

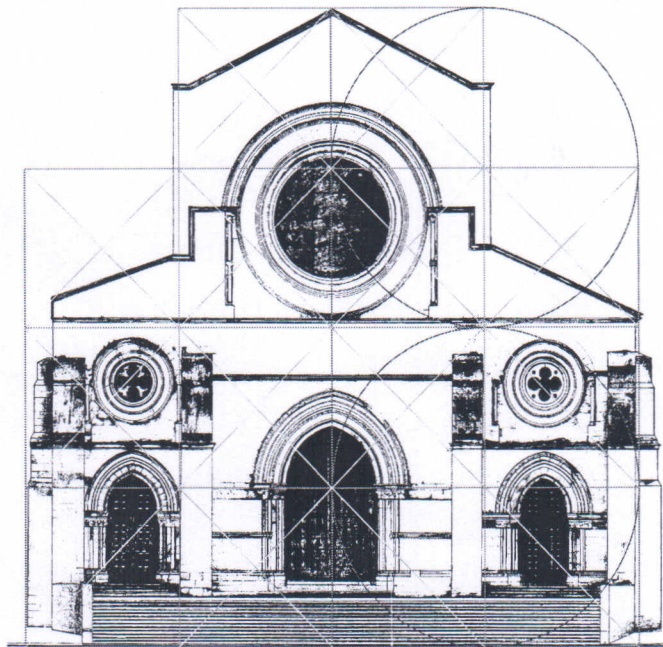


UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA  
Dipartimento di Strutture

Angela Guido

LA CATTEDRALE DI COSENZA  
Tra Architettura e Geometria

Tesi di Dottorato in Ingegneria dei Materiali e delle Strutture  
sezione: Metodiche dell'Architettura e della Costruzione  
Scuola Pitagora in Scienze Ingegneristiche  
Ciclo XXV (2009-2012)  
S.S.D. MAT/03 Geometria



Coordinatore: Prof. Renato S.-Olivito

Tutor: Prof. Jacques Guenot

UNIVERSITA' DELLA CALABRIA  
Dipartimento di Strutture

Angela Guido

LA CATTEDRALE DI COSENZA  
Tra Architettura e Geometria

Tesi di Dottorato in Ingegneria dei Materiali e delle Strutture  
Sezione: Metodiche dell'Architettura e della Costruzione  
Scuola Pitagora in Scienze Ingegneristiche  
Ciclo XXV (2009-2012)  
S.S.D. MAT/03 Geometria

*Coordinatore: Prof. Renato S. Olivito*

*Tutor: Prof. Jacques Guenot*



## *Ringraziamenti*

Ringrazio il Professore Jacques Guenot per la disponibilità fornita in questi anni di dottorato e per avermi trasmesso la passione e la curiosità per la matematica. Ringrazio inoltre tutti i miei colleghi di corso che in questi tre anni mi hanno sostenuto moralmente e logisticamente: Elisa, Antonio Z., Antonio L. e tanti altri e tutte le persone alle quali devo questo importante risultato. Ringrazio l'ing. A. Carrozzini per il supporto tecnico. Ringrazio l'arch. F. Terzi per aver messo a mia disposizione il materiale e le conoscenze esistenti sulla Cattedrale di Cosenza. Ringrazio inoltre tutti i Professori del Dipartimento di Strutture e in particolare il Prof. D. Bruno ed il Prof. S. Olivito.



## *Introduzione*

Il tema di ricerca, esaminato nella presente tesi di dottorato, ha preso spunto dallo studio delle relazioni e correlazioni esistenti tra la matematica e l'architettura e in particolare, approfondisce il legame tra architettura e matematica attraverso un'attenta lettura della genesi formale della cattedrale di Cosenza. Nello specifico viene analizzato, in termini di trasformazioni geometriche, il tema ricorrente della ripetizione e trasformazione di un modulo base nella concezione di un edificio. L'edificio diventa così un "oggetto matematico" che realizza una sorta di "matematica visiva". Il linguaggio matematico è considerato, dunque, come un nuovo modo di interpretare gli oggetti architettonici e la loro genesi, attraverso il "filtro interpretativo" della geometria.

A tal fine è stata posta l'attenzione sulla Cattedrale di Cosenza, patrimonio architettonico realizzato durante il XII secolo e in particolare, è stato affrontato un lavoro che raccoglie informazioni relative agli aspetti architettonici e geometrici riferiti alle origini della costruzione, alle trasformazioni subite negli anni, fino al restauro ultimato nel 2011.

Nel capitolo 1 vengono presentati storicamente gli aspetti morfo-geografici della struttura, rispetto al contesto territoriale e storico in cui fu costruita, mostrando l'importanza e l'influenza che tali contesti hanno avuto, attraverso i diversi periodi storici e le diverse culture sulla costruzione. Pertanto, durante il lavoro di ricerca l'attenzione è stata posta sull'architettura cistercense che si era pienamente radicata nella Regione calabrese del XII secolo dando origine, grazie anche all'apporto della cultura costruttiva meridionale, ad una variante del gotico. Questa fabbrica, infatti, per le sue caratteristiche formali e stilistiche, si può considerare come indicativa dell'architettura di influsso cistercense in Calabria. L'aspetto gotico viene rappresentato in maniera esemplare in questo tipo di edificio religioso, la Cattedrale, la chiesa in cui si trova la "cattedra del vescovo", detta anche Duomo, essendo la chiesa principale della città.

L'analisi ha messo in evidenza non solo le peculiarità di questo edificio ma, anche, l'ampia diffusione che esso ha avuto sul territorio, da un punto

di vista dell'estensione temporale durante il periodo di realizzazione. Per ricostruire l'impianto urbano di Cosenza, l'indagine ha preso le mosse in primo luogo da un'attenta rilettura delle fonti antiquarie, depositarie di preziose informazioni sui ritrovamenti urbani susseguitisi nel corso dei secoli, nel tentativo di recuperare, anche se non materialmente, testimonianze della storia antica del centro cittadino.

Tutti gli studi pubblicati fino ad oggi, analizzano l'architettura, dell'edificio in esame, da un punto di vista storico e stilistico e raramente ne indagano gli aspetti geometrici. Da queste considerazioni è nata l'idea di incentrare la ricerca di dottorato, sullo studio della Cattedrale di Cosenza, con la finalità di produrre uno studio organico ed unitario, che aumenti il grado di conoscenza sia degli elementi già censiti sia di quelli mai rilevati.

Nel secondo capitolo sono state trattate alcune delle teorie che maggiormente hanno affascinato il mondo culturale antico, quelle della scuola pitagorica che riteneva, quale fondamentale parametro in termini di armonia, anche in ambito architettonico, il numero, nel tentativo di disporre di un criterio nell'individuare le regole della composizione architettonica, rivolte a conoscere i rapporti armonici delle note musicali. Teorie che hanno stimolato ricerche anche nel campo dell'architettura e che hanno prodotto lo straordinario patrimonio architettonico che, solo in parte ci è pervenuto. Successivamente tali teorie sono state oggetto di studio di Platone il quale, nel *Timeo*, vuole interpretare i fenomeni legati all'esperienza empirica attraverso i numeri. Pitagora aveva scoperto che mediante l'uso della geometria era possibile ricavare i criteri di calcolo di tutto ciò, che è in natura. Questo principio non solo ipotizzato ma anche applicato nella pratica costruttiva, fu sistematizzato da Euclide intorno al 300 a.C., che lo richiama nel libro VI degli *Elementi* dove lo definì come "media ed estrema ragione".

Una volta definito il principio dei rapporti, che molto più tardi verranno definiti *aurei*, l'applicazione pratica si diffonde in ogni campo della produzione architettonica e non solo. Sant'Agostino, il Vescovo di Ippona, applicò il misticismo numerico pitagorico e neoplatonico all'interpretazione dell'universo cristiano. La sua teoria estetica fu fondamentale per la cultura medievale, la quale subì fortemente l'influenza dei concetti relativi all'Armonia Musicale, da lui formulati nel trattato *De Musica*. I primi

due capitoli della tesi sono dedicati, pertanto, all'esposizione di quei contenuti generali che si rivelano indispensabili per gli sviluppi successivi.

Il terzo capitolo approfondisce con riflessioni puntuali, il ruolo della matematica nella preparazione e formazione degli architetti. In particolare si pone l'attenzione sull'importanza della matematica riguardo alla genesi, al suo ordine, alle sue regole e al significato sugli oggetti architettonici. Poichè è fondamentale, all'interno di un percorso formativo, mettere a sistema la pluralità degli aspetti (tecnologico, storico, compositivo, strutturale) che convergono nella comprensione di un oggetto architettonico, la tesi invita a riflettere su una più diretta interazione fra matematica e progetto.

Fra gli argomenti generali che, sono presentati con dovizia di particolari, una necessaria riflessione è stata rivolta alla simmetria, l'argomento del quarto capitolo. Questa parte si divide a sua volta in due parti: la prima presenta una trattazione teorica della simmetria, la seconda parte è costituita da due animazioni realizzate per una mostra allestita nell'ambito del Premio Pitagora Città di Crotona. La difficoltà principale incontrata nello scrivere questi due prodotti nasce, soprattutto, dall'incapacità di valutare, con un certo grado di affidabilità, lo zoccolo duro di conoscenze geometriche che possiede il fruitore. Nel primo caso, bisogna assicurarsi che le proprietà della distanza euclidea, alla base del concetto di simmetria, siano effettivamente note al lettore. Nel secondo caso, la mostra essendo potenzialmente visitata da ragazzi e ragazze, bisogna cercare di attirare la loro curiosità, eliminando qualsiasi tecnicismo. Per superare questi ostacoli è stato necessario costruire item scelti il più possibile autosufficienti, limitando i prerequisiti al minimo ma, conservando al massimo il rigore logico di cui la geometria e l'architettura sono il modello per eccellenza. Il metodo di indagine privilegiato è stato quello dell'analisi geometrica in architettura il quale, opportunamente affiancato a metodi più tradizionali quali: la ricerca bibliografica e l'analisi storica, offre informazioni preziose per la conoscenza della fabbrica. Acquisito tutto il materiale, si è passati alla definizione delle proprietà geometriche che possono sembrare per alcuni scontate, per altri ben applicate ad un caso reale.

I temi descritti con attenzione nella prima parte del capitolo quarto, sono stati sviscerati in occasione della mostra sulle Simmetrie, inserita



all'interno del programma organizzativo del premio Pitagora, che si è tenuto presso il Castello Svevo di Crotona nel 2010. È stato proposto, per tale evento, un viaggio immaginario nelle simmetrie in un magico e variegato mondo multidisciplinare attraverso immagini e animazioni. L'uomo ha da sempre mostrato una certa sensibilità verso i fenomeni che lo circondano, nonostante il forte condizionamento dovuto alle sue limitate facoltà percettive e umane, infatti, solo alcuni segnali, organizzati secondo precisi schemi, sono decifrabili. La simmetria è uno di questi schemi. Forse quello più evidente. Sembra pertanto naturale che l'uomo abbia utilizzato da sempre la simmetria nelle sue elaborazioni artistiche e non solo. Il tema della simmetria è in grado di cogliere un valore universale, un primordiale principio organizzativo delle conoscenze, presente in numerose discipline, dove spesso assume la caratteristica di "ordine", "proporzione", "armonia", "equilibrio". Tutti questi termini si riferiscono a qualche aspetto della simmetria e intervengono, anche a vario titolo, in qualità di nozioni direttamente utilizzate dalla matematica, nel suo tentativo di comprendere in maniera razionale i fenomeni relativi alle forme dello spazio in cui viviamo. Il CD allegato alla presente tesi di ricerca contiene due presentazioni in cui, utilizzando un modulo di base animato opportunamente, sono sviluppati i temi principali sulle simmetrie.

Tutti gli argomenti proposti nel capitolo precedente trovano giusta applicazione nel quinto capitolo. Attraverso una serie di immagini che visualizzano alcuni particolari della Cattedrale, è possibile realizzare alcune rappresentazioni in bassorilievo come i fregi, applicando i concetti sulle simmetrie. Vista la complessità degli aspetti formali, dimensionali e geometrici, inerenti a tale edificio, si è cercato di dare un significato simbolico alle informazioni raccolte e agli oggetti rappresentati, in relazione al messaggio cristiano in esse nascosto.

# CAPITOLO 1

## LA CATTEDRALE DI COSENZA

### 1.1 Cosenza nella storia.

Ricostruire la storia di una città, è uno degli strumenti indispensabili perchè si possa acquisire consapevolezza delle proprie origini e della propria identità culturale.



