamento ($M_y = 0$), è possibile assumere un andamento simmetrico rispetto all'asse z della pressione di contatto $p(x)$ tra disco e strada ($-a \leq x \leq a$). In particolare si assume un andamento parabolico fra i punti A (leading edge) e B (trailing edge) in corrispondenza dei quali la pressione è nulla:

$$p = p(x) = p_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (1.8)$$

dove $p_0 = p(0)$ è il valore massimo. Per semplicità si assume che la pressione sia uniforme in senso trasversale.

Il valore della pressione massima p_0 dipende, oltre che dalle dimensioni dell'impronta di contatto, dal carico verticale gravante sulla ruota; infatti dall'equilibrio verticale discende:

$$p_0 = \frac{3}{8ab} F_z \quad (1.9)$$

Per le successive analisi è conveniente introdurre una coordinata locale ξ con origine in A e diretta in senso opposto ad x , così da avere il tratto di contatto individuato da $0 \leq \xi \leq 2a$ (fig. 1.4). La pressione di contatto p può esprimersi in funzione di ξ secondo la legge

$$p = \hat{p}(\xi) = \frac{p_0}{a^2} (2a\xi - \xi^2)$$

Il modello più semplice si ha supponendo un comportamento elastico *lineare* ed *isotropo* di ciascuna setola, ovvero un legame lineare tra la deformazione \mathbf{e} della punta della setola e la tensione tangenziale \mathbf{t} esercitata dalla strada sulla setola stessa:

$$\mathbf{t}(\xi) = k \mathbf{e}(\xi) \quad (1.10)$$

Il parametro k rappresenta la rigidezza flessionale della singola setola e dipende dalle caratteristiche costruttive del pneumatico.

Il punto A di inizio dell'impronta a terra è il punto in cui ciascuna setola stabilisce il contatto con la strada (fig. 1.4). Pertanto, la setola che si trova in certo istante in A è indeformata. Nel passare da A a B ogni setola subisce una deformazione a causa della velocità relativa \mathbf{V}_s fra strada e disco. Il tempo t di permanenza di setola nel tratto di contatto dipende dal modulo della velocità di rotolamento secondo la relazione $t = \xi / V_r$. La generica setola con punto base di coordinata ξ può quindi *potenzialmente* subire una deformazione \mathbf{e} del suo apice pari a

$$\mathbf{e}(\xi) = -\mathbf{V}_s t = -\frac{\mathbf{V}_s}{V_r} \xi = -\boldsymbol{\sigma} \xi \quad (1.11)$$

Si parla di deformazione potenziale perché per realizzarsi deve essere compatibile con le condizioni di *aderenza* locale. In genere per coefficiente di aderenza μ_0 si intende il valor medio del coefficiente di attrito statico (o di primo distacco) tra ruota e strada. Il coefficiente

di aderenza in genere non è costante ma dipende da innumerevoli fattori; oltre che dalle caratteristiche delle superfici a contatto si ha una certa dipendenza dai valori locali della velocità di strisciamento, della temperatura e della pressione relativa.

In questa sede si preferisce assumere, per semplicità, una discontinuità tra coefficiente di aderenza μ_0 e coefficiente di aderenza in condizioni di strisciamento macroscopico μ_1 definito coefficiente di aderenza limite:

$$\mu_0 = (1 + \chi)\mu_1 \quad (1.12)$$

con $\chi > 0$.

Viene inoltre ipotizzato che il coefficiente di aderenza non dipenda dalla direzione di scorrimento.

L'espressione (1.11) è valida, pertanto, fino a quando la tensione tangenziale non raggiunge il valore dato dal prodotto del coefficiente di aderenza μ_0 e la pressione locale $p(\xi)$. In altre parole il valore massimo della deformazione elastica della singola setola è data :

$$|e(\xi)| \leq 2a\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_m}\right) = e_m(\sigma) \quad (1.13)$$

dove con σ_m si è indicato lo scorrimento limite

$$\sigma_m = \frac{2\mu_0 p_0}{ka} = \frac{3\mu_0 F_z}{4ka^2 b} \quad (1.14)$$

Il valore limite σ_m dello scorrimento è inversamente proporzionale alla rigidezza k del pneumatico.

All'interno della impronta di contatto possiamo distinguere due zone: la zona aderente all'interno della quale la tensione tangenziale è una funzione lineare dello scorrimento σ ed una zona di slittamento in cui la tensione tangenziale ha un andamento dipendente dalla pressione di contatto $p(\xi)$ (fig. 1.4 e 1.5). Il punto di passaggio tra le due zone è dato semplicemente da:

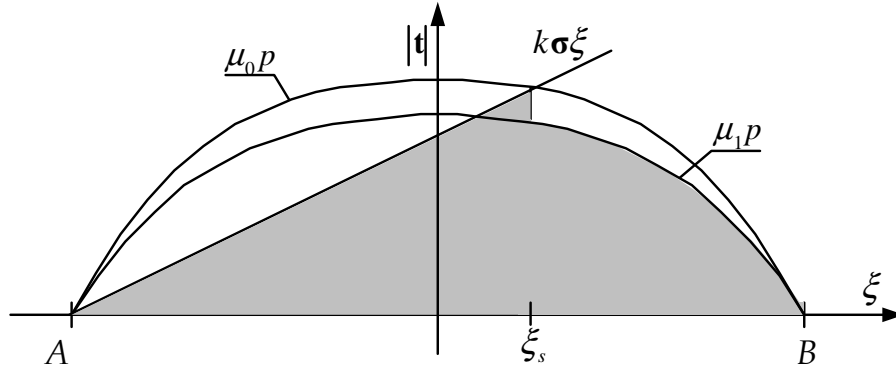
$$\xi_s(\sigma) = 2a \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_m}\right) \quad (1.15)$$

Pertanto in condizioni di scorrimento limite, essendo $\xi_s = 0$, tutta l'impronta si trova in condizioni di slittamento.

In definitiva, nell'impronta di contatto si ha in generale la seguente distribuzione di tensioni tangenziali:

$$\mathbf{t}(\xi) = \begin{cases} -\sigma k \xi, & \text{se } 0 \leq \xi \leq \xi_s \text{ (zona di aderenza)} \\ -\frac{\sigma}{\sigma} \mu_1 p(\xi), & \text{se } \xi_s \leq \xi \leq 2a \text{ (zona di slittamento)} \end{cases} \quad (1.16)$$

A causa della deformabilità del pneumatico si hanno nell'impronta due zone in condizioni differenti: una zona iniziale in condizioni di aderenza ed una zona finale in condizioni di slittamento (fig. 1.4 e 1.5).



Distribuzione delle tensioni tangenziali lungo la linea mediana dell'impronta a terra.

La zona di slittamento si trova sempre nella parte terminale dell'impronta a terra, indipendentemente dal fatto che la coppia \mathbf{T} sia frenate o motrice e indipendentemente dalla direzione di deriva. E' il segno di Ω , non quello di σ che posiziona le due zone. Nella zona aderente le azioni tangenziali dipendono essenzialmente dalla rigidezza k del pneumatico, mentre nella zona di slittamento dipendono dal coefficiente di aderenza μ_1 . La transizione tra le due zone è determinata dai parametri che definiscono ξ_s .

La risultante di tutte le tensioni tangenziali \mathbf{t} costituisce la forza tangenziale totale \mathbf{F}_t agente sul pneumatico. Se $0 \leq \xi_s \leq 2a$, ovvero $\sigma \leq \sigma_m$, si ha per la (1.16)

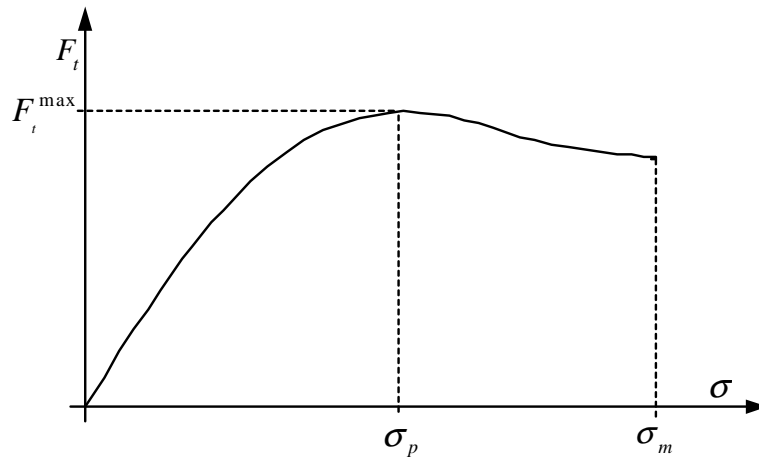
$$\mathbf{F}_t = 2b \int_0^{2a} \mathbf{t}(\xi) d\xi = -\frac{\sigma}{\sigma} 2b \left[k\sigma \int_0^{\xi_s(\sigma)} \xi d\xi + \mu_1 \int_{\xi_s(\sigma)}^{2a} \hat{p}(\xi) d\xi \right] = -\frac{\sigma}{\sigma} F_t(\sigma) \quad (1.17)$$

Utilizzando il legame tra ξ_s e σ (1.15) e la (1.9) è possibile esplicitare la funzione $F_t(\sigma)$, modulo della forza tangenziale \mathbf{F}_t , valida se $\sigma \leq \sigma_m$

$$F_t = F_t(\sigma) = \mu_1 F_z \left[1 - (1 - \theta)^3 + 3\chi\theta(1 - \theta)^2 \right] \quad (1.18)$$

dove, per brevità, si è definito il rapporto θ

$$\theta = \frac{\sigma}{\sigma_m} \quad (1.19)$$



Andamento qualitativo della forza tangenziale in funzione dello scorrimento.

In Fig. 1.6 è riportato il tipico andamento di F_t in funzione di σ secondo la (1.18) fino alla condizione di slittamento di tutta l'impronta $\sigma = \sigma_m$; oltre tale valore la forza tangenziale si mantiene costantemente uguale a $\mu_1 F_z$. La forza tangenziale F_t raggiunge il massimo valore F_t^{\max} per $\theta = \theta_p$ con

$$\theta_p = \frac{1 + \chi}{1 + 3\chi} \quad (1.20)$$

Pertanto, essendo $\chi > 0$, la massima forza tangenziale si ha per $\theta_p < 1$, ovvero quando solo una parte dell'impronta è in condizioni di strisciamento.

Il valore dello scorrimento per avere la massima forza tangenziale è dato pertanto da

$$\sigma_p = \theta_p \sigma_m = \left(\frac{1 + \chi}{1 + 3\chi} \right) \frac{3\mu_0 F_z}{4ka^2 b} \quad (1.21)$$

Il valore F_t^{\max} può essere desunto dalle relazioni (1.18) e (1.20)

$$F_t^{\max} = F_t(\sigma_p) = \mu_1 F_z \left(1 + \frac{4\chi^3}{(3\chi + 1)^2} \right) \quad (1.22)$$

Dalle relazioni (1.20), (1.21) e (1.22) si nota come, nel modello in esame, la rigidezza k del pneumatico ha influenza sul valore di σ_p , ma non su θ_p e sul valore massimo di F_t . In altre

parole, variando solo la rigidezza del pneumatico si può avere una inclinazione iniziale più o meno pronunciata della funzione $F_t(\sigma)$, ma non si può influenzare la massima forza tangenziale che dipende solo dalle condizioni di aderenza e dal carico verticale F_z .

Una misura della *prontezza di risposta* del pneumatico per piccoli valori dello scorrimento σ è fornita dalla derivata di $F_t(\sigma)$ calcolata nell'origine:

$$C = \left. \frac{dF_t}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{3\mu_0 F_z}{\sigma_m} = 4ka^2b \quad (1.23)$$

E' interessante osservare che la rigidezza C non dipende dalle condizioni di aderenza, ma solo dalla rigidezza k del pneumatico e dalle dimensioni dell'impronta.

In base a quanto esposto, si può concludere che per piccoli valori dello scorrimento il comportamento del pneumatico è determinato principalmente dalle sue caratteristiche strutturali, compresa la pressione di gonfiaggio, mentre il comportamento per valori di scorrimento prossimi a quello limite è sostanzialmente influenzato dalle condizioni di aderenza.

Una volta ottenuta l'espressione della forza tangenziale F_t , è possibile ricavare le due componenti F_x ed F_y ,

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(\sigma_x, \sigma_y) = -\frac{\sigma_x}{\sigma} F_t(\sigma) \\ F_y &= F_y(\sigma_x, \sigma_y) = -\frac{\sigma_y}{\sigma} F_t(\sigma) \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$

Anche per le due componenti si possono utilizzare gli sviluppi di Taylor nell'intorno di $\sigma = 0$, utili qualora si vogliano utilizzare modelli linearizzati

$$\begin{aligned} F_x &= -C\sigma_x + O(\sigma^2) \\ F_y &= -C\sigma_y + O(\sigma^2) \end{aligned} \quad (1.25)$$

dove C è la rigidezza definita in (1.23). Più precisamente valgono le seguenti relazioni

$$C = \left. \frac{dF_t}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = - \left. \frac{\partial F_x}{\partial \sigma_x} \right|_{\sigma=0} = - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \sigma_y} \right|_{\sigma=0}$$

mentre

$$\left. \frac{\partial F_x}{\partial \sigma_y} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial F_y}{\partial \sigma_x} \right|_{\sigma=0} = 0$$

Se si vuole far comparire l'angolo di deriva α si può utilizzare il seguente legame generale

$$\sigma_y = -(1 + \sigma_x) \tan \alpha \quad (1.26)$$

Avendo stabilito una dipendenza di σ_y da σ_x ed α , ha senso considerare la derivata parziale della forza laterale $\hat{F}_y(\sigma_x, \alpha) = F_y(\sigma_x, -(1 + \sigma_x) \tan \alpha)$ rispetto ad α . In particolare si ottiene

$$C_\alpha = \left. \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha=0 \\ \sigma_x=0}} = C \quad (1.27)$$

La grandezza C_α viene comunemente chiamata *rigidezza di deriva* e nel modello a spazzola è uguale a C , anche se ciò non è necessariamente vero nella realtà.

Tenendo conto del legame $\sigma_x = s_x / (1 - s_x)$ fra gli scorrimenti longitudinali, è immediato ottenere che $d\sigma_x / ds_x = 1$ quando $s_x = 0$. Pertanto, anche la rigidezza longitudinale $C_s = \partial F_x / \partial s_x$, nel modello a spazzola, è uguale a C .

Nella realtà, comunque, ci possono essere apprezzabili differenze nei valori misurati delle due rigidezze, C_α e C_s . In genere la rigidezza longitudinale C_s risulta superiore del 50% ca. rispetto alla rigidezza di deriva C_α ; ciò è dovuto principalmente alla flessibilità laterale e torsionale del pneumatico. Per tener conto di questo comportamento sarebbe necessario introdurre, nel modello a spazzola, un comportamento anisotropo della generica setola.

La forza tangenziale \mathbf{F} , in generale non passa per l'origine O del sistema di riferimento (fig. 1.5) in quanto le tensioni tangenziali non sono distribuite in modo simmetrico rispetto ad O . Si ha quindi un momento di sola componente M_z la cui espressione risulta

$$M_z = 2b \int_0^{2a} t_y(\xi) (a - \xi) d\xi = -\frac{\sigma_y}{\sigma} \mu_1 F_z a \left[-\theta(1 - \theta)^3 + \chi(1 - \theta)^2 \theta(4\theta - 1) \right] \quad (1.28)$$

E' evidente che il momento M_z si annulla per $\theta = 0$ (azioni tangenziali nulle) e per $\theta \geq 1$ (scorrimento completo dell'impronta). E' importante però notare che si ha $M_z = 0$ anche per un valore intermedio

$$\theta = \frac{1 + \chi}{1 + 4\chi}$$

Se si vuole linearizzare la relazione (1.28) rispetto allo scorrimento σ è necessario utilizzare la seguente rigidezza

$$\left. \frac{dM_z}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma} \right) C \frac{a}{3} \quad (1.29)$$

Anche questo valore di rigidezza non dipende dalle condizioni di aderenza fra pneumatico e strada. In base alla relazione precedente, per piccoli valori dell'angolo di deriva si ha il seguente legame tra forza laterale e momento M_z

$$M_z = -F_y t = -F_y \frac{a}{3}$$

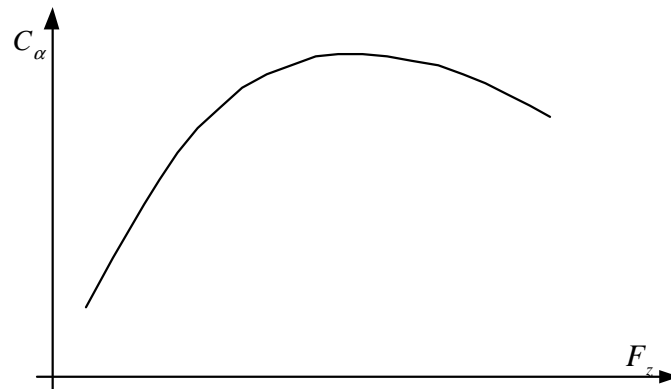
In altri termini, la forza laterale ha un braccio $t = a/3$ rispetto all'origine O , che corrisponde ad un andamento "triangolare" delle tensioni tangenziali.

Tutto quanto riferito fino ad ora sul pneumatico presuppone di mantenere il carico verticale F_z sempre costante. Tuttavia il carico verticale agente su di un pneumatico è largamente variabile a causa principalmente delle azioni inerziali agenti sul veicolo.

Variazioni di F_z non si possono trattare facilmente con il modello a spazzola. Infatti, anche se F_z compare esplicitamente nelle formule, si dovrebbe tener conto dei suoi effetti anche sulle seguenti grandezze: lunghezza $2a$ dell'impronta, rigidezza k del pneumatico, pressione massima p_0 , coefficienti di aderenza μ_0 e μ_1 (a causa della diversa distribuzione della pressione nell'impronta a terra). Se nessuno di questi effetti fosse presente, la funzione $F_l(\sigma)/F_z$ e la rigidezza C sarebbero del tutto indipendenti da F_z . Invece se si assume che la lunghezza di contatto $2a$ vari col quadrato dello schiacciamento del pneumatico ρ e che F_z dipenda linearmente da ρ , si ha che $a^2 \propto F_z$ e di conseguenza, nel modello a spazzola, la forza laterale F_y varia proporzionalmente con F_z mentre il momento M_z è proporzionale a $F_z^{3/2}$.

La realtà è invece ben diversa. La crescita della rigidezza di deriva C_α con F_z non è proporzionale, infatti è sempre meno pronunciata con l'aumentare di F_z stesso (vedi fig. 1.7), fino ad arrivare ad una specie di saturazione. In taluni casi si ha addirittura una diminuzione di C_α quando il carico verticale supera un certo valore di soglia.

Il modello a spazzola può essere adattato per includere il legame non lineare tra la rigidezza di deriva C_α ed il carico verticale F_z facendo sì che la rigidezza k delle setole decresca linearmente con F_z .



Andamento qualitativo della rigidezza di deriva in funzione del carico verticale

Sempre sperimentalmente si è rilevato che un incremento di F_z comporta una lieve diminuzione del rapporto F_t^{\max} / F_z . Probabilmente, si ha una riduzione dei coefficienti aderenza a causa dell'incremento della pressione media dell'impronta.

Infine, vale la pena ricordare che anche lo scorrimento limite

$$\sigma_m = \frac{3\mu_0 F_z}{C}$$

è influenzato da F_z . L'effetto globale è un lieve aumento di σ_m con F_z . Lo stesso vale anche per σ_p , a cui si ha la massima forza tangenziale.

1.3 Comportamento transitorio

A causa della deformabilità della carcassa del pneumatico, il raggiungimento delle condizioni di regime descritte nel paragrafo precedente avviene in maniera progressiva. In altri termini, l'imposizione di un certo scorrimento σ non implica l'immediata generazione di una forza tangenziale F_t . Un semplice modello matematico per descrivere il comportamento del pneumatico può essere il seguente

$$\frac{d}{V} \dot{\tau}_i + \tau_i = \sigma_i(t), \quad i = x, y \quad (1.30)$$

dove la quantità d rappresenta la *lunghezza di rilassamento* mentre $\sigma_i(t)$ rappresenta l'andamento dello scorrimento (longitudinale o laterale) in condizioni di regime.

La relazione (1.30) rappresenta un'equazione differenziale ordinaria non omogenea, del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti (la velocità di avanzamento V è supposta costante) nella funzione incognita τ_i che rappresenta lo scorrimento ritardato. Se lo

scorrimento $\sigma_i(t)$ è costante, cioè $\sigma_i(t) = \bar{\sigma}_i$, e se lo scorrimento iniziale è nullo ($\sigma_i(0) = 0$) la soluzione dell'equazione differenziale diventa

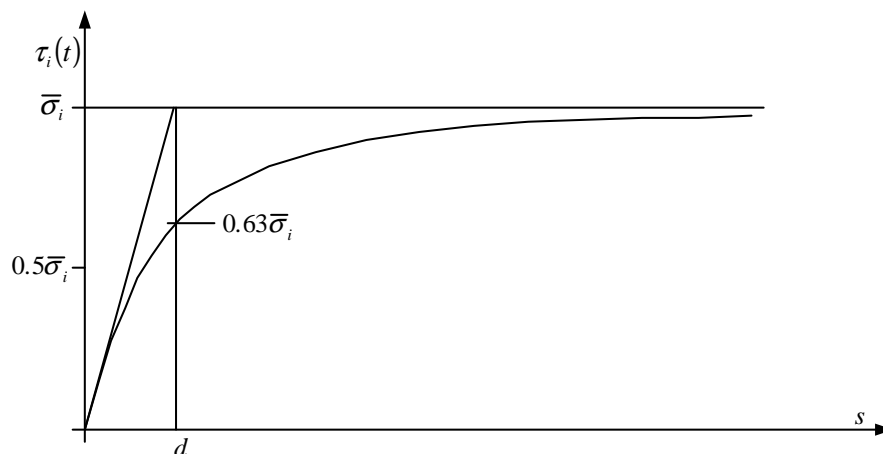
$$\tau_i(t) = \bar{\sigma}_i \left(1 - e^{-\frac{V}{d}t} \right) = \bar{\sigma}_i \left(1 - e^{-\frac{s}{d}} \right)$$

dove s rappresenta lo spazio percorso dalla ruota.

Come illustrato in fig. 1.8, la lunghezza di rilassamento d può essere ottenuta osservando che per $s = d$ si ha $\tau_i = (1 - e^{-1})\bar{\sigma}_i \cong 0.63\bar{\sigma}_i$.

Se lo scorrimento di regime presenta un andamento sinusoidale nel tempo $\sigma_i(t) = \sigma_i^0 \sin(\omega t)$ si ottiene quale integrale particolare

$$\tau_i^p(t) = \frac{\sigma_i^0}{\sqrt{1 + (\omega d / V)^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega d / V))$$



Andamento dello scorrimento ritardato durante un transitorio con scorrimento costante.

Dato che l'integrale dell'omogenea decade rapidamente, questa funzione rappresenta la soluzione di regime. Si noti che l'introduzione della lunghezza di rilassamento porti ad una riduzione dell'ampiezza e ad aumento del ritardo di risposta. Va comunque osservato che il modello (1.30) è stato qui utilizzato in modo improprio perché l'asse della ruota non ha più moto traslatorio.

Questa teoria è ingannevolmente semplice; nella realtà ha notevole influenza la velocità di avanzamento V , dallo scorrimento σ e dal carico verticale F_z .

A livello operativo l'introduzione del comportamento transitorio del pneumatico comporta un aumento delle variabili che descrivono lo stato del sistema (veicolo), infatti la forza tangenziale diventa una funzione incognita del tempo.

1.4 Formule empiriche (Magic Formula)

Per descrivere il comportamento del pneumatico si possono anche utilizzare formule empiriche con le quali si cerca di approssimare in modo semplice ma accurato gli andamenti rilevati sperimentalmente di forze e momenti.

Queste formulazioni vengono principalmente utilizzate nei modelli matematici per lo studio della dinamica dell'intero veicolo. In questo ambito interessa solo fornire una descrizione accurata del comportamento del pneumatico (al di là della interpretazione fisica), inoltre l'impiego di un vero modello di pneumatico richiederebbe un livello di dettaglio così elevato da renderlo ingestibile.

Sebbene da un punto di vista generale si tratti di un semplice problema di approssimazione numerica, tuttavia nel caso del pneumatico si hanno numerosi vincoli da rispettare. In primo luogo, ha notevole importanza approssimare in maniera accurata anche la derivata prima delle funzioni, evitando di avere fluttuazioni della pendenza non presenti nella realtà; di fatto ciò equivale ad avere dei vincoli anche sulla derivata seconda.

Questi aspetti rendono il problema di approssimazione molto più delicato. Un altro aspetto da considerare è la facilità e versatilità di impiego, caratterizzato dal numero di parametri da fissare e dal loro eventuale significato fisico.

Ad oggi le formulazioni più utilizzate fanno riferimento alla cosiddetta *Magic Formula* ([1], [2], [3]) che utilizza, come base di interpolazione, la seguente funzione trascendente:

$$y(x) = D \sin \left(C \arctan \left(Bx - E [Bx - \arctan(Bx)] \right) \right) \quad (1.31)$$

dove alla variabile libera x si può assegnare il significato di angolo di deriva α se con y si indica la forza laterale F_y , oppure di scorrimento longitudinale s_x se si vuole rappresentare l'andamento della forza longitudinale F_x . I quattro parametri B, C, D, E vanno fissati in modo da ottenere l'andamento voluto.

La determinazione dei valori opportuni dei quattro parametri per meglio approssimare dei dati sperimentali richiede la soluzione di un problema di approssimazione non lineare quindi non è banale. Di solito si assume $1 < C < 2$ con $-(1 + C^2/2) < E < 1$ in modo tale da avere una curva che parta con concavità verso il basso e con un solo massimo relativo $y^{\max} = D$. Ecco spiegato perché i parametri C ed E sono detti, rispettivamente, *shape* e *curvature factor*, mentre il parametro D è il *peak value*. Il restante parametro B è utilizzato per fissare la pendenza nell'origine ed è quindi chiamato *stiffness factor*. Spesso i quattro parametri vengono resi dipendenti dal carico verticale F_z e dall'angolo di camber.

Nella formulazione di modelli di veicolo con pneumatici non lineari verrà utilizzata la variante MF-5.2 della *Magic Formula*. Questa particolare formulazione permette di tener conto, tra l'altro, del comportamento transitorio del pneumatico e di condizioni di scorrimento combinato longitudinale e trasversale.

CAPITOLO 2

Modelli per lo studio del sistema autoveicolo

2.1 Introduzione

Il comportamento dinamico di un veicolo e la relativa descrizione è usualmente suddivisa e studiata nei due aspetti di *handling* e *ride*, intendendo con essi rispettivamente: il comportamento direzionale del veicolo e pertanto la sua risposta a perturbazioni esterne rappresentate dai comandi imposti dal guidatore ovvero da forze esterne (si immagini al vento trasversale alla direzione di marcia del veicolo); e il comportamento vibrazionale del veicolo in risposta a perturbazioni esterne rappresentate da forze e spostamenti imposti nei punti di contatto al suolo degli pneumatici a seguito di irregolarità del piano stradale percorso.

La progettazione di un veicolo, inerentemente tali aspetti affinché possa essere considerata valida ed efficace comporta che le scelte progettuali attinenti qualsiasi componente dell'autotelaio siano valutate contestualmente con tutti gli altri affinché sia garantita la funzionalità proposta per l'intero sistema. Nell'ambito della dinamica degli autoveicoli non è ammessa la progettazione di una qualsiasi sottoparte dell'autotelaio in maniera avulsa da tutto il sistema poiché, ad esempio, è impensabile riuscire a definire il comportamento dinamico di una sospensione senza conoscerne quello degli altri elementi con cui, sempre dinamicamente, essa va ad interagire.

In tale contesto è facile capire come lo studio del comportamento dinamico degli autoveicoli necessita di modelli matematici che possano permettere di stimarne il comportamento reale dell'intero sistema in funzione delle scelte progettuali pensate e proposte per i differenti componenti.

Ciò che non deve trarre comunque in inganno è la *complessità* del modello da utilizzare negli studi, intendendo con essa il grado di dettaglio di rappresentazione del sistema veicolo, la quale deve essere commisurata allo studio preposto. Nella fattispecie per la interpretazione delle prove sperimentali e per l'impostazione delle caratteristiche di una nuova vettura è corretto l'utilizzo di modelli semplificati che permettono di contemplarne gli aspetti essenziali mediante parametri equivalenti descrittivi delle sue sottoparti, consentendo di fatto la correlazione tra le caratteristiche di questi ultimi con l'intero sistema. Nei casi di definizione delle caratteristiche progettuali di dettaglio e di confronto, svolto in maniera specifico e particolareggiato, tra singoli elementi o soluzioni progettuali è chiaramente importante disporre ed adottare dei modelli matematici con un elevato grado di rappresentazione che permette una valutazione specifica.

Nei paragrafi seguenti vengono descritti i modelli a bicicletta, a 15 g.d.l. e multibody secondo quello che è lo stato dell'arte attuale con particolare riferimento allo studio handling del veicolo e ai modelli a bicicletta essendo questi il contesto in cui si è inserito il presente lavoro.

2.2 Modelli a bicicletta

2.2.1 Ipotesi semplificative

E' sempre bene avere presenti le ipotesi fatte nello sviluppo di un certo modello matematico. Si eviterà così di impiegare il modello in modo inappropriato, ossia per studiare casi che non verificano adeguatamente le ipotesi fatte. Inoltre, si saprà meglio dove agire per modificare il modello permettendogli di coprire una più vasta gamma di casi.

Per prima cosa si suppone che il veicolo si muova su strada piana e orizzontale, cioè assimilabile ad un piano geometrico. Essendo interessati al solo comportamento direzionale, si può inoltre assumere di evitare brusche frenature ed accelerazioni, ovvero di avere una velocità di avanzamento u costante. Queste ipotesi permettono di trascurare i moti di scuotimento e di beccheggio della carrozzeria che, per inciso, è supposta perfettamente rigida.

Il moto di rollio della cassa può essere trascurato solo imponendo delle restrizioni sui valori di accelerazione laterale ($a_y \leq 0.4g$). I limiti effettivi dipendono dai parametri costruttivi del veicolo quali l'altezza del baricentro h_G , le carreggiate t_i e la rigidità equivalente antirollio del veicolo in esame.

Inoltre, pur trascurando il moto di rollio, è possibile tener conto del suo effetto sul comportamento del pneumatico e quindi sulla dinamica del veicolo utilizzando la caratteristica effettiva dell'assale (vedi § 2.6).

Rimane da considerare il grado di libertà di rotazione δ delle ruote anteriori (sterzanti) intorno all'asse di sterzo che per piccoli angoli di sterzo vengono considerate uguali per le due ruote dello stesso assale ($\delta_i \cong \delta_e$, dove δ_i e δ_e sono riferiti rispettivamente alla ruota interna ed esterna rispettivamente). L'asse di sterzo risulta, in realtà, un asse sghembo definito attraverso gli angoli di incidenza e di inclinazione e le distanze longitudinale e trasversale tra la sua intersezione con il piano stradale ed il centro dell'impronta, rispettivamente braccio a terra longitudinale e braccio a terra trasversale. Per semplicità si suppone che l'asse di sterzo si ortogonale al terreno e passante per il centro ruota. Così facendo si trascurano le variazioni di camber γ , convergenza ε e carreggiata legate alla rotazione delle ruote.

A causa dell'elasticità della tiranteria di sterzo e dei bracci delle sospensioni, nonché dell'effetto di un eventuale sistema di servosterzo, il valore dell'angolo di sterzo delle ruote non è univocamente determinato dalla posizione del volante. Per semplicità si può supporre

di avere un sistema di guida perfettamente rigido. In tal modo la posizione angolare delle ruote sterzanti risulta assegnata e non costituisce una variabile.

Per ultima l'ipotesi di piccoli angoli di sterzo delle ruote, compatibile, tra l'altro, con l'ipotesi precedente di piccoli valori di accelerazione laterale.

L'effetto totale di tutte queste ipotesi è un modello con tre soli gradi di libertà, in cui il veicolo è schematizzato come un unico corpo rigido in moto piano (vedi fig. 2.1).

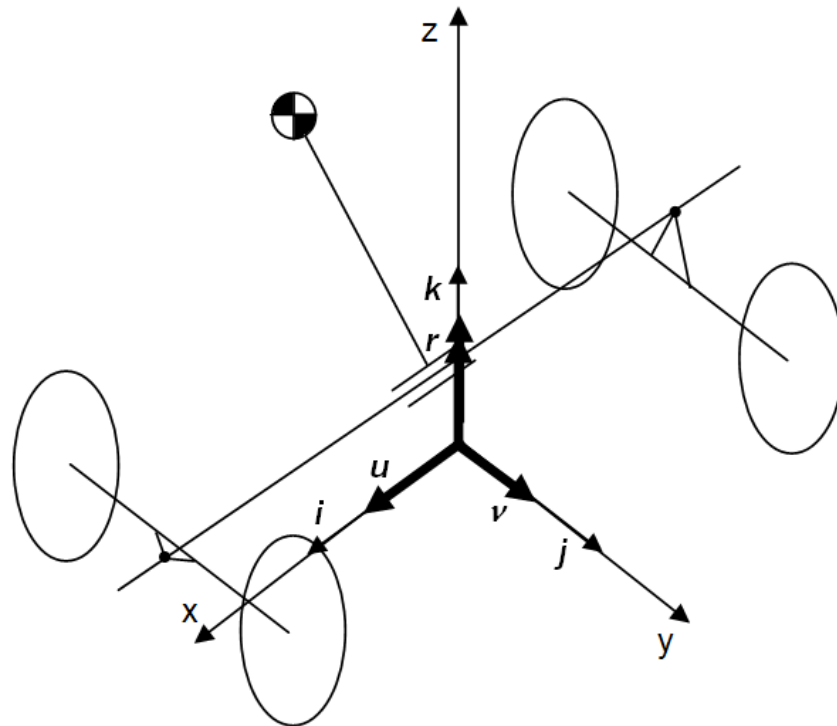


Fig 2.1: modello di veicolo a 3 g.l.: velocità laterale, velocità di imbardata ed angolo di rollio.

Si può ora procedere alla formulazione matematica del modello mediante i seguenti tre gruppi di equazioni, fra loro ben distinti: equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive.

2.2.2 Equazioni di congruenza

L'angolo di deriva α individua la direzione della velocità del centro ruota rispetto al piano di simmetria longitudinale della ruota stessa (assunto positivo se diretto in senso orario). Avendo schematizzato il veicolo come unico corpo rigido, la velocità del baricentro V_G e la velocità di imbardata r determinano univocamente gli angoli di deriva α_{ij} delle quattro ruote.

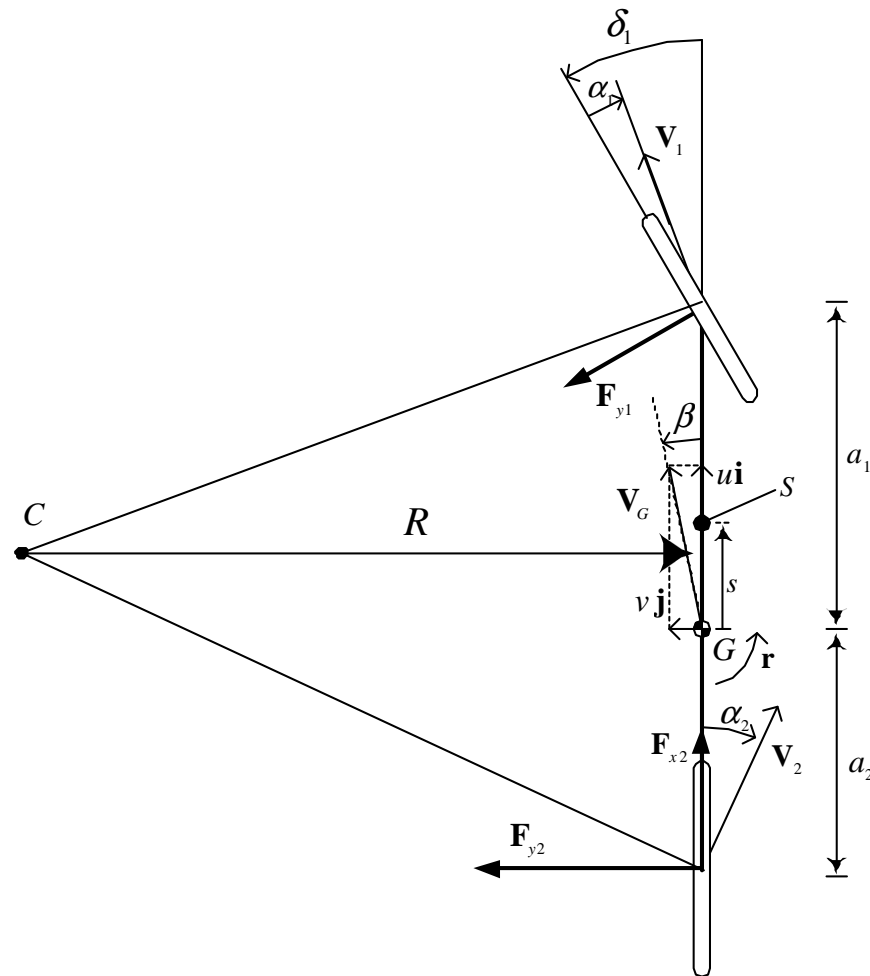


Fig. 2.2: Modello monotraccia classico di autoveicolo.

Come indicato nelle fig. 2.1 e fig. 2.2, è conveniente esprimere la velocità assoluta V_G del baricentro G utilizzando un sistema di riferimento cartesiano $(x, y, z; G)$ solidale con il veicolo e quindi detto di "assi corpo", in cui il versore \mathbf{i} sia diretto longitudinalmente verso la direzione di avanzamento, il versore \mathbf{j} sia diretto trasversalmente verso sinistra e il terzo asse, individuato da \mathbf{k} , sia ortogonale alla strada e diretto verso l'alto. Dato che si considerano solo le velocità, non ha molta importanza posizionare l'origine, ma è prassi comune porla in G .

Si ha così

$$V_G = (u, v, 0) \tag{2.1}$$

ovvero

$$V_G = ui + vj \quad (2.2)$$

La componente u è detta velocità di avanzamento mentre la componente v è detta velocità laterale del veicolo.

L'angolo $\beta = \arctan(v/u)$ fra l'asse longitudinale del veicolo e la direzione della velocità del baricentro viene detto angolo di assetto del veicolo.

Nel sistema di riferimento prescelto, la velocità angolare del veicolo ha, nelle ipotesi fatte, due componenti nulle: $\Omega = (0,0,r)$. Si ha cioè solo imbardata, senza beccheggio e rollio.

Si considerano le velocità assolute dei centri delle ruote al fine di legare gli angoli di deriva alla velocità di imbardata r ed alle componenti u e v .

Analiticamente risulta

$$\begin{aligned} V_{11} &= \left(u - r \frac{t_1}{2}, v + ra_1 \right) \\ V_{12} &= \left(u + r \frac{t_1}{2}, v + ra_1 \right) \\ V_{21} &= \left(u - r \frac{t_2}{2}, v - ra_2 \right) \\ V_{22} &= \left(u + r \frac{t_2}{2}, v - ra_2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ne seguono subito le seguenti relazioni rigorose, in cui le prime due sono relative alle ruote anteriori e le altre due alle ruote posteriori

$$\begin{aligned} \tan(\delta - \alpha_{11}) &= \frac{v + ra_1}{u - r \frac{t_1}{2}} \\ \tan(\delta - \alpha_{12}) &= \frac{v + ra_1}{u + r \frac{t_1}{2}} \\ \tan(-\alpha_{21}) &= \frac{v - ra_2}{u - r \frac{t_2}{2}} \\ \tan(-\alpha_{22}) &= \frac{v - ra_2}{u + r \frac{t_2}{2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se si tiene conto che in normali condizioni di esercizio $u \gg |r|t_i/2$, si ottiene l'importante risultato che le due ruote di uno stesso assale lavorano con angoli di deriva quasi uguali. Si

può quindi indicare con α_1 l'angolo di deriva di entrambe le ruote anteriori e con α_2 l'angolo di deriva delle ruote posteriori. Le precedenti relazioni si riducono così a due

$$\begin{aligned}\tan(\delta - \alpha_1) &= \frac{v + ra_1}{u} \\ \tan(-\alpha_2) &= \frac{v - ra_2}{u}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Nella realtà, in condizioni di normale funzionamento l'angolo di deriva della ruota esterna alla curva è lievemente inferiore a quello della ruota interna, e ciò discende da considerazioni puramente cinematiche. Infatti, come mostrato in fig 2.2, la posizione del centro di istantanea rotazione C definisce univocamente tutti gli angoli di deriva, note che siano le posizioni delle ruote, ovvero i loro angoli di sterzo e/o di convergenza.

Per semplificare ulteriormente, si può considerare che la velocità di avanzamento u è, di norma, ben più elevata della velocità laterale v e delle velocità dovute alla presenza di r . Si ha cioè che $u \gg |v + ra_1|$ e $u \gg |v - ra_2|$.

E' quindi legittimo nelle (2.5) confondere l'arco con la tangente ed ottenere le seguenti equazioni di congruenza linearizzate

$$\begin{aligned}\delta - \alpha_1 &= \frac{v + ra_1}{u} \\ -\alpha_2 &= \frac{v - ra_2}{u}\end{aligned}\tag{2.6}$$

che legano le velocità u, v ed r agli angoli di deriva α_1 e α_2 .

Se valgono le stesse ipotesi, anche l'angolo di assetto β di fig. 2.2 può essere valutato mediante una relazione linearizzata

$$\beta = \frac{v}{u}\tag{2.7}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni di congruenza (2.6) si ottiene l'importante relazione cinematica

$$\delta = (a + b)\frac{r}{u} + \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{l}{R} + \alpha_1 - \alpha_2\tag{2.8}$$

dove si è introdotta la lunghezza (con segno)

$$R = \frac{u}{r} \quad (2.9)$$

Essendo stata ottenuta direttamente dalle (2.6), la relazione (2.8) vale anche in condizioni non stazionarie. La lunghezza R rappresenta semplicemente la distanza del centro di istantanea rotazione C dall'asse del veicolo (fig. 2.2). La lunghezza R è positiva se C si trova dalla sinistra del veicolo ($r > 0$).

Per inciso, si fa notare che la condizione $u \gg |r|t_i/2$, utilizzata in precedenza per ottenere le equazioni (2.6), può essere scritta come $|rR| \gg |r|t_i/2$, ovvero come $|R| \gg t_i/2$, che è forse più espressiva.

La quantità

$$\delta_0 = \frac{l}{R} \quad (2.10)$$

è detta *angolo di Ackermann*, e rappresenta l'angolo di sterzo per percorrere una curva di raggio costante pari ad R , supponendo di avere angoli di deriva nulli (sterzata cinematica).

2.2.3 Equazioni di equilibrio

La stesura delle equazioni di equilibrio richiede due distinte operazioni: il calcolo delle accelerazioni e la valutazione delle forze e dei momenti agenti.

2.2.3.1 Calcolo delle accelerazioni

L'espressione dell'accelerazione \mathbf{a}_G del baricentro si ottiene immediatamente derivando la velocità $\mathbf{v}_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ (eq. (2.2)) rispetto al tempo t . Naturalmente, occorre tener presente che i versori cambiano direzione durante il moto per cui $d\mathbf{i}/dt = r\mathbf{j}$ e $d\mathbf{j}/dt = -r\mathbf{i}$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \dot{u}\mathbf{i} + u r \mathbf{j} + \dot{v}\mathbf{j} - v r \mathbf{i} \\ &= (\dot{u} - v r)\mathbf{i} + (\dot{v} + u r)\mathbf{j} \\ &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2.11)$$

In questo modo si è scomposta \mathbf{a}_G in *accelerazione longitudinale*

$$a_x = \dot{u} - v r \quad (2.12)$$

e in accelerazione laterale

$$a_y = \dot{v} + ur = \dot{v} + \frac{u^2}{R} \quad (2.13)$$

rispetto all'asse del veicolo.

Per i successivi sviluppi è utile definire l'accelerazione laterale a regime

$$\tilde{a}_y = ur = \frac{u^2}{R} \quad (2.14)$$

così da avere $a_y = \dot{v} + \tilde{a}_y$. Se si rapporta \tilde{a}_y all'accelerazione di gravità g si ottiene

$$k = \frac{\tilde{a}_y}{g} \quad (2.15)$$

il cui valore massimo è spesso detto tenuta in curva.

Per concludere il calcolo delle accelerazioni non rimane da considerare che l'accelerazione angolare data semplicemente da $\dot{\Omega} = (0,0,\dot{r})$.

2.2.3.2 Forze e momenti

Su un autoveicolo agiscono tre tipi di forze: la forza peso dovuta alla gravità, le reazioni sulle quattro ruote dovute al contatto pneumatico-strada e le forze aerodinamiche dovute alla presenza dell'aria.

Le azioni esterne agenti sul veicolo danno luogo, in ogni istante, ad una forza risultante agente lungo una certa retta di applicazione. Rispetto al sistema di riferimento di assi corpo $(x, y, z; G)$, si indicano con (X, Y, Z) le tre componenti della forza risultante agente globalmente sul veicolo e con (L, M, N) le sue tre componenti di momento.

Le tre equazioni di equilibrio (in forma newtoniana) dell'unico corpo rigido in moto piano, di massa m e momento di inerzia $J = J_z$ rispetto all'asse verticale z per G , si possono quindi indicare sinteticamente nel modo seguente

$$\begin{aligned} ma_x &= X \\ ma_y &= Y \\ J\dot{r} &= N \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove $X = \Sigma$ forze longitudinali, $Y = \Sigma$ forze laterali e $N = \Sigma$ momenti intorno all'asse z . In base alle relazioni (2.12) e (2.13) si ha che $a_x = \dot{u} - vr$ e $a_y = \dot{v} + ur$.

Nell'ambito del modello piano in esame, le principali forze agenti sul veicolo sono le forze trasmesse dai pneumatici. A queste si possono aggiungere la resistenza aerodinamica

$$X_a = \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \text{ e l'eventuale spinta laterale del vento } Y_a.$$

Utilizzando le stesse convenzioni introdotte nel capitolo sul comportamento dei pneumatici, si indicano con F_{xij} le componenti longitudinali e con F_{yij} le componenti trasversali delle forze trasmesse dalla strada alle quattro ruote. Si osservi che i termini longitudinale e trasversale sono qui relativi alla ruota e non al veicolo. Per semplicità si suppongono nulli tutti i momenti di autoallineamento M_{zij} . Lo spostamento di pochi centimetri della retta di applicazione delle forze laterali avrebbe ben poca influenza sulla dinamica globale del veicolo.

Nelle F_{xij} vengono inglobate le forze di trazione e la resistenza al rotolamento, anche se queste ultime sono spesso di entità trascurabile rispetto alle altre forze nel moto in curva.

Tenendo conto che per angoli di sterzo fino a circa 15° è lecito porre $\cos \delta \cong 1$ e $\sin \delta \cong \delta$, si ottiene

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) - (F_{y_{11}} + F_{y_{12}}) \delta + (F_{x_{21}} + F_{x_{22}}) - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \delta + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}}) + (F_{y_{21}} + F_{y_{22}}) \\ J\dot{r} &= [(F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \delta + (F_{y_{11}} + F_{y_{12}})] a_1 - (F_{y_{21}} + F_{y_{22}}) a_2 \\ &\quad - (F_{x_{11}} + F_{x_{12}}) \frac{t_1}{2} - (F_{x_{21}} - F_{x_{22}}) \frac{t_2}{2} + (F_{y_{11}} - F_{y_{12}}) \delta \frac{t_1}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

E' conveniente sommare i contributi delle due ruote dello stesso assale ponendo

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= F_{x_{11}} + F_{x_{12}} \\ F_{x_2} &= F_{x_{21}} + F_{x_{22}} \\ F_{y_1} &= F_{y_{11}} + F_{y_{12}} \\ F_{y_2} &= F_{y_{21}} + F_{y_{22}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

in modo da rendere più compatta la notazione.

Se la ripartizione della coppia motrice tra le due ruote dello stesso asse avviene mediante un differenziale ordinario (non autobloccante) e se i due pneumatici dello stesso assale hanno raggi sotto carico uguali, allora si può assumere che $F_{x_{11}} = F_{x_{12}}$ e $F_{x_{21}} = F_{x_{22}}$, con il conseguente annullamento di parte dell'ultima riga in (2.18). Se restringiamo il campo di applicazione ai veicoli a due ruote motrici, quelle dell'assale posteriore, si ha un'ulteriore

semplificazione trascurando le resistenze al rotolamento dei due pneumatici anteriori, ponendo che sia $F_{x11} = F_{x12} = 0$.

Rimane però il termine con $(F_{y11} - F_{y12})\delta t_1/2$. Contenendo la differenza delle forze laterali delle due ruote anteriori, costituisce un termine alquanto "fastidioso" per i successivi sviluppi. Rende infatti vana l'ultima delle posizioni (2.19). A prima vista si può pensare che sia $F_{y11} \cong F_{y12}$, ma come evidenziato durante la formulazione delle equazioni costitutive, anche se le ruote dello stesso asse lavorano con angoli di deriva quasi uguali questo non basta per avere forze laterali quasi uguali.

Come si vedrà in seguito le forze laterali dipendono dal carico verticale gravante su ciascuna ruota ed in curva, a causa dell'accelerazione laterale, sulle due ruote gravano carichi verticali diversi. La differenza tra le forze laterali dell'assale anteriore va moltiplicata per l'angolo di sterzo (in radianti) che abbiamo supposto inferiore dei 15° .

Tutte queste considerazioni fanno sì che non sia del tutto sconsigliato trascurare il termine $(F_{y11} - F_{y12})\delta t_1/2$ con il vantaggio di una notevole semplificazione matematica oltre che formale.

In base a quanto detto, si possono scrivere le equazioni di equilibrio nella seguente forma

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x2} - F_{y1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{y1} + F_{y2} \\ J\dot{r} &= F_{y1} a_1 - F_{y2} a_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

in cui compaiono le componenti longitudinali e laterali delle forze esercitate globalmente da ciascun assale.

Rimanendo in tema di equilibrio, affrontiamo anche il problema della ripartizione di carico verticale fra l'assale anteriore e quello posteriore. In condizioni di marcia rettilinea con velocità uniforme, i carichi verticali agenti sui due assali, rispettivamente F_{z1} ed F_{z2} , discendono dalle seguenti equazioni di equilibrio del veicolo nel piano $x-z$

$$\begin{aligned} F_{z1} + F_{z2} - mg &= 0 \\ -F_{z1} a_1 + F_{z2} a_2 + X_a h_a &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} F_{z1} &= \frac{mga_2}{l} + X_a \frac{h_a}{l} = W_1 + X_a \frac{h_a}{l} \\ F_{z2} &= \frac{mga_1}{l} - X_a \frac{h_a}{l} = W_2 - X_a \frac{h_a}{l} \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove si indicato con h_a la distanza dal piano stradale della forza di resistenza aerodinamica X_a agente sul veicolo.

Se il veicolo si trova in curva e/o in condizioni non stazionarie le precedenti equazioni equilibrio subiscono delle modifiche dovute alla componente longitudinale dell'accelerazione a_G ed al prodotto di inerzia J_{zx}

$$\begin{aligned} F_{z1} + F_{z2} - mg &= 0 \\ -F_{z1} a_1 + F_{z2} a_2 + X_a h_a &= m(\dot{u} - vr)h_G - J_{zx} r^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

In condizioni stazionarie $\dot{u} = 0$, ma gli altri effetti permangono, anche se vengono spesso trascurati perché abbastanza piccoli.

2.2.4 Equazioni costitutive

Per completare il modello di veicolo, resta da definire il comportamento di ciascun pneumatico. La forza laterale F_{yij} (dove con i e j in questo contesto si indicano rispettivamente l'assale - 1 se anteriore, 2 se posteriore - e il lato della vettura - 1 se sinistro, 2 se destro), esercitata dalla strada su ciascuna ruota, dipende principalmente dal corrispondente angolo di deriva α_{ij} , ma non solo; anche supponendo noto il coefficiente di aderenza, si ha un'influenza non trascurabile del carico verticale F_{zij} , ed anche dall'angolo di camber γ_{ij} e della forza longitudinale F_{xij} .

Nelle condizioni di moto di pura dinamica laterale, con velocità di avanzamento costante, la forza longitudinale delle ruote motrici, in presenza di differenziale ordinario, risulta di modesta entità; pertanto l'influenza sulla forza laterale può essere trascurata (assenza di azioni combinate).

In questa trattazione utilizzeremo il modello di pneumatico linearizzato, il modello più semplice fra forza laterale, angolo di deriva ed angolo di camber

$$F_{yij} = C_{\alpha_{ij}} \alpha_{ij} + C_{\gamma_{ij}} \gamma_{ij} \quad (2.22)$$

avendo indicato con $C_{\alpha_{ij}}$ e $C_{\gamma_{ij}}$ rispettivamente la rigidezza e di deriva e di camber del pneumatico.

Il campo di impiego è limitato a quei casi in cui gli angoli di deriva sono piccoli. Se gli angoli di deriva sono piccoli, ne segue che anche il trasferimento di carico verticale ΔF_{zi} in curva tra le due ruote di uno stesso assale sarà contenuto. Si può quindi linearizzare anche la dipendenza delle rigidzze di deriva $C_{\alpha_{ij}}$ e di camber $C_{\gamma_{ij}}$ da ΔF_{zi} a partire dai valori,

rispettivamente $C_{\alpha_{ij}}^0$ e $C_{\gamma_{ij}}^0$, che assumono in corrispondenza del carico verticale agente sul pneumatico quando il veicolo è in moto rettilineo uniforme con velocità u . Analiticamente si ha

$$\begin{aligned} C_{\alpha_{ij}} &\cong C_{\alpha_i}^0 \pm \zeta_{\alpha_i} \Delta F_{z_i} \\ C_{\gamma_{ij}} &\cong C_{\gamma_i}^0 \pm \zeta_{\gamma_i} \Delta F_{z_i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove ζ_{α} e ζ_{γ} identificano la sensibilità delle rigidezze, di deriva e camber, al carico verticale.

Nella presenta trattazione verrà trascurata l'influenza dell'angolo di camber. Sperimentalmente, infatti, si ha che il rapporto tra la rigidezza di deriva e la rigidezza di camber C_{γ}/C_{α} è pari a 0.05 ca. per un pneumatico radiale. Inoltre l'angolo di camber in una autovettura non supera di norma i 2° con spinte di camber dell'ordine dei 100 N, quindi si tratta di forze di modesta entità.

2.2.5 Modello monotraccia di autoveicolo

A questo punto si tratta di mettere insieme equazioni di congruenza, equazioni di equilibrio ed equazioni costitutive per ottenere le equazioni di stato che sono alla base del famoso modello monotraccia ([1], [2], [3], [4], [5]).

In fig. 2.2 è evidenziato il legame puramente cinematico fra la posizione del centro di istantanea rotazione C e i due angoli di deriva α_1 e α_2 . La posizione di C (e quindi anche la sua distanza R dall'asse del veicolo) è univocamente determinata dalla *direzione* della velocità di due punti del corpo rigido, come, ad es., \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 . La velocità di tutti gli altri punti discende di conseguenza.

Equazioni di congruenza

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \delta - \frac{v + r a_1}{u} \\ \alpha_2 &= -\frac{v - r a_2}{u} \end{aligned}$$

Equazione di equilibrio

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= F_{x_2} - F_{y_1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \\ m(\dot{v} + ur) &= F_{y_1} + F_{y_2} \\ J\dot{r} &= F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 \end{aligned}$$

Equazioni costitutive

$$\begin{aligned} F_{y_1} &= C_1 \alpha_1 \\ F_{y_2} &= C_2 \alpha_2 \end{aligned}$$

Nelle equazioni costitutive le grandezze C_i identificano le rigidezze di deriva effettive di ciascun assale che rappresenta la relazione $Y(\hat{\alpha})$ tra la forza laterale e l'angolo di deriva "apparente" di un assale, cioè l'angolo di deriva dovuto all'angolo di sterzo imposto dal driver e alle velocità dei centri ruota (eq. 2.6). In altri termini l'angolo di deriva *apparente* $\hat{\alpha}$ è l'angolo di deriva del pneumatico α depurato dall'angolo di sterzo ε indotto dalle caratteristiche elastocinematiche della sospensione:

$$F_y = Y(\hat{\alpha}), \quad \hat{\alpha} = \alpha - \varepsilon$$

Una volta fissato il modello non resta che stabilire cosa considerare noto e cosa incognito. Forse la scelta più naturale è supporre assegnate la forza longitudinale F_{x_2} e l'angolo di sterzo $\delta(t)$. Rimangono incognite le tre funzioni $u(t)$, $v(t)$ ed $r(t)$. In base alle equazioni di congruenza si possono esprimere gli angoli di deriva come $\alpha_1 = \alpha_1(u, v, r, t)$ e $\alpha_2 = \alpha_2(u, v, r, t)$ e quindi anche le forze laterali F_{y_1} e F_{y_2} diventano funzioni di u, v, r, t .

Si perviene così ad un sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine in forma normale nelle variabili di stato $u(t)$, $v(t)$ ed $r(t)$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{m} \left[F_{x_2} - F_{y_1} \delta - \frac{1}{2} \rho S C_x u^2 \right] + vr = f_1(u, v, r, t) \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} [F_{y_1} + F_{y_2}] - ur = f_2(u, v, r, t) \\ \dot{r} &= \frac{1}{J} [F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2] = f_3(u, v, r, t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nelle funzioni $f_i(u, v, r, t)$ compare esplicitamente anche il tempo t ed il sistema è detto *non autonomo*.

Un'ulteriore semplificazione del modello la si ottiene supponendo assegnata la velocità di avanzamento, ossia la funzione $u(t)$. Infatti la prima equazione in (2.24) diventa un'equazione algebrica nella nuova incognita che sarà necessariamente la forza di trazione $F_{x_2}(t)$. Si perviene così alla massima semplificazione matematica con le due equazioni di stato nelle variabili $v(t)$ ed $r(t)$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\left(\frac{C_1 + C_2}{mu}\right)v - \left(\frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{mu} + u\right)r + \frac{C_1}{m}\delta \\ \dot{r} &= -\left(\frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{Ju}\right)v - \left(\frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{Ju}\right)r + \frac{C_1 a_1}{J}\delta\end{aligned}\quad (2.25)$$

L'equazione rimanente serve semplicemente per valutare la forza di trazione $F_{x_2}(t)$

$$F_{x_2} = m(\dot{u} - vr) + C_1\left(\delta - \frac{v + r a_1}{u}\right)\delta + \frac{1}{2}\rho S C_x u^2 \quad (2.26)$$

Introducendo la notazione matriciale, il sistema di due equazioni differenziali si può riscrivere come

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} \quad (2.27)$$

dove $\mathbf{w}(t) = (v(t), r(t))$ rappresenta il vettore delle variabili di stato, il vettore dei termini noti è dato da $\mathbf{b} = (C_1\delta(t)/m, C_1 a_1\delta(t)/J)$ e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(u(t)) = -\begin{bmatrix} \frac{C_1 + C_2}{mu} & \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{mu} + u \\ \frac{C_1 a_1 - C_2 a_2}{Ju} & \frac{C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2}{Ju} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

è la matrice dei coefficienti. È importante notare che la matrice \mathbf{A} dipende dalla velocità di avanzamento $u(t)$, ma non dall'angolo di sterzo $\delta(t)$. Il contrario vale per il termine noto \mathbf{b} .

Inoltre, con $u(t)$ assegnata, le equazioni di congruenza (2.6) diventano un legame lineare fra (α_1, α_2) e (v, r) , quindi facile da invertire

$$\begin{aligned}v &= \frac{u}{l}[a_2(\delta - \alpha_1) - a_1\alpha_2] \\ r &= \frac{u}{l}[(\delta - \alpha_1) - \alpha_2]\end{aligned}\quad (2.29)$$

si ha quindi la possibilità di scegliere fra (v, r) e (α_1, α_2) quali variabili di stato.

2.2.5.1 Comportamento a regime

Se il veicolo è stabile, l'integrale particolare $\mathbf{w}_p(t)$ rappresenta il tipo di moto in condizioni di regime (non necessariamente stazionarie se $\dot{\delta}(t) \neq 0$). Infatti, la parte transitoria della soluzione decade e, dopo un tempo sufficientemente lungo, diventa del tutto trascurabile.

Nel caso di sterzo in posizione fissa ($\delta = const.$) e velocità di avanzamento uniforme, il veicolo si stabilizza su un percorso circolare.

Per l'equilibrio globale a regime si ha

$$\begin{aligned} m r_p &= m \tilde{a}_y = F_{y_1} + F_{y_2} \\ F_{y_1} a_1 - F_{y_2} a_2 &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali, tenendo conto delle equazioni costitutive, si ricavano le espressioni degli angoli di deriva α_{i_p}

$$\alpha_{i_p} = \frac{m}{C_i} \frac{l - a_i}{l} \tilde{a}_y = \frac{W_i}{C_i} \frac{\tilde{a}_y}{g} \quad (2.30)$$

Tenendo conto della (2.8) si ha che la differenza tra l'angolo di sterzo imposto δ e l'angolo di Ackermann $\delta_0 = l/R_p$ diventa, a regime:

$$\delta - \frac{l}{R_p} = \alpha_{1_p} - \alpha_{2_p} = \frac{m}{l} \left(\frac{a_2}{C_1} - \frac{a_1}{C_2} \right) \tilde{a}_y = \frac{m}{l} \left(\frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2} \right) \tilde{a}_y = \left(\frac{W_1}{C_1} - \frac{W_2}{C_2} \right) \frac{\tilde{a}_y}{gl} \quad (2.31)$$

Si definisce gradiente di sottosterzo η ([1], [2]) di un autoveicolo la derivata, rispetto all'accelerazione laterale a regime \tilde{a}_y , della differenza tra l'angolo di sterzo imposto δ e l'angolo di Ackermann $\delta_0 = l/R_p$; in altri termini:

$$\eta = \frac{d}{d\tilde{a}_y} \left(\delta - \frac{l}{R_p} \right) = \frac{d}{d\tilde{a}_y} (\alpha_{1_p} - \alpha_{2_p}) = \frac{m}{l} \left(\frac{C_2 a_2 - C_1 a_1}{C_1 C_2} \right) = \frac{1}{gl} \left(\frac{W_1}{C_1} - \frac{W_2}{C_2} \right) \quad (2.32)$$

Il segno di η definisce il comportamento sotto/sovrasterzante di un autoveicolo; più in particolare un veicolo è detto *sottosterzante* se $\eta > 0$ (ovvero se $C_2 a_2 > C_1 a_1$), *sovrasterzante* se $\eta < 0$ (ovvero se $C_2 a_2 < C_1 a_1$), *neutro* se $\eta = 0$ (ovvero se $C_2 a_2 = C_1 a_1$).

Tenendo conto della (2.14) è possibile esplicitare l'angolo di sterzo necessario per percorrere una curva di raggio R_p ad una certa velocità u , sviluppando un certo livello di accelerazione laterale \tilde{a}_y :

$$\delta = \frac{l}{R_p} + \eta \tilde{a}_y = \left(\frac{l}{u^2} + \eta \right) \tilde{a}_y \quad (2.33)$$

Dalla (2.41) emerge che in caso di veicolo sovrasterzante ($\eta < 0$) esiste un valore di velocità in corrispondenza del quale si annulla l'angolo di sterzo indipendentemente dal livello di accelerazione laterale \tilde{a}_y . Dal momento che, come verrà dimostrato in seguito, in corrispondenza di tale valore di velocità il veicolo diventa instabile, questa viene definita velocità critica u_{cr}

$$u_{cr} = \sqrt{-\frac{l}{\eta}} = l \sqrt{\frac{C_1 C_2}{C_1 a_1 - C_2 a_2}} \quad (2.34)$$

In altri termini, in corrispondenza della velocità critica, in un veicolo sovrasterzante, il guadagno tra accelerazione laterale \tilde{a}_y ed angolo di sterzo δ tende ad infinito.

Nel caso di veicolo sottosterzante ($\eta > 0$) viene spesso introdotta la velocità caratteristica u_{car}

$$u_{car} = \sqrt{\frac{l}{\eta}} \quad (2.35)$$

che rappresenta la velocità in cui il rapporto r_p / δ tra velocità di imbardata ed angolo di sterzo raggiunge il massimo valore. Risolvendo, infatti, il sistema algebrico $\mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{b} = 0$ che discende immediatamente dalla (2.27), è possibile ottenere l'espressione della velocità di imbardata a regime:

$$r_p = \frac{C_1 C_2 l u}{C_1 C_2 l^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta = \frac{u}{l + \eta u^2} \delta \quad (2.36)$$

Dalla (2.33) si ricava, inoltre, che in corrispondenza della velocità caratteristica si ha $\delta = 2l/R_p$, ovvero l'angolo di sterzo è esattamente il doppio di quello necessario in condizioni di derivate nulle.

La velocità laterale a regime v_p è data invece da

$$v_p = \frac{(C_2 a_2 l - m a_1 u^2) C_1 u}{C_1 C_2 l^2 - m u^2 (C_1 a_1 - C_2 a_2)} \delta \quad (2.37)$$

La presenza di una velocità laterale v_p a regime sta ad indicare che la traiettoria del baricentro non è tangente all'asse longitudinale del veicolo.

Utilizzando le equazioni di congruenza (2.6) e (2.7) è, infatti, possibile ricavare l'espressione dell'angolo di assetto β_p

$$\beta_p = \frac{a_2}{R_p} - \alpha_{2_p} = a_2 \frac{\tilde{a}_y}{u^2} - \alpha_{2_p} = \left(\frac{a_2}{u^2} - \frac{m}{C_2} \frac{l - a_2}{l} \right) \tilde{a}_y = \left(\frac{a_2}{u^2} - \frac{W_2}{C_2 g} \right) \tilde{a}_y \quad (2.38)$$

dove il termine in parentesi viene definito gradiente di assetto η_β .

A velocità prossime a zero (derive nulle \equiv sterzata cinematica), l'angolo di assetto è concorde con l'angolo di sterzo (si ha $\beta_p = a_2 / R_p = a_2 \delta / l$); al crescere della velocità di avanzamento u e quindi degli angoli di deriva, l'angolo β_p cala fino ad annullarsi per $u = u_\beta$

$$u_\beta = \sqrt{\frac{C_2 a_2 l}{m l - a_2}}$$

oltre questa velocità β_p diventa discorde con δ .

2.2.5.2 Comportamento transitorio

Il primo passo consiste nello studio della stabilità di moto. A questo scopo risulta conveniente riscrivere le equazioni di moto (eq. 2.25) nella seguente forma ([2]):

$$\begin{aligned} m(\dot{v} + ur) + \frac{C}{u} v + \frac{C s}{u} r &= C_1 \delta \\ m k^2 \dot{r} + \frac{C s}{u} v + \frac{C q^2}{u} r &= C_1 a \delta \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove $C = C_1 + C_2$ è la somma delle rigidità di deriva effettive dei due assali, k è il raggio di inerzia, la lunghezza $q = \sqrt{(C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2) / C}$ corrisponde ad un *braccio medio*; la lunghezza $s = (C_1 a_1 - C_2 a_2) / C$ rappresenta la distanza dal baricentro al cosiddetto *neutral steer point S* (positiva per S davanti a G , vedi fig. 2.2).

In particolare S è definito come quel punto lungo l'asse longitudinale del veicolo dove l'applicazione di una forza laterale esterna (ad es. la spinta dovuta la vento laterale o alla pendenza trasversale della strada) non modifica l'angolo di imbardata del veicolo.

Supponiamo che il veicolo si trovi in condizioni di regime con u e δ costanti (cioè percorra una traiettoria circolare) quando, a causa della presenza del vento, una forza laterale, concorde con la forza d'inerzia, agisca sul veicolo: se il punto di applicazione della spinta laterale del vento si trova davanti al punto S il veicolo tende ad imbardare nella direzione della forza cioè tende a sottosterzare in quanto il driver, per mantenere la traiettoria, deve aumentare l'angolo di sterzo; si tratta quindi di un comportamento intuitivo e gestibile senza particolari difficoltà.

Al contrario, se il punto di applicazione della spinta laterale si trova dietro al punto S il veicolo tende ad imbardare nella direzione opposta a quella della forza contribuendo ad aumentare l'accelerazione laterale con possibile perdita di aderenza del veicolo. Si tratta quindi di un comportamento poco intuitivo con percezione di "insicurezza" da parte del driver.

Eliminando la velocità laterale v dalle eq. 2.39 si ottiene l'equazione differenziale lineare del secondo ordine rispetto alla velocità di imbardata r :

$$m^2 k^2 u^2 \ddot{r} + mC(q^2 + k^2)u \dot{r} + (C_1 C_2 l^2 - mu^2 C_s)r = mu^2 a_1 C_1 \dot{\delta} + u C_1 C_2 l \delta \quad (2.40)$$

tenendo conto che

$$s = -\frac{C_1 C_2}{C} \frac{l}{m} \eta$$

la 2.48 diventa:

$$m^2 k^2 u^2 \ddot{r} + mC(q^2 + k^2)u \dot{r} + C_1 C_2 l^2 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right) r = mu^2 a_1 C_1 \dot{\delta} + u C_1 C_2 l \delta \quad (2.41)$$

La (2.41) (così come la (2.40)) rappresenta un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti nella variabile r . La stabilità del moto dipende dai coefficienti c_i dell'equazione omogenea associata:

$$c_2 \ddot{r} + c_1 \dot{r} + c_0 r = 0$$

in particolare si ha stabilità di moto se tutti i coefficienti c_i sono positivi.

Dalla (2.41) appare evidente che solo il coefficiente c_0 può assumere valori negativi quando il gradiente di sottosterzo è negativo, $\eta < 0$, (cioè quando il veicolo è sovrasterzante) e quando la velocità di avanzamento u supera il valore *critico* $u_{cr} = \sqrt{-(l/\eta)}$.

Ha un certo interesse studiare il tipo di moto durante il transitorio, cioè conoscere quale sia l'evoluzione delle radici dell'equazione caratteristica della equazione omogenea associata alla (2.41) al crescere della velocità di avanzamento u , anche quando il veicolo ha un comportamento stabile (vedi fig. 2.3).

Nell'ipotesi (valida in veicoli da turismo) che $q \cong k \cong l/2$, si hanno radici reali (e quindi moto aperiodico) quando:

$$(C_1 - C_2)^2 l - 4C_1 C_2 \eta u^2 > 0 \tag{2.42}$$

Dalla (2.50) emerge chiaramente che tutti i veicoli, a velocità sufficientemente bassa, hanno comportamento stabile con radici reali, cioè sono caratterizzati da moto transitorio aperiodico smorzato.