Fig. (1.1) Magna Graecia

Cosenza è una provincia calabrese, di quei territori che nell'antichità, vennero diversamente indicati come: *Ausonia*, per le proprie ricchezze; *Esperia*, perchè per i Greci era in direzione dell'Occidente; *Enotria*, terra del vino o da Enotrio re di Arcadia; *Italia*, dal re Italo o terra dei vitelli; *Magna Grecia*, perchè diventò splendente più della madre patria; *Bruzia*, dove viveva il popolo dei Bruzi e infine, sotto i Bizantini nel VI secolo d.C., Calabria, etimologicamente terra di ogni bene, che fino ad allora era spettata al Salento, la penisola che oggi si estende tra Brindisi ed Otranto. La storia della città di Cosenza ha origini che risalgono al IV secolo a.C., momento in cui tutta l'area della Valle del Crati si espandeva a nord fino all'entroterra delle attuali Basilicata e Puglia ed a sud, fino all'aspromonte. Con l'arrivo dei primi coloni greci, nascono le prime città. Significativi i ritrovamenti delle colonie greche che hanno interessato e scritto la storia del periodo ellenico, durante il quale la provincia di Cosenza vive, insieme a tutta la regione Calabria, un periodo florido, da tutti i punti di vista: economico, politico, sociale e culturale.



Fig. (1.2) Colonie Greche

Il processo di colonizzazione da parte della Grecia verso questa regione, comincia nel secolo VIII a.C. Nella provincia di Cosenza, la colonia greca più importante è stata certamente quella di Sibari fiorente città e fulcro di centri urbani, capace di controllare l'intera provincia cosentina,

infatti, raggiunse la popolazione di 300.000 abitanti, con diversi centri abitati dislocati lungo la piana omonima, fino alle pendici del Pollino e la costa tirrenica. Altri centri di considerevole importanza furono: Pandosia, città sorta in quella che è oggi il capoluogo di provincia, in un'area interna della Valle del Crati; Laos fondata da Sibari che un tempo sorgeva sulla riva destra del fiume Lao; Scidros (posta tra Cetraro e Belvedere Marittimo); Clamptia (nell'area tra Amantea e San Lucido); Temesa (tra Amantea e Nocera Terinese); Ursentum (l'attuale Orsomarso). Di minore importanza ma di uguale pregio ed interesse, da citare sono certamente i siti e i centri di Aufugum (l'attuale Montalto Uffugo), Argentanum (l'attuale San Marco Argentano), Bergae, Besidiae (l'attuale Bisignano) e Lymphaeum (l'attuale Luzzi). Lo stato delle colonie e dei centri urbani di questo periodo durerà circa sei secoli, nel corso dei quali varie lotte interne, mutazioni politico-economiche nel Mediterraneo e la presenza dei popoli Bruzi all'interno del territorio provinciale, portarono alla scomparsa prima dell'influsso della Grecia su questi territori, e in seguito alla scomparsa delle stesse colonie, che coincise con l'avvento dei Romani. La città di Cosenza era ritenuta strategica per il popolo Bruzio, tanto che la innalzò a loro capitale <sup>(1)</sup> dandole il nome di "Consentia" o "Cosentia", derivante dal "consenso" espresso dalle città del Bruzio nel 356 a.C.. Cosentia fu riconosciuta capitale anche dai Lucani, che firmarono un trattato di pace detto di "Donna Brettia", che in futuro divenne una vera alleanza fra i due popoli. In quel tempo Cosentia si sviluppò rapidamente, la città si presentava fortificata e temuta, prospera al punto di essere definita "metropoli" e capitale del vasto territorio oltre che supervisore di quasi tutte le città della Magna Grecia calabrese, queste una dopo l'altra caddero sotto i continui attacchi dei Bruzi, nonostante gli aiuti di Dionisio prima e successivamente di Alessandro I d'Epiro detto il Molosso zio di Alessandro Magno, che morì in battaglia nel 331 a.C., nelle immediate vicinanze di Consentia, a Pandosia. Il territorio sotto il dominio dei Bruzi, venne ben presto fatto oggetto di attacchi da parte dei Romani, intorno all'inizio del III secolo a.C.. I romani non trovarono grandi ostacoli da parte del popolo Bruzio, nonostante a sostenerli contribuiva l'Impero dell'Epiro e di Pirro, sostegno

---

<sup>(1)</sup> Testo 3 - Strabone, Geografia, VI, 1, 4: l'origine del popoli dei Brettii (F. Lassère, Strabon. Gographie, Tome III (Livres V et VI), Paris 1967)

che si spense con le guerre puniche nel II secolo a.C.. Roma mutò drasticamente le condizioni sociali dei centri della provincia, colonizzando ampie parti del territorio, e dominando le antiche colonie presenti, quest'ultime soggette a sovrapposizioni urbanistiche o edificazioni affiancate alle città preesistenti.

La scomparsa della cultura bruzia e l'assimilazione di quella greca, segnarono un confine netto tra il passato e il presente. Sotto la dominazione romana, Cosenza divenne una stazione della Via Capua - Rhegium, meglio nota come via Popilia (o via Annia). Durante la guerra civile tra Pompeo e Cesare, Cosenza si schierò con la fazione di Cesare, e quindi fu assediata per ordine di Pompeo, dai soldati arrivati dalla Sicilia. Appiano Alessandrino delineò gli avvenimenti che si compirono a Cosenza in quel periodo. Nel 29 a.C. Consentia diventa colonia sotto Augusto, il quale le concesse nuovamente la cittadinanza romana dopo essersi assicurato la resa definitiva dei Brettii e delimitato i confini con l'assegnazione del suo agro in duecento iugeri. Nel *Liber Coloniarius* di Frontino si attesta: *“Da quel momento Consentia cambia connotazione, e da bellica e fortificata si trasforma in una fiorente città a connotazione commerciale e culturale”*. Sono visibili testimonianze della città romana nel centro storico come attestano: lo scavo di una domus in piazzetta A. Toscano, lo scavo di edifici termali in via S. Tommaso e Palazzo Sersale ed i resti delle mura di cinta in opus reticulatum.

Nel 304, Massimiliano, imperatore romano, si stabilisce a Consentia per far fronte ad una rivolta di ordine religioso. Con l'eliminazione di Bulla, iniziò il martirio dei cristiani nel capoluogo bruzio, che vide numerosi suoi figli martiri, tra cui San Dionigi e San Callisto. Nel 313 con l'editto di Milano il Cristianesimo esce dalla clandestinità. Per un secolo Consentia vive nel benessere, nella pace e nello splendore, finché Alarico re dei Visigoti la invade, subito dopo aver perpetrato il Sacco di Roma del 24 agosto 410. Durante l'invasione, nei pressi della città, Alarico muore di malaria e, secondo la leggenda, fu seppellito in armatura, dal suo esercito, con una parte del bottino di Roma ed il suo cavallo, nel letto del fiume Busento, il quale venne momentaneamente deviato per poi essere reindirizzato nel letto naturale facendo perdere per sempre il punto preciso della sepoltura. I romani, durante la loro dominazione, si concentrarono nello sfruttamento delle risorse e dei minerali (vedi San Marco Argentano), mentre procedette

ad un impoverimento del territorio, con l'estinzione dell'agricoltura e di tutte le attività portuali, e delle svariate infrastrutture esistenti, eliminando il vecchio tracciato reticolare che collegava i vari centri interni, sostituendolo con la via Capua-Rhegium nel tratto provinciale della via Popilia-Annia.

La via Popilia era una via realizzata a scopi militari, via di comunicazione necessaria per trasportare le risorse accaparrate nei territori occupati, e come collegamento fra i vari centri che stavano sorgendo lungo la stessa strada. La conseguenza del dominio romano fu soprattutto un totale abbandono delle antiche aree greche, fertili e strategiche sotto il punto di vista delle comunicazioni marine. In seguito si diffusero e svilupparono i centri urbani a mezza costa, più protetti da attacchi via mare, e attigui ad aree collinari facilmente coltivabili, centri urbani che ancora oggi costituiscono l'ossatura generale di tutti i centri storici urbani costieri della provincia, che solo nell'immediato dopoguerra, svilupparono nuovamente le aree costiere, dopo quasi due millenni di abbandono. È stato possibile ricostruire le origini della città, grazie alla realizzazione della sala museale nel pianterreno della Biblioteca Nazionale di Cosenza, punto di riferimento per studiosi per la vastità del suo patrimonio librario sempre in implementazione. Da qui iniziano una serie di indagini archeologiche che portarono alla luce numerosi ritrovamenti, alcuni dei quali fortuiti, relativi all'area del centro storico di Cosenza, grazie ai quali si è potuto trovare il giusto e vero riscontro con tutta la serie di importanti fonti documentarie e letterarie esistenti (Tito Livio, Strabone, Appiano, l'elogium Polla).

Cosenza, stando ai ritrovamenti, svolse un ruolo molto importante a partire dalla metà del IV secolo a.C e gli scavi hanno consentito di ricostruire parte della metropoli dei Brettii, Consentia appunto, che proprio in questa epoca si estendeva lungo il pendio che dal Colle Pancrazio scendeva fino alla sponda sinistra del fiume Crati. Sebbene numerosi rinvenimenti fossero stati effettuati nei locali del palazzo Sersale, in corso Telesio, nel vico S. Tommaso e nella nota piazzetta Toscano, quelli della Biblioteca nazionale hanno evidenziato la presenza di un contesto abitato di ampio arco cronologico. Trattasi in particolare di: porzioni di antiche abitazioni private con stratificazioni quattrocentesche e novecentesche; tronconi di muri in ciottoli di fiume; resti di un grande edificio privato di epoca ellenistica (IV-III secolo a.C.); muri realizzati con differenti materiali, ciottoli e ab-

bondanti frammenti di ceramcazione dell'area archeologica della Biblioteca Nazionale ha altresì consentito di rinvenire maioliche e ceramiche di epoca quattrocentesca confermando che si trattò di una tappa importante nel percorso di riappropriazione e conoscenza dell'antica città di Cosenza.

Nel 554 l'esercito di Giustiniano sconfisse gli Ostrogoti; Narsete entrò a Consentia e con l'era bizantina la città riacquistò nuovamente il titolo di capitale delle terre meridionali, ormai libere. Nell'anno 568, Giustino il Giovane, nipote di Giustiniano, divenne Imperatore e Consentia venne trasformata in ducato. In questo periodo il capoluogo bruzio divenne culla di letterati, si formarono le nuove classi dirigenti e ivi nacque la prima scuola musicale. Nei secoli VIII e IX, Cosenza fu dominio prima dei longobardi, durante il quale divenne sede di Gastaldato del Principato di Salerno, e successivamente dominio bizantino.

La città di Cosentia era violentemente contesa da saraceni e longobardi, al punto di essere quasi distrutta e riedificata nel 988.



Fig. (1.3) Il meridione d'Italia dai Normanni-Svevi agli Angioini

Nell'807 Consentia fu sede Vescovile e il suo primo Vescovo fu Pancrazio, uomo di grandissima cultura ed oratore eloquente e produttivo, egli seppe divulgare la fede cristiana con entusiasmo e tenacia. Il grande Vescovo, per i suoi meriti, fu mandato a Taormina per trasmettere il messaggio della fede cristiana. I cosentini, vollero elevare in suo onore un tempio, la prima Cattedrale della città, la Cattedrale di San Pancrazio, distrutta e devastata dal violento terremoto del 1184. Intanto, nel 1057 Roberto il

Guiscardo diede inizio all'occupazione normanna della Calabria; Consentia, fu ostile a questa nuova dominazione, al punto da scatenare in città ribellioni e tumulti che però vennero ben presto sedati. In questo periodo Consentia divenne capitale e sede del giustizierato Val di Crati, Terra Giordana e residenza di Ruggero II, duca di Calabria, che iniziò la costruzione del castello sui ruderi di una fortezza saracena. Con il matrimonio tra Costanza d'Altavilla, ultima erede tra i sovrani normanni e Enrico IV di Hohenstaufen, inizia la dominazione sveva. Sotto la dominazione di Federico II di Svevia lo "Stupor Mundi", che considerava Cosenza la sua sede preferita dopo Palermo e Napoli, iniziò un periodo prospero sia culturalmente che economicamente grazie anche all'istituzione di un'importante fiera annuale, la fiera della Maddalena. In questa fase tale fu la gratificazione della città intera e tanti e numerosi furono i privilegi. Venne completata e consacrata la Cattedrale, nella quale fu fatto seppellire il figlio primogenito Enrico VII, nato dal matrimonio con Costanza d'Aragona, e morto suicida, infatti, egli era in continuo contrasto con il padre che lo aveva condannato prima a morte e poi al carcere a vita. In tale periodo venne ristrutturato il castello con le due torri ottagonali.