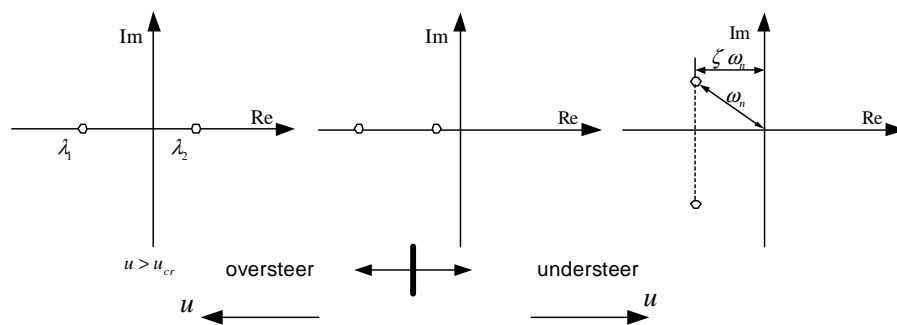


Fig. 2.3: Radici dell'equazione caratteristica per un veicolo sottosterzante e sovrasterzante in funzione della velocità di avanzamento.

Un veicolo sovrasterzante ($\eta < 0$) presenta sempre radici reali e distinti indipendentemente dalla velocità di avanzamento; di questi uno diventa positivo non appena si supera la velocità critica u_{cr} e corrisponde alla perdita di stabilità da parte del veicolo.

Un veicolo sottosterzante ha inizialmente radici reali e negativi. Oltre una certa velocità

$$u = u_t = \frac{(C_1 - C_2)}{2} \sqrt{\frac{l}{C_1 C_2 \eta}} \cong l \frac{C_2 - C_1}{2m} \tag{2.43}$$

si trasformano però in complessi coniugati con parte reale negativa. Pur avendo sempre comportamento stabile, cambia il tipo di moto durante il transitorio. A bassa velocità è di tipo aperiodico smorzato, mentre per $u > u_t$ è di tipo oscillatorio smorzato.

Il comportamento transitorio di un generico sistema del secondo ordine ([7]), come quello descritto dall'equazione (2.41) può essere indagato attraverso la sua risposta al gradino unitario. Nel caso della dinamica del veicolo si tratta di analizzare il comportamento del veicolo nel transitorio di un colpo di sterzo a velocità di avanzamento costante.

In fig. 2.4 è riportato l'andamento qualitativo della velocità di imbardata a fronte di un gradino unitario di angolo volante, e sono indicati i parametri più importanti sui quali si può basare una misura della qualità del transitorio.

In particolare si indica con massima sovralongazione P la differenza fra il valore massimo raggiunto dalla velocità di imbardata ed il suo valore di regime (normalmente viene espresso in percentuale del valore finale).

Il tempo di ritardo T_r , rappresenta l'istante di tempo in cui la velocità di imbardata $r(t)$ raggiunge il 50 % del valore di regime; mentre il tempo di salita T_s è l'intervallo di tempo necessario perché la retta $z = \dot{r}(0)t$ raggiunge il valore stabilizzato.

Il tempo di assestamento T_a è il tempo occorrente perché la velocità di imbardata rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale. L'istante di massima sovralongazione T_m , infine, è l'istante di tempo in corrispondenza del massimo valore raggiunto dalla velocità di imbardata.

La risposta al gradino unitario di un generico sistema del secondo ordine è dato, nel caso di radici complesse coniugate con parte reale negativa, dalla seguente relazione:

$$y(t) = 1 - Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) \tag{2.44}$$

in cui $\omega_n = \sqrt{c_0/c_2}$ rappresenta la pulsazione propria del sistema non smorzato, $\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ è la pulsazione propria del sistema con $\zeta = c_1/(2c_2\omega_n)$ fattore di smorzamento del sistema, $A = 1/\sqrt{1 - \zeta^2}$ ed infine $\varphi = \arccos(\zeta)$.

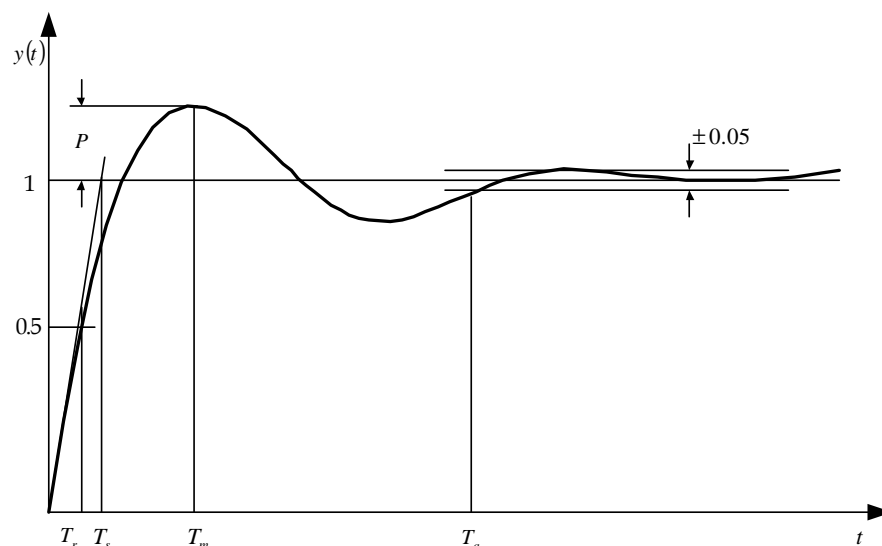


Fig. 2.4: I più importanti parametri della risposta al gradino di un tipico sistema dinamico.

Dall'equazione (2.44) emerge che il comportamento transitorio del veicolo risulta univocamente determinato dai parametri ζ ed ω_n : la sovraelongazione $P = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, il tempo di assestamento $T_a = \frac{3}{\zeta\omega_n}$, il tempo di salita $T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}-1}$.

La sovraelongazione dipende solo dal fattore di smorzamento ζ mentre il tempo di assestamento ed il tempo di salita dipendono anche dalla pulsazione propria ω_n .

Si tratta adesso di legare questi parametri alle caratteristiche costruttive del veicolo attraverso l'equazione (2.49).

Le espressioni della pulsazione propria ω_n del sistema non smorzato ed del fattore di smorzamento ζ per il modello monotraccia lineare classico di veicolo sono:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{C_1 C_2 l^2}{m^2 k^2} \frac{1 + \eta \frac{u^2}{l}}{u^2} = \frac{C_1 C_2 l^2}{m^2 k^2 u^2} \left[1 + \left(\frac{u}{u_{car}} \right)^2 \right] \cong 2 \frac{C}{mu} \sqrt{1 + \eta \frac{u^2}{l}} \\ \zeta &= \frac{C}{2 \sqrt{C_1 C_2 l^2 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l} \right)}} \frac{k^2 + q^2}{k} \cong \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta \frac{u^2}{l}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{u_{car}} \right)^2}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

dove le ultime espressioni sono state ottenute adottando le ipotesi ragionevoli di $k \cong q \cong l/2$ e $|s|/l \ll 1$.

Il termine $C_1 C_2 / m^2$ in (2.45) indica che per incrementare la velocità di risposta del sistema è necessario aumentare la rigidità di deriva equivalente di ciascun assale e ridurre la massa del veicolo. Inoltre suggerisce che, a parità di rigidità di deriva totale del veicolo ($C_1 + C_2$), la condizione $C_1 = C_2$ è quella che massimizza la pulsazione propria del sistema non smorzato. Tuttavia l'effetto della distribuzione della rigidità di deriva totale del veicolo tra i due assali non è molto marcato; infatti se, per esempio, assumiamo $C_1 = 0.8 C_2$ si ha una riduzione del prodotto $C_1 C_2$ (rispetto al caso ottimale $C_1 = C_2$) del 1 % ca.

Il secondo fattore l/k^2 in (2.45) rappresenta un parametro geometrico ed indica come è distribuita di massa del veicolo tra i due assali. Per una maggiore prontezza di risposta il rapporto l/k^2 dovrebbe essere grande che, in termini fisici, significa distribuire la massa del veicolo all'interno degli assali (piccoli sbalzi) quanto più possibile vicino al baricentro del veicolo. Grandi sbalzi, infatti, si traducono in un incremento del raggio di inerzia k a parità di massa.

Il terzo fattore che definisce ω_n in (2.45) è $(1+u^2\eta/l)/u^2$ e dimostra come il comportamento transitorio può dipendere da una caratteristica “stazionaria” del veicolo quale il gradiente di sottosterzo η . Inoltre, all’aumentare della velocità di avanzamento, si ha sempre una riduzione della pulsazione ω_n (vedi fig. 2.5); tuttavia valori positivi del gradiente di sottosterzo contribuiscono a mitigare questo trend.

Anche l’andamento del rapporto di smorzamento ζ (vedi fig. 2.5) dipende dal segno del gradiente di sottosterzo η . In caso di veicolo sottosterzante ($\eta > 0$), ζ diminuisce all’aumentare della velocità; mentre nel caso di veicolo sovrasterzante ($\eta < 0$) il fattore di smorzamento (sempre >1 coerentemente alla condizione di moto aperiodico smorzato) aumenta all’aumentare della velocità. In corrispondenza della velocità critica, inoltre, la pulsazione propria si annulla ed il fattore di smorzamento tende all’infinito. In caso di veicolo neutro ($\eta = 0$) la pulsazione propria diminuisce all’aumentare della velocità; il fattore di smorzamento risulta, invece, indipendente da u .

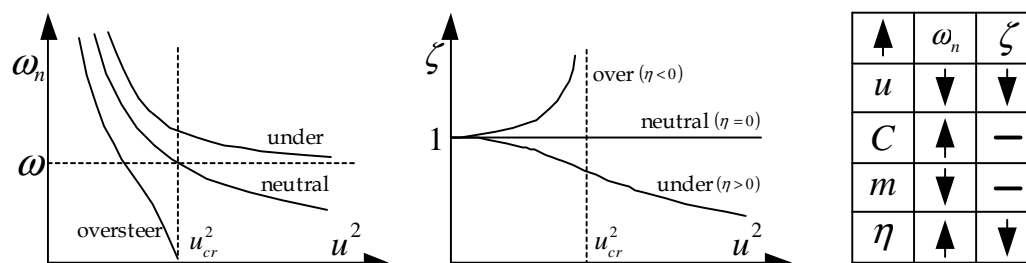


Fig. 2.5: Influenza di alcuni parametri costruttivi sulla pulsazione naturale e il fattore di smorzamento del veicolo.

Tenendo conto delle espressioni di ω_n e ζ di eq. 2.45, è possibile ottenere le espressioni esplicite di:

Tempo di assestamento

$$T_a = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{6k^2mu}{C(q^2 + k^2)} \cong \frac{12mu}{C} \quad (2.46)$$

Massima sovraelongazione

$$P = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cong e^{\frac{-\pi}{2\left(1+\eta\frac{u^2}{l}\right)}} \quad (2.47)$$

Tempo di salita

$$T_s = \frac{mk^2u}{a_1C_1l\left(1+\eta\frac{u^2}{l}\right)} \cong \frac{mlu}{4a_1C_1\left(1+\eta\frac{u^2}{l}\right)} \quad (2.48)$$

E' importante sottolineare come il tempo di salita T_s , a parità di gradiente di sottosterzo, sia inversamente proporzionale alla rigidezza effettiva dell'assale anteriore.

2.2.5.3 Comportamento in frequenza

L'analisi del comportamento in frequenza consiste, in generale, nello studio della risposta di un sistema dinamico ad un input sinusoidale $x(t) = X \sin(\omega t)$ di ampiezza X e pulsazione

$$\omega = 2\pi f$$

Se il sistema considerato è stabile, l'output risulta di tipo sinusoidale con pulsazione ω pari a quella dell'input, ampiezza $Y = Y(\omega)$ e sfasato della quantità $\varphi = \varphi(\omega)$ (ovvero ritardato/anticipato del tempo $t = \varphi(\omega)/\omega$); cioè $y(t) = Y(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$.

Si definisce funzione di risposta armonica la funzione $F(\omega)$, di variabile reale e a valori complessi, avente come modulo il rapporto $Y(\omega)/X$ e come argomento l'angolo $\varphi(\omega)$, cioè:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{i\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega))$$

Tale funzione, in virtù della linearità del sistema, è indipendente da X ; essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio $0 \leq \omega < \infty$.

La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema dalla relazione $F(\omega) = G(i\omega)$.

La rappresentazione grafica della funzione di risposta armonica viene effettuata con speciali diagrammi; fra questi sono di largo impiego i *diagrammi di Bode*: essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si impiegano due diversi diagrammi, uno dei quali (detto *diagramma delle ampiezze* o *dei moduli*) riporta il modulo della risposta armonica (sovente in scala logaritmica) in funzione della pulsazione ω (oppure in funzione della

frequenza f) e l'altro (detto *diagramma delle fasi* o *degli argomenti*) riporta l'argomento della risposta armonica, sempre in funzione della pulsazione ω .

I parametri più significativi di una funzione di risposta in frequenza sono: la *pulsazione di risonanza* ω_R cioè la pulsazione in corrispondenza della quale il modulo di $G(i\omega)$ assume il valore massimo, il *picco di risonanza* M_R cioè il rapporto fra il valore massimo del modulo di $G(i\omega)$ ed il suo valore statico $G_0(0)$, ed infine la *banda passante* ω_f cioè la pulsazione alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 db (equivalenti al rapporto $\sqrt{2}/2$) al valore statico $G_0(0)$.

Nel caso dello studio della dinamica del veicolo si tratta di analizzare il comportamento del veicolo, identificato dalle funzioni di risposta armonica $r/\delta - \beta/\delta - a_y/\delta$, quando viene imposto un angolo di sterzo con andamento sinusoidale $\delta = \delta_0 \sin(\omega t)$.

In campo sperimentale viene condotta una manovra molto simile denominata *sweep* o *RSI* (*random steering input*): il driver, mantenendo costante la velocità di avanzamento del veicolo, impone un angolo volante di tipo armonico di ampiezza massima costante e con frequenza variabile da 0.5 a 4 Hz. In genere vengono effettuati diversi passaggi parametrizzando in funzione dell'ampiezza dell'angolo di sterzo δ_0 (per identificare il campo di comportamento lineare del veicolo) ed in funzione della velocità di avanzamento u .

Nell'analisi delle funzioni di risposta armonica, attraverso l'utilizzo dei diagrammi di Bode, il diagramma delle fasi viene sostituito dal più significativo (dal punto di vista fisico) diagramma dei tempi di ritardo $t(\omega) = \varphi(\omega)$ in funzione della frequenza f .

Le equazioni di moto (2.39) possono essere riscritte in una comune forma alternativa utilizzando la notazione delle "derivate di stabilità". Secondo questa notazione la forza laterale è rappresentata con Y ed il momento di imbardata con N ; mentre il pedice indica la derivata della queste due grandezze rispetto alle variabili di moto del sistema:

$$\begin{aligned} \sum Y &= Y_\beta + Y_r + Y - m u (\dot{\beta} + r) = 0 \\ \sum N &= N_\beta \beta + N_r r + N - m k^2 r = 0 \end{aligned}$$

utilizzando quale variabile di stato l'angolo di assetto $\beta = v/u$ al posto della velocità laterale v . In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{1}{m u} [Y_\beta \beta + (Y_r - m u) r + Y_\delta \delta] \\ \dot{r} &= \frac{1}{m k^2} (N_\beta \beta + N_r r + N_\delta \delta) \end{aligned} \tag{2.49}$$

dove $Y_\beta = -C$, $Y_r = -C s / u$, $Y_\delta = C_1$ mentre $N_\beta = -C s$, $N_r = -C q^2 / u$ ed $N_\delta = C_1 a_1$.

Isolando nella (2.49) la velocità di imbardata r e l'angolo di assetto β si ottiene:

$$\begin{aligned} c_2 \ddot{\beta} + c_1 \dot{\beta} + c_0 \beta &= b'_1 \dot{\delta} + b_0 \delta \\ c_2 \ddot{r} + c_1 \dot{r} + c_0 r &= b''_1 \dot{\delta} + b''_0 \delta \end{aligned} \quad (2.50)$$

con

$$c_2 = m^2 k^2 u^2$$

$$c_1 = -(mk^2 Y_\beta + mu N_r) = mC(q^2 + k^2)u$$

$$c_0 = N_\beta(mu - Y_r) + N_r Y_\beta = C_1 C_2 l^2 \left(1 + \eta \frac{u^2}{l}\right)$$

$$b'_1 = \frac{C C_1 q^2}{u} - C_1 a_1 \left(mu - \eta \frac{C_1 C_2 l}{mu}\right)$$

$$b'_0 = mk^2 C_1$$

$$b''_1 = a_1 C_1 mu^2$$

$$b''_0 = l C_1 C_2 u$$

A questo punto applicando la trasformata di Laplace alla (2.50) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\delta}(s) &= \frac{b'_1 s + b'_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \\ \frac{r}{\delta}(s) &= \frac{b''_1 s + b''_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \\ \frac{a_y}{\delta}(s) &= u \frac{b'_1 s^2 + (b''_1 + b'_0)s + b''_0}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \end{aligned} \quad (2.51)$$

dove l'ultima espressione è stata ottenuta dalle prime due utilizzando la relazione $a_y = u(\dot{\beta} + r)$ valida per velocità di avanzamento u costante.

Applicando la relazione $F(\omega) = G(i\omega)$ alle (2.59):

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{\beta}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 - \frac{mk^2 u}{a_1 m u^2 - a_2 C_2 l} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{\beta}{\delta}\right)_{ss} &= -\frac{b}{l} \frac{1 - \frac{a_1}{a_2} \frac{m}{C_2 l} u^2}{1 + \eta \frac{u^2}{l}} \\
 \frac{r}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{r}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 + \frac{m a_1 u}{C_2 l} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{r}{\delta}\right)_{ss} &= \frac{u/l}{1 + \eta \frac{u^2}{l}} \\
 \frac{a_y}{\delta}(i\omega) &= \left(\frac{a_y}{\delta}\right)_{ss} \cdot \frac{1 - \frac{mk^2}{C_2 l} + \frac{a_2}{u} i\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \left(\frac{i\omega}{\omega_n}\right)}; & \left(\frac{a_y}{\delta}\right)_{ss} &= \frac{u^2/l}{1 + \eta \frac{u^2}{l}}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Le grandezze $(\beta/\delta)_{ss}$, $(r/\delta)_{ss}$ ed $(a_y/\delta)_{ss}$ rappresentano rispettivamente i valori assunti dalle risposte di funzione armonica per $\omega=0$, cioè i guadagni stazionari; mentre ω_n e ζ sono quelle definite in (2.53).

Infine si riportano le espressioni di modulo e fase di ciascuna funzione di risposta armonica:

$$\begin{aligned}
 GAIN\left[\frac{\beta}{\delta}(\omega)\right] &= \sqrt{\frac{b_1'^2 + (b_0'\omega)^2}{(c_0 - c_2\omega^2)^2 + (c_1\omega)^2}} \\
 PHASE\left[\frac{\beta}{\delta}(\omega)\right] &= -\frac{\pi}{2} \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{b_1'}{c_2 p_1 p_2}\right) - 1 \right] + \arctan\left(\frac{b_0'}{b_1'}\omega\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_1}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 GAIN\left[\frac{r}{\delta}(\omega)\right] &= \sqrt{\frac{b_1''^2 + (b_0''\omega)^2}{(c_0 - c_2\omega^2)^2 + (c_1\omega)^2}} \\
 PHASE\left[\frac{r}{\delta}(\omega)\right] &= -\frac{\pi}{2} \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{b_1''}{c_2 p_1 p_2}\right) - 1 \right] + \arctan\left(\frac{b_0''}{b_1''}\omega\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_1}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 GAIN\left[\frac{a_y}{\delta}(\omega)\right] &= u \sqrt{\frac{(b_0'' - b_1''\omega^2)^2 + \omega^2 (b_1'' + b_0'')^2}{(c_0 - c_2\omega^2)^2 + (c_1\omega)^2}} \\
 PHASE\left[\frac{a_y}{\delta}(\omega)\right] &= -\frac{\pi}{2} \left[\operatorname{sgn}\left(\frac{b_1' z_1 z_2}{c_2 p_1 p_2}\right) - 1 \right] + \arctan\left(-\frac{\omega}{z_1}\omega\right) + \arctan\left(-\frac{\omega}{z_2}\omega\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_1}\right) - \arctan\left(-\frac{\omega}{p_2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{con } p_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2} \quad \text{e } z_{1,2} = \frac{-(b'_0 + b''_0) \pm \sqrt{(b'_0 + b''_0)^2 - 4b''_0b'_0}}{2b'_0}$$

2.3 Modelli a 15 g.d.l.

Nella formulazione di modelli per lo studio dell'handling di un veicolo, a partire del modello bicicletta descritto ampiamente nel paragrafo precedente, sussistono ulteriori formulazioni che permettono di descrivere in maniera sempre più dettagliata il sistema con un conseguente incremento nella complessità della formulazione, identificabile sostanzialmente attraverso il numero di gradi di libertà assunti.

In questo paragrafo viene riportata in maniera descrittiva la modellazione del sistema autoveicolo mediante la definizione di un modello a 15 g.d.l. La scelta di un tale livello di dettaglio (numero di gradi di libertà), piuttosto che un altro, è dettato dal fatto che esso risulta tra le tre tipologie di formulazioni universalmente adottate, dove nella fattispecie è collocato esattamente tra i modelli semplificati e i modelli multibody.

Un modello a 15 gradi di libertà prevede:

- tre gradi di libertà assegnati alle traslazioni della cassa,
- tre gradi di libertà inerenti le rotazioni della cassa,
- quattro inerenti lo scuotimento verticale delle ruote,
- quattro per la loro rotazione,
- un grado di libertà per la posizione del volante.

L'ultimo grado di libertà permette di studiare il comportamento dinamico del veicolo per manovre del tipo ad anello chiuso (*closed loop*) in cui il guidatore impone al veicolo una determinata traiettoria attraverso l'angolo volante, a reazione ed in funzione della coppia percepita al volante (sussiste quindi uno scambio di informazioni tra pilota e veicolo, in ciclo chiuso appunto). Tale manovra si contrappone a quella del tipo ad anello aperto (*open loop*) in cui la traiettoria del veicolo è la risultante dei comandi che vengono imposti dal pilota secondo time history predeterminate che vengono eseguite a prescindere dal risultato che si ottiene.

Tale tipologia di modelli si contraddistingue per una formulazione di tipo *concettuale* la quale permette di simulare qualsiasi tipo di sospensione, di trazione e di differenziale, che risultano implementati facendo ricorso alla definizione dell'andamento delle loro grandezze caratteristiche invece della definizione di equazioni che descrivono le proprietà fisiche del sistema. A titolo di esempio, il sistema di sospensioni è implementato attraverso delle curve che definiscono l'andamento di tutte le grandezze elastocinematiche di interesse al variare delle condizioni operative che possono essere l'escursione cinematica o i carichi agenti; in

tale maniera di fatto si prescinde dalla descrizione matematica della tipologia di sospensione, della geometria e delle caratteristiche strutturali che determinano tali andamenti.

Ulteriori aspetti contraddistintivi consistono nella possibilità di implementare delle caratteristiche non lineari in riferimento alle grandezze elasto-cinematiche delle sospensioni, dello sterzo e degli pneumatici; nonché permette di implementare le resistenze aerodinamiche e di avanzamento, il sottosistema frenante e la servo assistenza al volante.

Generalmente per questa tipologia di modellazione possono essere individuati i seguenti sottosistemi che coincidono con i tradizionali sottosistemi funzionali del veicolo:

- cassa,
- pneumatico,
- sospensione,
- linea sterzo,
- motore,
- sistema frenante

che sono possono essere implementati e trattati in maniera distinta tra loro considerando, sottinteso, le informazioni che si scambiano mutuamente tra loro permettendo di fatto la definizione dell'intero sistema.

2.3.1 Cassa

La modellazione del sottosistema cassa permette di calcolare:

- le componenti di velocità di ogni singola ruota,
- gli angoli di deriva,
- le forze agenti,
- i momenti agenti

nonché vengono risolte le equazioni di moto e viene ricavata la traiettoria descritta dal baricentro.

Tutte tali grandezze vengono calcolate utilizzando come input le componenti u e v del vettore velocità del baricentro scomposto lungo gli assi veicolo, la velocità d'imbardata r e gli angoli effettivi di sterzo (δ_i), oltre ai dati del veicolo (caratteristiche di massa, caratteristiche geometriche, etc.)

Le componenti V_{xi} e V_{yi} (per $i=1,..4$) di ogni singola ruota lungo gli assi veicolo vengono infatti calcolate immediatamente attraverso l'impiego delle componenti (u, v) della velocità della vettura e della velocità di imbardata, utilizzando la conoscenza del semi-passo anteriore e posteriore, a e b , e delle carreggiate anteriore e posteriore, t_f e t_r .

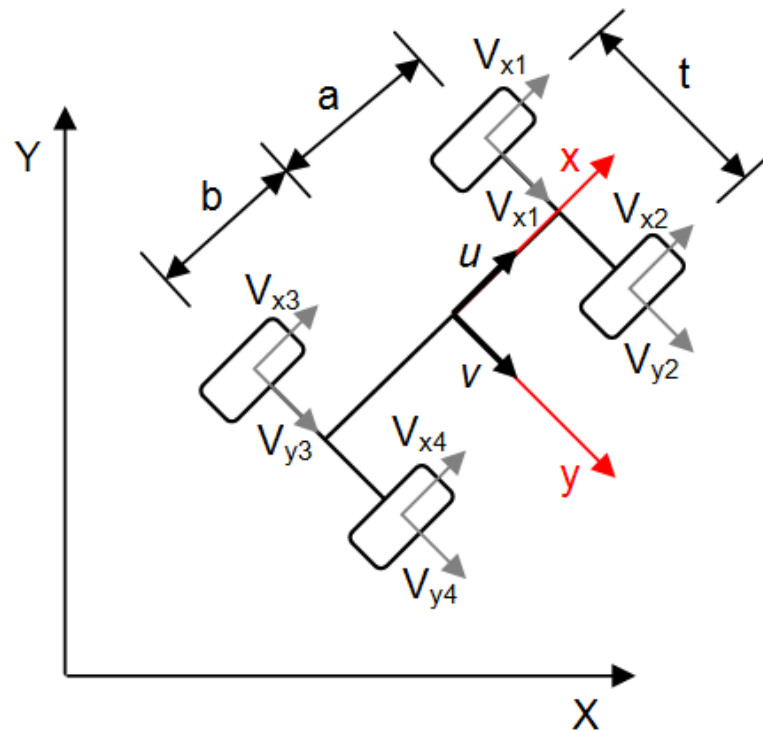


Fig. 2.6: Schematizzazione modello a 15 g.d.l.: velocità veicolo e singole ruote.

secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 V_{x1} &= u + r \cdot \frac{t_f}{2} \\
 V_{y1} &= v + r \cdot a \\
 V_{x2} &= u - r \cdot \frac{t_f}{2} \\
 V_{y2} &= v - r \cdot a \\
 V_{x3} &= u + r \cdot \frac{t_r}{2} \\
 V_{y3} &= v + r \cdot b \\
 V_{x4} &= u - r \cdot \frac{t_r}{2} \\
 V_{y4} &= v - r \cdot b
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Attraverso l'utilizzo di queste grandezze appena calcolate e degli angoli di sterzo (δ_i), imposti dal guidatore a ciascuna ruota mediante il volante, per ogni ruota è possibile calcolare gli angoli di deriva (α_i) e le velocità longitudinali e trasversali V_{li} e V_{ti} nel sistema di riferimento ruota; queste due tipologie di grandezze appena calcolate permettono di ricavare

immediatamente le forze longitudinale e laterali espresse dalle ruote nei loro punti di contatto con il suolo.

Tali forze di contatto riportate nel sistema di riferimento veicolo consentono, a loro volta, il calcolo delle forze totali agenti sul veicolo lungo gli assi x e y veicolo (F_{xTot} e F_{yTot}), la quota parte dei trasferimenti di carico (F_{ji}), nonché il calcolo dei momenti di beccheggio (M_y), di rollio (M_x) e di imbardata (M_z).

La conoscenza delle forze agenti sul veicolo, a loro volta, permettono di ricavare le accelerazioni longitudinali (a_x) e laterali (a_y) del veicolo mediante l'utilizzo della equazione cardinale della dinamica:

$$a_x = \frac{F_{xTot}}{M_{tot}}$$

$$a_y = \frac{F_{yTot}}{M_{tot}} \quad (2.54)$$

La conoscenza delle componenti della velocità nel sistema veicolo permette di calcolare l'angolo di assetto:

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right) \quad (2.55)$$

mentre la conoscenza delle componenti della velocità nel sistema di riferimento assoluto, espresse secondo le:

$$V_x = V \cdot \cos(\psi + \beta)$$

$$V_y = V \cdot \text{sen}(\psi + \beta) \quad (2.56)$$

permette di calcolare, tramite integrazione, la traiettoria

2.3.2 Pneumatico

Nella modellazione del pneumatico sono descritte le forze e le coppie agenti sul pneumatico, dovute al contatto tra pneumatico e strada ed all'applicazione di coppie traenti (o frenanti) e resistenti.

Per descrivere le forze esercitate dal pneumatico (F_{yi} , forza trasversale, F_{xi} , forza longitudinale e M_{zi} , momento autoallineante), esistono almeno tre differenti approcci:

- modelli matematici FEM delle caratteristiche fisiche del pneumatico (struttura della carcassa, battistrada, ecc.); questi modelli hanno il vantaggio di collegare i parametri della risposta del pneumatico con le sue caratteristiche di progetto, ma presentano un onere elevato nell'aumento della complessità di calcolo; sono pertanto più utili al progettista di pneumatici per derivare dati empirici di più facile trattamento;
- modelli semifisici, i quali implementano caratteristiche fisiche equivalenti (rigidezza carcassa, rigidezza tasselli, ecc.); dovrebbero presentare i vantaggi dell'approccio precedente, senza presentarne gli svantaggi della complessità; di fatto sono stati impiegati solo in passato dai progettisti di pneumatici, quando le limitazioni ai mezzi di calcolo rendevano proibitivo l'approccio precedente;
- modelli di tipo interpolativo, quali le magic formula di Pacejka; quest'ultimo approccio, grazie alla capacità di fornire le caratteristiche del pneumatico in maniera esaustiva a fronte di tempi di calcolo contenuti, risulta essere, al momento, la soluzione ideale per l'impiego in modelli di simulazione del sistema veicolo.

2.3.3 Sospensioni

Il sottosistema sospensioni interessa il comportamento del veicolo e la relativa modellazione nei due aspetti di handling e ride. In riferimento al primo aspetto, come già riportato, si ha una modellazione di tipo concettuale in cui il comportamento elastocinematico risulta definito mediante delle curve che descrivono la variazione delle grandezze caratteristiche in funzione di parametri che identificano le condizioni di funzionamento del veicolo.

In riferimento alla descrizione della dinamica verticale viene utilizzato una semplificazione del sistema considerato costituito da una massa sospesa, da una molla, da uno smorzatore e da uno pneumatico che possiede con una propria rigidezza verticale secondo lo schema riproposto in fig.

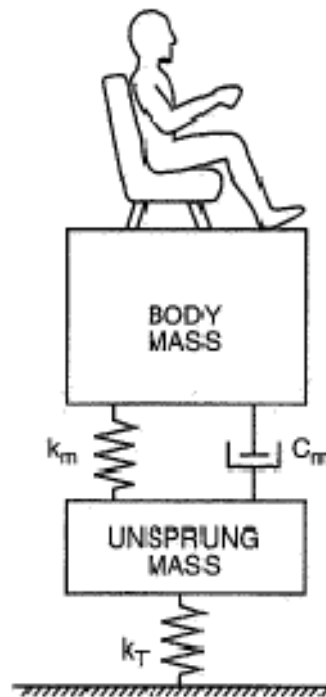


Fig. 2.7: Schematizzazione modello per la valutazione del comportamento ride.

Tramite l'implementazione e la risoluzione dell'equilibrio di tale sistema è possibile definire lo spostamento verticale del centro ruota e le forze esercitate dall'ammortizzatore, dalla molla e dal tampone.

2.3.4 Linea sterzo

Per valutare lo sforzo al volante, necessario per effettuare una determinata manovra, occorre una modellazione accurata dell'apparato della linea sterzo. Tale calcolo è indispensabile nella simulazione di una manovra a comandi liberi ed utile per la valutazione dei risultati della simulazione di una manovra a comandi bloccati.

Con riferimento alla fig. 2.8, gli elementi di interesse per la simulazione della linea sterzo sono: volante (1), piantone (2), giunto cardanico superiore (3), albero (4), giunto cardanico inferiore (5), barretta del servosterzo (6), pignone (7), cremagliera (8) e tiranti ruote (9).

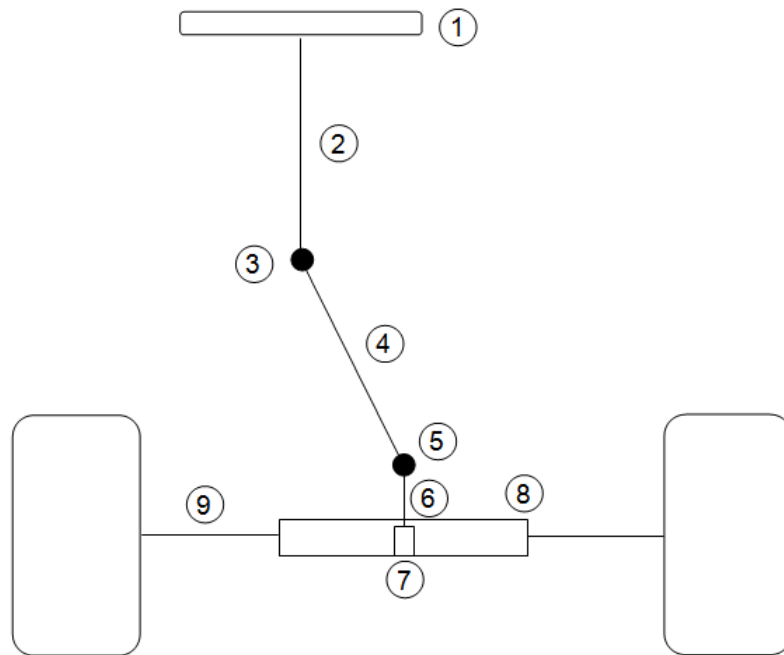


Fig. 2.8: Schematizzazione linea di sterzo.

Per la descrizione della modellazione del sistema, si introducono ora le seguenti ipotesi semplificative relative al modello di linea sterzo:

- l'unico organo elastico introdotto nel modello è la barretta del servosterzo;
- viene trascurata la non omocineticità dei due giunti cardanici;
- le inerzie di piantone e giunti sono trascurabili rispetto a quella del volante (I_{vol}).

La coppia da applicare al volante è pari a:

$$C_{vol} = C_{pig} + I_{vol} \cdot \dot{d}_{vol} \quad (2.57)$$

dove C_{pig} è la coppia necessaria a torcere la barretta di torsione mentre il secondo termine, del membro a destra, è la coppia determinata dall'inerzia volante.