Fig. (1.4) Ruderi del Castello Svevo di Cosenza

## 1.2 La Cattedrale di Cosenza nella storia della città.

Tanti gli accadimenti storici che videro Cosenza al centro di dispute politiche, economiche-sociali e culturali. La realtà urbana si dota di un apparato monumentale che adegua la città al modello delle grandi metropoli, infatti, vengono costruiti edifici sociali e sacri i cui rinvenimenti sono pre-



senti ancora oggi. A Cosenza i segni del progressivo adeguamento alla cultura dominante sono molteplici nello spazio urbano, si assiste alla rivitalizzazione di alcuni antichi luoghi di culto, secondo però modelli non più greci, come in passato, ma del tutto romani. Sotto il regno dei normanni nascono monumentali edifici come il Castello i cui ruderi si possono ancora oggi ammirare e visitare.

Verso la metà del XII secolo viene riedificata la Cattedrale di Cosenza, e posta in essere l'impostazione monumentale del tempio con il suo stile caratteristico dell'epoca, infatti, si può considerare uno dei capolavori dell'architettura medievale meridionale, non tanto per le proporzioni ma piuttosto per l'armonia della costruzione. Sicuramente in quell'epoca le risorse economiche, i materiali usati, la manodopera non sono paragonabile ad oggi, basti pensare che per trasportare, gli enormi macigni dal vicino Crati, per dare al tempio solide fondamenta, e i tufi, dal vicino Mendicino, occorrenti per le parti interne e per gli ornamenti, venivano utilizzati gli asini e dei modesti carri a buoi. Importante fu la manodopera degli abilissimi scalpellini dell'epoca, provenienti dai paesi limitrofi, artisti capaci di scolpire con amore, con garbo nel gentile tocco e con fine e sapiente gusto, i capitelli con fregi a foglie di acanto e motivi simbolici che trasmettono il messaggio della fede cristiana. Le maestranze del territorio costruirono innumerevoli opere in legno quali: le grandi porte, il coro, i confessionali, le capriate, il tutto senza mezzi meccanici ma, facendo leva sulla forza di volontà e servendosi di rudimentali attrezzature. La serie di restauri a cui fu sottoposta la Cattedrale cittadina, portarono alla luce i resti di tale fabbrica, basti osservare la struttura absidata, i frammenti di un mosaico pavimentale, in tessere di marmo policrome, di fattura normanna (sec. XII), e tanto altro. La Cattedrale era ed è posizionata nella parte antica della città, come si conviene ad una struttura sacra, è dedicata a Maria SS. Assunta; sorge nel centro storico della città, dove mostra il suo prospetto principale sull'ampia Piazza del Duomo, in posizione sopraelevata mediante un'ampia gradinata d'accesso rispetto alla stessa. È uno dei più grandi edifici religiosi di Cosenza, ed è oggi la Cattedrale dell'arcidiocesi di Cosenza-Bisignano.

L'impianto originario del tempio cosentino fu elevato su resti della preesistente fabbrica distrutta dal terribile sisma del 25 maggio nel 1184. Giunti in città i Normanni di Roberto il Guiscardo, lasciarono alla popo-

lazione l'antica fabbrica, ed ordinarono la costruzione di una nuova cattedrale che fosse sotto l'ordinamento del Papa di Roma, cui erano legati i Normanni. Ricominciarono da subito i lavori di ricostruzione, che vennero portati a termine nel 1222 e nello stesso anno, il 30 gennaio, l'edificio sacro venne inaugurato e consacrato dal cardinale Niccolò Chiaromonte, Legato del Papa Onorio III, Vescovo di Tuscolo e Delegato Apostolico, alla presenza di Federico II di Svevia. Il completamento avvenne sotto la guida dell'arcivescovo Luca Campano (1201-1224), già scriba di Gioacchino da Fiore e notaio alla corte siciliana del re infante tra il 1189 e il 1201.



*Fig. (1.5) Dipinto raffigurante Luca Campano  
Abbazia di Casamari.*

Egli, nel programma costruttivo di completamento della Cattedrale cosentina, mise insieme le esperienze della Abbazia Florense (L'Abbazia Florense è fra i più grandi edifici religiosi della Calabria, ed è considerato, uno dei più importanti edifici religiosi della Provincia di Cosenza. Fa parte dell'Arcidiocesi di Cosenza-Bisignano, ed è per cronologia, il primo edificio ed insediamento, realizzato a San Giovanni in Fiore.) e dell'abbazia Santa Maria della Sambucina oltre a quelle sviluppate delle Case madri, elaborando un piano si sviluppo e di forme che rifletteva i canoni cistercensi. Federico II di Svevia, in quella occasione, fece dono alla città di Cosenza di una preziosa Croce bizantina, la Stauroteca, recante un pezzetto della Croce su cui spiró Gesù Cristo.



*Fig. (1.6) La Stauroteca*

Con l'inaugurazione della Cattedrale, realizzata con un'infinita cura di lavorazione nei materiali, l'edificio sacro presentava un carattere di atemporalità e si può affermare che Cosenza, da quel momento, inizia una nuova vita, si avvia verso la sua ascesa, perchè quella grande opera, oltre che per il suo valore spirituale, conferiva alla città una risonanza maggiore. Da allora tutti gli avvenimenti della città ebbero come centro la Cattedrale. La Cattedrale che é segno e simbolo della "città di Dio" é costruita vicino alla "città degli uomini"; nei secoli sede del vescovo della diocesi e della scuola rinnovata, riunisce i simboli del potere della cultura e della religione; é l'edificio della città nel quale si riconoscono tutti i cittadini, non solo per le cerimonie religiose, ma anche per le assemblee laiche. Lo spazio dell'edificio sacro e quello che lo circonda, corrisponde allo spazio della vita collettiva della città e nella sua struttura, la Cattedrale sintetizza questo insieme di intenti, fatto di contrasti e di timori, di slanci e di momenti di riflessione. La sua storia é legata all'importanza non solo spirituale, ma anche temporale che il vescovado aveva all'interno della città, soprattutto nei periodi in cui Cosenza subí gravi disagi dovute a pestilenze e terremoti. La Cattedrale rimase il simbolo del potere del vescovo, in quel caso unico rappresentante del potere temporale. Qui trovarono degna sepoltura Vescovi e personaggi illustri come il grande Bernardino Telesio, anche se la sua tomba non si è mai potuta individuare, ma al contrario fu rinvenuta l'iscrizione sepolcrale della stessa.

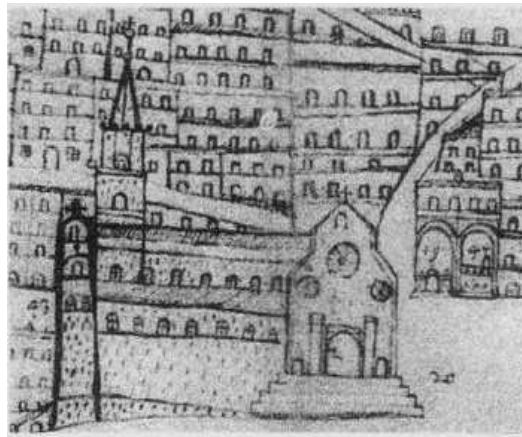


Fig. (1.7) La Cattedrale di Cosenza. Disegno della fine del XVI secolo  
Roma. Biblioteca Angelica

Quando i costruttori della Cattedrale di Cosenza si apprestarono all'ardua impresa di ricostruzione, senza dubbio seguirono forme costruttive ed iconografiche ormai in atto nella regione. Ben poco resta, chiaramente documentato, della originaria fabbrica eretta da Luca Campano; la struttura dalle grandi dimensioni, si presentava nel XII secolo con i portali a strombo, ossia lo stipite era tagliato obliquamente e svasato verso l'esterno, fino a formare una sezione trapezoidale, garantendo, in tal modo, un migliore ingresso della luce ed un invito ad entrare. La pianta della cattedrale mostra come essa fosse composta di rettangoli disposti regolarmente, rispecchiando la suddivisione liturgica delle cattedrali medioevali. L'asse verticale, all'interno della costruzione, era individuato dalla intersezione di un piano di simmetria longitudinale e un piano di simmetria trasversale. Questo tipo di composizione portava a rinunciare all'inserimento di elementi contrastanti quali, per esempio possono essere i campanili. La fabbrica, infatti, era dotata, inizialmente, di due campanili, di cui uno posto come elemento indipendente dalla struttura, raffigurati in un disegno della fine del XVI sec., quello destro, altissimo, rappresentava "una delle meraviglie della città". La torre campanaria, nel Medioevo rappresentava la chiesa militante "le Torri della chiesa indicano i predicatori che formano il suo baluardo e la difendono" <sup>(2)</sup>.



*Fig. (1.8) La cattedrale in veste barocca*

---

<sup>(2)</sup> G. Durand De Mende, *Manuale per comprendere il significato simbolico delle cattedrali e delle chiese*. Arkeios, Roma 1999, pag. 34.

Negli anni la cattedrale subì particolari trasformazioni, mentre si eseguivano costantemente restauri e interventi di riparazione. La cattedrale é una struttura compatta, con forti particolarità simboliche: le opere, il portale, i rosoni, i fregi, il mosaico pavimentale, le finestre, gli spazi ecc., tutte sembrano seguire una rigorosa sequenza geometrica. Il portale ed il rosone sono due elementi che rivestono una grande importanza per descrivere la facciata della struttura, infatti, essendo questa abbastanza semplice, viene arricchita da questi elementi tanto da renderla elegante e preziosa determinandone il suo carattere. La particolarità che accomuna questi due elementi è che la dimensione del portale e del rosone e la loro composizione sono collegati, infatti, il diametro del rosone è uguale all'altezza del portale. La facciata in pietra arenaria conclusa da un sobrio coronamento a capanna spezzata, era scandita da corpose lesene poste ad inquadrare i tre portali, definiti da profonde cornici archiacuate. Ma ciò che caratterizzava la facciata e ne determinava la peculiarità era il gioco delle parti architettoniche, che formavano un'armonia particolare. Tra il 1748 e il 1759 il presule Capece Galeota la fece arricchire con sovrastrutture barocche progettate da Saverio Ricciulli. In una lapide si legge il cambiamento del sito.

### 1.3 Architettura gotico-cistercense

Di stile gotico-cistercense, la Cattedrale di Cosenza rifletteva il rigore della regola dell'ordine. L'architettura gotica-cistercense, ha delle proprie caratteristiche stabilite o comunque degli aspetti preposti dall'ordine cistercense stesso.



*Fig. (1.9) Costruzione di un'abbazia da monaci cistercensi  
(dipinto su legno, Abbazia di Maulbronn-Wurtemberg)*

L'architettura gotica-cistercense, è quel tipo di architettura che pur tenendo conto dei caratteri del gotico, la chiave concettuale e teorica, alla base delle costruzioni era di far entrare sui fedeli, raccolti nel luogo sacro, quanta più luce possibile, quale simbolo di Dio. Questo ordine, massimo diffusore del gotico in Italia, nasce e si sviluppa dal ceppo Benedettino, perciò sia la spiritualità che la struttura urbanistica delle chiese avevano come punto di riferimento la regola dell'ordine. La semplificazione monumentale, la sobrietà, l'eterogeneità rispetto al poderoso alto romanico e al ricco tardo romanico è la risposta architettonica, corrispondente alla riforma religiosa dei cistercensi. Si ricerca l'essenzialità assoluta, la bellezza raggiunta con la nuda espressione architettonica delle linee, delle masse, dello spazio. L'architettura cistercense, presentava diversi aspetti anche se si trattava di un'unica espressione di edilizia religiosa monastica, l'aspetto preponderante era caratterizzato da un'estrema semplicità strutturale, formale e iconografica, senza però rinunciare alle finalità espressive, anzi esaltandole in tre modi: opponendosi alle mastodontiche dimensioni, puntando sull'essenzialità delle stereometrie ed eliminando il superfluo. Siamo al centro tra romanico e gotico: del primo viene ribadita la consistenza massiccia delle murature e la chiarezza razionale delle superfici; del secondo accoglie l'articolazione dei contrafforti e, nell'interno, le porzioni spaziali rettangolari divise da pilastri che agganciano altissime colonnine sospese nell'ambito di un ambiente luminoso, contrastante con quelli oscuri delle navatelle.