Oltre, alla coppia volante necessaria a torcere la barretta ed a compensare l'inerzia del volante, va aggiunto il momento necessario a vincere l'attrito (funzione della velocità di attuazione dello sterzo) che si oppone alla rotazione del piantone. Al moto della cremagliera si opporrà una forza F_{cre} , risultante da una forza di attrito viscoso (dipendente dalla velocità di traslazione della cremagliera) e da una di attrito coulombiano.

A rigore, va inoltre considerata la non perpendicolarità al suolo dell'asse montante ruota che implica la nascita di coppie che devono essere vinte quando si cerca di sterzare la vettura.

2.3.5 Sistema di propulsione e di frenata

Il comportamento del sistema di propulsore e di trasmissione del veicolo è modellato utilizzando la definizione della coppia erogata in funzione della velocità angolare delle ruote motrici, ricavate a partire dalla rotazione angolare dell'albero motore e dal rapporto di trasmissione, delle marce inserite e del differenziale.

Attraverso la conoscenza della coppia espressa dal motore, in funzione della velocità di rotazione, dei rapporti di trasmissione, dei rendimenti meccanici dei rapporti inseriti e del differenziale utilizzato è possibile calcolare i valori della coppia agente su ogni singola ruota e delle loro rotazioni angolari.

Il sistema frenante descrive invece il comportamento del relativo sottosistema mettendo in relazione la forza agente sul pedale con la pressione agente nel circuito idraulico che permette di arrestare il veicolo; considerando le caratteristiche dell'impianto e della tipologia di freno adottato.

2.4 Modelli multibody

Come massimo grado di dettaglio dei modelli matematici per la progettazione e l'analisi del comportamento dinamico degli autoveicoli ritroviamo i modelli multibody. I modelli multibody rappresentano fisicamente il sistema meccanico veicolo; in tal senso sussistono più corpi, che possono essere sia rigidi che flessibili dotati di massa ed inerzie proprie, vincolati tra loro mediante giunzioni che possono essere perfettamente rigide (vincoli cinematici) o elastici, a loro volta con caratteristiche lineari o non lineari. Tale modellazione, con una rappresentazione meno *astratta* (concettuale) rispetto alla precedente modellazione permette di apportare, sui sistemi rappresentati, delle modifiche in maniera simile e diretta alle modifiche che si apportano nella realtà sul prototipo fisico (si immagini in tal senso alla variazione dei punti di connessione tra sospensione e telaio, o alla sostituzione delle caratteristiche delle molle).

Il sistema meccanico descritto con tale tecnica è implementato attraverso equazioni differenziali del moto, non lineari, accoppiate con le equazioni algebriche di vincolo. Un

integratore dinamico le risolve nel dominio del tempo, ricavando gli spostamenti dei corpi e le forze su di essi agenti per effetto di uno o più ingressi (forze o spostamenti imposti) variabili nel tempo.

La modellazione dei veicoli con tecniche multibody avviene mediante la suddivisione dell'intero sistema in sottocomponenti identificabili con i tradizionali sottosistemi del veicolo che vengono definiti e successivamente assemblati per creare l'intero sistema autoveicolo; con il vantaggio di una facile intercambiabilità delle parti per testare velocemente differenti soluzioni. Il grado di dettaglio di definizione di ogni singolo sottosistema è determinato dal tipo di indagine che deve essere condotta e dal livello di precisione richiesto, considerando che di prassi si cerca sempre di costruire un modello che sia il più semplice possibile, compatibilmente con la capacità di fornire informazioni sufficientemente accurate. In tal senso molte volte si realizzano modelli multibody in cui alcuni sottoparti del veicolo sono definite in maniera ibrida tra modalità *semplificata* (non fisica) e descrizione fisica, esempio in tal senso sono le analisi handling in cui, vista la finalità delle analisi, i sottosistemi della trasmissione, del propulsione e del freno sono rappresentati mediante equazioni matematiche (algebriche e differenziali) che interpretano correttamente gli aspetti di tali componenti in tali condizioni, e che comunque scambiano le necessarie informazioni con gli altri sottosistemi.

In riferimento ai sottosistemi, la cassa del veicolo è normalmente definita come un corpo perfettamente rigido, con valori della massa, dei momenti di inerzia e della posizione del baricentro tali da identificare le condizioni operative reali del veicolo, mentre le azioni aerodinamiche su di essa agenti sono definite attraverso delle forze e momenti applicati in un punto della cassa e variabili secondo mappe che dipendono dalle altezze da terra del veicolo.

Le sospensioni sono generalmente molto simili alle sospensioni del prototipo fisico tale per cui vengono utilizzati degli analoghi bracci, tiranti e montanti con medesime proprietà di geometria e di massa a quelli reali al fine di ricreare un modello virtuale con proprietà di inerzia e geometria tridimensionale globali equivalenti a quelli del sistema reale. In particolare per ottenere un grado di dettaglio elevato le connessioni, oltre alla tipologia perfettamente rigida (vincoli cinematici) possono essere modellate mediante elementi elastici con caratteristiche forza-spostamento, per le tre direzioni e le tre rotazioni, in maniera lineare e non lineare e con la possibilità di introdurre anche gli attriti al fine di ottenere la esatta corrispondenza del caso reale.

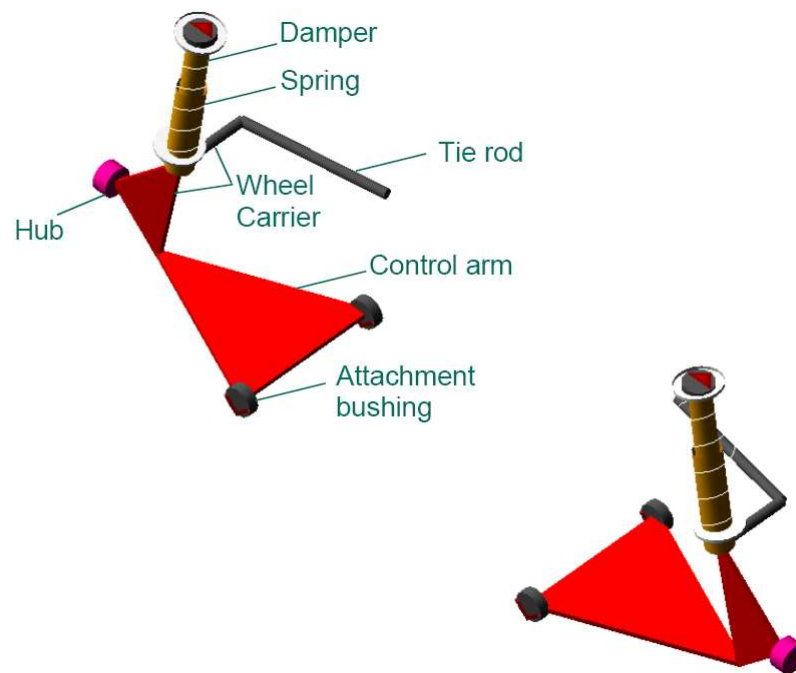


Fig. 2.10: Modellazione di una sospensione McPherson in ambiente multibody.

Si ha inoltre la possibilità di implementare qualsiasi tipologia di elementi elastici e smorzanti che possono essere caratterizzabili, rispettivamente, tramite delle leggi forza-spostamento e forza-velocità.

La linea di sterzo è modellata mediante una serie di parti rigide (fig. 4.5.3 - 1) collegate da vincoli cinematici che rappresentano lo scorrimento della cremagliera nella scatola, il collegamento pignone-cremagliera, i giunti cardanici tra gli alberi. È fondamentale, per una buona simulazione dinamica, la descrizione degli attriti tra le varie parti in scorrimento o rotazione relativa.

Per tale sottosistema, è inoltre possibile definire anche dei sistemi di servo asservimento di tipo idraulico o elettrico, attraverso la implementazione di una barretta di torsione che misura la coppia applicata e mediante la definizione di una caratteristica di asservimento che identifica la forza da applicare alla cremagliera (il grado di servo assistenza) in aiuto a quella del guidatore.

Per ottenere dei modelli precisi l'approccio a corpi rigidi può costituire, talvolta, un'approssimazione troppo scarsa. In primo luogo non permette di tenere in conto i cedimenti strutturali, che possono modificare, ad esempio, le caratteristiche elastocinematiche di una sospensione o la ripartizione di carico tra i suoi elementi, in corrispondenza di forti carichi di tamponamento. In secondo luogo, qualunque corpo, oltre una certa frequenza, presenta modi di vibrare strutturali. È per questo motivo che, per analisi in campi di frequenza più ampi o quando i cedimenti statici sono ritenuti non trascurabili, alcuni corpi sono sostituiti da condensazioni modali, ricavate da modelli FEM o

addirittura da prove sperimentali. Chiaramente un eccesso di dettaglio porta sempre verso oneri computazionali elevati.

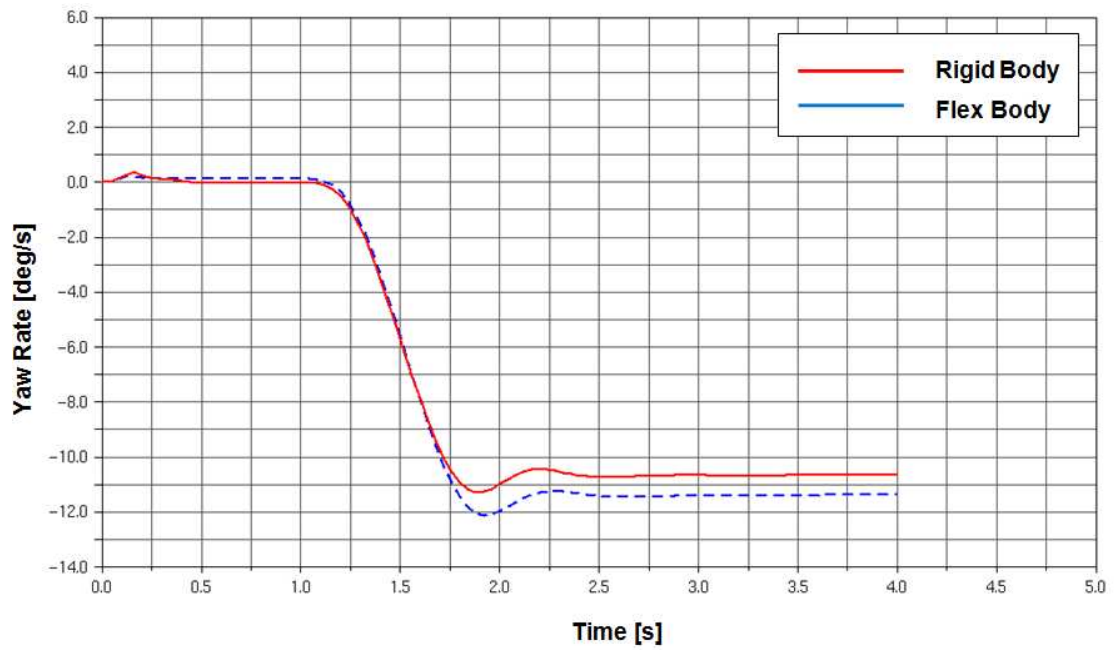


Fig. 2.11: Effetto dell'introduzione della flessibilità dei componenti strutturali delle sospensioni.

CAPITOLO 3

Definizione del modello semplificato

Lo studio del comportamento direzionale di un autoveicolo, in estrema sintesi, ha lo scopo di definire il legame tra gli input del driver e la traiettoria del veicolo. In particolare si indaga come, a parità di input imposti, il comportamento dinamico del veicolo sia influenzato dai suoi parametri costruttivi (pneumatici, rigidità barre antirollio, ecc.).

Un parametro fondamentale nello sviluppo di un modello è il suo livello di dettaglio. Modelli molto accurati sono anche estremamente complicati, sia nella formulazione matematica, che nella interpretazione dei risultati; inoltre coinvolgono molti parametri difficilmente rilevabili con precisione e pertanto l'accuratezza del modello risulta solo illusoria (1).

Il modello di veicolo sviluppato nel presente capitolo ha un livello di dettaglio essenziale, molto vicina alle modellazioni più basilari a due, o poco più, gradi di libertà; allo stesso tempo l'obiettivo è quello di interpretare gli aspetti ed i fenomeni contraddistintivi del sistema meccanico autoveicolo nella maniera più corretta e completa al fine di ottenere uno strumento, per la previsione del comportamento dinamico, con capacità più elevate dei modelli simili e vicino a quella dei modelli a molti più gradi di libertà.

Per raggiungere tale obiettivo, e in considerazione della possibile distinzione dello studio degli aspetti in condizioni stazionarie e transitorie, la trattazione è stata effettuata in maniera duale in riferimento a tali condizioni e con modalità differenti tra i due.

3.1 Ipotesi semplificative

Nello sviluppo di un determinato modello matematico è sempre bene avere presenti le ipotesi fatte. Si eviterà così di impiegarlo in modo inappropriato, ossia per studiare casi che non verificano adeguatamente tali ipotesi. Inoltre, si saprà meglio dove agire per modificare il modello permettendogli di coprire una più vasta gamma di casi.

Per prima cosa si suppone che il veicolo si muove su strada piana ed orizzontale, cioè assimilabile ad un piano geometrico. Essendo interessati al solo comportamento direzionale, si può inoltre assumere di evitare brusche frenature ed accelerazioni, ovvero di avere una velocità di avanzamento V costante. Queste ipotesi permettono di trascurare i moti di scuotimento e di beccheggio della carrozzeria ed i relativi trasferimenti di carico longitudinali.

In riferimento al grado di libertà di rotazione δ delle ruote anteriori (sterzanti), l'asse di sterzo attorno a cui ruota è, in realtà, un asse sghembo definito (vedi fig. 3.1) attraverso gli angoli di incidenza e di inclinazione e le distanze longitudinale e trasversale tra la sua intersezione con il piano stradale ed il centro dell'impronta, rispettivamente braccio a terra longitudinale e braccio a terra trasversale. Per semplicità si suppone l'asse di sterzo

ortogonale al terreno e passante per il centro ruota. Così facendo si trascurano le variazioni di camber γ , convergenza ε e carreggiata legate alla rotazione delle ruote.

A causa dell'elasticità della tiranteria di sterzo e dei bracci delle sospensioni, nonché dell'effetto di un eventuale sistema di servosterzo, il valore dell'angolo di sterzo delle ruote non è univocamente determinato dalla posizione del volante. Per semplicità si può supporre di avere un sistema di guida perfettamente rigido. In tal modo la posizione angolare delle ruote sterzanti risulta assegnata e non costituisce una variabile.

Sempre per quanto riguarda il sistema di sterzata per la cosiddetta sterzata cinematica, cioè con angoli di deriva tutti nulli, l'angolo δ_i della ruota interna alla curva è maggiore di quello della ruota esterna δ_e secondo la relazione

$$\frac{t_f}{l} = \frac{1}{\tan(\delta_e)} - \frac{1}{\tan(\delta_i)} \quad (3.1)$$

da cui si ricava

$$\delta_e = \delta_i - \frac{t_f}{l} \cdot \delta_i^2 + O \cdot (\delta_i^3) \quad (3.2)$$

Pertanto, per piccoli angoli di sterzo, si ha che $\delta_i \cong \delta_e$. D'ora in poi ci si riferirà pertanto all'angolo di sterzo assunto da entrambe le ruote univocamente con il simbolo δ .

In riferimento alle masse, poiché nella realtà la differenza tra massa sospesa e *non* sospesa è elevata, con la seconda generalmente pari a circa un decimo rispetto alla prima, non si commette un errore rilevante se si assume, ai fini della presente modellazione, tutta la massa del veicolo interamente come sospesa.

L'effetto totale di tutte queste ipotesi è un modello con tre soli gradi di libertà, in cui il veicolo è schematizzato come un unico corpo rigido in moto piano (vedi fig. 3.1). (1) (2)

3.2 Grandezze di riferimento e convenzioni

Sulla base delle precedenti ipotesi, si procede a formulare matematicamente il modello di veicolo. Un possibile schema è rappresentato in fig. 2.1. Si tratta di un unico corpo rigido di massa M e baricentro CG .

Per consuetudine, si definisce un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z, CG) solidale al veicolo, e quindi detto di assi corpo, con origine nel baricentro. Come illustrato in fig. 2.1, l'asse x è assunto parallelo alla strada e diretto in avanti, l'asse z ortogonale alla strada e diretto verso l'alto e l'asse y perpendicolare agli altri due e diretto verso sinistra.

In generale, questo sistema di riferimento non coincide con la terna centrale d'inerzia. Se però si assume che il veicolo sia simmetrico rispetto al piano longitudinale contenente i due assi x e z , almeno l'asse y è centrale di inerzia e quindi si annullano i prodotti di inerzia J_{xy} e J_{zy} , mentre è in generale non nullo il prodotto d'inerzia J_{zx} .

Come già detto, il veicolo è supposto in moto piano. Si indica con V la velocità assoluta del baricentro e con ψ l'angolo di imbardata, pertanto in questo capitolo verranno assunti i simboli $\dot{\psi}$ e $\ddot{\psi}$ per indicare rispettivamente la velocità di imbardata e l'accelerazione di

imbardata. La posizione del baricentro rispetto agli assi del veicolo è definito dalle lunghezze a e b (dette semipassi anteriore e posteriore); con $l = a + b$ si indica il passo mentre con t_f e t_r si indicano rispettivamente la carreggiata anteriore e posteriore.

Il modello creato si riferisce a trattazioni del tipo monotraccia pertanto, nonostante la schematizzazione riportata in fig. 2.1 utilizzata per meglio definire il problema ed essere allo stesso tempo vicini al sistema fisico reale, è bene far riferimento sempre alla schematizzazione riproposta in fig. 2.2, per tenere in mente, e non cadere in confusione, che si sta effettuando una modellazione basata sugli assali e non sulle singole ruote. Si tratta, come ben noto, di una schematizzazione astratta ma aderente ai fondamenti del modello in questione.

3.3 Impostazione e strategia risolutiva del problema

Per la piena comprensione del modello è necessario definirne preventivamente, oltre alle ipotesi poste alla sua base, definite nei precedenti paragrafi, anche gli aspetti fondamentali e le caratteristiche costitutive specifiche, risultato finale dello studio condotto in questo lavoro che permettono di comprendere a fondo il modello ed il ragionamento che sta dietro, come illustrato di seguito.

Il modello è per livello di implementazione simile a quelli del tipo a bicicletta ma con evoluzioni sostanziali che permettano la contemplazione delle caratteristiche più specifiche degli pneumatici, degli effetti del camber, del momento autoallineante, del trail, della rigidità delle sospensioni e dello smorzamento. Nella fattispecie è uno strumento semplice e veloce i cui dati sono facilmente misurabili o identificabili da dati sperimentali e permette sia l'impostazione di nuovi autoveicoli in progettazione sia l'analisi di veicoli esistenti di cui si vogliono indagare gli effetti delle variazioni dei macroparametri sul comportamento di handling.

I dati di input necessari al modello possono essere raggruppati in

- Dati geometrici del veicolo;
- Parametri elastocinematici;
- Dati pneumatico.

Il modello sviluppato permette l'analisi del comportamento della dinamica laterale degli autoveicoli, sia in condizioni stazionarie che transitorie tale per cui la strategia risolutiva è stata opportunamente affrontata in maniera duale, relativamente ai due aspetti, al fine di ottenere maggiore qualità nei risultati.

In riferimento alla previsione del *comportamento in stazionario* del veicolo il modello è in grado di fornire le curve di sottosterzo, assetto e rollio oltre a specifici parametri oggettivi. Tutte le grandezze legate a tale modellazione vengono calcolate relativamente ad una accelerazione laterale (A_y) fissa, incrementata a step costanti fino al limite di aderenza. In tale maniera le relative curve caratteristiche specificate vengono ricomposte come unione dei valori delle grandezze calcolati per le differenti A_y ; in maniera del tutto analoga a ciò che avverrebbe nello studio del comportamento in stazionario tramite prove reali in pista, in cui vengono registrati i valori delle grandezze nello stabilizzato a differenti livelli di accelerazione laterale.

Per quanto riguarda l'*analisi in frequenza*, il modello è in grado di fornire le funzioni di risposta in frequenza di accelerazione laterale, velocità d'imbardata, angolo di assetto e angolo di rollio in funzione dell'angolo volante e l'angolo di rollio in funzione dell'accelerazione laterale. Nella fattispecie come approccio risolutivo è stata utilizzata la simulazione dinamica di uno sweep in frequenza in riferimento ad un modello matematico in cui i contributi alla variazione di convergenza, dovuti al rollio, alla forza laterale e al momento autoallineante sono valutati e sommati istante per istante. Le curve di risposta in frequenza di output sono ricavate elaborando le time history delle grandezze ricavate nell'analisi di sweep.

Per entrambi i casi la modellazione sviluppata fa riferimento ad una trattazione del tipo monotraccia, dove il termine di ragionamento è costituito dall'assale inteso, in termini di grandezze utilizzate per la modellazione, come l'equivalente delle due ruote. In alcuni casi, come per la determinazione della caratteristica equivalente di assale (§ 3.3.3), per questioni di qualità del modello si fa riferimento a grandezze relative alle singole ruote ragionando in termini di quattro corner, ma solo per ottenere le relative grandezze riferite agli assali, rimanendo, di fatto, coerenti con una modellazione del tipo *single track*.

3.4 Modello in stazionario

La modellazione inerente la previsione del comportamento in stazionario del veicolo prevede la definizione del contributo di cedevolezza dell'angolo di sterzo e di assetto, a cui aggiungendo i relativi contributi cinematici, permettono di ricavare le curve di sottosterzo ed assetto del veicolo per una manovra di steering a raggio costante ovvero a velocità costante. Nello specifico il modello prevede, per ogni valore di osservazione fissato di A_y , la risoluzione di set equazioni utilizzati per la descrizione:

- del rollio;

- dei trasferimenti di carico laterali su ogni ruota;
- degli pneumatici;
- della rigidità equivalente dell'assale.

L'equazione di rollio attraverso le grandezze di inerenti la geometria del veicolo (masse, carreggiate e posizione del baricentro e del centro di rollio) ed elastocinematici (rigidità verticali di molle e barre antirollio), permette di determinare l'angolo di rollio della vettura e le connesse escursioni verticali delle sospensioni e compressioni degli pneumatici.

Il trasferimento di carico, invece, descrive il fenomeno della variazione di carico verticale, dalla ruota interna a quella esterna del medesimo assale, durante la percorrenza delle traiettorie non rettilinee. Tali grandezze, assieme al gradiente di camber e ai dati degli pneumatici, permettono di definire a loro volta la caratteristica effettiva dei due assali. Questa, lega tra loro la forza laterale e l'angolo di deriva di ogni assale, in riferimento ai soli pneumatici, definendone di conseguenza le corrispondenti rigidità.

Per la definizione degli angoli di deriva complessivi degli assali è necessario, assieme all'utilizzo delle rigidità di assale degli pneumatici, tener in conto anche dei contributi delle caratteristiche elastocinematiche delle sospensioni. Ciò è fatto considerando tali contributi alla stregua di rigidità, da valutare come delle molle poste in serie. La definizione della rigidità complessiva di assale, considerando che la forza laterale ad essa agente viene calcolata facilmente conoscendo l'accelerazione laterale vigente, permette di ricavare gli angoli di deriva totali dei due assali.

Queste due grandezze sono utilizzate per ricavare la quota elastica dell'angolo di assetto e dell'angolo di sterzo. Sommando ad essi la quota cinematica, derivante dalla manovra che si vuole simulare, si ottiene l'angolo totale di assetto e del volante; essendo tutte le grandezze espresse in funzione dell'accelerazione laterale, esse forniscono immediatamente le curve di assetto e di sottosterzo.

Le equazioni del modello, trattate in maniera esaustiva a seguire, permettono pertanto di qualificare in maniera completa il comportamento in stazionario del veicolo per tutto il range di accelerazione laterale ammissibile, definito dal valore nullo fino al limite di aderenza.

3.4.1 Equazioni di rollio

La modellazione implementata inerentemente al rollio tiene conto dei seguenti fattori:

- rigidità primarie di molle e barre;
- altezza del centro di rollio e altezza baricentro;
- rigidità verticale degli pneumatici.

Il rispettivo gruppo di equazioni è definito mediante la schematizzazione del veicolo (fig. 3.3) come un doppio pendolo a corpi rigidi e masse concentrate, identificanti la massa sospesa e non sospesa, incernierati tra loro in corrispondenza del centro di rollio della cassa rispetto alle sospensioni. L'altezza da terra h_{CR} , di tale centro di rollio, è definita pari all'altezza dell'asse di rollio in corrispondenza della normale al suolo passante per il centro di gravità secondo

$$h_{CR} = \frac{a \cdot h_f + b \cdot h_r}{a + b} \quad (3.3)$$

che tiene conto dei centri di rollio anteriore e posteriore, posti ad altezza da terra fissa e pari ad h_f ed h_r , e della posizione longitudinale del centro di gravità definita attraverso i semipassi a e b .

Il doppio pendolo risulta a sua volta incernierato in corrispondenza del centro di rollio degli pneumatici considerati deformabili.

In base a tale schematizzazione bisogna imporre due equazioni di equilibrio, alle sospensioni e agli pneumatici, esprimibili mediante la ben nota relazione cardinale della dinamica del corpo rigido

$$m \cdot a = F \quad (3.4)$$

espressa in coordinate angolari, notando che per il corretto utilizzo benché il moto del veicolo è considerato piano il campo di forze è comunque non tale.

L'equazione di *equilibrio a rollio alle sospensioni* considera l'equilibrio attorno all'asse di rollio delle sospensioni per la quale interviene pertanto soltanto la massa sospesa e la rigidità a rollio delle sospensioni. La modellazione esatta del fenomeno prevede che durante la rotazione venga considerato lo spostamento laterale della massa tale per cui oltre alla forza laterale data dalla omologa accelerazione agisca anche la componente di forza gravitazionale.

Considerando l'analisi del solo pendolo superiore, con una lunghezza pari alla distanza tra la massa sospesa e l'asse attorno a cui essa ruota, la prima equazione di equilibrio può quindi essere scritta come:

$$M_{sosp} \cdot A_y \cdot f_1 + M_{sosp} \cdot g \cdot h_1 = K_{roll_sosp} \cdot \theta_{sosp} \quad (3.5)$$

dove i due termini a sinistra sono rispettivamente la componente al momento di rotazione data dalla forza laterale, determinata dalla accelerazione laterale A_y agente alla massa sospesa, moltiplicata per il braccio verticale f , e la componente data dalla forza verticale, determinata dalla accelerazione verticale g agente alla massa sospesa, moltiplicata per il braccio orizzontale h_1 ; il termine a destra identifica invece il momento che si oppone a tale

rotazione, dato dalla rigidezza K_{roll_sosp} degli organi elastici (molle e barre antirollio) delle sospensioni di entrambi gli assali, ricalcolate in componenti angolari tenendo conto delle relative carreggiate.

Sia i bracci, h_1 e f_1 , che il momento resistente sono funzioni dell'angolo di rollio θ_{sosp} .

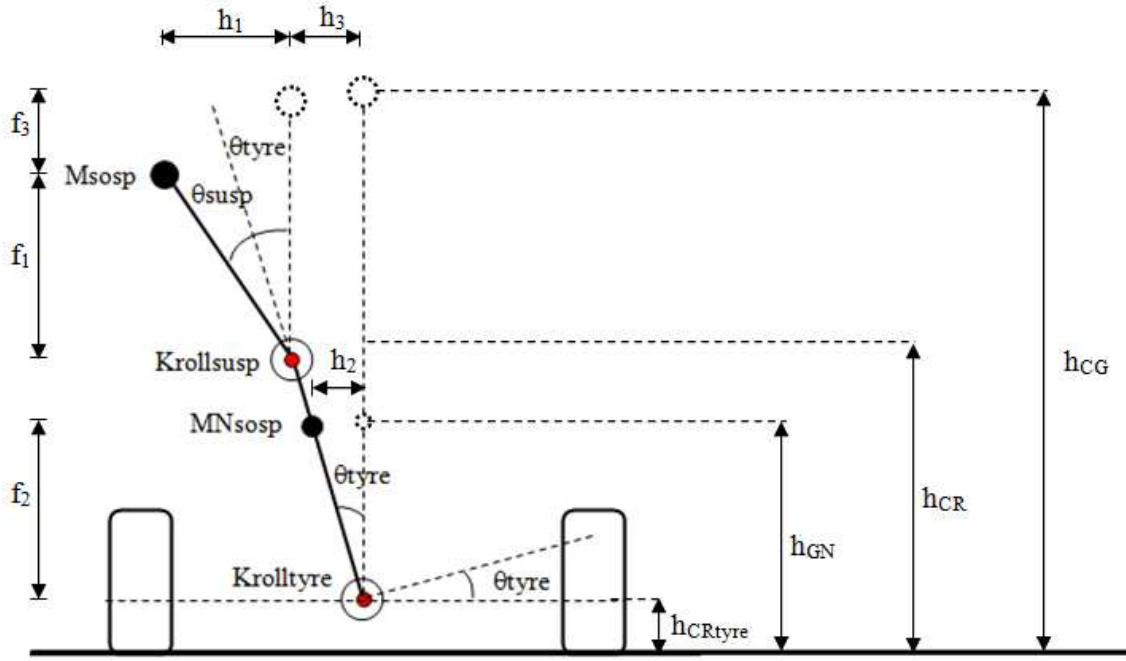


Figura 3.1: Schematizzazione a doppio pendolo del veicolo per l'analisi del comportamento a rollio.

L'equazione di *equilibrio di rollio agli pneumatici* considera l'equilibrio a rollio dell'intero veicolo attorno al centro di rotazione definito dalla cedevolezza verticale degli pneumatici. Per la scrittura di questa equazione vengono considerati entrambi i pendoli, tenendo in conto sia della cedevolezza degli organi della sospensione che della cedevolezza verticale degli pneumatici. In maniera simile al caso precedente sussistono due contributi di coppia a rollio dati dalle due componenti di accelerazione laterale e gravitazionale, con la differenza che vanno valutate per entrambi i pendoli. L'equazione diventa pertanto:

$$\begin{aligned}
 M_{sosp} \cdot A_y \cdot (h_{CG} - h_{CRtyre} - f_3) + M_{sosp} \cdot g \cdot (b + h_3) + M_{Nsosp} \cdot A_y \cdot f_2 + \\
 + M_{Nsosp} \cdot g \cdot h_2 = K_{roll_tyre} \cdot \theta_{tyre}
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Con h_G altezza da terra del baricentro del veicolo, h_{CR_Tyre} altezza da terra del centro di rollio degli pneumatici, h_1 , f_1 , h_2 , f_2 , h_3 ed f_3 sono rispettivamente le componenti orizzontale e verticale della distanza tra massa sospesa e centro di rollio della sospensione, le componenti orizzontale e verticale della distanza tra massa non sospesa e centro di rollio degli

pneumatici, lo spostamento orizzontale del centro di rollio della cassa rispetto alla posizione verticale originale e la distanza verticale tra le posizioni della massa sospesa in condizione di solo rollio dovuto agli pneumatici ed anche alle sospensioni (vedi fig. 3.3)

I termini geometrici presenti nelle equazioni (3.5) e (3.6) sono così espressi:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= (h_{CG} - h_{CR}) \cdot \text{sen}(\theta_{sosp} + \theta_{tyre}) \\
 f_1 &= (h_{CG} - h_{CR}) \cdot \text{cos}(\theta_{sosp} + \theta_{tyre}) \\
 h_2 &= (h_{GN} - h_{CRtyre}) \cdot \text{sen}(\theta_{tyre}) \\
 f_2 &= (h_{GN} - h_{CRtyre}) \cdot \text{cos}(\theta_{tyre}) \\
 h_3 &= (h_{CR} - h_{CRtyre}) \cdot \text{sen}(\theta_{tyre}) \\
 f_3 &= (h_{CG} - h_{CR}) - (h_{CR} - h_{CRtyre}) \cdot \text{cos}(\theta_{tyre}) - (h_{CG} - h_{CR}) \cdot \text{cos}(\theta_{sosp} + \theta_{tyre})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

In virtù delle ipotesi poste alla base del modello e secondo quanto è già consolidato in letteratura, in riferimento a questa tipologia di modellazione, le precedenti equazioni possono essere semplificate utilizzando le seguenti approssimazioni:

$$\text{sen}(\alpha) \cong \alpha \tag{3.8}$$

$$\text{cos}(\alpha) \cong 1 \tag{3.9}$$

Pertanto utilizzando le (3.7), (3.8) e (3.9) nelle equazioni (3.5) e (3.6), si ottengono le rispettive equazioni riscritte come di seguito

$$\begin{aligned}
 M_{sosp} \cdot A_y \cdot (h_{CG} - h_{CR}) + M_{sosp} \cdot g \cdot (h_{CG} - h_{CR}) \cdot (\theta_{sosp} + \theta_{tyre}) &= \\
 = K_{roll_{sosp}} \cdot \theta_{sosp} &
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 M_{sosp} \cdot A_y \cdot [(h_{CR} - h_{CRtyre}) + (h_{CG} - h_{CR})] + M_{sosp} \cdot g \cdot \\
 \cdot [(h_{CG} - h_{CR}) \cdot (\theta_{sosp} + \theta_{tyre}) + (h_{CR} - h_{CRtyre}) \cdot \theta_{tyre}] + M_{Nsosp} \cdot A_y \cdot \\
 \cdot [(h_{GN} - h_{CRtyre}) + g \cdot (h_{GN} - h_{CRtyre}) \cdot \theta_{tyre}] &= \\
 = K_{roll_{tyre}} \cdot \theta_{tyre} &
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Le (3.10) e (3.11) possono essere ulteriormente semplificate senza commettere errori se si considera che generalmente il centro di rollio dato dagli pneumatici è molto vicino al suolo, tale per cui può essere considerata approssimativamente nulla la sua altezza da terra:

$$h_{CR_{Tyre}} \cong 0 \quad (3.12)$$

nonché la massa non sospesa di un veicolo, secondo quanto già definito nelle ipotesi iniziali, è trascurabile rispetto a quella sospesa e pertanto può essere considerata nulla ai fini della presente modellazione

$$M_{Nsosp} \cong 0 \quad (3.13)$$

In tale maniera le equazioni di rollio si riconducono ad un sistema di equazioni, alle incognite θ_{susp} e θ_{tyre} , che prevede una soluzione in forma chiusa. Tramite tali angoli, con semplici considerazioni geometriche è possibile ricavare anche le escursioni delle sospensioni, la compressione verticale degli pneumatici nonché il gradiente di rollio vista la dipendenza delle grandezze da A_y .

3.4.2 Trasferimenti di carico laterali

Per la descrizione del fenomeno di variazione del carico verticale in curva il veicolo è schematizzato come nel caso precedente (§ 3.3.1) ad eccezione che non viene considerata la distinzione tra massa sospesa e non sospesa mediante un doppio pendolo; pertanto è considerato un unico pendolo che rappresenta solo la massa sospesa assunta uguale a quella dell'intero veicolo.

Nel meccanismo di trasferimento di carico laterale entrano in gioco indubbiamente sia le rigidità delle sospensioni e delle barre antirollio sia alcune grandezze geometriche del veicolo.