Le strutture cistercensi, oltre alle caratteristiche già sottolineate, seguivano, poi, una tipologia che risale al tempo post Bernardino, in cui la struttura si arricchisce di elementi gotici, di quegli elementi e sculture che San Bernardo non aveva mai voluto introdurre. L'esperienza gotica importata dalla Borgogna si intreccia e viene in parte sfibrata da quella romanica vigorosamente attiva nella penisola. La caratteristica si osserva in alcune peculiarità come: le strombature dei portali, le sculture dei capitelli, le colonnine dei chiostrini, le volte a crociera ecc. Nell'esaminare l'architettura cistercense, gli studiosi hanno messo in rilievo la personalità diretta di San Bernardo per l'elaborazione di un progetto pilota, il "piano Bernardino" all'origine del quale sarebbe l'esistenza di "cantieri scuola", ossia luoghi e laboratori dove venivano insegnati ai monaci le tecniche per realizzare i vari progetti, questi ultimi acquisiti gli elementi essenziali se ne appropria-

vano per insegnarli e farli conoscere negli aspetti tecnici e per metterli in opera nelle abbazie di nuova fondazione.

I monaci, nell'esportare questo programma di lavoro, erano tenuti ad adattarsi ai sistemi locali e tradizionali di costruzione. La particolare armonia delle architetture cistercensi, dovuta a un ordine e a una proporzione non casuale, inoltre, è il raffinato risultato di una progettazione basata sul principio del modulo usato secondo un calcolo matematico che condizionava le varie parti di un edificio, così che ogni dimensione, ogni distanza e ogni parte di una fabbrica, erano effetti di un sistema razionale e mai arbitrario.

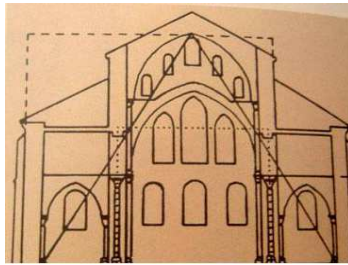


Fig. (1.10) Nella foto: Alzato tipico di chiesa cistercense  
*Si evidenzia la costruzione modulare (ad quadratum)*

Lo schema delle chiese cistercensi era estremamente razionale, era basato essenzialmente sul quadrato, la pianta risultava molto semplice: di tipo longitudinale, a croce latina, con transetto sviluppato. Minimo era l'utilizzo delle decorazioni. La Chiesa cistercense doveva avere tre ingressi: porta principale, e due porte laterali, essa spiccava per il rigore del suo reticolo e per la costruzione modulare che pertanto sviluppa una visione sintetica. Il rapporto costruttivo era quello armonico del quadrato 1:1 oppure 1:2, che regolava non solo la divisione in pianta, ma anche quella dell'alzato in consonanza con i rapporti numerici della Gerusalemme Celeste descritta nel Libro dell'Apocalisse.

Questo tipo di pianta cistercense, caratterizzata da abside e cappelle rettangolari, risultava essere stata adottata quasi senza eccezioni nel periodo in cui San Bernardo era in vita, mentre sembra che nella seconda metà del XII secolo abbia subito alcune modifiche. Ma i caratteri sostanziali delle costruzioni cistercense vanno rintracciati in un certo senso soprattutto in aspetti più raffinati e più sottili, ravvisabili nella semplicità delle parti,

nella loro distribuzione logica, nella perfezione dell'esecuzione, nell'uso di materiali selezionati e nell'austerità del decoro. Dove la situazione del terreno lo permetteva, i complessi cistercensi, seguivano una tipologia omogenea: i complessi ruotavano, infatti, compatti intorno alla forma quadrata del chiostro, di cui il lato settentrionale era costituito dalla Chiesa, accanto alla quale erano edificati, in senso orario, una serie di ambienti collegati tra loro e adibiti ai vari servizi della vita comunitaria.

Il proposito di San Bernardo era, infatti, quello di realizzare una specie di Gerusalemme Celeste, una città misurata, dove l'anima cristiana era considerata il Tempio e la casa di Dio. Tutte le parti della fabbrica, erano costruite su un sistema fondato sulla equivalenza e la moltiplicazione delle parti. Il modulo regolava l'intera operazione costruttiva, dalle fondamenta ai capitelli, alle mattonelle, alle tessere vitree delle finestre. Tutto ciò diversificava l'architettura cistercense da quanto era stato realizzato fino ad allora e quanto era avvenuto nel Nord. Alla base di questo processo sta il caratteristico fenomeno dei cantieri-scuola la cui esistenza, per quanto non documentata espressamente, è dimostrata dalla rigorosa omogeneità di edifici che si ripetono in tutta l'Europa e che hanno spinto la critica a parlare della "esportazione di prefabbricati".

Ma in realtà si trattò sempre di idee architettoniche e costruttive identiche adattate alle tecniche e alla tradizione dei materiali locali: ciò che fu esportato, quindi, non furono prefabbricati ma uomini, esperti del "piano Bernardino", capaci di riprodurlo rispettando le tradizioni locali e in grado di insegnarle alle maestranze del posto. Materialmente, la fabbrica veniva messa in opera, anzi progettata, da un monaco che era anche architetto, chiamato "maestro d'opera", che si diceva ispirato da Dio, colui che aveva posto le Leggi nel Creato. Il Maestro d'opera conosceva tali leggi, le rispettava e le utilizzava per dare ordine e funzionalità all'edificio. Lo aiutavano dei "semplici" strumenti da lavoro, con i quali eseguiva sia i calcoli che le misurazioni, basandosi su figure geometriche quali i quadrati, i rettangoli, i triangoli e i cerchi di cui conosceva tutte le proprietà geometriche e armoniche. A queste figure corrispondevano, come sappiamo, significati simbolici che il Medioevo aveva fatto propri.

Il maestro d'opera usava la squadra e la "riga". La squadra serviva per tracciare angoli retti e ancora per verificare la precisione del taglio



della pietra. Essa era tarata in vari punti e aveva segnati più di una unità costruttiva (rettangolo Egiziano, etc.). Solitamente, il lato lungo rappresentava il braccio o cubito, quello corto il piede. Questo testimonia che i costruttori cistercensi erano a conoscenza delle misure che venivano usate in luoghi d'oltremare come l'Egitto.

Interessante era la corda a dodici nodi che permetteva di ottenere in maniera semplice tutte le figure geometriche su cui si basavano le costruzioni cistercensi; la distanza tra un nodo e l'altro era di un braccio (cioè 53 centimetri circa).



Fig. (1.11) Nella foto: riga o canna cifrata

La “riga” o “canna cifrata”, era la somma di cinque misure in rapporto armonico con l'uomo, di cui portano il nome di una parte del corpo (palma, palmo, spalla, piede, braccio).



Fig. (1.12) Corda a dodici nodi

Ogni misura era uguale alla somma delle due precedenti. Da luogo a luogo potevano variare leggermente ma rimaneva costante la relazione tra esse. Inoltre, entrava in gioco il numero aureo (o divina proporzione), corrispondente a 1,618, un numero irrazionale: ogni misura era uguale a quella che la precedeva moltiplicata per 1,618. Nel pentagono regolare si ritrovano utilizzate tutte le cinque misure di riferimento.

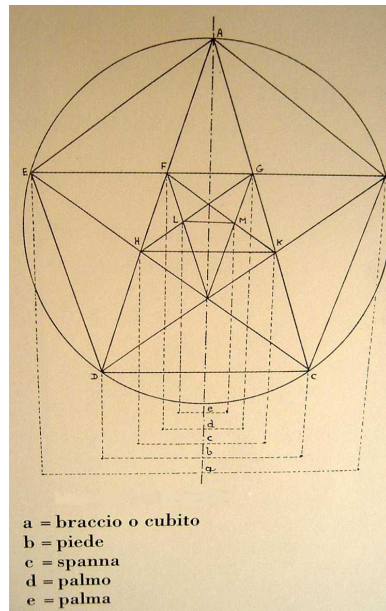


Fig. (1.13) Pentagono regolare, con le cinque le misure

Il primo periodo romanico dell'architettura cistercense rappresenta, nonostante gli elementi tipici delle maestranze borgognoni, un nuovo genere architettonico che nel secolo XII diventa rapidamente familiare in tutta Europa, adattandosi tuttavia alle correnti stilistiche locali.

La semplificazione monumentale, la sobrietà, l'eterogeneità rispetto al poderoso alto romanico e al ricco tardo romanico è la risposta architettonica, corrispondente alla riforma religiosa dei Cistercensi, alla chiesa abbaziale di Cluny III, progettata nel 1077 e che costituiva allora la più grande e più splendida chiesa di tutto il mondo cristiano.

Il passo decisivo verso il gotico-cistercense, si compie in Borgogna nel periodo post-bernardino quando la volta a botte, poggiata immediatamente sulle arcate della navata principale, viene sostituita dalla volta a crociera con lanterna. Lo stacco ritmico, al posto della pesante e continua volta a botte, porta al sistema protettivo smembrato e nelle pareti alleggerite, può essere aperta una finestra per ogni campata.

Questa variazione di stile si può datare a partire dalla seconda metà del secolo XII. I caratteri gotici si caratterizzarono essenzialmente nella dinamica spaziale derivante dallo scontro delle direttici longitudinali e verticali, e nella danza degli archi rampanti al cielo.

#### 1.4 Struttura della Cattedrale di Cosenza.

Due principi dominano l'architettura religiosa:

- essa è cosmica, cioè presenta simbolicamente la costruzione del mondo nel quale Dio ha reso visibile la sua perfezione;
- essa é fatta ad imitazione di Dio creatore del Mondo <sup>(3)</sup>.

Dal punto di vista architettonico oggi la Cattedrale si presenta praticamente nelle forme duecentesche. L'edificio appare molto massiccio ma di proporzioni moderate nei quali i pieni dominano sui vuoti. La moderazione delle proporzioni porta alla ricerca dell'equilibrio nella costruzione nella quale nessuna dimensione prevale sulle altre. Essa si esprime anche nell'orizzontalità che prevale sulla verticalità. La fabbrica è divisa da un cornicione che distingue la parte superiore, più leggera e dai tratti più lievi, dalla parte inferiore più compatta. La parte superiore, che riprende la zona interna della navata centrale, è caratterizzata da una copertura a capriate. Il rosone, lato sinistro di chi sale per Corso Telesio, indica l'orientamento della Cattedrale di Cosenza da oriente ad occidente, con l'abside orientato ad est.

L'ingresso principale è quindi posizionato sul lato occidentale, in corrispondenza dei piedi della croce in modo che i fedeli, entrando nella cattedrale, si avviano verso oriente simboleggiando l'ascesa di Cristo. La direzione orientale corrisponde a quel segmento di orizzonte locale in cui i corpi celesti sorgono analogamente, dal punto di vista simbolico, alla stella della nascita di Cristo, nota come "la stella dell'est". Le chiese medievali dovevano assolvere agli aspetti puramente liturgici quindi le istruzioni che venivano date agli architetti, in fase di progettazione, si basavano su tutta una serie di indicazioni tratti dalla simbologia liturgica della religione cristiana. La simbologia è una chiave di estrema importanza, per cui ogni cosa che l'uomo dei primi secoli del cristianesimo e del Medioevo realizzava, aveva un suo costante punto di riferimento in una memoria biblica, era poi l'architetto ad impiegare matematica, geometria, astronomia ecc., al fine di esprimere simbolicamente la funzione liturgica del culto. Il significato metaforico era notevole, infatti, ad esempio, l'altare simboleggiava la cima della croce di Cristo. L'architetto sfruttava le proprie conoscenze

---

<sup>(3)</sup> Cfr. Simbologia nella architettura religiosa Arch. F. Terzi Accademia Cosentina 23 giugno 1989 Pag. 9-10

di astronomia per concretizzare mediante osservazioni, calcoli e costruzioni geometriche la direzione di orientamento più opportuna, per verificare le specifiche simboliche richieste dai committenti. L'astronomia era solo un mezzo per esprimere le funzioni liturgiche e simboliche del monumento. Le ragioni per cui vennero adottati criteri di orientamento astronomici furono spesso dettate da esigenze mistiche più che reali. Infatti è noto che la Croce di Cristo fu eretta sul monte Calvario in modo da essere rivolta verso ovest, quindi i fedeli in adorazione devono essere rivolti ad est che per antica tradizione è la zona della luce e del bene (*pars familiaris*) in contrapposizione con la "pars hostilis" che identifica la direzione occidentale. Come ci insegna la tradizione Cristo salì in cielo ad oriente dei discepoli e pare che così facessero anche i Martiri. Sempre secondo la tradizione l'aurora è il simbolo del Sole della Giustizia che si annuncia e anche il Paradiso Terrestre veniva ritenuto, dai primi cristiani, essere genericamente ad oriente. La simbologia solare così direttamente collegata al Cristo richiedeva quindi un'attenta progettazione dei luoghi di culto e della loro disposizione rispetto alle direzioni astronomiche fondamentali. Per i cristiani la luce è simbolo della resurrezione di Cristo che da morto torna in vita sconfiggendo le tenebre. Particolare attenzione bisogna dare ad alcune date legate ad eventi significativi come il sorgere del Sole, infatti, Gesù nasce nel solstizio d'inverno, viene concepito all'equinozio di primavera e muore all'equinozio di primavera. Giovanni Battista, il Precursore, nasce al solstizio d'estate e viene concepito all'equinozio d'autunno. L'allegoria del Battista, il Precursore, che esaurisce il suo compito e cede il passo a Gesù che salirà sempre più in alto ci è confermata dal Vangelo di Giovanni Evangelista (III, 30). Egli dice: *"Io non sono il Cristo; ma sono mandato davanti a lui. Bisogna che egli cresca e che io diminuisca"*, proprio come cresce il solstizio d'inverno e diminuisce dopo il solstizio d'estate. A questo punto va ricordato che nel solstizio d'inverno il Sole comincia a salire, le giornate di luce si allungano, mentre nel solstizio d'estate il Sole inizia la sua discesa, le giornate si accorciano e la luce gradatamente diminuisce.



Fig. (1.14) Navata centrale del Duomo di Cosenza

Spostando l'attenzione all'interno, della cattedrale, si può notare che la pianta si sviluppa a croce latina, è possibile osservare, inoltre, l'asimmetria dell'abside, infatti, l'asse dell'edificio, nella direzione che parte dalla porta d'ingresso e continua verso l'abside è deviato di pochissimi gradi, particolarità che si può notare anche osservando l'arco trionfale, a sesto acuto.

Questa caratteristica può essere spiegata se si riflette su alcuni motivi:

- l'asimmetria migliora l'acustica prevenendo la formazione di echi;
- la distinzione tra le navate e l'abside sta a simboleggiare la distanza tra il luogo delle credenze e il luogo della vera conoscenza divina;
- l'asimmetria è l'affermazione di uno spirito creativo contro una eccessiva razionalità offerta dalla perfetta simmetria;
- la pianta a croce latina è simbolo del corpo umano. Di conseguenza l'abside (il capo) leggermente spostato ricorda il capo reclinato del Cristo crocifisso. Questa particolarità probabilmente è legata al voler rappresentare non la croce in legno dove Cristo è stato inchiodato ma, Cristo stesso, che morto in croce piega le gambe e il capo a sinistra.

La cattedrale è impostata su una planimetria basilicale, tutto rientra in uno schema preciso che, dalla larghezza della base, sale, per balzi successivi, fino al punto terminale. È suddivisa in tre navate longitudinali, confluenti in un profondo presbiterio, rialzato rispetto al piano dell'aula, e ritmate da due teorie di archi gravanti su pilastri quadrangolari con capitelli variamente decorati da fregi, atti a sorreggere gli archi a tutto sesto. Nella struttura appare chiaro l'uso massiccio dell'arco a tutto sesto (sesto è l'antico nome del compasso), un tipo di arco contraddistinto da

una volta a semicerchio.

#### 1.4.1 Costruzione dell'arco a tutto sesto.

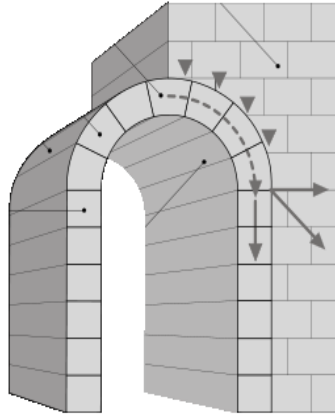


Fig. (1.15) Arco a tutto sesto

L'arco a tutto sesto è la forma di arco maggiormente usata nelle volte raccordate ai piedritti, sia a causa della semplicità di costruzione del profilo a curvatura costante, sia perchè è ritenuto che tale arco non causa spinte orizzontali all'imposta. L'arco a tutto sesto, detto anche arco a pieno centro, è esattamente il semiperimetro di una circonferenza e il raggio è uguale alla metà del diametro. È la tipologia più semplice di arco e prevede che il centro verso il quale convergono i giunti si trovi sulla linea d'imposta, cioè su quella linea che unisce i punti dove finiscono i sostegni e inizia l'arco. L'utilizzo sistematico dell'arco a tutto sesto (e dell'arco in generale) si deve ai Romani, che lo appresero dalla multiforme funzione che aveva tra gli etruschi e lo utilizzarono prevalentemente in funzione della praticità piuttosto che dell'estetica, aspetto che non si escludeva. L'arco è destinato a coprire le discontinuità di un muro, è una struttura curva, tuttavia, esso può essere costruito anche in piano o con lievissime frecce o monte. Queste particolari costruzioni sono dette piattabande, sia se sono destinate a coprire un varco, sia un intero ambiente.

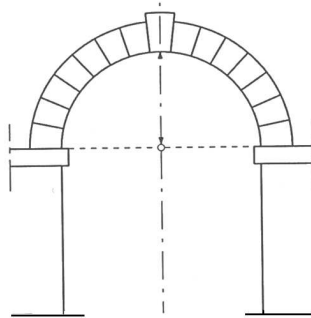
Gli elementi degli archi possono essere così riassunti:

- Conci: blocchi di pietra che formano la struttura;
- Filari: ricorsi orizzontali dei conci o dei mattoni;

- Letti: piani sui quali poggiano, gli uni sugli altri, i conci o i mattoni; i letti sono, di regola, perpendicolari all'introdosso;
- Chiave: concio più alto dell'arco, posto sull'asse di simmetria della struttura;
- Cervello o chiave di volta: concio più alto della volta;
- Spalle o piedritti: appoggi della struttura;
- Piano d'imposta: superficie superiore dei piedritti, sul quale la struttura si appoggia;
- Introdosso: superficie inferiore della struttura;
- Sesto o profilo: sezione verticale dell'introdosso;
- Linee d'imposta: staccano l'introdosso dalla superficie interna dei piedritti;
- Archi d'imposta: profili che delimitano sul fronte l'introdosso delle volte;
- Linee di chiave: nelle volte a sviluppo lineare, è il luogo geometrico descritto dai punti ove la tangente è orizzontale;
- Corda o luce: distanza tra i piedritti;
- Freccia o saetta o monta: distanza tra il piano di imposta e il punto più alto dell'introdosso;
- Estradosso: superficie superiore della struttura;
- Rinfianco: muratura destinata a contenere le spinte laterali della struttura e a riportare in piano l'estradosso;
- Speroni: strutture di alleggerimento del rinfianco;
- Fronti: superfici verticali che delimitano la struttura;
- Reni: parti della struttura comprese tra i piedritti e i tetti il cui angolo di pendio è più vicino a  $30^\circ$ ;
- Cornice d'imposta: decorazione della linea d'imposta, spesso ribassata, rispetto alla linea vera, per dare slancio al profilo;
- soprassedo: distanza tra la cornice d'imposta e il vero piano d'imposta.

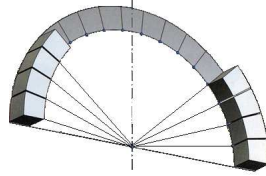
La costruzione di un arco si realizza, salvo eccezioni, con l'ausilio di una struttura provvisoria di sostegno detta *céntina*, normalmente realizzata con puntelli e tavolati di legno. La *céntina* può essere fissa o a sbalzo e permette il posizionamento dei vari conci, tra i quali sarà interposto un sottile strato di malta che serve più che da legante, come materiale per regolarizzare le facce dei conci e renderle perfettamente complanari in

modo che i carichi non subiscano deviazioni. Si chiamano *ritti* i montanti che scaricano direttamente a terra, o sulla muratura sottostante, il peso dei conci durante la costruzione.



Quando si costruisce l'arco, i conci vengono appoggiati sulla centina lavorando contemporaneamente da entrambi i lati, per evitare deformazioni, e si procede così fino alla chiave. Se la struttura è di grande luce, conviene, prima di incominciare il lavoro, caricare la centina in corrispondenza della chiave, o del cervello, sempre per evitare che si deformi prima che la costruzione sia completata. Particolare attenzione è posta al delicato momento del disarmo: la centina deve infatti essere liberata gradualmente in modo da non caricare la struttura troppo bruscamente: ciò evita, tra l'altro, i rischi di un crollo improvviso. Per ottenere questo risultato si pongono, sotto i ritti, due cunei contrapposti, che poi si fanno scorrere delicatamente l'uno sull'altro, oppure sacchi di sabbia, che poi si forano, facendone uscire lentamente il contenuto. I conci dei quali un arco è composto debbono essere in numero dispari: infatti occorre che il vertice sia occupato dalla chiave, mentre i fianchi sono costituiti da un numero variabile di parti simmetriche. La rappresentazione matematica consente oggi una facile costruzione della forma del concio. Si traccia per primo il profilo dell'intradosso. Si disegna poi l'estradosso, a una distanza che varia con la luce dell'arco e con la natura del materiale. Si distribuiscono poi, sul profilo dell'intradosso, tanti punti quanti sono i conci che si vuole progettare, più uno. Perciò, ad esempio, sedici punti danno luogo a quindici divisioni e perciò a un egual numero di conci, uno dei quali posto in chiave. Si tracciano i raggi che passano per queste divisioni in modo da isolare il profilo frontale di un concio.





Se l'opera non è costruita a secco, come avviene se, ad esempio, è fatta di una roccia tenera come il tufo, si deve tener conto dello spessore della malta, perciò si riduce il profilo, da una parte e dall'altra, di uno spessore pari alla metà di quello previsto per l'allettamento. Infine si costruisce il solido di un solo concio e lo si replica quante volte è necessario con una operazione di copia.

### 1.4.2 Struttura Architettonica

La Cattedrale di Cosenza è una struttura larga circa 21 metri nella larghezza trasversale delle tre navate ed è circa 49 metri nello sviluppo longitudinale della navata centrale e del transetto. Le misure riportate sono fornite tutte in modo approssimativo, ciò dipende dal fatto che mi sono servita esclusivamente di piante tratte da rilievi più o meno recenti. Lo scopo è quello di mettere in risalto, in grandi linee, le differenze più significative della produzione architettonica. La facciata della Chiesa rispetta una simmetria assiale; l'asse di simmetria è evidenziato in rosso nel prospetto in basso.

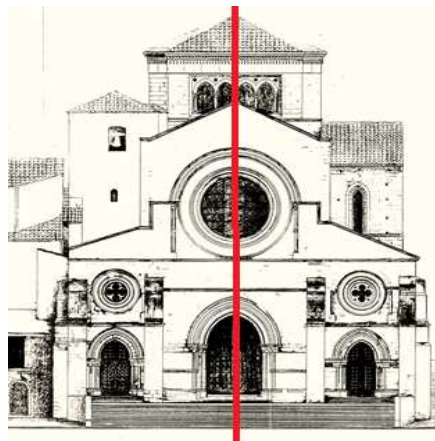


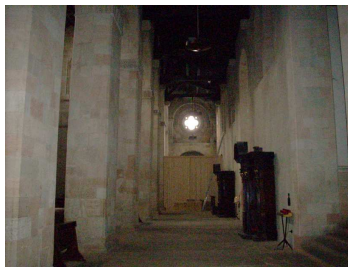
Fig. (1.16) Prospetto con asse di simmetria

Nello studio della composizione della facciata è stata rilevata la volontà di ottenere una distribuzione simmetrica ed armonica degli elementi presenti nel prospetto. I contrafforti aggettanti a sezione rettangolare sono posti a sostegno della facciata e lasciano supporre l'esistenza di un portico e di una probabile copertura voltata. Si entra in Chiesa attraversando i portali di cui il maggiore è tipico dello stile cistercense con i piedritti composti da fasci di colonnine inanellate e con i capitelli a crochets di modello Federiciano. Secondo lo stile gotico, se la parete esterna non deve più reggere il peso delle volte ma essere aperta e capace di accogliere le grandi aperture, allora il peso dovrà scaricarsi sui contrafforti, i quali liberano i muri delle navate laterali dal gravoso compito di sostegno <sup>(4)</sup>.