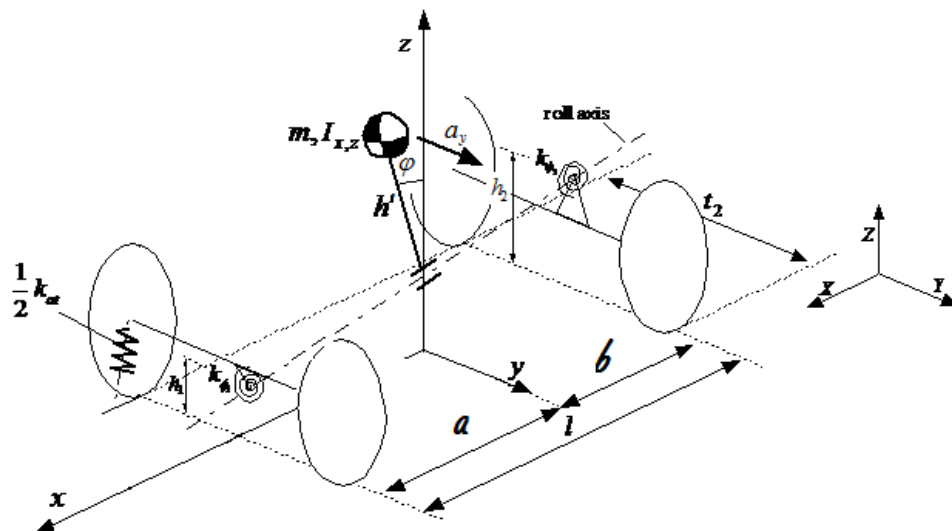


Figura 3.2: Schematizzazione del veicolo per il calcolo dei trasferimenti di carico laterali (2).

Le rigidezze degli elementi elastici delle sospensioni, dei relativi assali, sono tenuti in conto attraverso delle rigidezze torsionali a rollio equivalenti, chiamati in maniera convenzionale K_{ϕ_f} e K_{ϕ_r} , poste in corrispondenza dei vincoli cinematici. Il loro valore è funzione delle rigidezze lineari delle molle delle sospensioni, delle rigidezze a terra delle barre antirollio, delle rigidezze verticali degli pneumatici nonché delle ampiezze delle carreggiate t_f e t_r , secondo quanto espresso dalla formulazione

$$K_{\phi} = K_{eq} \cdot \frac{t^2}{2} \quad (3.15)$$

dove K_{eq} è

$$K_{eq} = \frac{[(K_{sosp} + K_{bar}) \cdot K_{tyre}]}{[(K_{sosp} + K_{bar}) + K_{tyre}]} \quad (3.16)$$

con K_{sosp} , K_{bar} e K_{tyre} rispettivamente le rigidezze verticali di molle, barre antirollio e pneumatici.

Le grandezze geometriche coinvolte nel trasferimento di carico sono l'altezza da terra del baricentro, le altezze da terra dei centri di rollio, le carreggiate ed i semi passi. Nella fattispecie l'altezza da terra del centro di rollio della cassa (h_{CR}) e quella del baricentro (h_{CG}) determinano, a parità di accelerazione laterale e delle altre caratteristiche, oltre all'entità del rollio anche la sua modalità: definita la loro distanza relativa come $\Delta h = h_{CG} - h_{CR}$, una Δh positiva, corrispondente ad un baricentro posto più in alto rispetto all'asse di rollio, implica un "coricamento" della cassa della vettura verso il lato esterno della traiettoria curvilinea percorsa, viceversa una Δh negativa, implica una inclinazione verso l'interno da parte della cassa del veicolo.

Data l'ipotesi di cassa perfettamente rigida l'angolo di rollio registrato sui due assali è uguale e può essere calcolato considerando la condizione di stazionarietà posta alla base che permette di trascurare i fenomeni dinamici legati al beccheggio e all'imbardata e di considerare solo l'equilibrio al rollio mediante un approccio di tipo statico. In tal senso l'equilibrio della massa sospesa al rollio permette di definire l'angolo

$$\phi = \frac{(F_{y_f} + F_{y_r}) \cdot \Delta h}{K_{\phi_{tot}}} \quad (3.17)$$

Ulteriormente per ciascun assale possono essere scritte le equazioni di equilibrio: attorno all'asse di rollio

$$\Delta F_{z_f} \cdot t_f - F_{y_f} \cdot d_f = K_{\phi_f} \cdot \phi \quad (3.18a)$$

$$\Delta F_{z_r} \cdot t_r - F_{y_r} \cdot d_r = K_{\phi_r} \cdot \phi \quad (3.18b)$$

lungo la direzione verticale z

$$F_{0sf} = M \cdot g \cdot \frac{b}{a+b} \quad (3.19a)$$

$$F_{0sr} = M \cdot g \cdot \frac{a}{a+b} \quad (3.19b)$$

e lungo la direzione laterale y

$$F_{yf} = M \cdot A_y \cdot \frac{b}{a+b} \quad (3.20a)$$

$$F_{yr} = M \cdot A_y \cdot \frac{a}{a+b} \quad (3.20b)$$

Utilizzando le precedenti si ottengono le espressioni che permettono di valutare i trasferimenti di carico sulle singole ruote

$$F_{zfl} = \frac{M \cdot g}{2} \cdot \frac{b}{a+b} - M \cdot A_y \cdot \left(\frac{K_f}{K_f + K_r} \cdot \frac{\Delta h_f}{t_f} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{h_{CR}}{t_f} \right) \quad (3.21)$$

$$F_{zfr} = \frac{M \cdot g}{2} \cdot \frac{b}{a+b} + M \cdot A_y \cdot \left(\frac{K_f}{K_f + K_r} \cdot \frac{\Delta h_f}{t_f} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{h_{CR}}{t_f} \right) \quad (3.22)$$

$$F_{zrl} = \frac{M \cdot g}{2} \cdot \frac{a}{a+b} - M \cdot A_y \cdot \left(\frac{K_r}{K_f + K_r} \cdot \frac{\Delta h_r}{t_r} + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{h_{CR}}{t_r} \right) \quad (3.23)$$

$$F_{zrr} = \frac{M \cdot g}{2} \cdot \frac{a}{a+b} + M \cdot A_y \cdot \left(\frac{K_r}{K_f + K_r} \cdot \frac{\Delta h_r}{t_r} + \frac{a}{a+b} \cdot \frac{h_{CR}}{t_r} \right) \quad (3.24)$$

Come si vede il trasferimento di carico sulle singole ruote dipende in parte dalla geometria delle sospensioni evidenziata dalle altezze dei centri di rollio e dalle carreggiate ed in parte dagli organi elastici (molle e barre antirollio) identificate dalle rigidzze torsionali. Inoltre, la ripartizione di trasferimento di carico tra assale anteriore e posteriore dipende in maniera diretta dalla ripartizione di rigidzza tra gli omonimi assali, intesa sia in termini espliciti (le rigidzze) che in termini impliciti (carreggiate e centri di rollio).

3.4.3 Modello di pneumatico

Uno degli aspetti cruciali per la modellazione del veicolo risiede nella descrizione del comportamento degli pneumatici, in particolare in riferimento alla definizione di modelli semplificati il problema risiede nel mantenere il giusto compromesso tra semplicità e completezza, poiché in una modellazione completa degli pneumatici i parametri in gioco sono tanti e non sempre facilmente quantificabili.

Considerando che la forza laterale F_y , esercitata dalla strada su ciascuna ruota, dipende principalmente dal corrispondente angolo di deriva α , dal carico verticale F_z , dall'angolo di camber γ e dalla forza longitudinale F_x , un modello matematico semplice, generalmente utilizzato, che ne definisce il legame tra forza laterale, angolo di deriva ed angolo di camber è quello di pneumatico linearizzato

$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha + C_\gamma \cdot \gamma \quad (3.25)$$

avendo indicato con C_α e C_γ rispettivamente la rigidezza di deriva e di camber dello pneumatico.

Si può ulteriormente affinare tale modello limitando il campo di impiego a quei casi in cui gli angoli di deriva sono piccoli, ne segue che anche il trasferimento di carico verticale ΔF_{zi} in curva tra le due ruote di uno stesso assale sarà contenuto. Si può quindi linearizzare anche la dipendenza delle rigidezze di deriva C_α e di camber C_γ da ΔF_z a partire dai valori, rispettivamente C_α^0 e C_γ^0 , che assumono in corrispondenza del carico verticale agente sul pneumatico quando il veicolo è in moto rettilineo uniforme con velocità V . Analiticamente si ha

$$C_\alpha \cong C_\alpha^0 \pm \xi_\alpha \Delta F_z \quad (3.26)$$

$$C_\gamma \cong C_\gamma^0 \pm \xi_\gamma \Delta F_z \quad (3.27)$$

dove ξ_α e ξ_γ identificano la sensibilità delle rigidezze, di deriva e camber, al carico verticale. Tale modello implica una risposta immediata da parte dello pneumatico che non corrisponde a realtà. Un modello più realistico, in tal senso, può essere realizzato introducendo una equazione differenziale del tipo

$$\frac{L}{V} \cdot \dot{F}_y + F_y = K_{tyre} \cdot \alpha(t) \quad (3.28)$$

dove L è la lunghezza di rilassamento e V la velocità di avanzamento. Anche in questo caso, le rigidezze di deriva K_{tyre} sono costanti, ma rispetto a prima la forma differenziale dell'equazione implica un legame temporale dell'incognita $F_y = F_y(t)$.

Le trattazioni descritte mantengono il requisito di semplicità considerando che oltre al ridotto numero di parametri utilizzati essi si riferiscono all'assale e non alle singole ruote, meno facilmente stimabili. Nel corso del presente studio è tuttavia emersa una perdita di precisione nei risultati con il loro utilizzo, pertanto la modellazione è stata spostata verso la formulazione di Pacejka, sicuramente più complessa ma d'altra parte capace di permettere alti standard di modellazione considerando che è alla base di tutti i più precisi modelli di calcolo, compresi quelli multibody.

Data la finalità del modello sviluppato nella analisi del comportamento della dinamica laterale del veicolo, della formulazione MF05 ne è stata utilizzata la parte relativa alla definizione della forza laterale in stazionario in condizioni di pura deriva (*pure slip*), come di seguito riportata.

$$F_y = F_{y0}(\alpha, \gamma, F_z)$$

$$F_{y0} = D_y \sin [C_y \arctan \{B_y \alpha_y - E_y (B_y \alpha_y - \arctan (B_y \alpha_y))\}] + S_{Vy}$$

$$\alpha_y = \alpha + S_{Hy}$$

$$\gamma_y = \gamma \cdot \lambda_{\gamma y}$$

con i coefficienti:

$$C_y = p_{Cy1} \cdot \lambda_{Cy}$$

$$D_y = \mu_y \cdot F_z \cdot \zeta_2$$

$$\mu_y = (p_{Dy1} + p_{Dy2} df_z) \cdot (1 - p_{Dy3} \gamma_y^2) \cdot \lambda_{\mu y}$$

$$E_y = (p_{Ey1} + p_{Ey2} df_z) \cdot \{1 - (p_{Ey3} + p_{Ey4} \gamma_y) \operatorname{sgn}(\alpha_y)\} \cdot \lambda_{Ey} \quad \text{with } E_y \leq 1$$

$$K_{y0} = p_{Ky1} \cdot F_{z0} \cdot \sin \left[2 \arctan \left\{ \frac{F_z}{p_{Ky2} F_{z0} \lambda_{Fz0}} \right\} \right] \cdot \lambda_{Fz0} \cdot \lambda_{Ky}$$

$$K_y = K_{y0} \cdot (1 - p_{Ky3} |\gamma_y|) \cdot \zeta_3$$

$$B_y = K_y / (C_y D_y)$$

$$S_{Hy} = (p_{Hy1} + p_{Hy2} df_z) \cdot \lambda_{Hy} + p_{Hy3} \gamma_y \cdot \zeta_0 + \zeta_4 - 1$$

$$S_{Vy} = F_z \cdot \{ (p_{Vy1} + p_{Vy2} df_z) \cdot \lambda_{Vy} + (p_{Vy3} + p_{Vy4} \cdot df_z) \cdot \gamma_y \} \cdot \lambda_{\mu y} \cdot \zeta_4$$

con i coefficienti il cui significato è riportato in tab. 3.2

Tab. 3.2: Coefficienti inerenti la forza laterale in *pure slip*

Name:	Explanation:
ρ_{Cy1}	Shape factor C_{fy} for lateral forces
ρ_{Dy1}	Lateral friction μ_{y1}
ρ_{Dy2}	Variation of friction μ_{y1} with load
ρ_{Dy3}	Variation of friction μ_{y1} with squared inclination
ρ_{Ey1}	Lateral curvature E_{fy} at F_{znom}
ρ_{Ey2}	Variation of curvature E_{fy} with load
ρ_{Ey3}	Inclination dependency of curvature E_{fy}
ρ_{Ey4}	Variation of curvature E_{fy} with inclination
ρ_{Ky1}	Maximum value of stiffness K_{fy}/F_{znom}
ρ_{Ky2}	Load at which K_{fy} reaches maximum value
ρ_{Ky3}	Variation of K_{fy}/F_{znom} with inclination
ρ_{Hy1}	Horizontal shift S_{hy} at F_{znom}
ρ_{Hy2}	Variation of shift S_{hy} with load
ρ_{Hy3}	Variation of shift S_{hy} with inclination
ρ_{Vy1}	Vertical shift in S_{vy}/F_z at F_{znom}
ρ_{Vy2}	Variation of shift S_{vy}/F_z with load
ρ_{Vy3}	Variation of shift S_{vy}/F_z with inclination
ρ_{Vy4}	Variation of shift S_{vy}/F_z with inclination and load

Tale formulazione è stata applicata alle singole ruote ma, come meglio chiarito di seguito (§ 3.3.4), è stata utilizzata per ricavare le caratteristiche degli assali e pertanto inseribili nel modello monotraccia.

3.4.4 Rigidezza equivalente e caratteristica effettiva dell'assale

Il set finale di equazioni, che si basa sulle grandezze calcolate dai precedenti, e che agli effetti permette concretamente di definire il contributo di cedevolezza nelle curve di sottosterzo e di assetto, è relativo alla rigidezza equivalente di assale. Questa grandezza è definita come la relazione $F_y(\hat{\alpha})$ tra la forza laterale e l'angolo di deriva *apparente* $\hat{\alpha}$ di un assale, cioè l'angolo di deriva dello pneumatico α , depurato dall'angolo di sterzo δ , indotto dalle caratteristiche elastocinematiche della sospensione

$$F_y = K_{eff} \cdot \hat{\alpha} \quad \text{con} \quad \hat{\alpha} = \alpha - \delta \quad (3.29)$$

La definizione della rigidezza equivalente di assale implica la valutazione di una serie di effetti connessi con la sollecitazione esterna data dall'accelerazione laterale a cui il veicolo è sottoposto.

Tali effetti fanno riferimento alle caratteristiche degli pneumatici ed alle caratteristiche elastocinematiche delle sospensioni definibili attraverso delle grandezze che, in virtù della condizione imposta di moto stazionario, possono essere considerate come funzioni algebriche della forza laterale, considerando che in questa condizione non sussistono sfasamenti evidenti tra le accelerazioni di imbardata e di rollio come nel caso di condizioni di moto transitorio o oscillatorio (2).

L'effetto di tutti i singoli contributi può essere valutato in maniera semplificata facendo ricorso ad una formulazione secondo cui ognuno di essi, espresso in funzione della forza laterale che agisce al relativo assale, si aggiunge agli altri come delle molle in serie.

In condizione di accelerazione laterale la cassa del veicolo è soggetta a rollio e conseguentemente le sospensioni ad escursione; se cinematicamente non sono impostate su variazioni di convergenza perfettamente nulle esse danno un contributo all'ammontare dell'angolo di deriva, di una entità che può essere definita in maniera semplificata mediante un gradiente ($\varepsilon_{\Delta z}$) di tipo lineare che lega l'angolo di deriva alla escursione lineare delle sospensioni ovvero all'angolo di rollio del veicolo (ε_{θ}) ad esse connesso. Per porre tale fattore in termini di rigidità direttamente funzione della forza laterale, e pertanto come termine utilizzabile nella (3.31), bisogna adoperare il gradiente di rollio del veicolo e la massa inerente il relativo assale che identifica la quota parte di forza laterale che definisce l'entità dell'effetto sull'assale stesso. Quindi si ottiene la rigidità cercata che contempla l'effetto della variazione cinematica della convergenza a rollio.

La sospensione di una vettura contribuisce alla modifica dell'angolo di deriva anche con altre modalità considerando che, non essendo perfettamente rigida, sotto carico laterale subisce una deformazione che implica una alterazione di quanto imposto secondo una cinematica basata su corpi indeformabili. Questo contributo può essere anch'esso espresso in maniera semplificata attraverso un gradiente di tipo lineare (ε_{F_y}) che fornisce la variazione dell'angolo di convergenza per forza laterale unitaria e pertanto l'inverso della rigidità caratterizzante tale effetto ed utilizzabile nella (3.31).

La forza laterale oltre ad essere direttamente responsabile del cedimento elastico della sospensione, con conseguente diretta alterazione degli angoli di deriva, implica la nascita di una ulteriore sollecitazione esterna: il momento autoallineante, definito dal prodotto della forza laterale per il trail (il braccio longitudinale a terra), a sua volta responsabile di un ulteriore contributo alla variazione degli angoli di deriva. Questo contributo, quantificato in maniera semplificata attraverso un gradiente di tipo lineare (ε_{M_z}) che specifica la variazione dell'angolo di convergenza per unità di momento allineante, al fine di essere utilizzato nella (3.31) deve essere riportato in termini di forza laterale agente sull'assale moltiplicandolo per il braccio trasversale a terra.

L'ultimo fattore rimasto è quello direttamente connesso con gli pneumatici ed esprimibile attraverso la *rigidità di deriva degli pneumatici* e quindi esplicitamente utilizzabile nella (3.31). Sovente essa è utilizzata al posto della rigidità complessiva equivalente che qui si sta definendo. È stata volutamente lasciata per ultima rispetto agli altri fattori consapevoli della

maggior importanza che rispetto a questi riveste e con l'intento di darle una maggior attenzione.

La rigidità di deriva degli pneumatici può essere definita in differenti maniere in funzione della modellazione data agli stessi pneumatici (§ 3.3.2); la più semplice considera un legame di tipo lineare tra angolo di deriva e forza laterale, altre più complesse, ma in maniera più vicina al caso reale, considerano un legame non lineare tale per cui la rigidità non è più costante e pertanto deve essere valutata in maniera puntuale.

Ciò che qui si vuole è definire tale rigidità in maniera esatta e puntuale in riferimento alla caratteristica effettiva degli assali a partire da quello degli pneumatici. Tale grandezza all'interno della presente modellazione è identificata facendo ricorso al trasferimento di carico che permette la conoscenza della forza verticale agente su ognuna delle ruote dei due assali e quindi attraverso il calcolo della forza laterale che ognuna di esse può esprimere, secondo quanto definibile mediante i modelli *nobili* degli pneumatici del Pacejka. A tale punto l'identificazione della caratteristica dell'assale può essere costruita mediante la somma puntuale delle caratteristiche dei relativi singoli pneumatici, considerando che tale operazione di somma è legittima dato il medesimo angolo di deriva posto come ipotesi.

Ciò che si nota è ovviamente la mancanza di formulazione del problema in forma chiusa; la formulazione di Pacejka (§ 3.3.3), relativamente agli pneumatici, pone la forza laterale F_y in funzione dell'angolo di deriva α , dell'angolo di camber γ e della forza verticale F_z agente

$$F_y = F_y(\alpha, \gamma, F_z) \quad (3.35)$$

In tali termini la soluzione del problema non può essere ricercata in forma chiusa poiché per il calcolo della F_y è necessaria la conoscenza di tutte e tre le variabili, ma l'angolo di deriva degli pneumatici α risulta a sua volta funzione della forza laterale che si vuole calcolare. In tali termini la rigidità di deriva degli pneumatici è calcolabile solo tramite stratagemmi.

Per questo modello è stato creato un algoritmo che ricerca la soluzione in maniera iterativa.

3.5 Modello in transitorio

La previsione del comportamento del veicolo in transitorio prevede la simulazione di manovre dinamiche mediante un modello non stazionario, che tiene conto dell'effetto dinamico delle variazioni di convergenza dell'assale in funzione del rollio e della forza laterale. Le funzioni di risposta in frequenza vengono calcolate a partire dalle time history ottenute.

In tale formulazione adottata i contributi di variazione degli angoli di convergenza degli assali, dovuti al rollio, alla forza laterale e al momento autoallineante vengono sommati agli angoli ruota istante per istante, permettendo di tenere in conto dei ritardi di tempo con cui essi si concretizzano a causa delle caratteristiche proprie di reazione di ogni veicolo (date ad esempio dalle caratteristiche di smorzamento).

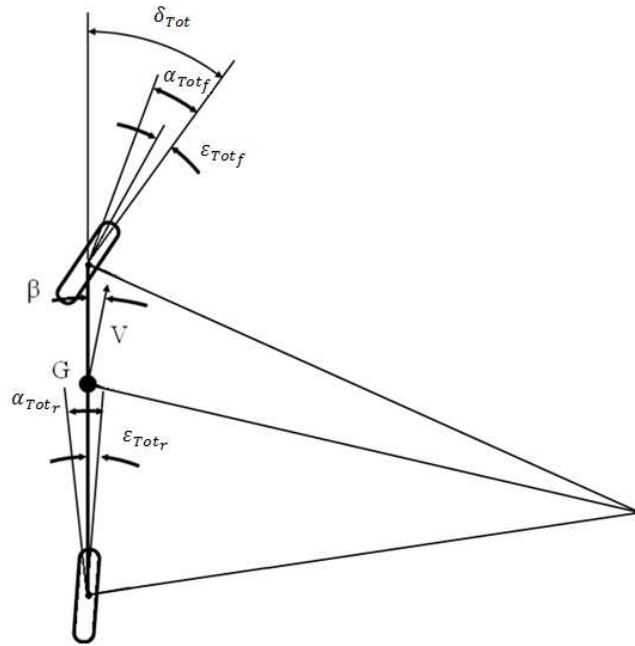


Figura 3.3: Visualizzazione di tutti i contributi che concorrono alla definizione degli angoli di deriva dell'assale anteriore posteriore.

Una modellazione si fatta permette di ottenere una capacità previsionale maggiore rispetto al caso in cui tali contributi non sono considerati in stretta connessione alla dinamica veicolo, ma in maniera "statica" inglobandoli nel calcolo della rigidità equivalente di assale.

Per questa modellazione il veicolo è stato schematizzato come una trave rigida con la massa concentrata nel baricentro e le risultanti delle forze agenti sulle singole ruote applicate al punto medio d'ogni assale per cui possono essere ricavati le equazioni differenziali costituenti scrivendo l'equilibrio dinamico della vettura lungo la direzione trasversale y

$$M \cdot A_y = \cdot (\dot{V} \cdot \beta + V \cdot \dot{\beta} + V \cdot \dot{\psi}) \quad (3.42)$$

altrimenti definibile come

$$M \cdot A_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (3.43)$$

e l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno la direzione verticale z

$$M_z = J_z \cdot \ddot{\psi} \quad (3.44)$$

che considerando i semipassi, a e b , e le forze laterali, F_{yf} ed F_{yr} , agenti agli assali può essere riscritta come

$$F_{yf} \cdot a + F_{yr} \cdot b = \ddot{\psi} \cdot J_z \quad (3.45)$$

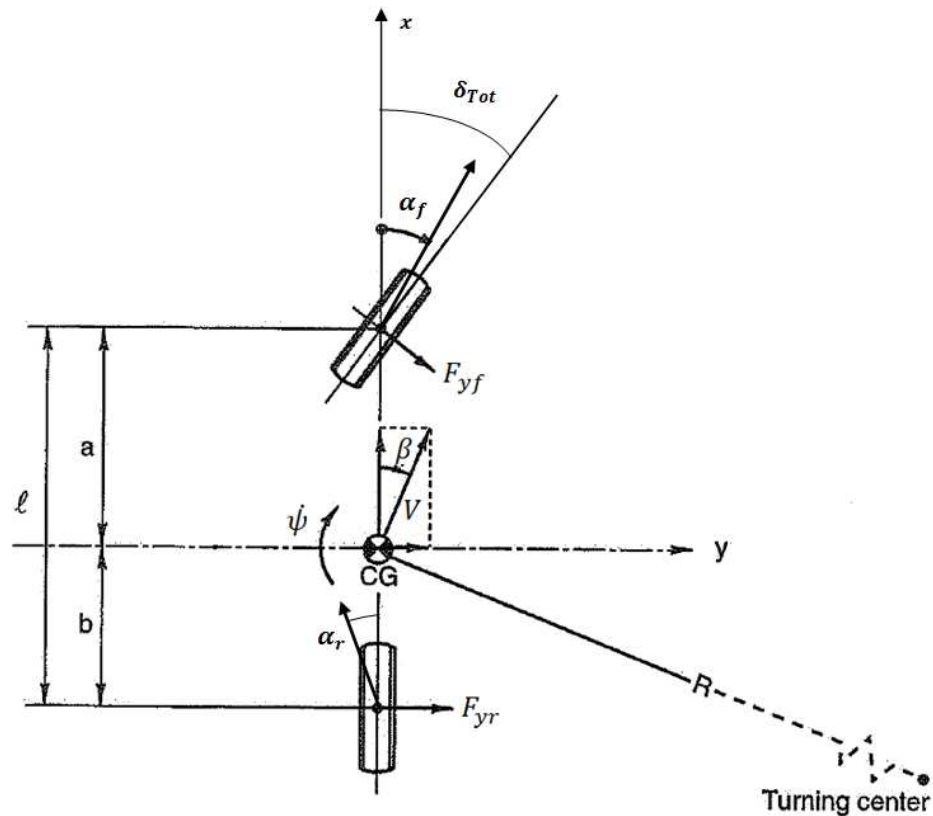


Figura 3.4: Schematizzazione veicolo per modello analisi in transitorio.

Un'ulteriore equazione può essere scritta facendo riferimento al rollio della cassa attorno ad un asse (di rollio appunto) considerato fisso nello spazio e parallelo all'asse longitudinale x . Schematizzando la cassa del veicolo come un pendolo con massa M_s pari a quella sospesa del veicolo ed inerzia a rollio (I_x), vincolato alle sospensioni mediante una cerniera cilindrica attraverso cui agisce una rigidità torsionale K_{th} ed uno smorzamento C_{th} che si oppongono al moto.

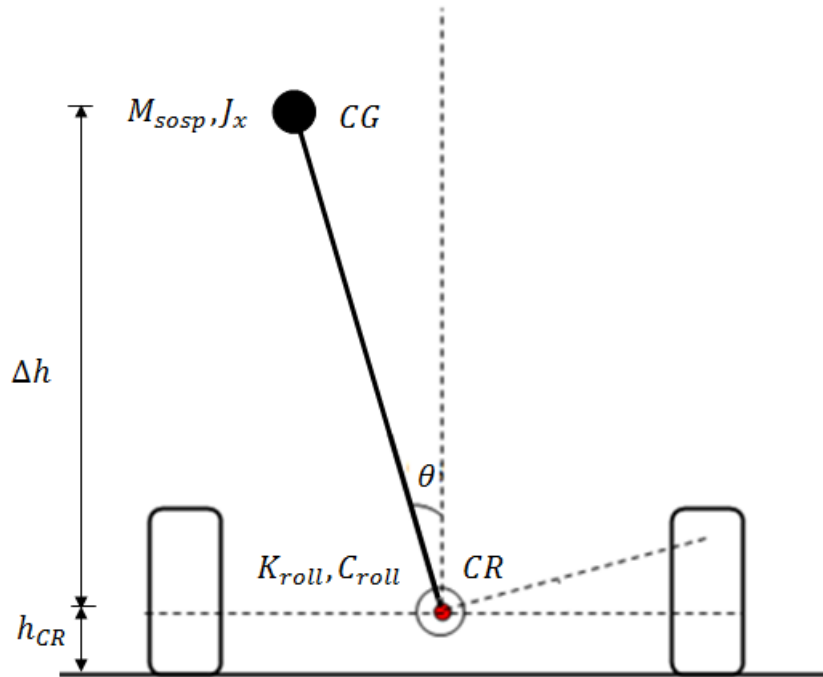


Figura 3.5: Schematizzazione veicolo e grandezze di riferimento per l'analisi del moto di rollio.

Per completare la modellazione sono necessarie ulteriori equazioni che possono essere scritte attraverso la definizione del comportamento degli pneumatici. Per considerare la non istantanea generazione della forza laterale F_y a seguito di imposizione dell'angolo di deriva α , a causa della deformabilità della carcassa del pneumatico, è stato adottato il seguente modello matematico

$$K_{\text{tyre}} \cdot \alpha = F_y + \frac{L}{V} \cdot \dot{F}_y \quad (3.51)$$

dove la lunghezza L è detta lunghezza di rilassamento. In tale espressione il legame costitutivo è di tipo differenziale tale per cui le forze laterali degli assali sono funzioni del tempo $F_y = F_y(t)$.

Il modello definito attraverso tali equazioni, a fronte della imposizione di una manovra del veicolo, mediante la definizione della legge di azionamento del volante e del valore della velocità di avanzamento, permette di definire le corrispondenti time history dell'accelerazione laterale, dell'angolo di assetto e relativa velocità, della velocità di imbardata, dell'accelerazione e della velocità e dell'angolo di rollio, nonché delle forze laterali esercitate dagli assali e i corrispondenti angoli di deriva. Se l'input del volante è di tipo sinusoidale e la velocità di avanzamento costante, tali grandezze opportunamente manipolate attraverso le trasformazioni di Fourier possono essere riportate dal dominio del tempo a quelle della frequenza per una valutazione del comportamento del veicolo in

frequenza attraverso le funzioni di risposta in frequenza di accelerazione laterale, velocità d'imbardata, angolo di assetto e angolo di rollio in funzione dell'angolo volante e dell'angolo di rollio in funzione dell'accelerazione laterale.

CAPITOLO 4

VALIDAZIONE NUMERICA DEL MODELLO

Il modello di veicolo descritto nel capitolo precedente in ogni sua fase di sviluppo è stato sottoposto a continue verifiche, confrontando i risultati da esso forniti con quelli di modelli più complessi. In tale modo si è ottenuta la direzione di sviluppo da seguire al fine di raggiungere gli obiettivi prefissati.

In questo capitolo viene presentata la validazione finale che può essere considerato l'ultimo step di verifica di quelle appena descritte e che permette di testare il livello qualitativo ottenuto.

Il confronto, effettuato avvalendosi di un ulteriore modello, può essere definita una *validazione numerica*. È stata effettuata tale tipo di validazione considerando la non facile disponibilità di una prova sperimentale che altresì sarebbe risultata *non comoda* considerando le problematiche per il reperimento, sui prototipi fisici, di molte grandezze (si immagini a quelle inerenti gli pneumatici) necessarie come input al modello numerico da validare; dati che altresì sono già normalmente disponibili all'interno del database del software preso a riferimento. Rimane peraltro da intendersi pienamente corretto ed efficace il confronto svolto se, come nel caso, il modello preso a riferimento ha un consolidato utilizzato per analisi di tipo handling, la cui validità è stata, a sua volta, già comprovata. Inoltre, la efficacia di una tale validazione è rafforzata dall'utilizzo di un modello di confronto superiore rispetto a quello da validare, inteso con ciò la maggiore complessità e completezza di modellazione.

Nella fattispecie come termine di paragone è stato utilizzato un modello preposto per analisi di dinamica veicolo sia *handling* che *ride*. Il modello si basa su una formulazione matematica a 15 g.d.l., 3 spostamenti lineari e 3 rotazioni per la cassa, 4 escursioni e 4 rotazioni per le ruote ed 1 rotazione volante che permette di simulare manovre di tipo *closed loop*, con controllo in retroazione da parte del pilota. Tale software si contraddistingue per la possibilità di definire qualsiasi caratteristica elasto-cinematica per le sospensioni e lo sterzo, le caratteristiche non lineari degli pneumatici, le caratteristiche di resistenze aerodinamiche e di avanzamento, nonché permette l'implementazione dei sottosistemi frenante e di propulsione con la possibilità di simulare qualsiasi tipo di trazione e di differenziale. In particolare la descrizione di alcuni componenti effettuata in maniera concettuale permette di implementare qualsiasi tipo di sospensione e di sistema di trazione.

Il confronto per quanto riguarda lo stazionario si è basato sulla simulazione di una manovra di tipo dolce *slow ramp steer*. Tale manovra consiste nell'aumentare progressivamente l'angolo volante con una rampa sufficientemente bassa ($\dot{\delta}_{sw} \leq 20 \text{ deg/sec}$) mantenendo costante la velocità di avanzamento; il veicolo percorre una traiettoria a spirale la cui curvatura aumenta progressivamente a partire dal valore nullo. Per quanto riguarda la previsione in frequenza si è utilizzato uno *sweep* rielaborato nel dominio delle frequenze.

Per evitare di avere un riscontro che potesse essere considerato casuale, e per ottenere un maggiore campo di indagine, sono stati considerati due database differenti ed estremi fra

loro: uno relativo ad una vettura appartenete al segmento *supercar* ed un secondo relativo ad una vettura di serie definibile *utilitaria familiare* appartenente al segmento C.

Di seguito sono riportati i risultati ottenuti mettendo a confronto il modello sviluppato con quello a 15 g.d.l., a cui si vuole tendere in termini di qualità di risultati, e con quello a bicicletta che ha rappresentato il punto di partenza del modello sviluppato e di cui si sono mantenute integre la caratteristica essenziale di *semplicità*.

Come per lo sviluppo del modello anche per la sua validazione verrà mantenuta una trattazione duale. Pertanto di seguito sono mostrati separatamente i risultati in riferimento alle previsioni stady-state e frequency, per entrambi i veicoli utilizzati per il raffronto.

I grafici che seguono si riferiscono alle grandezze più importanti per la qualificazione del comportamento dinamico di un veicolo; le curve in blu si indicano l'output del modello di sintesi, le curve in rosso indicano l'output prodotto dal modello a 15 g.d.l. e le curve in verde l'output prodotto dal modello bicicletta tradizionale.

4.1 Validazione previsione analisi in stazionario

In riferimento alle condizioni Steady-State si evidenzia come in riferimento all'angolo di rollio, in funzione dell'accelerazione laterale, il modello sviluppato ha una migliore previsione rispetto al modello tradizionale (minore differenza dal modello a 15 g.d.l.) e per entrambi i casi (veicoli). Nella fattispecie mantiene la tendenza a sottostimare l'angolo di rollio ma in maniera minore rispetto a al modello di partenza. Il distacco si manifesta in riferimento al superamento del campo lineare ($A_y > 0.4g$) in cui evidentemente il modello a 15 g.d.l. mostra una non linearità determinata dalla definizione *non* lineare di molte caratteristiche del veicolo e di alcuni componenti (bushing) che per definizione non possono essere implementate nel modello sviluppato e che si manifestano superata tale soglia di accelerazione laterale.