*Fig. (1.17) Portale e contrafforti*

L'asse di simmetria interno rappresenta un percorso dal portale all'altare. Così la chiesa diventa una specie di corridoio, l'espressione lineare della liturgia che inizia con una processione. Diventa anche un simbolo architettonico del pellegrinaggio terreno del cristiano dalla nascita (rappresentata dal portale) fino alla morte ed al paradiso (rappresentato dall'altare): Cristo come via della salvezza.



*Fig. (1.18) Navata sinistra del Duomo di Cosenza*

---

<sup>(4)</sup> Storia della Calabria. Le cattedrali. Gangemi Editore. Pag. 247-248.

La Chiesa, come già detto, presenta tre navate: è illuminata da monofore inquadrata da una profonda strombatura archiacuta. La volta a crociera ogivale, crea campate rettangolari oltre che quadrate. Otto sono le campate minori, fuse con quelle della navata principale, delimitate da pilastri quadrangolari con capitelli bassi, collegati da archi a tutto sesto. Si raggiunge così uno spazio unitario, nel quale lo slancio verticale non eccessivo è anche equilibrato dall'ampiezza della navata principale accresciuta dalla compartecipazione delle navate minori. L'idea della sapiente mano del progettista è resa evidente dall'arco trionfale, che divide la navata centrale dal presbiterio (zona riservata al clero che comprende l'altare maggiore e l'abside), oltre che dalle navate laterali, dalle cappelle, dalle nicchie e dalle varie opere d'arte. La zona presbiteriale, contraddistinta da marcati influssi dell'architettura cistercense, è delimitata da tre absidi con coperture a volta. Quella centrale, molto più ampia, accoglie un ciclo di affreschi suddiviso in tredici nicchie, di cui quella centrale ospita la raffigurazione dell'Assunta, realizzata da Domenico Morelli, firmata e datata risale al 1900, ad essa si affiancano le immagini di Santi, realizzate da Paolo Vietri. Nel restauro ultimato nel 2011, l'artista e scultore cosentino Maurizio Orrico, unisce l'ispirazione gotica degli archi a sesto acuto presenti nella fabbrica con la verosimiglianza di un morbido panneggio, simbologia cristiana della Sacra Sindone, adagiato sulla Cattedra che rappresenta il magistero del Vescovo nel triplice carattere del ruolo episcopale: insegnare, governare e consacrare.



*Fig. (1.19) Cattedra - Magistero del Vescovo*

Le navate minori sono molto più basse e strette della navata maggiore, secondo un calcolo che le fa rientrare entro le linee laterali di un

triangolo, conseguente a quello formato, in alto, dalla corda e dal vertice dell'arco trasversale alla navata maggiore, al quale, dunque, sono relazionate la larghezza e l'altezza dell'intera struttura. Sono sostenute da pilastri, nudi parallelepipedi con capitelli formati da una cornice che oltre ad avere una funzione decorativa, conferisce maggior slancio alla colonna. Decorati con motivi naturalistici e trafori, evidenziano una straordinaria capacità d'invenzione e una grandissima abilità tecnica e conoscenza delle regole geometriche che determinano la struttura dei fregi; i pilastri si affacciano sulla navata principale attraverso archi a tutto sesto. Gli archi rampanti, hanno una origine precedente al gotico ma da questo vengono precisati e codificati. Essi nascono dalla necessità di controbilanciare le spinte di una navata centrale più alta e di ricondurle verso i contrafforti delle navate laterali, infatti, innestati su contrafforti esterni, ingabbiano la costruzione disponendosi dinamicamente attorno alle navate ed agli absidi.

Nel lato sinistro del transetto si trova il celebre Monumento della regina di Francia Isabella d'Aragona, consistente nella raffigurazione ad altorilievo della Vergine col Bambino, tra Filippo III ed Isabella, entrambi in preghiera.

Il gruppo è inquadrato da un raffinato ricamo di gusto tardo-rayonnant che, ricostruito idealmente nel primo restauro, conferisce all'insieme una impostazione di squisita fattura.



Fig. (1.20) Tomba di Isabella d'Aragona

Il monumento, rinvenuto alla fine dell'ottocento, era stato occultato da uno spesso strato d'intonaco, fu ricomposto dov'è oggi esposto, anche se

la sua collocazione originaria è forse da riconoscere in una delle prima campate della navatella sud, l'unica coperta a crociera.

In realtà non si tratta di un monumento funebre, bensì commemorativo, le spoglie della regina furono, infatti, traslate in Francia dopo la sua morte, avvenuta nei pressi di Cosenza (1271) di ritorno dalla crociata indetta da Luigi IX re di Francia, a cui aveva partecipato il marito Filippo III l'Ardito. Il raffinato stile scultoreo delle figure, avvolte in panneggi che si risolvono in ampie falcature ritmiche di pieghe schiacciate, trovano il più puntuale termine di confronto con l'arte che si sviluppò nel cantiere di Reims intorno al 1250.

Le proporzioni dell'edificio sacro non sono casuali e non sono nemmeno determinate dalla ricerca di effetti spettacolari, ma derivano da una visione dell'arte come scienza, cioè come speculazione teorica, nella ricerca dei rapporti geometrici che stanno alla base del cosmo e che sono ritenuti di origine divina.

### 1.4.3 La Chiesa.

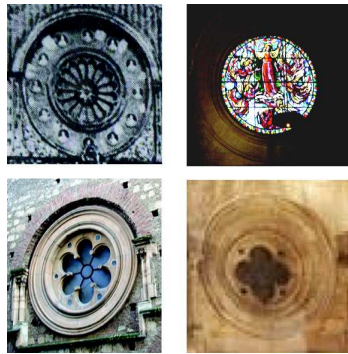
La Cattedrale di Cosenza è stata dichiarata patrimonio dell'Umanità per l'Unesco, testimone di una cultura di pace. Il monumento, è il primo in Calabria a conquistare il prestigioso riconoscimento, che conclude un percorso avviato nel 2006.



*Fig. (1.21) La Cattedrale di Cosenza*

Già durante il restauro della Chiesa della Cattedrale di Cosenza, intrapreso tra il 1886 e il 1889, furono restituiti all'originale modello gotico il transetto e il coro. Il restauro, terminato nel 1945, era durato circa sessanta anni, questo lungo periodo fa pensare alla mole grandiosa di lavoro e all'importanza di tale restauro. Bisognava abbattere le sovrastrutture che avevano seppellito un gioiello di architettura del duecento, la Cattedrale di San Pancrazio, che nell'ampiezza delle linee, nella semplicità delle forme e nel riposato slancio di elevazione raccoglieva e trasportava le anime a Dio, occorreva in poche parole rifare l'antico originario edificio, in più parti corroso dal tempo sia nel corpo che nelle strutture statiche e in quelle ornamentali. Nel 1945 la Cattedrale cessava di essere un cantiere per diventare di nuovo la degna casa del Signore e il centro della vita religiosa cosentina e diocesana. Le navate venivano liberate dalle sovrastrutture barocche e

la facciata riacquistava l'originale aspetto cistercense e fiorentino del XII secolo. La Cattedrale ritorna nella sua antica linea architettonica e pare che ciò volesse significare un ritorno alla purezza ed alla semplicità del costume dei cittadini di Cosenza. La chiesa si presenta a croce latina, cioè con il braccio longitudinale più lungo di quello trasversale. L'introduzione del transetto non solo aggiunge un secondo asse (non un asse di simmetria, quanto piuttosto organizzativo, poichè la simmetria della croce latina è sempre speculare) ma introduce anche un nuovo punto di riferimento nella pianta, l'incrocio dei due assi. In corrispondenza della facciata sull'ingresso principale, si apre un grande rosone circolare, originariamente polilobato, inquadrato dalla ghiera a tutto sesto e dalle colonnine anellate nel fusto, inquadratura che ritroviamo attorno i quadrilobi sovrastanti i portali laterali e nei rosone del transetto.



*Fig. (1.22) Rosoni*

Le riproduzioni del rosone nell'architettura religiosa sono gli "occhi" della struttura, la luce che entra illuminando le immagini sacre dichiara una origine divina, contribuendo in modo significativo all'insegnamento dei fedeli. Il rosone, in definitiva, può essere considerato come la sintesi di diversi influssi stilistici, prodotto unico ed originale di raffinatezza artistica, priva di esemplari con cui possa essere paragonato. Il rosone centrale, posto sull'asse della navata principale, all'origine era formato da sedici colonnine disposte radialmente, a partire da un nucleo centrale e raccordate da archetti, sopra i quali si disponevano dei fori contenenti i dodici Apostoli. Il rosone venne distrutto ancor prima dei bombardamenti del 1943 e non venne più ricostruito come era in origine. Oggi si presenta con una vetrata voluta da mons. Don Enea Selis e raffigurante l'ascensione di

Gesù al cielo <sup>(5)</sup>. Nella Cattedrale di Cosenza, tutto è razionalmente aderente all'alzato interno ed alle forme presenti in essa, come: gli sviluppi dei tre spazi architettonici nella zona basamentale, corrispondenti all'ampiezza interna delle navate, l'alzato dei timpani laterali e del frontone.

#### 1.4.4 La Cappella della Madonna del Pilerio.

Tra le cappelle presenti nella Cattedrale, forse, la più visitata è la cappella della Madonna del Pilerio, dove è collocata la veneratissima icona, posta sull'altare marmoreo dal 1607 nella cappella omonima, "Cappella del Pilerio", appositamente costruita all'interno della cattedrale (navata laterale a sinistra della Chiesa), risalente al XII secolo e voluta da Mons. Giovan Battista Costanzo (1591-1617), per favorire l'afflusso dei pellegrini.



Fig. (1.23) Madonna del Pilerio e Cappella

Il 10 maggio 1981 la cattedrale di Cosenza venne elevata a Santuario della Madonna del Pilerio dall'arcivescovo mons. Dino Tralozzini. Secondo la tradizione, un'antica Madonna si onorava nella chiesa Madre di Cosenza, quando nel 1577, in seguito ad una pestilenza, l'icona venne considerata miracolosa per la salvezza della città. L'icona venne riconosciuta come opera autentica del XII sec. tra il 1971 ed il 1979, grazie alla volontà di mons. Enea Selis. Il nome, con tutta probabilità, deriva dalla parola greca "pilos" che vuol dire colonna.

<sup>(5)</sup> Giacomo Tuoto La Cattedrale di Cosenza Legenda 1998 pag 35



Nell'ambito dell'iconografia cristiana esistono numerosi studi sulla "marianità", certamente l'esempio più arcaico a noi pervenuto è quello della Madonna del Pilerio. Durante gli interventi di restauro, la Di Dario intravede, in tale opera, "il più nobile e decantato formulario costantinopolitano sia a livello programmatico e teologale (la fascia che stringe il doppio addome del Bambino simbolo della sua doppia natura, il piccolo manto rosso, simbolo di regalità sovrammesso a quello azzurro consueto) che artistico" <sup>(6)</sup>. L'icona di autore ignoto, è un dipinto prototipo dell'opera di S. Luca, che rende, con chiaro formulario bizantino, l'immagine della dolcezza materna della Galaktotrophousa, ovvero della Madonna che allatta il Bambino. Napolillo, così descrive la Madonna del Pilerio: "La Vergine Madre, con occhi scuri rivolti all'umanità intera, indossa una veste marrone, che ricorda la reliquia custodita nell'altare maggiore della Cattedrale. Ha la testa circondata dall'aureola, con undici medaglioni d'oro; ne manca uno, che ha preferito la tenebra alla luce divina, che è rappresentata dal colore giallo-oro. Ai lati dell'aureola, luminoso simbolo della Vergine nel coro dei beati, c'è scritto in latino: MR. DOMINI, (la madre del Signore). Tre stelle, una sulla fronte e le altre due sulle spalle, significano che la Madre di Dio ha conservato la sua verginità prima, durante e dopo il parto. Le tre dita della mano destra del bambino, contorte all'insù, indicano l'alto mistero della Trinità" <sup>(7)</sup>. Padre P. Florenskij sembra aver inoltre individuato una precisa simbologia per ciò che riguarda i colori degli abiti indossati dalla Madonna: "La Santissima Vergine Maria viene doppiamente onorata: come Semprevergine e in rapporto a Cristo come Deipara. Quando appare come Semprevergine, come protettrice della verginità, cioè come vergine per essenza, porta un manto azzurro o celeste, invece quando appare come Deipara, cioè come Madre per essenza, il suo manto è purpureo, il colore della dignità regale e della spiritualità, oppure rosso, il colore della sofferenza e dell'amore infuocato" <sup>(8)</sup>. L'icona della Madonna, profusa d'oro negli undici dischi posti sul capo, simboleggia la

---

<sup>(6)</sup> M. Pia Di Dario Guida, *Itinerario d'arte dai Bizantini agli Svevi*, in itinerari per la Calabria, ed. l'Espresso, Roma, 1983, p. 157.

<sup>(7)</sup> V. Napolillo, *Storia e fede a Cosenza, la Madonna del Pilerio*, Edizioni Santelli, Cosenza, 2002, p. 11

<sup>(8)</sup> P. Florenskij, *La colonna e il fondamento della verità*, in G. Gharib, op. cit., p. 75.

gloria del paradiso. La veste marrone sta ad indicare la sua umanità, il blu del manto invece, indica il rapporto privilegiato di Dio verso questa creatura terrestre. Il bianco della veste che appena si intravede al capo, ai polsi e intorno al collo, esprime la purezza, in quanto la Vergine Maria è stata preservata intatta da ogni macchia di peccato originale in virtù della Grazia di Dio e del frutto che porterà in grembo, il Salvatore del genere umano. Il manto rosso, invece, indica che la Santa Vergine, poichè Madre del Salvatore, è stata ricoperta dalla grazia di Dio. <sup>(9)</sup>.

---

<sup>(9)</sup> Notizie storiche sul culto della Madonna del Pilerio, Patrona di Cosenza, aggiornate e redatte da mons. Michele Caruso, pubblicate a cura di Don Giacomo Tuoto, Parroco Rettore della Cattedrale di Cosenza, Cosenza, 1985, p.8.



## CAPITOLO 2

### IL VALORE DELLA MATEMATICA

#### 2.1 Pitagora. Numeri e Proporzioni



L'architettura si sviluppò nei secoli anche grazie ai contributi di Pitagora e dei suoi seguaci. Quello che più ci interessa, in tale contesto, è di verificare se i principi pitagorici siano stati applicati nel conformare l'architettura. Si può ritenere quale fondamentale parametro, in termini di armonia in ambito architettonico, il *numero*, nel tentativo di disporre di un criterio nell'individuare le regole della composizione architettonica. Pitagora, il grande matematico di Samo, aveva come base filosofica i *numeri*: il numero era considerato l'elemento primordiale dell'universo.

I numeri e la matematica, tuttavia, erano in uso da moltissimo tempo prima che nascesse Pitagora (490 a.C. circa), e non di rado con implicazioni più complesse di quelle del maestro di Samo e dei suoi seguaci.

Una base in apparenza molto solida quella dei numeri, infatti, se le cose sono fatte di numeri, il mondo diventa una sorta di ordine misurabile. La scoperta pitagorica che “tutte le cose che si conoscono hanno numero”, poichè “senza numero non sarebbe possibile pensare nè conoscere nulla”, fu una vera rivelazione di quel tempo. Dobbiamo a Pitagora il concetto di “Numero Puro”, avulso da qualsiasi riferimento pratico, indipendente da qualsiasi sistema di numerazione. È evidente che il numero venne inteso non solo come uno strumento per far di conto ma in senso più ampio, al punto da far pensare che la matematica poteva essere un linguaggio di natura universale, considerando che le proprietà dei numeri erano presenti nei corpi celesti, nella musica e in tante altre manifestazioni del mondo. In altre parole, il numero viene elevato a principio universale di interpretazione, man mano che si estende dall’ordine aritmetico a quello geometrico e da qui all’ordine fisico.



Fig. (2.1) Scuola di Atene con Pitagora (1511) - Raffaello Sanzio

I Pitagorici studiavano i numeri primi, le progressioni e quei rapporti e proporzioni che essi consideravano *belli*. Pitagora non si esprime palesemente sull’esistenza di un qualche cosa di irrazionale, quando poi si scoprì che la diagonale del quadrato, una cosa abbastanza elementare, non è razionale, la filosofia e la matematica incominciarono a fare i conti con l’irrazionale.

L'eredità lasciata da Pitagora fu enorme e, sicuramente, lui stesso era ben consapevole che esisteva un mondo “diversamente razionale” e che i numeri erano dotati di una propria corporeità, oltre a poter essere addizionati, moltiplicati ed elevati a potenza.

Non vi sono dubbi che sia stato Pitagora con i suoi discepoli a mescolare teoria dei numeri, filosofia della vita e misticismo in una misura forse senza eguali. Pitagora sottolineò l'importanza dell'acquisizione della conoscenza, in senso molto ampio rispetto ad ogni altra attività, infatti, egli avrebbe detto, “alla maggior parte degli uomini e delle donne non è data, nè per nascita nè coi propri sforzi, la possibilità di diventare ricchi e potenti, mentre il sapere è alla portata di chiunque”. Al centro, delle teorie pitagoriche, si pone il Numero, che è visualizzabile mediante punti i quali, a loro volta, rappresentano una serie di figure geometriche, tipico dei matematici greci che si affidavano alle dimostrazioni geometriche piuttosto che ai numeri.



Fig. (2.2) Rappresentazione geometrica dei numeri. Scuola pitagorica

La parola *geometria* deriva, molto probabilmente, dal modo in cui i geometri (aristocratici possidenti fondiari di Samo) divisero “geometricamente” le loro terre.

Pitagora aveva scoperto che mediante l'uso della geometria, era possibile ricavare i criteri di calcolo dei sistemi di accrescimento e di proporzionamento di tutto ciò che è in natura. Ci trasmette, inoltre, la tradizione pitagorica, una certa consuetudine alla rappresentazione figurata dei numeri, aiutandosi con delle pséphoi (pietruzze o sassolini), che permettono di metterne in evidenza certe proprietà e di introdurre teoremi della teoria matematica. Secondo la tradizione, Pitagora ed i suoi seguaci riconobbero per primi, una connessione fra le disposizioni di sassolini e i numeri.

Ad esempio: sistemando i sassolini in forma quadrata, ovvero, sistemando prima un sassolino, si passa poi a sistemarne altri tre, poi cinque, poi sette ecc., così per tutti i numeri dispari, si forma una disposizione quadrata.

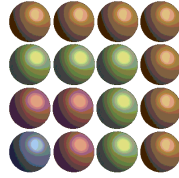


Fig. (2.3) Disposizione quadrata di sassolini

Oppure se si comincia sistemando due sassolini, e si prosegue sistemandone quattro, sei, otto ecc., così per tutti i numeri pari, si forma una disposizione rettangolare.

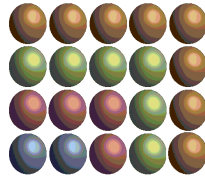


Fig. (2.4) Disposizione rettangolare di sassolini

Le figure formate dai sassolini come il quadrato e il rettangolo, suggeriscono una divisione del mondo dei numeri in due categorie: pari e dispari; un fatto che sorprese enormemente i pitagorici. Era stata stabilita una connessione tra i due principi fondamentali dell'universo, l'*illimitato* associato al pari e il *limitante* associato al dispari. A questo punto l'esperimento diventa ancora più interessante se si cerca di dividere queste figure ritagliando un triangolo.

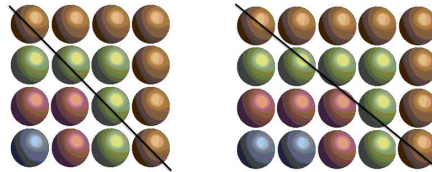


Fig. (2.5) Costruzione triangolo con sassolini

Si notò che sul segmento che forma la diagonale o ipotenusa del triangolo, i sassolini non si trovano alle stesse distanze l'uno dall'altro rispetto ai due lati, e non sono neanche contigui tra loro. Affinchè ciò accada c'è bisogno di introdurre una nuova figura che possiamo costruire con i sassolini nel seguente modo: sistemiamo un sassolino, poi due sassolini, poi tre sassolini, poi quattro sassolini in modo che ogni sassolino tocchi i sassolini

a esso vicino. Verrà fuori un triangolo con i tre lati di uguale lunghezza, ossia un triangolo equilatero. Considerando un vertice qualunque, di tale triangolo, abbiamo che la seconda riga e la prima sono in rapporto 2:1; e così la terza con la seconda sono in rapporto 3:2; la quarta con la terza sono in rapporto 4:3. La somma è  $1+2+3+4 = 10$ , numero che i pitagorici ritennero perfetto. Il triangolo equilatero considerato lo chiamarono *tetraktys* e conclusero che in esso c'era qualcosa di particolare, di misterioso.

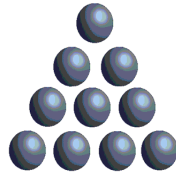


Fig. (2.6) Costruzione triangolo equilatero con sassolini

Nel complesso sistema di rappresentazione dei numeri di Pitagora, ai numeri viene dato un valore qualitativo e non quantitativo. Ai numeri 1, 2, 3, 4 e ai rapporti tra questi vengono riconosciuti i principi organizzativi primordiali dell'universo.

- il numero *uno*, che genera tutti gli altri numeri, è il simbolo della ragione; è il numero che rappresenta Dio, la monade, l'unità divina;
- il numero *due* rappresenta l'opinione. Il due si ottiene dalla divisione della monade in un'altra se stessa e nella successiva addizione. Il 2 è Dio che ha dato origine alla creazione prendendo coscienza di sè;
- il numero *tre* è il simbolo dell'armonia e della perfezione. Il numero tre o numero perfetto si ottiene dalla somma dei primi due. Il tre individua i vertici di un triangolo, rappresenta il primo spazio chiuso cioè il mondo delle idee, è il primo numero dispari o maschile;
- il numero *quattro*, nell'ambito della simbologia medievale rappresenta gli elementi essenziali della realtà materiale, ma anche la stabilità e l'equilibrio. Nella cosmologia, infatti, quattro sono gli elementi fondamentali: acqua, fuoco, terra e aria, e sono anche quattro i punti cardinali e le stagioni. Nella religione cristiana quattro sono i Vangeli e le virtù cardinali: prudenza, fortezza, temperanza e giustizia. Il quattro genera i numeri quadrati, rappresenta il primo volume chiuso, il creato;



- il numero *cinque* rappresenta l'unione dell'uomo con la donna. Il cinque genera i numeri pentagonali (cinque, dodici, ventitre, ecc.), infatti, esso raffigura un pentagono regolare (poligono convesso che ha cinque lati uguali e gli angoli interni uguali tra loro). Il pentagono è una figura geometrica che attraverso la sua costruzione ci porta all'individuazione della sezione aurea. Questo principio, non solo ipotizzato ma anche applicato nella pratica costruttiva, fu definitivamente sistematizzato soltanto intorno al 300 a.C. da Euclide di Alessandria, che lo richiamò nel libro VI degli Elementi dove lo definì come "*media ed extrema ragione*". Euclide introduce questo concetto quando risolve il problema della divisione di un segmento in due parti in maniera che la maggiore di esse risultasse medio-proporzionale tra l'intero segmento e la parte minore rimanente. Ritornando al numero cinque, si crede che la stella a cinque punte, formata tracciando le cinque diagonali della faccia pentagonale di un dodecaedro regolare, fosse proprio il simbolo della scuola pitagorica.

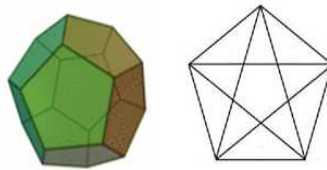


Fig. (2.7) Dodecaedro e Pentagono regolare

- il numero *sei* rappresenta l'imperfezione, è un numero triangolare perché si può rappresentare come somma di triangoli; tre volte sei indica la nullità;
- il numero *sette* e i suoi multipli indicano totalità; la metà di sette, cioè tre e mezzo, indica un tempo limitato;
- il numero *otto* rappresenta l'unione tra la "Gerusalemme celeste" e quella "terrestre", il passaggio dalla terra al cielo. Il numero otto è la forma che più di tutte è adatta a canalizzare energie nascoste. Il numero otto, essendo formato da due cerchi intercomunicanti, rappresenta l'infinito e designa il principio di un nuovo ordine di cose. È un particolarissimo numero che cerca di avvicinarsi sempre più al problema della quadratura del cerchio.