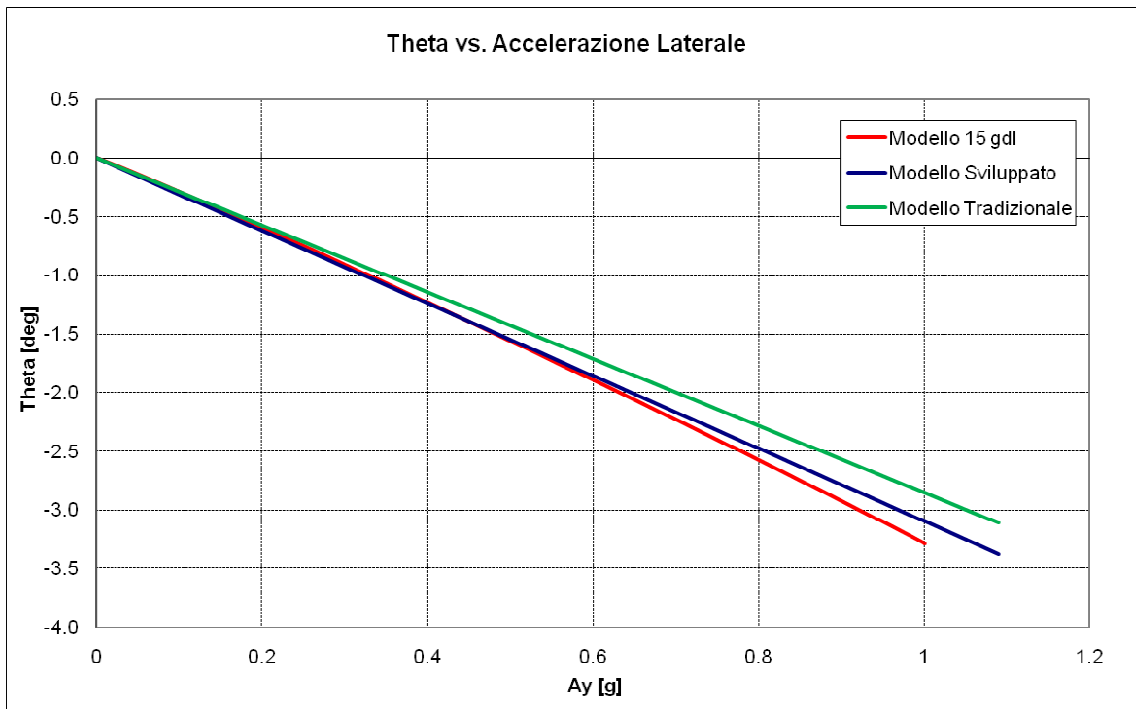


Figura 4.1: Curva di rollio supercar.

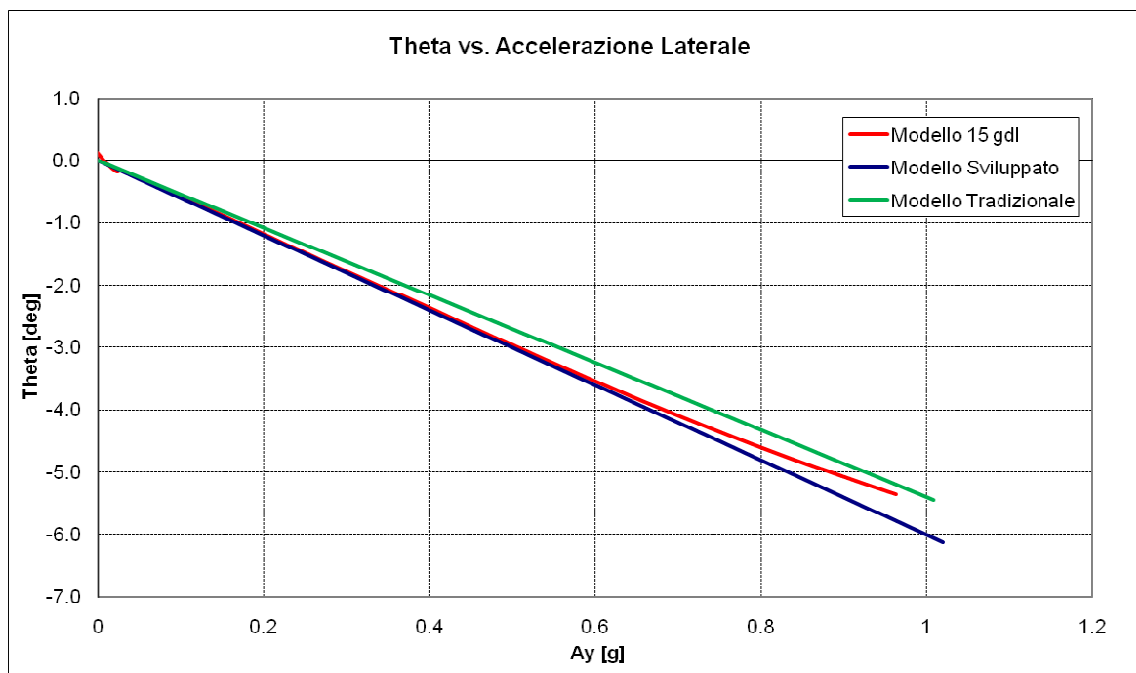


Figura 4.2: Curva di rollio utilitaria segmento C.

Chiaramente all'angolo di rollio sono direttamente associate le escursioni verticali delle sospensioni e degli pneumatici (derivano tutti dal medesimo gruppo di equazioni, nonché sono collegate tra loro) e pertanto tali osservazioni si riscontrano anche in tali grandezze. Nella fattispecie si evidenzia come la compressione degli pneumatici è ben prevista considerando che risulta fondamentalmente lineare anche nel caso del modello a 15 g.d.l.,

mentre la escursione della sospensione ricade esatta nelle osservazioni fatte per l'angolo di rollio date le caratteristiche non lineari degli elementi elastici (molle e barre antirollio) e la presenza di tamponi di fine corsa, non modellati nei modelli bicicletta, che entrano in azione al crescere dell'accelerazione laterale.

In ogni caso la previsione di tali grandezze è migliore nel caso del modello sviluppato rispetto al modello di partenza.

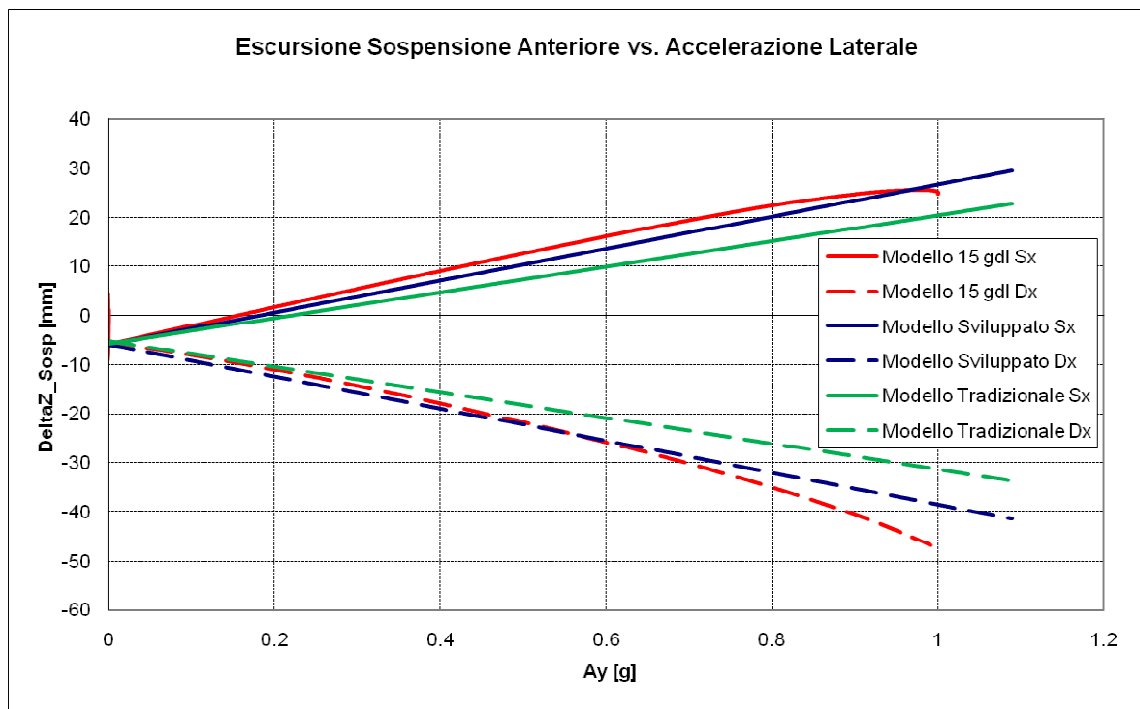


Figura 4.3: Escursione verticale sospensioni anteriori supercar.

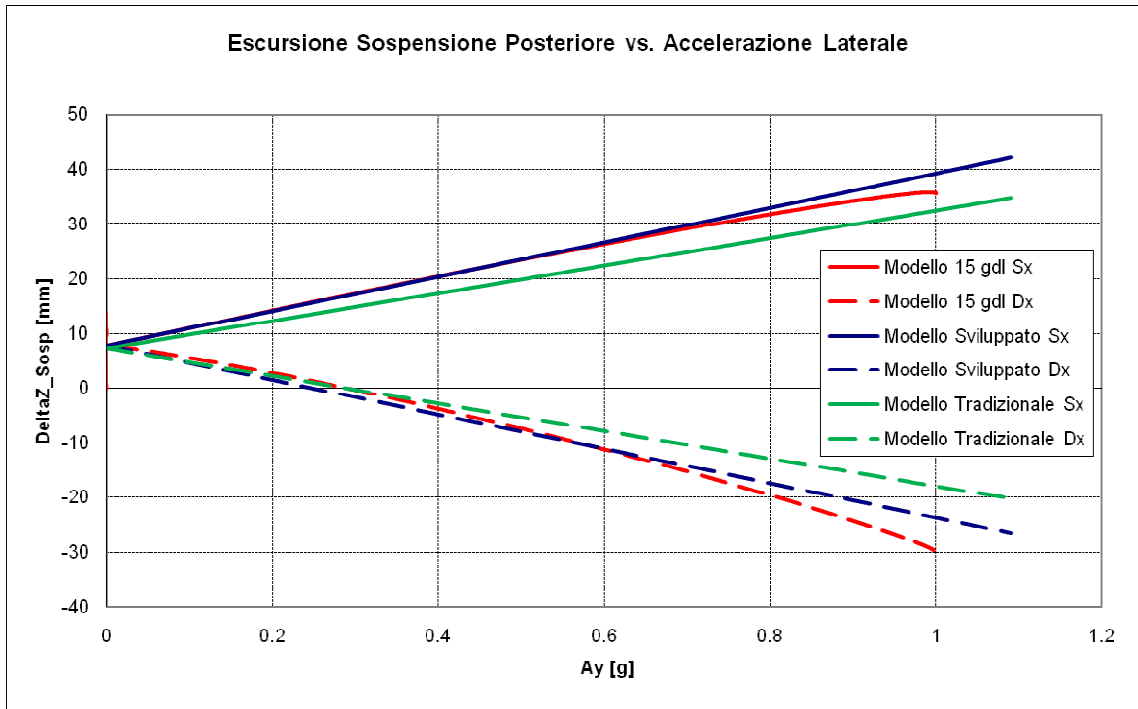


Figura 4.4: Escursione verticale sospensioni posteriori supercar.

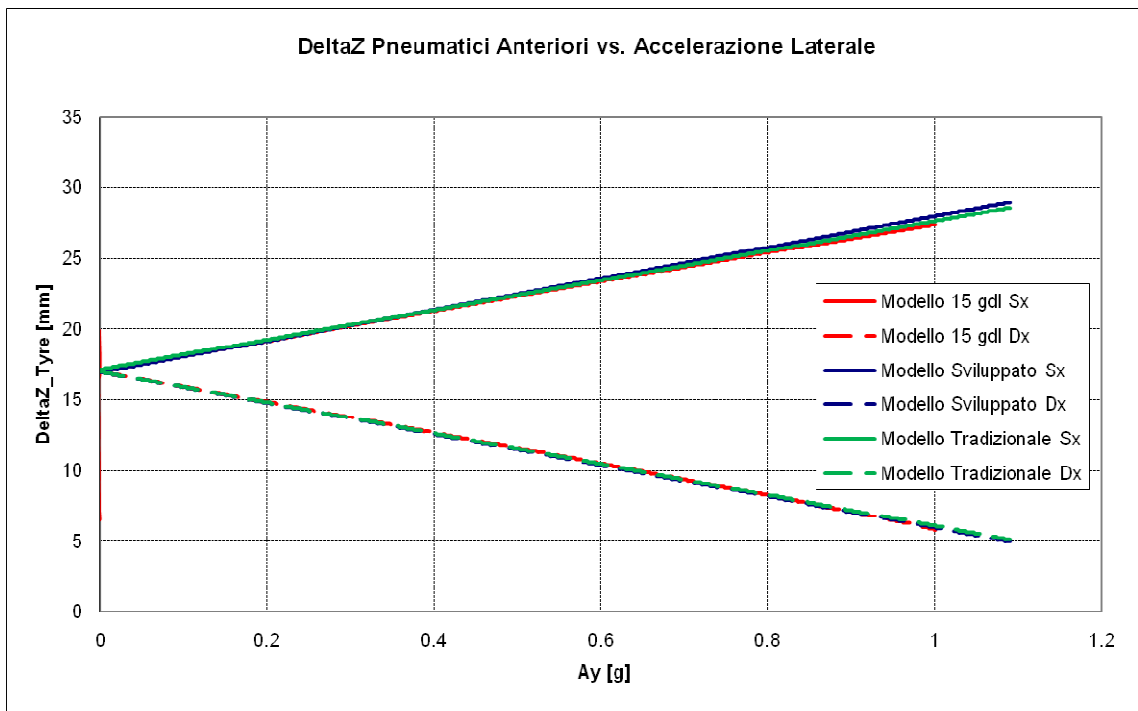


Figura 4.5: Compressione verticale pneumatici anteriori supercar.

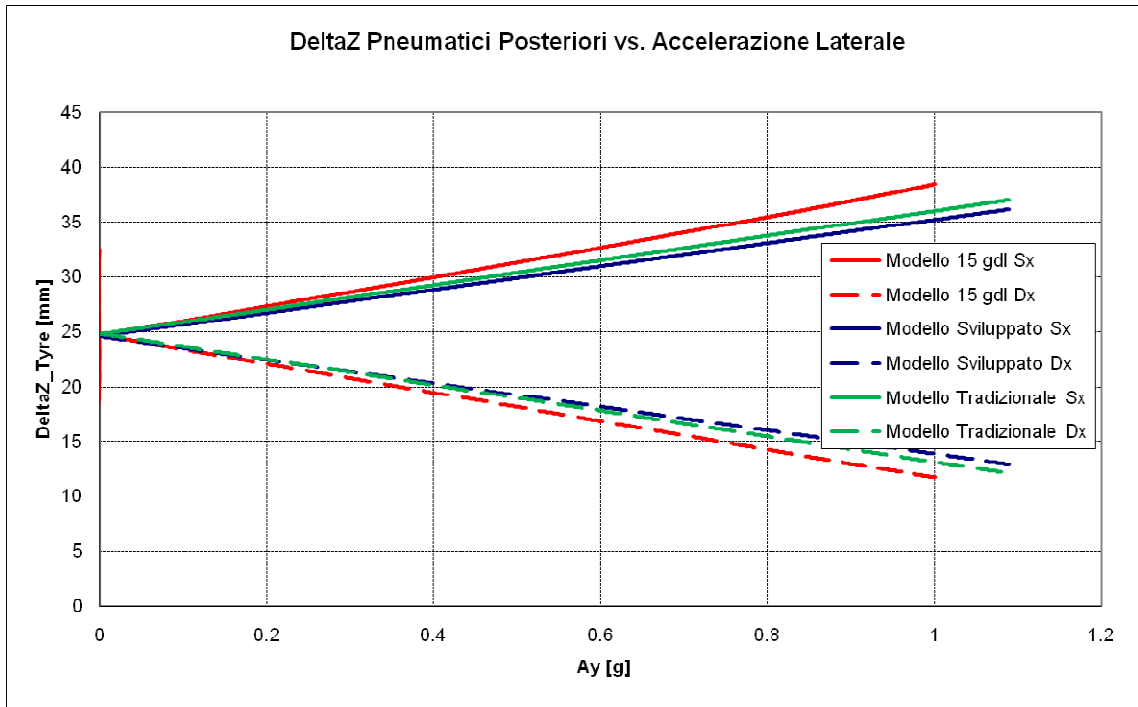


Figura 4.6: Compressione verticale pneumatici posteriori supercar.

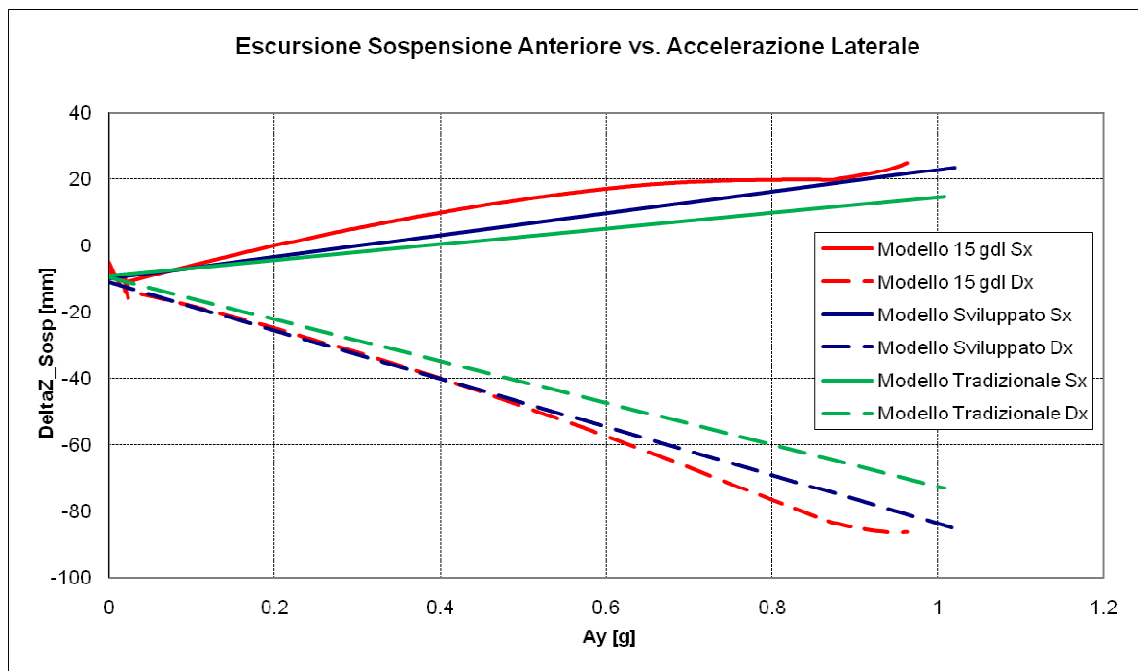


Figura 4.7: Escursione verticale sospensioni anteriori utilitaria segmento C.

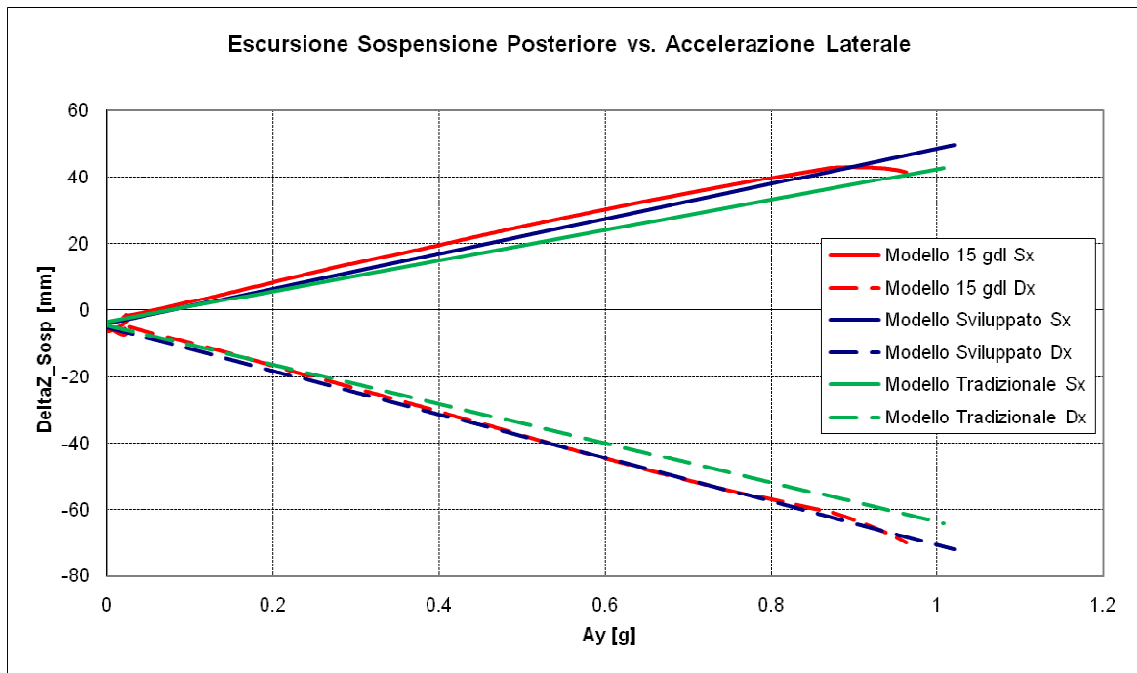


Figura 4.8: Escursione verticale sospensioni posteriori utilitaria segmento C.

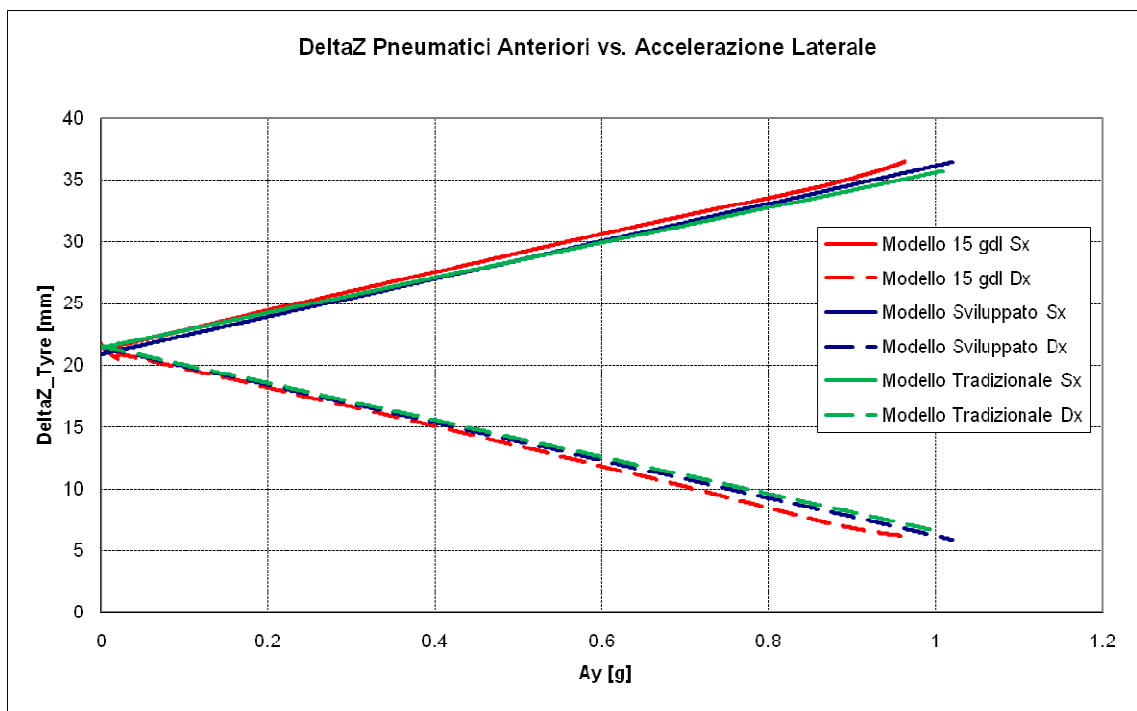


Figura 4.9: Compressione verticale pneumatici anteriori utilitaria segmento C.

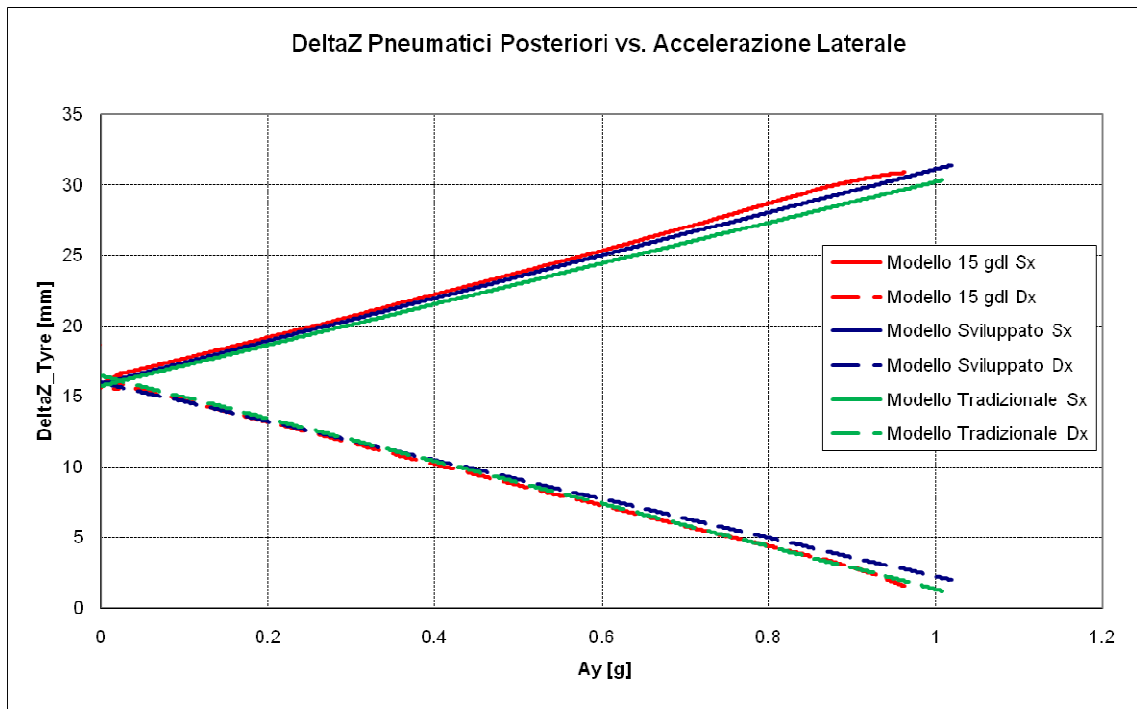


Figura 4.10: Compressione verticale pneumatici posteriori utilitaria segmento C.

In riferimento ai trasferimenti di carico verticali si riscontra una analoga capacità previsionale tra i due modelli di sintesi data dalla analoga formulazione adottata in riferimento a tale fenomeno.

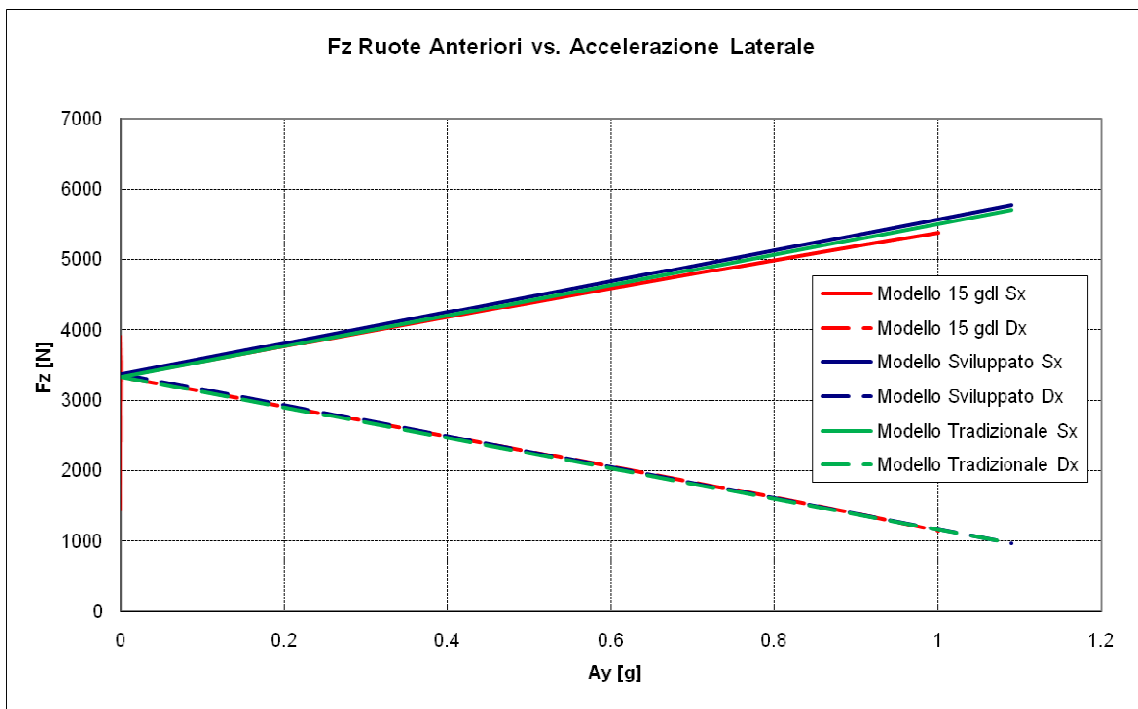


Figura 4.11: Trasferimenti di carico verticali Fz sulle ruote anteriori supercar.

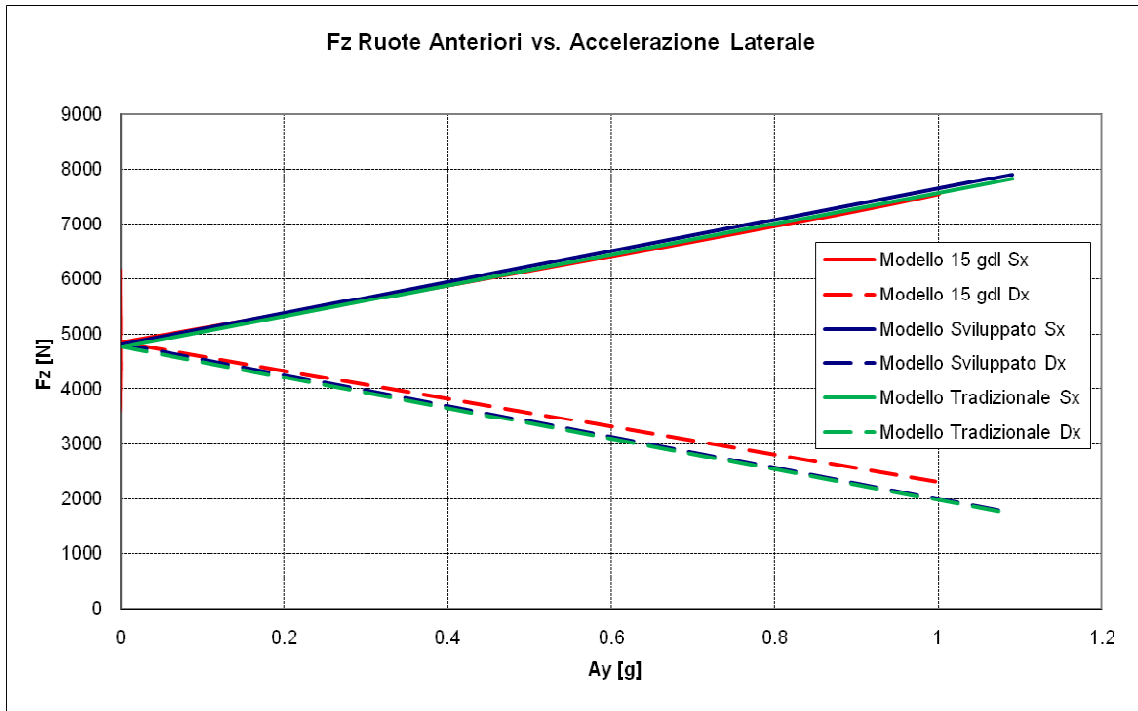


Figura 4.12: Trasferimenti di carico verticali Fz sulle ruote posteriori supercar.

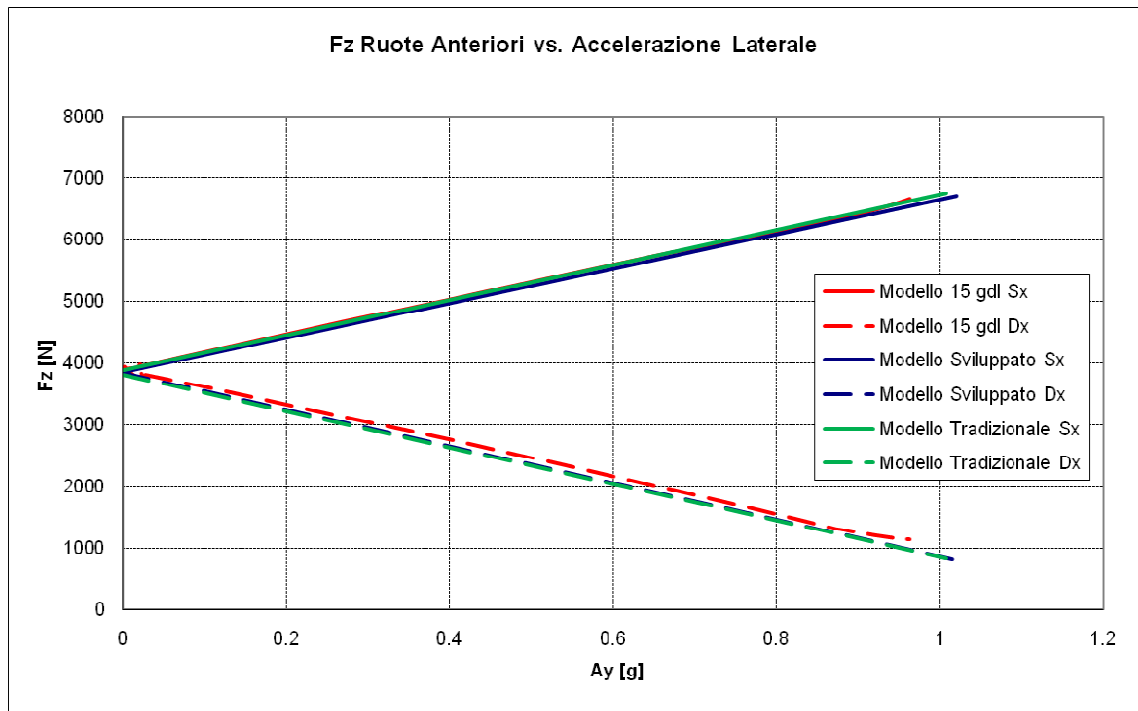


Figura 4.13: Trasferimenti di carico verticali Fz sulle ruote anteriori utilitaria segmento C.

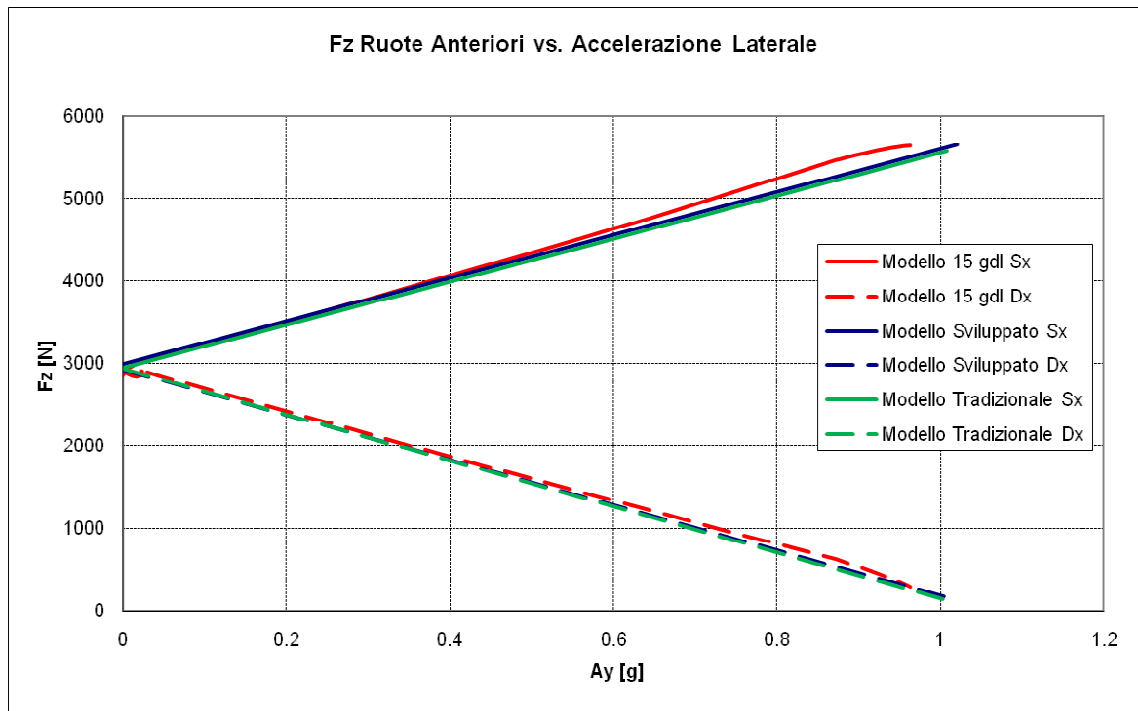


Figura 4.14: Trasferimenti di carico verticali F_z sulle ruote posteriori utilitaria segmento C.

In riferimento alle curve di sottosterzo e di assetto si evidenziano in maniera evidente gli aspetti salienti del modello. La curva di assetto è perfettamente interpretata dal modello sviluppato, a differenza del modello tradizionale, dimostrando come gli aspetti definiti in riferimento alla rigidità equivalente di assale e della caratteristica di assale siano stati ben posti. In tal senso le grandezze appena citate interpretano esattamente le non linearità del sistema relativi al comportamento degli pneumatici e dell'intero assale in cui sono stati individuati i differenti contributi esistenti.

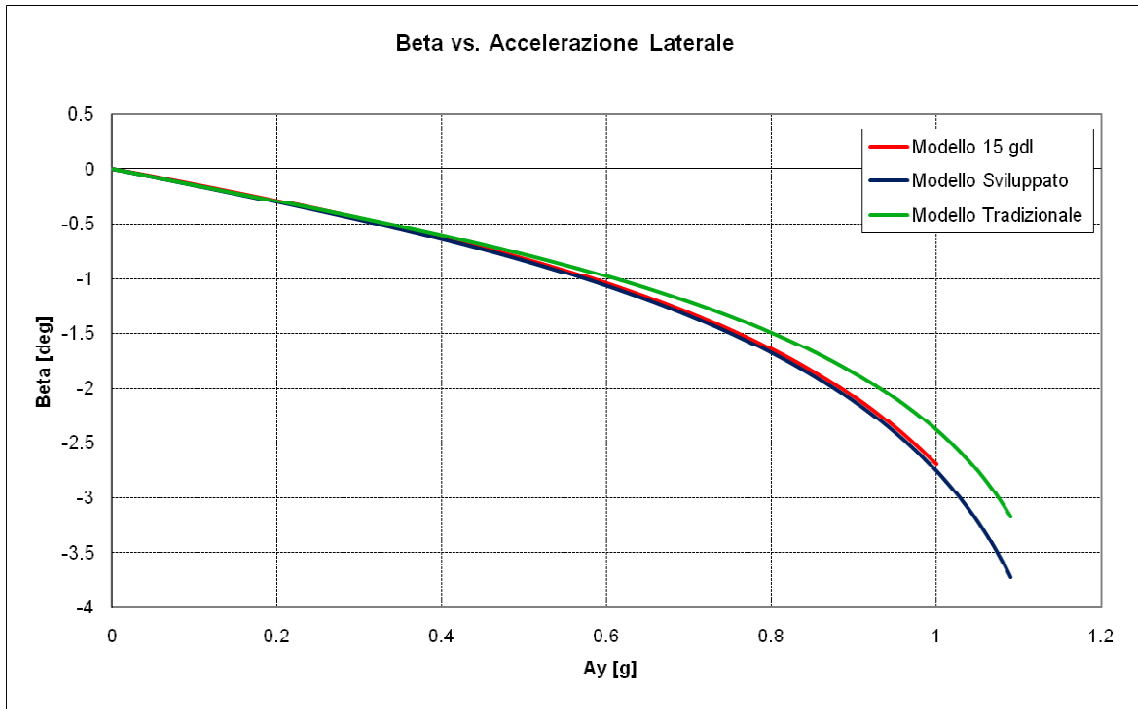


Figura 4.15: Curva di assetto supercar.

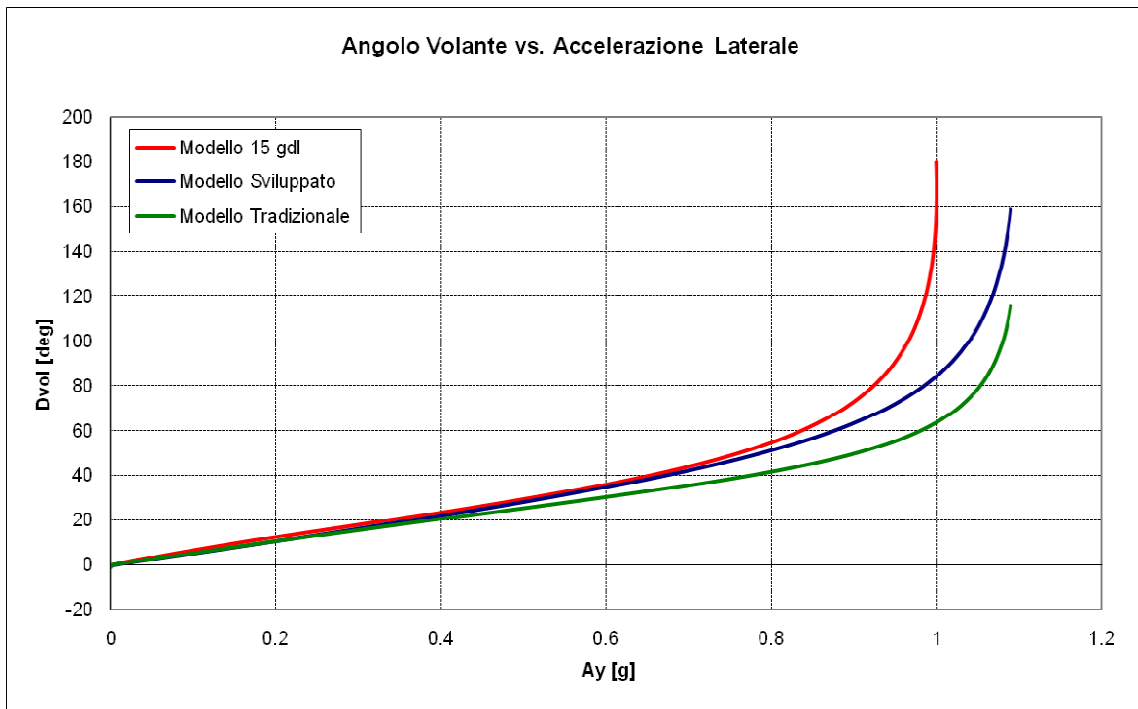


Figura 4.16: Curva di sottosterzo supercar.

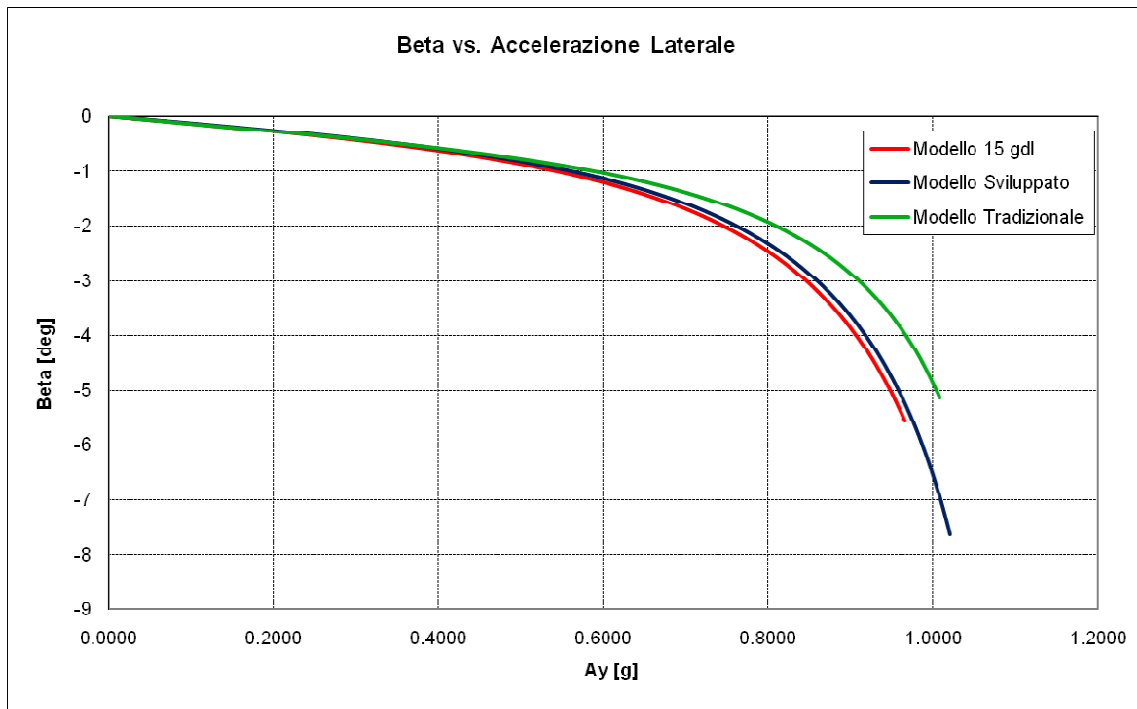


Figura 4.17: Curva di assetto utilitaria segmento C.

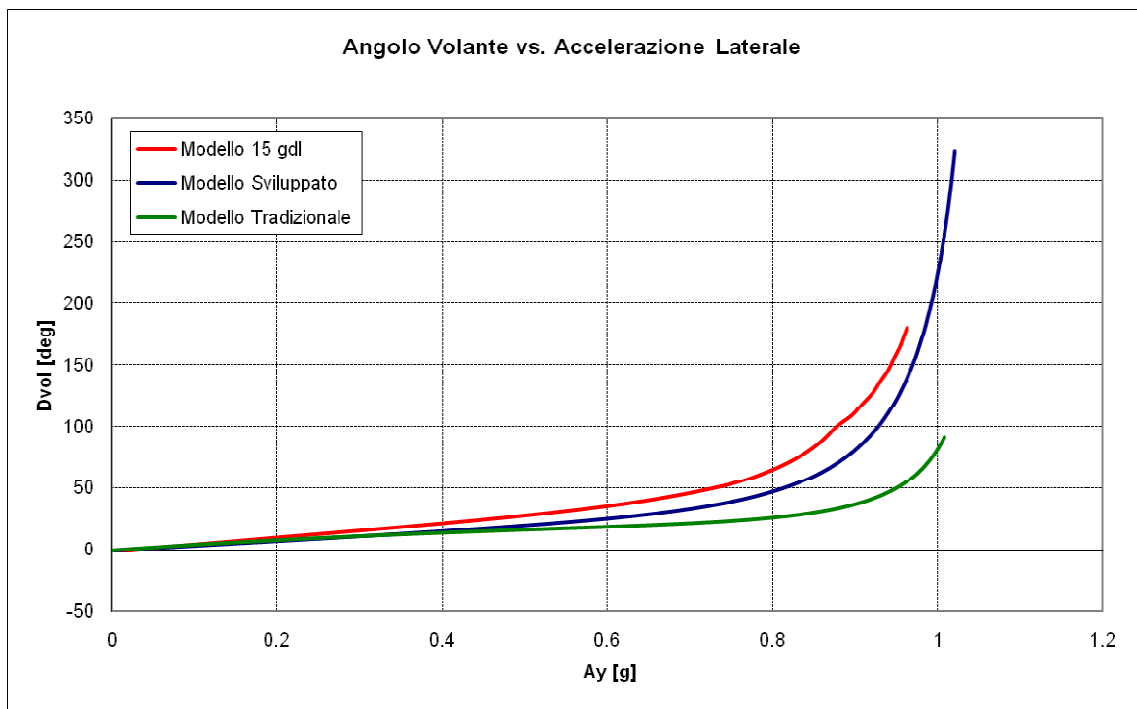


Figura 4.18: Curva di sottosterzo utilitaria segmento C.

La curva di sottosterzo, a differenza di quella di assetto, nonostante derivi dai medesimi fenomeni e relativi gruppi di equazioni, non mostra la medesima ottima previsione riscontrata nel caso dell'assetto. La non perfetta interpretazione della curva di sottosterzo, anche se da ritenere soddisfacente e migliorativa rispetto al modello tradizionale, è da

imputare alla *scorrezioni* di sterzo (differenza tra angolo di sterzo delle ruote interne ed esterne dell'assale anteriore) che non essendo implementabili in un modello a singola traccia comportano angoli di deriva, e relative forze laterali sviluppate, differenti da quelli prevedibili con questo ultimo.

Tale fenomeno si traduce in una sovrastima dell'accelerazione laterale massima di circa 0.1g, con un discostamento della curva di sottosterzo via via crescente superato il limite di linearità e all'aumentare dell'angolo di volante che comporta inevitabilmente una differenza tra gli angoli ruota, con relativi effetti, sopra menzionati.

Le osservazioni in riferimento al distacco della curva di sottosterzo al crescere dell'accelerazione laterale possono essere compresi osservando i grafici riportati di seguito in cui si osserva appunto come gli angoli di deriva sull'assale posteriore (in riferimento all'angolo di assetto) sono previsti in maniera esatta, mentre gli angoli di deriva sull'assale anteriore (curva di sottosterzo) mostrano i limiti citati.

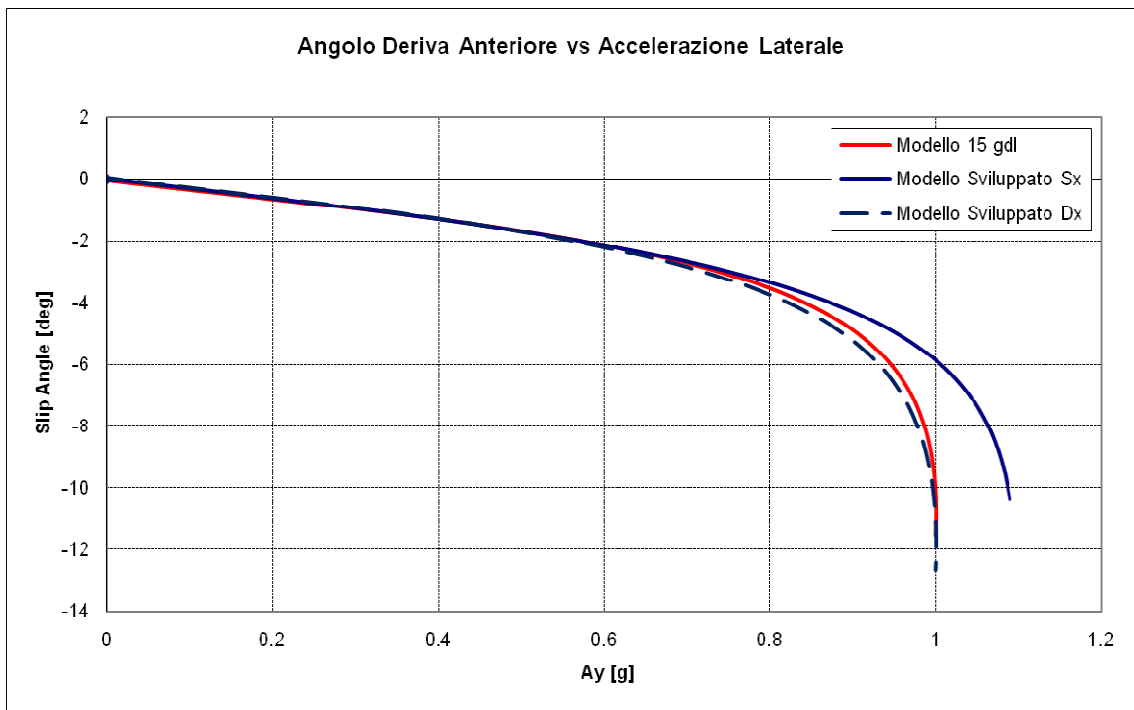


Figura 4.19: Angoli di deriva anteriori supercar.

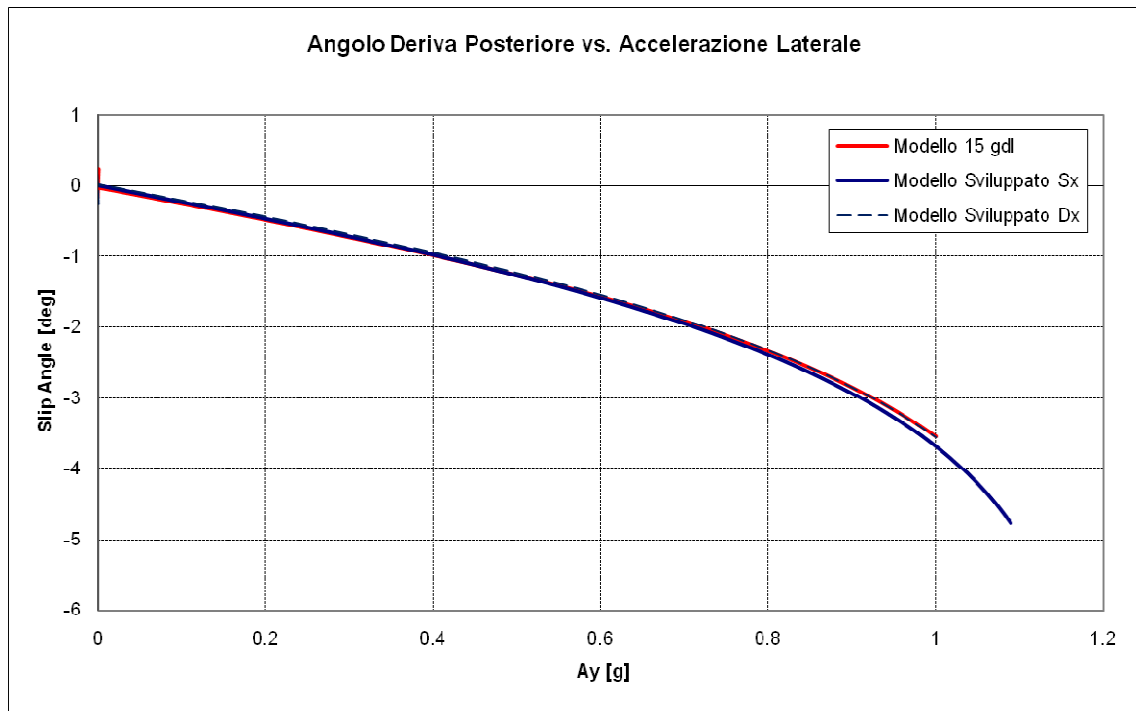


Figura 4.20: Angoli di deriva posteriori supercar.

4.2 Validazione previsione analisi in frequenza

Per la validazione del modello creato in ambito Frequency è stato adottato l'approccio proposto per la condizione di Stady-State mostrando il confronto del modello di sintesi sviluppato (curve in blu) con il modello a 15 g.d.l. (curve in rosso) e il modello monotraccia classico (curve in verde).

In particolare il confronto è stato posto in termini di guadagno e tempi di ritardo tra grandezze differenti, al variare della frequenza.

In riferimento alla modellazione in frequenza il modello sviluppato, rispetto al modello tradizionale, ha come nota contraddistintiva una migliore identificazione della rigidezza di deriva degli assali e la contemplazione dei singoli contributi alla variazione della convergenza di convergenza, in funzione dei tempi in cui si manifestano. Tali prerogative permettono di ottenere una migliore previsione nelle condizioni non stazionarie mediante una più corretta identificazione dei guadagni delle singole grandezze e dei tempi in cui esse si manifestano.

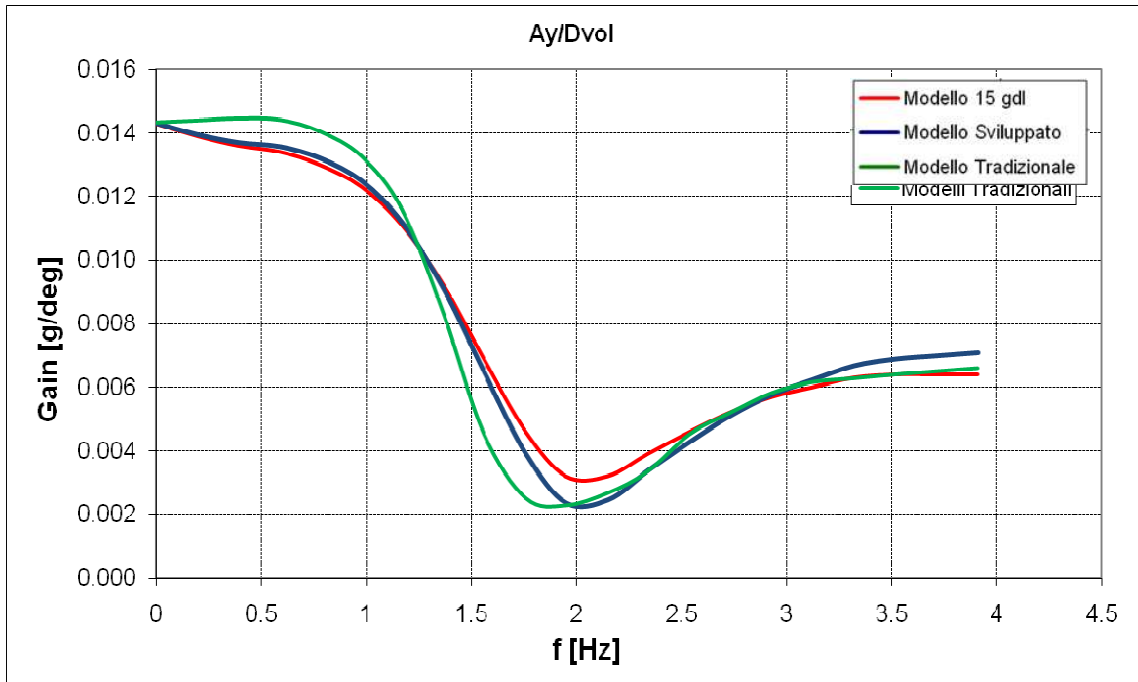


Figura 4.23: Guadagno Ay/Dvol .

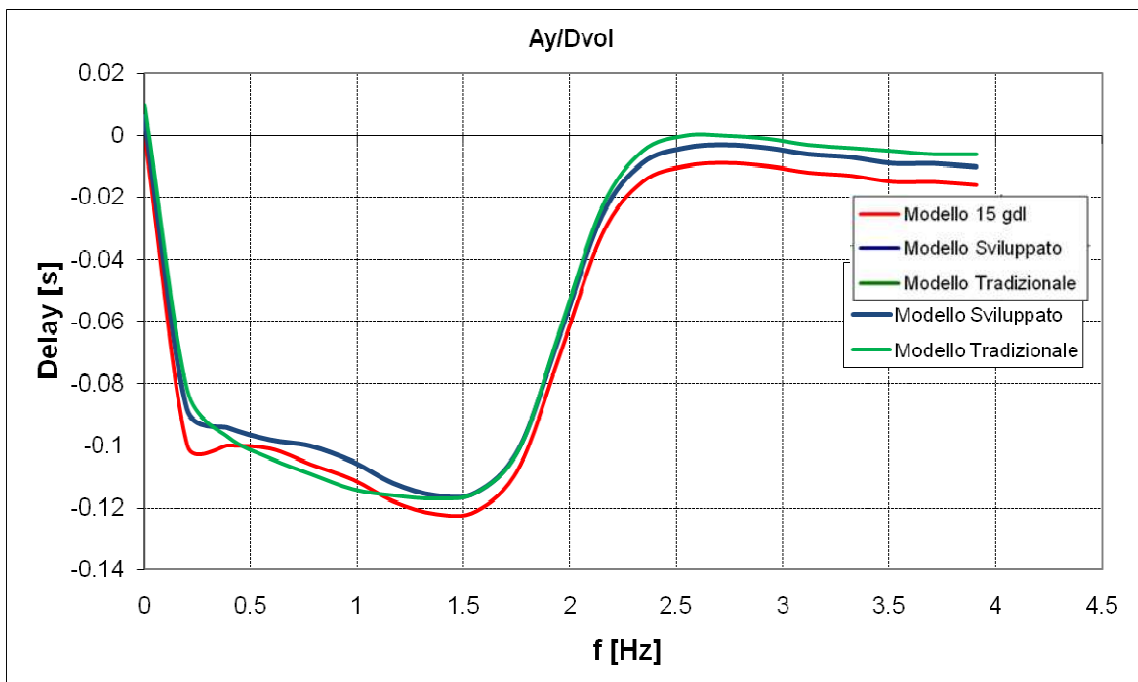


Figura 4.24: Tempi di ritardo Ay/Dvol.

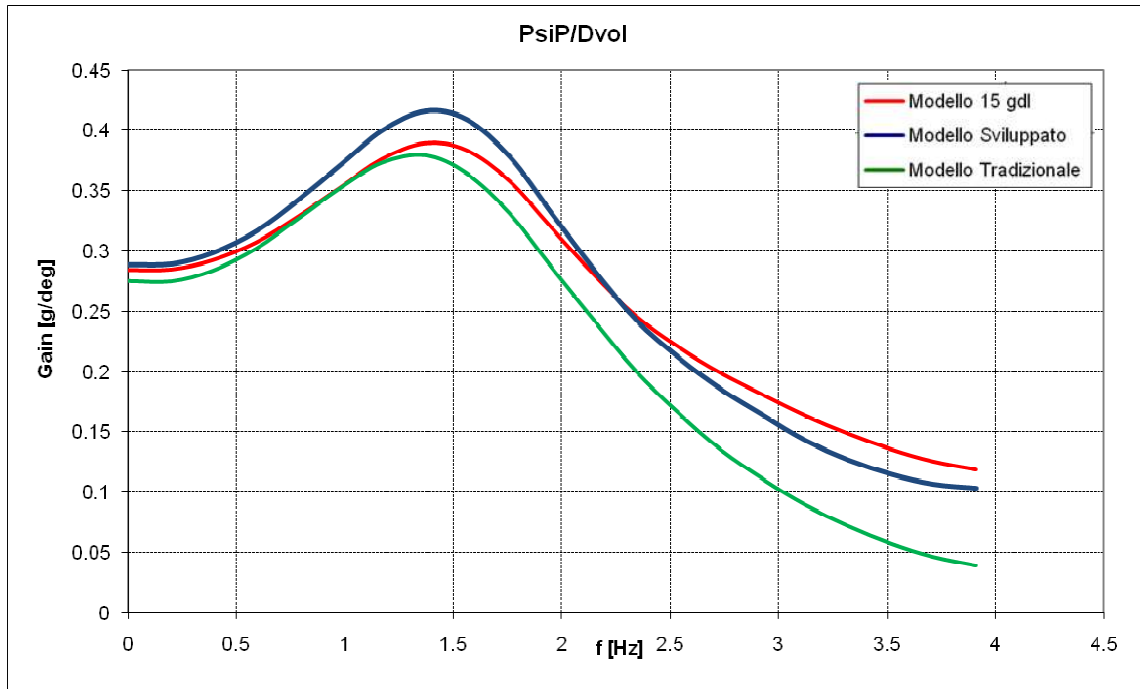


Figura 4.25: Guadagno Psip/Dvol.

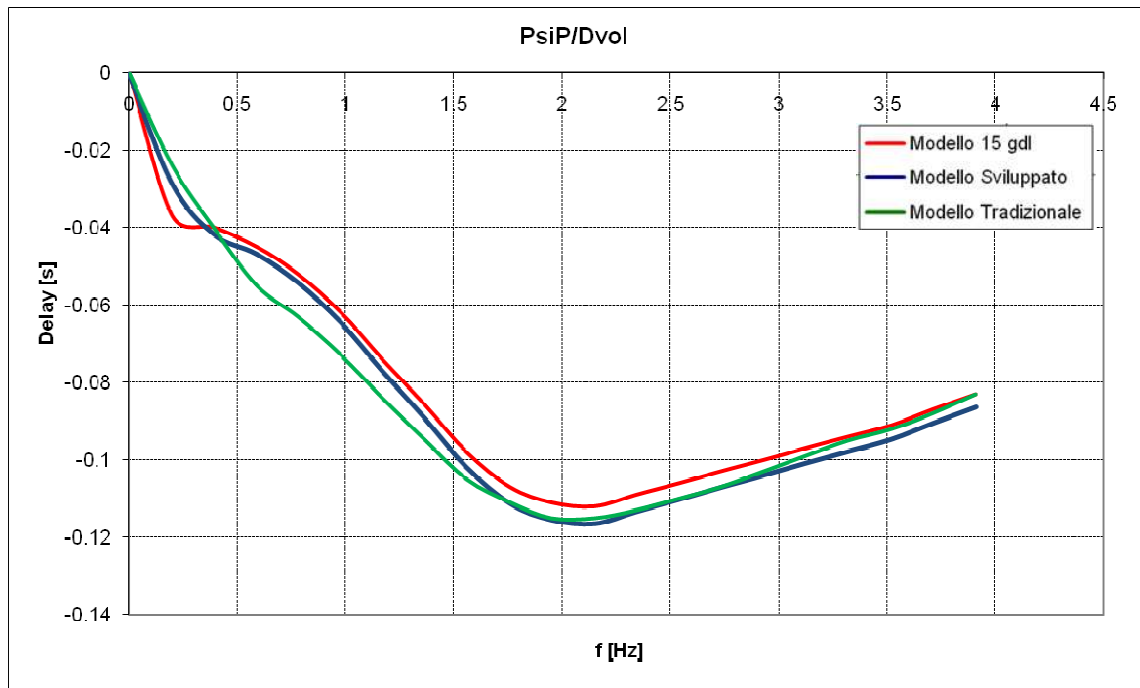


Figura 4.26: Tempi di ritardo Psip/Dvol.

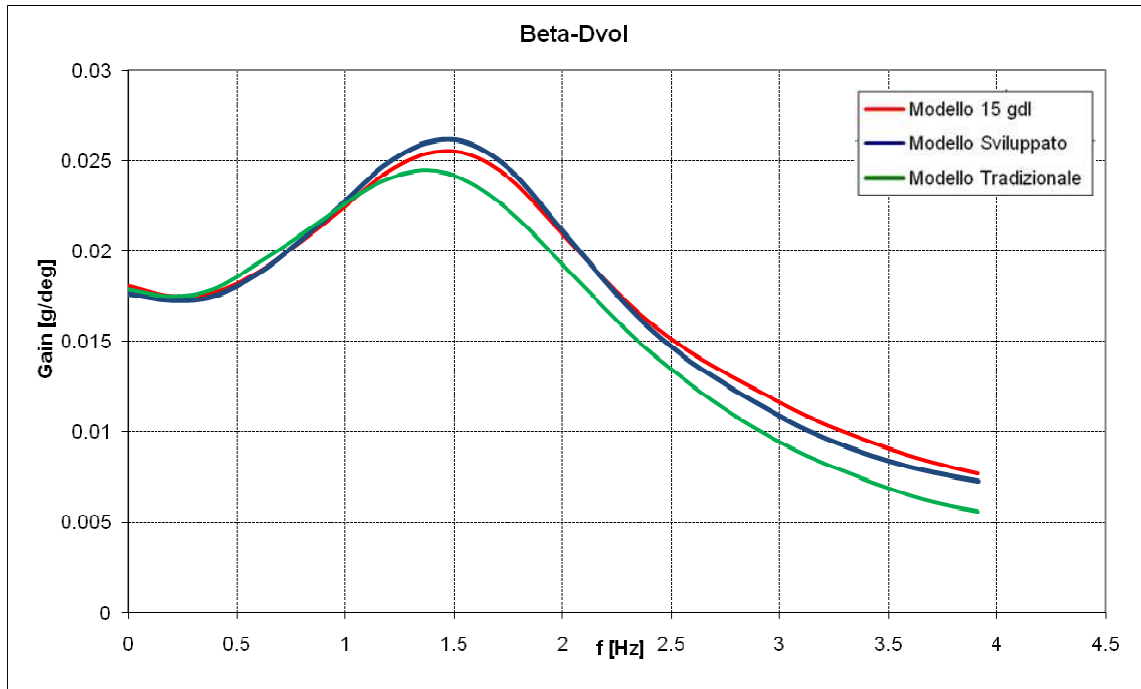


Figura 4.27: Guadagno Beta/Dvol.

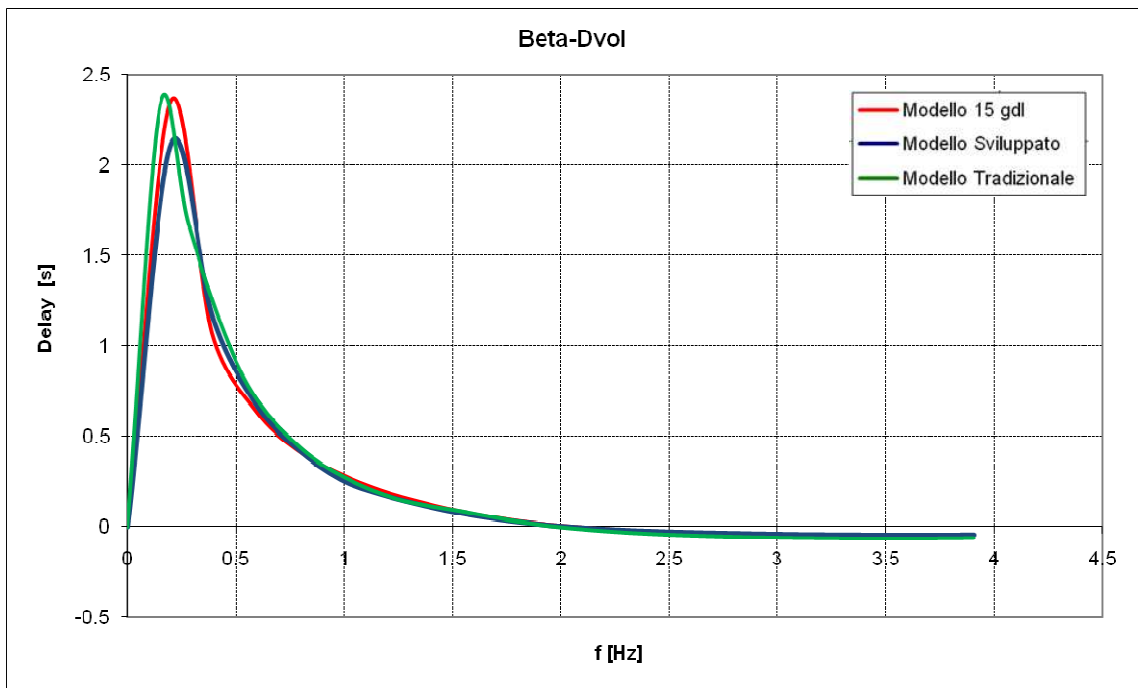


Figura 4.28: Tempi di ritardo Beta/Dvol.

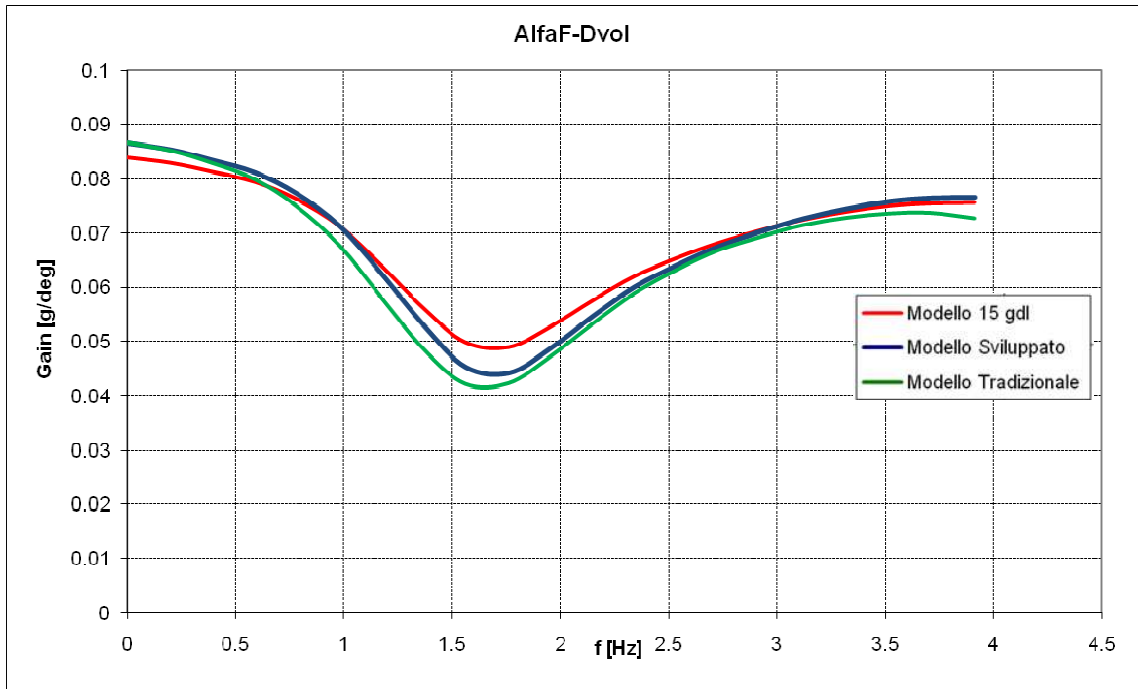


Figura 4.29: Guadagno AlfaF/Dvol.

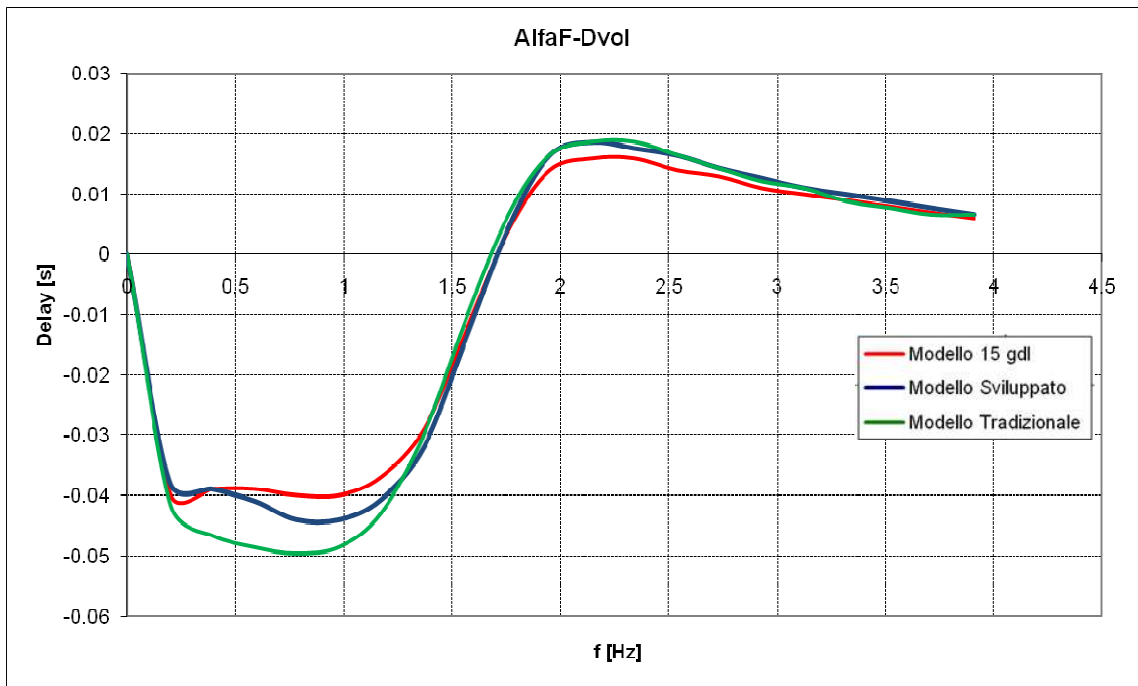


Figura 4.30: Tempi di ritardo AlfaF/Dvol.

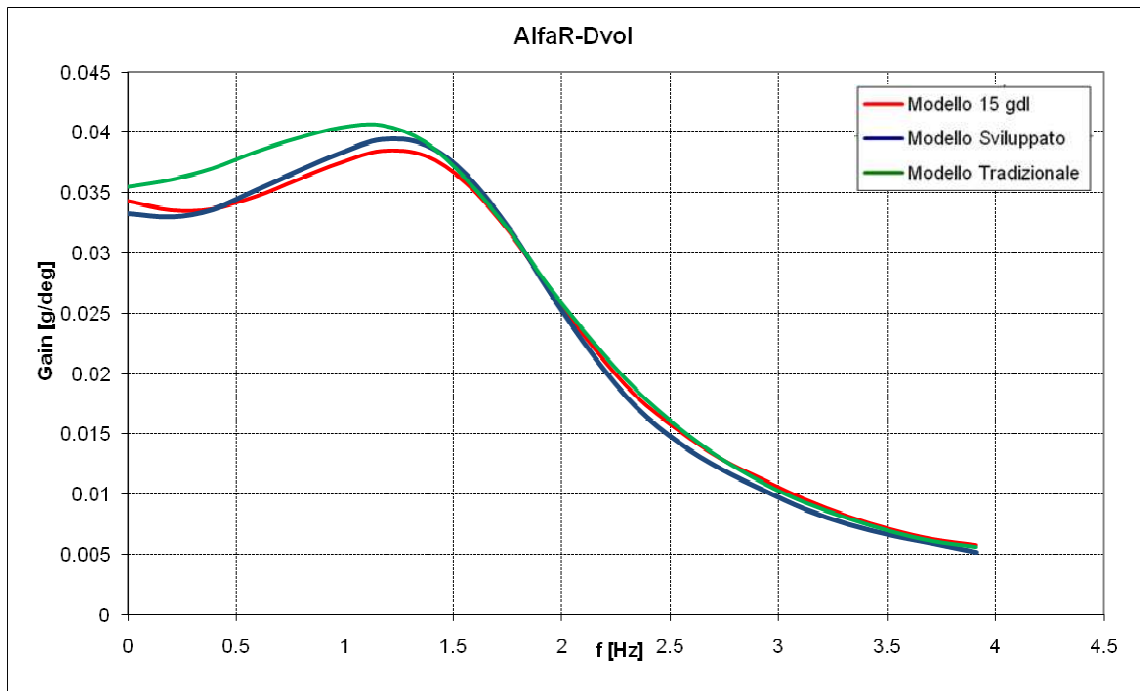


Figura 4.31: Guadagno AlfaR/Dvol.

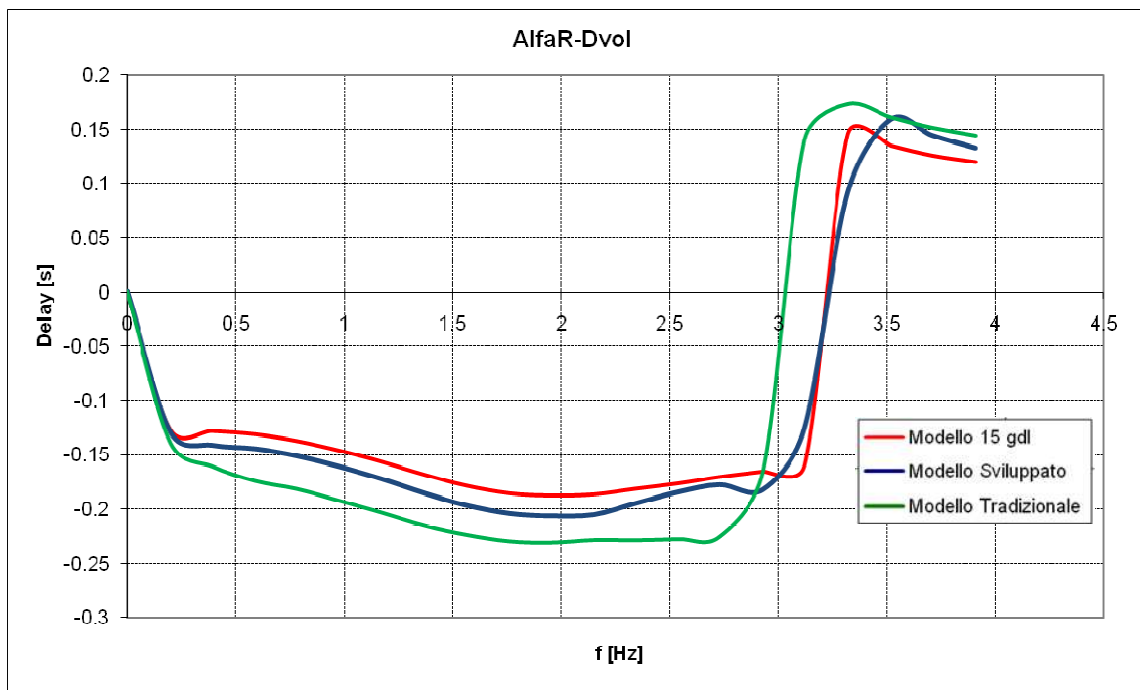


Figura 4.32: Tempi di ritardo AlfaR/Dvol.

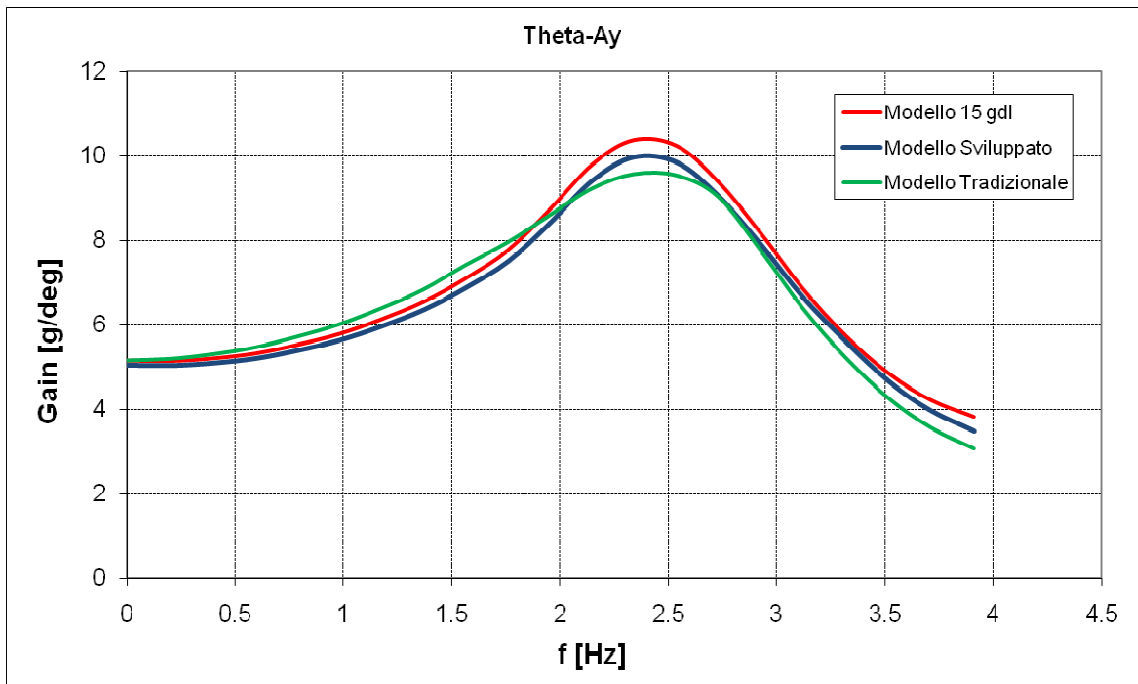


Figura 4.33: Guadagno Theta/Ay.

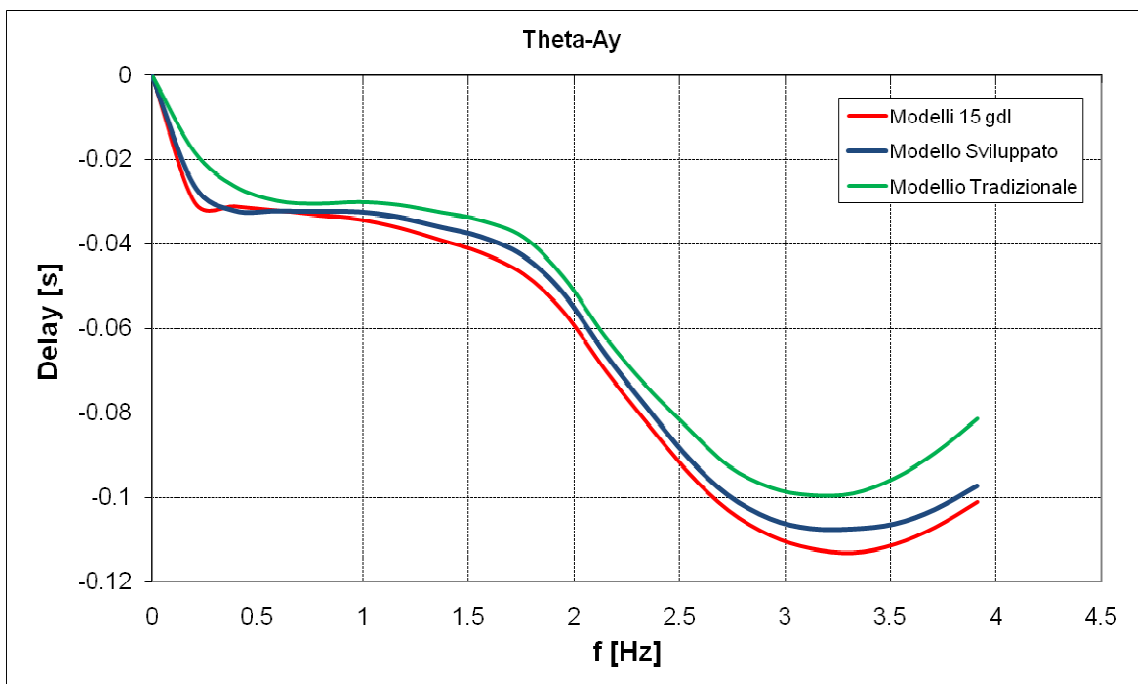


Figura 4.34: Tempi di ritardo Theta/Ay.

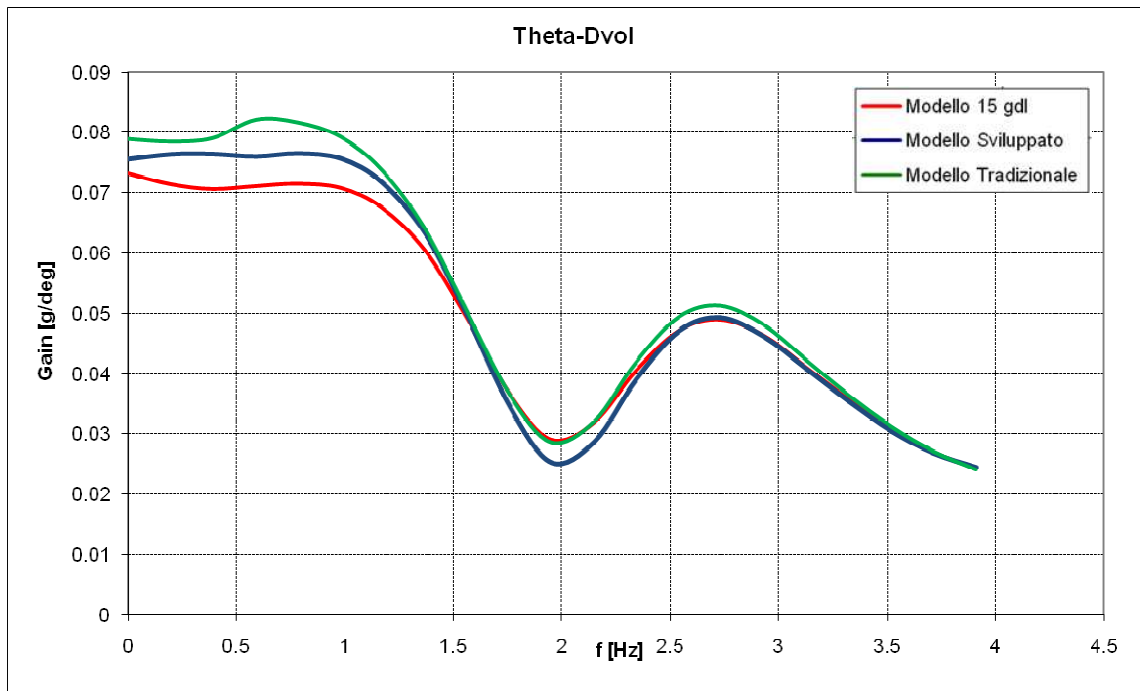


Figura 4.35: Guadagno Theta/Dvol.

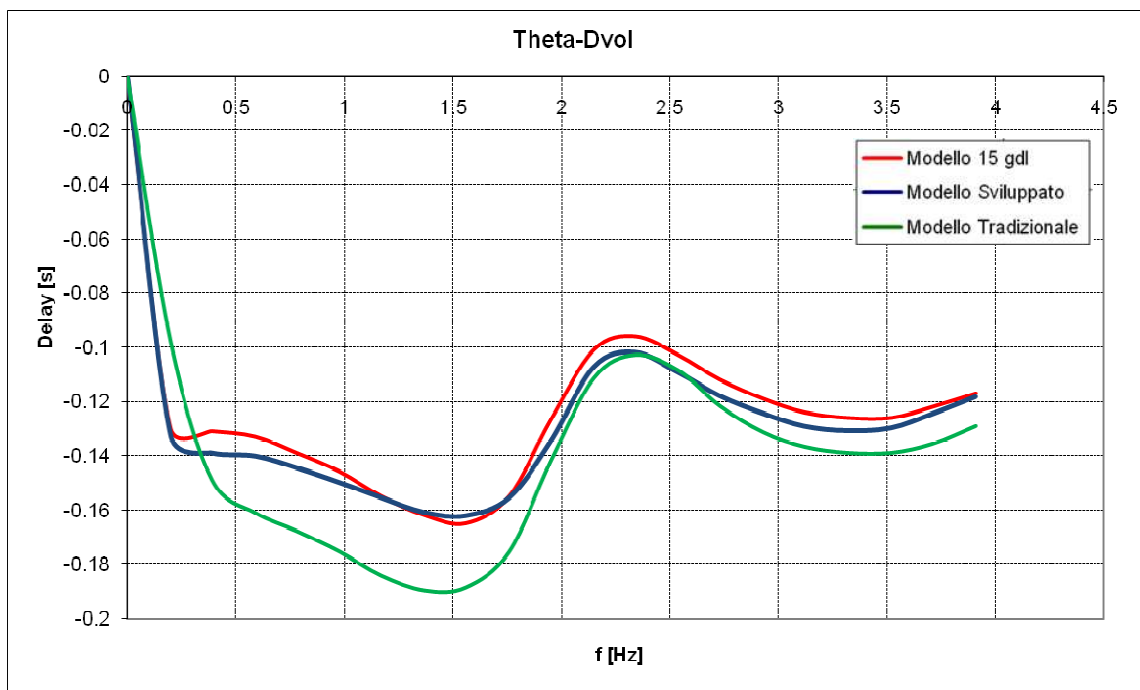


Figura 4.36: Tempi di ritardo Theta/Dvol .

Conclusioni

L'obiettivo del presente lavoro di ricerca è stato incentrato sulla definizione di un modello di sintesi per analisi *handling* veicolo, sia in stazionario che transitorio, caratterizzato da due requisiti fondamentali riconducibili alla elevata capacità previsionale e alla *semplicità* del modello, identificabile nel ridotto numero, e relativo livello di dettaglio, delle grandezze necessarie come input.

Una parte del lavoro è stata rivolta allo studio del comportamento della ruota con pneumatico ed alla definizione del classico modello monotraccia di veicolo poiché, dato l'obiettivo preposto, essi rappresentano il punto di partenza imprescindibile.

In tal senso è stato evidenziato come la modellazione degli pneumatici, che tengono conto della variazione della forza laterale in funzione dell'angolo di deriva, dell'angolo di camber e del trasferimento di carico attraverso formulazioni del tipo linearizzato e non linearizzato, anche se con ritardo di risposta, condizionano negativamente la qualità dei risultati. Pertanto, in riferimento al modello sviluppato, per la modellazione degli pneumatici è stata adottata in maniera opportuna la formulazione *Magic Formula* del Pacejka (versione MF05) di cui è stata utilizzata la porzione inerente lo stazionario in *pure slip*. Tale modellazione, assieme a quella dei trasferimenti di carico laterali (la quale consente la corretta valutazione del carico verticale agente su di essi), permette di fatto l'esatta individuazione della rigidità di deriva degli assali imputabile agli pneumatici. L'ulteriore grandezza di *caratteristica effettiva degli assali*, la quale indica la rigidità degli assali, con la valutazione di tutti i fenomeni, è stata ricavata contemplando tutti i contributi come delle molle in serie.

In riferimento alla modellazione per le analisi in transitorio è stato riscontrato come i contributi all'angolo di deriva *totale* dati dalla variazione degli angoli della ruota, a causa dello scuotimento della sospensione e della cedevolezza dei suoi organi strutturali, hanno importanza nei tempi in cui si manifestano, mostrando di fatto forti ripercussioni sulla previsione delle condizioni transitorie. Pertanto, in riferimento a ciò, è stato sviluppato un modello matematico in cui i contributi della variazione di convergenza, dovuti al rollio, alla forza laterale e al momento autoallineante sono valutati e sommati istante per istante e non inglobati in maniera fissa nella rigidità di deriva degli pneumatici come accade nel tradizionale modello monotraccia.

Infine, nel corso del presente lavoro è stato evidenziato come una formulazione del problema, con tale ordine di *semplificazione*, necessita di una modellazione separata delle due condizioni di stazionario e transitorio al fine di garantire ottimi risultati in ambedue i casi. La modellazione in riferimento allo stazionario è stata realizzata facendo riferimento ad

equazioni di tipo algebrico per il calcolo di tutte le grandezze in funzione dell'accelerazione laterale (A_y) fissa, incrementata a step costanti fino al limite di aderenza. In tale modo le relative curve caratteristiche specificate vengono ricomposte come unione dei valori delle grandezze calcolati per le differenti A_y ; in maniera del tutto analoga a ciò che avverrebbe nello studio del comportamento in stazionario tramite prove reali in pista, in cui vengono registrati i valori delle grandezze nello stabilizzato a differenti livelli di accelerazione laterale. In particolare per quanto riguarda il calcolo delle curve caratteristiche di assetto e sottosterzo, che qualificano fortemente il comportamento in tale condizione, la strategia risolutiva è consistita nella individuazione del contributo elastico a cui aggiungendo il contributo cinematico è possibile ottenere gli output per differenti manovre.

Per quanto riguarda l'analisi in transitorio come strategia di analisi è stata utilizzata la simulazione dinamica di uno sweep in frequenza. Le curve di risposta in frequenza di output (velocità d'imbardata, angolo di assetto e angolo di rollio in funzione dell'angolo volante e l'angolo di rollio in funzione dell'accelerazione laterale) sono state ricavate elaborando le time history delle grandezze ricavate nell'analisi di sweep.

In entrambi i campi di indagine il modello sviluppato ha soddisfatto gli obiettivi preposti consistenti in una *maggiore qualità previsionale*, confermata dai test consistenti nel confronto dei risultati con un simulatore superiore (a 15 g.d.l.) in riferimento ad analisi in transitorio e stazionario per due differenti veicoli di riferimento.

Nella fattispecie per il comportamento in condizione stazionarie è stato fatto riferimento ad una prova di slow ramp steer a velocità di avanzamento del veicolo costante, con bassa velocità di attuazione del volante, che ha permesso di evidenziare il comportamento del veicolo nello stabilizzato, senza dover tenere in conto della reattività del sistema. In tale prova, per entrambi i veicoli analizzati, è stata rilevata la corretta capacità previsionale del modello sviluppato, evidenziata da una ottima corrispondenza dell'andamento delle grandezze del veicolo al variare dell'accelerazione laterale.

Nella fattispecie risultano ben approssimate gli andamenti dei trasferimenti di carico laterali mentre le grandezze inerenti il rollio (angolo di rollio, escursione verticale sospensione, compressione pneumatici) mostrano una esatta previsione nel campo lineare e un lieve distacco nel campo non lineare imputabile ai fenomeni e agli elementi non lineari del veicolo che non possono essere implementati (per definizione) all'interno del modello sviluppato; la previsione di tali grandezze risulta peraltro migliore di quello del modello tradizionale nonché molto prossima a quella del modello a 15 g.d.l. e pertanto da intendersi nel pieno rispetto degli obiettivi prefissati.

In riferimento all'angolo di assetto la previsione risulta particolarmente accurata ad indice di una esatta interpretazione delle grandezze di rigidità di deriva di assale e di caratteristica effettiva di assale; le medesime grandezze hanno una ripercussione positiva anche sulla curva di sottosterzo che risulta migliore del modello di partenza. In

riferimento a questa grandezza è comunque necessario evidenziare che le *scorrezioni* di sterzo (differenza tra angolo di sterzo delle ruote interne ed esterne dell'assale anteriore) non essendo implementabili in un modello a singola traccia comportano angoli di deriva, e relative forze laterali sviluppate, differenti da quelli prevedibili con questo ultimo.

In riferimento al comportamento in transitorio sussiste una maggiore corrispondenza sia in termini delle grandezze di guadagno che di tempo di ritardo, tra modello sviluppato e modello a 15 g.d.l., rispetto al classico modello monotraccia. Ciò ad indice di una migliore interpretazione dei fenomeni non stazionari, del sistema autoveicolo, mediante la definizione delle variazioni di convergenza delle sospensioni nel tempo, implementate nel modello di sintesi: tale modellazione permette di stimare l'effetto dei contributi di sospensione con i corretti tempi di intervento.

Bibliografia

- [1] Guiggiani M. (1998), *Dinamica del Veicolo*, Città Studi Edizioni, Torino.
- [2] Milliken W.F. e Milliken D.L. (1995), *Race Car Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE), Warrendale, USA.
- [3] Gillespie T.D. (1992), *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE).
- [4] Pacejka (2003), *Tyre Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE).
- [5] Dixon J.C. (1991), *Tyres, Suspension and Handling*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] M. V. Blundell, Damian Harty (2004), *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE).
- [7] Alvaro Costa Neto, *Application of Multibody Systems (Mbs) Techniques to Vehicle Modeling*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 942358.
- [8] Vivan Govender, *Multibody System Simulation and Optimisation of the Driving Dynamics of a Formula Student Race Car*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0454
- [9] Sughosh J. Rao, *Vehicle Dynamics Modeling and Validation for the 2003 Ford Expedition with ESC using ADAMS View*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0453.
- [10] Farhad Sangtarash, *Modeling and Optimizing Handling Parameters of a Series Hybrid Electric City Bus using ADAMS/Car*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2008-01-1560.
- [11] Todd M. Alexander, Chia-Shang Liu, Vincent Monkaba, *Multi-Body Dynamic Modelling Methods and Applications for Driveline Systems*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2002-01-1195.
- [12] Yi Lin, Xiaokai Chen, Fan Yu, Xiqiang Guan, *Dynamic Simulation and Characteristics Analysis for a Light Bus Based on a Detailed Multi-Body Model*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2002-01-0989.
- [13] Jung-Hwan Lee, *Effect of Tire Characteristics on the Simulation of Vehicle Straight Ahead Motion*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number

980249.

- [14] M. J. Burgess, N. P. Fleming M. Wootton and S. J. Williams, *A Tool for Rapid Vehicle Suspension Design*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2004-01-3543.
- [15] Nicolò D'Alfio, Andrea Morgando, Aldo Sorniotti and Mauro Velardocchia, *Base Model Simulator (BMS) – A Vehicle Dynamics Model to Evaluate Chassis Control Systems Performance*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2005-01-0401.
- [16] Pinhas Barak, Tianbing Sun, *On Body Roll Angle During Transient Response Maneuver of a 3-D Model*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2003-01-0963.
- [17] E. Brusa, P. Krief, R. Santoro, *Integrazione di modelli semplificati per la simulazione numerica del comportamento dinamico del veicolo di supporto alla progettazione e alla sperimentazione su strada*, XXX Convegno Nazionale AIAS.
- [18] Claudio Fernandes, Fabio Jum Okano, *Vehicle Dynamics Objective Metrics*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2003-01-3631.
- [19] Gentiane Venture, Philippe Bodson, Maxime Gautier, Wisama Khalil, *Identification of the Dynamic Parameters of a Car*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2003-01-1283.
- [20] Matthew Rozyn, Nong Zhang, Gamini Dissanayake, *Identification of Inertial Parameters of an On-Road Vehicle*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2007-01-2220.
- [21] Bernard J.E., Clower C.L., *Tire modeling for low-speed and high-speed calculations*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 950311.
- [22] Denis Eberhard, Simon Brewerton, *Rapid Prototyping of Production Vehicle Control Systems*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2006-01-1657.
- [23] Siddharth H. D'Silva, Padma Sundaram, Joseph G. D'Ambrosio, *Co-Simulation Platform for Diagnostic Development of a Controlled Chassis System*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2006-01-1058.
- [24] Yunqing Zhang, Chaoyong Tang, Wei Chen, Liping Chen, Jingzhou Yang, *Robust Optimal Design for Enhancing Vehicle Handling Performance*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2008-01-0600.

-
- [25] Farhad Sangtarash, *Modeling and Optimizing Handling Parameters of a Series Hybrid Electric City Bus using ADAMS/Car*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2008-01-1560.
- [26] Sughosh J. Rao, Gary J. Heydinger, Mohamed Kamel Salaani, Dennis Guenther, *Vehicle Dynamics Modeling and Validation for the 2003 Ford Expedition with ESC using ADAMS View*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0453.
- [27] Vivian Govender, David Barton, *Multibody System Simulation and Optimisation of the Driving Dynamics of a Formula Student Race Car*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0454.
- [28] W. A. H. Oraby, M. A. Aly, S. M. El-demerdash, A. M. Selim, *Influence of Active Suspension Preview Control on the Vehicle Lateral Dynamics*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2007-01-2347.
- [29] Yifeng Lin, Sohel Anwar, *A Traction Enhanced On-Demand All Wheel Drive Control System for a Hybrid Electric Vehicle*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2007-01-0299.
- [30] Ramesh B. Edara, Shan Shih, *Effective Use of Multibody Dynamics Simulation in Vehicle Suspension System Development*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2004-01-1547.
- [31] Rodivaldo Henrique da Cunha, Alvaro Costa Neto, Marcelo Prado, Daniel M. Spinelli, Roberto A. Moita, *Handling Analysis of a Three-Axle Intercity Bus*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2002-01-3382.
- [32] Chris Boggs, Steve Southward, Mehdi Ahmadian, *Application of System Identification for Efficient Suspension Tuning in High-Performance Vehicles: Full-Car Model Study*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0433.
- [33] Bernard J.E., Clower C.L., *Tire modeling for low-speed and high-speed calculations*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 950311.
- [34] Costa A., Jones R.P., *Theoretical control properties of multiform models for the study of automotive vehicles motion*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 931614E.
- [35] Greenberg J.A., Park T.J., *The Ford driving simulator*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 940176.
- [36] Bertollini G.P., Johnston C.M., Kuiper J.W., Kukula J.C., Kulczycka M.A., Thomas W.E., *The General Motor Driving simulator*, Society of Automotive

- Engineers (SAE) Document Number 940179.
- [37] Salaani M., Heydinger G., Guenther D., *Validation results from using NADSDyna Vehicle dynamics simulation*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 970565.
- [38] Horinouchi K., Yonekawa T., Kanou T., Utsumi S., Nagahara Y., *Handling analysis with Vehicle Dynamics Simulator*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 971058.
- [39] Allen R.W., Rosenthal T.J., Aponso B.L., Klyde D.H., Anderson F.G., Hogue J.R., Chrstos J.P., *A Low Cost PC Based Driving Simulator for Prototyping and Hardware-In-The-Loop Applications*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 980222.
- [40] Ranganathan R., Aia A., *Development of heavy vehicle dynamic stability analysis model using MATLAB/Simulink*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 952638.
- [41] Bennett A., Amato W.P., *Improved Heavy Vehicle Wheel Dynamics Model Using MATLAB/SIMULINK*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 1999-01-3707.
- [42] Kasprzak E., Milliken D.L., *MRA Vehicle Dynamics Simulation–Matlab ® /Simulink ®*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2000-01-1624.
- [43] Mohammed O. Sultan, Gary J. Heydinger, Nicholas J. Durisek, Dennis A. Guenther, *A Study of Vehicle Class Segregation Using Linear Handling Models*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 950307.
- [44] Srihari Vijayakumar, Ram S. Chandran, *Analysis of a 4-Dof Vehicle Model Using Bond Graph and Lagrangian Technique*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2002-01-0809.
- [45] Vahraz Nikzad S, Mahyar Naraghi, *Time Delay Control of a 4ws Vehicle-A Comparison of Single- and Dual-Steering Control Strategies*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2002-01-1589.
- [46] Byeongcho Lee, Amir Khajepour, Kamran Behdinan, *Vehicle Stability through Integrated Active Steering and Differential Braking*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2006-01-1022.
- [47] Pan Zhao, Changfu Zong, Dan Hu, Hongyu Zheng, Kan Wu, *Numerical Achieved Extended Kalman Filter State Observer Design Based on a Vehicle Model Containing UniTire Model*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2008-01-1783.

- [48] Haiping Du, Nong Zhang, Wade Smith, *Robust Yaw Moment Control for Vehicle Handling and Stability*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 2009-01-0578.

- [49] L. D. Metz, D. M. Alter, *Transient and Steady State Performance Characteristics of a Two-Wheel-Steer and Four-Wheel Steer Vehicle Model*, Society of Automotive Engineers (SAE) Document Number 911926.

- [50] ISO/TR3888 (1975), "Road vehicles – Test procedure for a severe lane-change manoeuvre".

- [51] ISO 4138 (1982), "Road vehicles – Steady-state circular test procedure".

- [52] ISO 7975 (1985), "Road vehicles – Braking in a turn – Open-loop test procedure".

- [53] ISO 8855 (1991), "Road vehicles – Vehicle dynamics and road holding ability – Vocabulary"