- il numero *nove* rappresenta un numero che si riproduce continuamente, simboleggia pertanto la materia che si scompone e si ricompone continuamente. È un numero dispari, esso è dinamico e attivo nella sua natura e nei suoi effetti. Indica il periodo della gestazione, nove mesi per la nascita di una nuova vita. Il nove seguendo l'otto, che indica uno stato limite, è il superamento nella creazione. Il nove ha come proprietà la permanenza, infatti, esso torna sempre al suo stato antecedente e non si trasforma mai veramente, conservando uno stato fisso e immutabile. Questa caratteristica lo accomuna al numero uno, diventando una sua manifestazione, nella sua funzione di unicità;
- il numero *dieci* rappresenta la pienezza, raffigura un triangolo con i lati suddivisi in quattro punti. Dieci al quadrato è cento, il numero di Dio. Il dieci è la tetractys che letteralmente significa “gruppo di quattro”, simbolo dell'universo in quanto è la somma di uno, due, tre e quattro ( $1+2+3+4=10$ ), che sono i numeri che generano le figure geometriche, infatti:
  - 1 rappresenta il punto;
  - 2 rappresenta la linea;
  - 3 rappresenta la superficie;
  - 4 rappresenta il solido.

La tetractys rappresenta quindi la successione delle tre dimensioni che caratterizzano l'universo fisico.

- il numero 12 rappresenta le tribù del popolo ebraico.

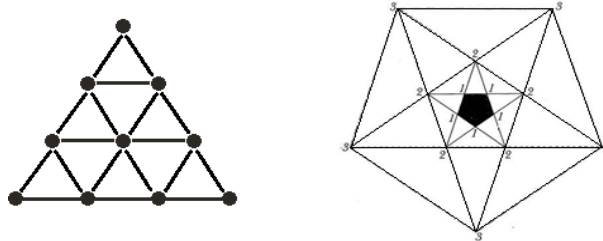


Fig. (2.8) tetractys-Pentagono pitagorico

Da notare che i Pitagorici non conoscevano lo zero, infatti, con i sassolini è impossibile rappresentarlo. Mediante il calcolo con i sassolini i Pitagorici

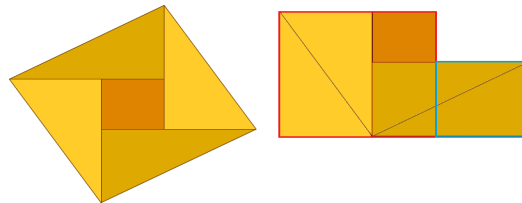
dimostrano visivamente alcune proprietà relative a queste classi di numeri: per esempio: pari più pari restituisce pari, dispari più dispari restituisce pari e così via. È la conoscenza di questo complesso universo di relazioni tra numeri e cose che costituiva per i Pitagorici il vertice dell'apprendimento. Proclo attribuisce a Pitagora la costruzione dei poliedri regolari, anche se la costruzione del cubo, del tetraedro e dell'ottaedro era probabilmente già nota agli egiziani. Pitagora giunse verosimilmente alla costruzione degli altri due poliedri regolari, il dodecaedro, costituito da 12 facce, a forma di pentagono regolare, e l'icosaedro, costituito da 20 facce, a forma di triangolo equilatero, generalizzando la costruzione dei poliedri già noti. Ma non abbiamo notizie sicure che attestino quanto Proclo afferma, anzi secondo il libro XIII degli Elementi di Euclide, i pitagorici conoscevano solo tre poliedri regolari: il tetraedro, il cubo e il dodecaedro.

## 2.2 Pitagora. Armonia Musicale

Nella Grecia classica la ricerca della proporzione riveste un ruolo di primo piano in riferimento alla matematica ed alla geometria. Si deve a Pitagora oltre all'interesse per i numeri, la scoperta del rapporto numerico che governa l'altezza dei suoni. Tra i numeri esistono rapporti e tra i rapporti è possibile rintracciare una proporzione, ossia uguaglianze di rapporti. L'architettura in quanto arte della ripartizione spaziale, attraverso la lettura dei rapporti pieni/vuoti, costruisce l'assetto di un sistema complesso, apparentemente basato su ricorrenze numeriche che sfuggono ad una esatta misurazione e che costituiscono, dal punto di vista visivo, la sintesi più corretta di un manufatto.

Archita da Taranto (428 a.C.), vissuto dopo Socrate, generale e stratega mai sconfitto, governa Taranto dove incrementò settori come l'agricoltura, l'economia, la cultura, l'arte ecc... Appartenente alla scuola pitagorica e aderente al pensiero pitagorico, sembra essersi dedicato allo studio dei rapporti armonici. Egli approvò leggi per una equa distribuzione delle ricchezze, tenendo conto per fare ciò dei principi dell'armonia, dettati dal suo maestro Filolao. Egli fu il primo a fornire una soluzione al problema di Delo, ossia: solo costruendo un altare, per Apollo, di forma cubica, dal volume doppio rispetto a quello esistente, gli abitanti di Delo si sareb-

bero liberati dalla peste. Il problema consisteva nel costruire un cubo di lato uguale a quello del cubo iniziale, ampliato della radice cubica di due. Archita si trovò ad affrontare un problema che coinvolgeva un numero irrazionale e forse più irrazionale della diagonale del quadrato, infatti, non si può risolvere il problema utilizzando solo riga e compasso. Anche questo fatto induce a pensare che i Pitagorici erano ben consapevoli dell'esistenza dell'irrazionale. Gli interessi di Pitagora e dei suoi discepoli per la geometria li condussero a ricercare proporzioni semplici tra elementi di figure piane come triangoli e quadrati, questo fu la fonte del grande successo di Pitagora.



I pitagorici stabilirono tre tipi principali di proporzione:

- la proporzione aritmetica  $c - b = b - a$ , dove il termine medio supera il primo di una quantità pari a quella da cui è esso stesso superato dall'ultimo;
- la proporzione geometrica  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ , dove il rapporto tra il primo termine e il termine medio è equivalente a quello tra il medio e l'ultimo;
- la proporzione armonica  $\frac{(b-a)}{a} = \frac{(c-b)}{c}$ , dove il termine medio supera il primo di una frazione di questo pari alla frazione dell'ultimo da cui è esso stesso superato. A queste tre proporzioni corrispondono, rispettivamente, la media aritmetica  $b = \frac{(a+c)}{2}$ , la media geometrica  $b = \sqrt{ac}$ , e la media armonica  $b = \frac{2ac}{(a+c)}$ .

Numero e proporzione dominano non solo su scala cosmica, ma anche all'interno del mondo umano, essi sono per i Pitagorici lo strumento fondamentale per far cessare la discordia tra gli uomini e instaurare l'armonia nei loro rapporti economici e politici, attribuendo a ciascuno, secondo la proporzione geometrica, ciò che gli è dovuto in rapporto al suo valore e non a tutti lo stesso. Quest'interpretazione trova delle incoraggianti conferme nello studio della musica. Una delle più importanti teorie elaborata da

Pitagora e dai suoi seguaci si può considerare quella relativa all'armonia musicale basata sulla seguente osservazione: le note prodotte da corde vibranti di lunghezze determinate sono in armonia.

Al tempo di Pitagora, accordare strumenti a corde era cosa risaputa da secoli dai musicisti, consapevoli che a volte uno strumento a corde come la *lira* produceva suoni gradevoli, ossia, le combinazioni di intervalli in melodie e scale erano gradevoli, ma non sempre. Pitagora avrebbe trovato che le note che erano in armonia con la nota fondamentale erano quelle prodotte dividendo la corda in parti uguali. Così si produceva una nota più alta di un'ottava rispetto alla corda non premuta. Se si premeva la corda in modo da dividerla in tre parti uguali, la corda suonava una nota di una quinta sopra l'ottava; se la si divideva in quattro parti uguali suonava una nota di un quarto sopra l'ottava.

Pitagora, probabilmente suonava la lira a sette corde, sperimentava sulla lunghezza delle corde sonore, inversamente proporzionale alla frequenza delle loro vibrazioni, e quindi all'altezza dei suoni prodotti. Egli ha calcolato i rapporti proporzionali esistenti tra i differenti toni, e scoprì che i principali accordi consonanti (un intervallo tra due note si dice consonante se, suonando le due note simultaneamente, si ottiene un effetto di gradevolezza; si dice invece dissonante se produce un senso di instabilità e di tensione.) erano esprimibili dai rapporti di piccoli numeri interi.

I suoni più bassi e più alti delle corde, a intervalli fissi, erano accordati in modo che fossero separati da un'ottava. Facendo suonare ad esempio su una lira le quattro corde *do fa sol do*, la lunghezza della prima corda era, rispetto alle altre tre corde, nei rapporti di  $\frac{4}{3}$  (quarta),  $\frac{3}{2}$  (quinta), e  $\frac{2}{1}$  (ottava). Grazie alla sintonia questi accordi risultavano particolarmente armonici e consonanti, e il loro ascolto suscitava piacevoli sensazioni.

Considerando i due toni che definivano l'intervallo di ottava (*do* grave e *do* acuto) come termini estremi  $a$  e  $c$  di una proporzione, risultava che, essendo essi in rapporto di  $\frac{1}{2}$ , la loro media aritmetica era  $b = \frac{(2+1)}{2} = \frac{3}{2}$  mentre la loro media armonica era  $b = \frac{2(2 \cdot 1)}{(2+1)} = \frac{4}{3}$ . L'intervallo di quinta era la media aritmetica tra i due toni dell'ottava, così come quello di quarta ne era la media armonica. La proporzione geometrica, correlava le due medie, dato che  $2 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 1$ .

Il concetto di proporzione fu uno dei punti principali intorno a cui si orientò

l'indagine estetica e filosofica della civiltà greca, nel tentativo di risolvere, in un'interpretazione mentale unitaria, il disordine, per definire i modelli ideali ai quali attenersi nell'organizzazione della vita sociale, politica e religiosa. L'Armonia, che era della stessa natura in ogni genere di arte, si poteva ottenere operando, oltre che sull'altezza dei suoni, su qualunque altro tipo di grandezza, come durate, lunghezze, superfici o volumi. Così unire nella proporzione le superfici e i volumi architettonici, era "analogo" alla creazione dell'armonia musicale, che i pitagorici prediligevano come esempio e come modello. Gli edifici religiosi, devono rifarsi alle proporzioni. L'aspetto importante di tutto questo discorso è che a queste proporzioni, di natura divina, furono attribuiti non solo valori estetici ma anche strutturali. L'applicazione delle "proporzioni perfette", determinate con rigorosi mezzi geometrici, diviene una necessità tecnica ed un'esigenza estetica, dovendo l'edificio avere i requisiti sia della stabilità che della bellezza <sup>(10)</sup>. Questo misticismo musicale, accentuato da Sant'Agostino, esercitò una forte influenza su alcuni ordini religiosi come quello cistercense, tanto è vero che, San Bernardo da Chiaravalle (1090-1153) ne fece tesoro. Le sue idee artistiche ebbero un ruolo importante sull'architettura cistercense, infatti, in molte chiese dell'ordine cistercense sono stati rilevati i rapporti dell'armonia musicale. Ritorniamo ai pitagorici, la musica fu intesa da essi come quella scienza delle proporzioni e dell'armonia, infatti, molto probabilmente, risale a Pitagora l'invenzione del monocordo, uno strumento usato per studiare i rapporti fra musica e matematica.



Fig. (2.9) Monocordo Pitagorico

---

<sup>(10)</sup> M. Curti, op. cit., p. 56.

Il monocordo era dotato di un cuneo mobile su una scala numerata, pizzicando contemporaneamente due porzioni di corda si potevano ottenere accordi o dissonanze. Ad esempio quando un tratto di corda è il doppio dell'altro si ottiene un'ottava, quando è a due terzi si ottiene un rapporto di quinta e quando lo è sui tre quarti la risonanza è di quarta.

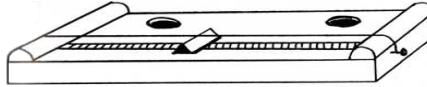


Fig. (2.10) Monocordo Pitagorico

Pitagora ed i suoi seguaci proposero una scala musicale (successione di note) composta da sette note costruita attraverso la progressione di intervalli di quinta.

La costruzione si ottiene partendo dai rapporti numerici corrispondenti agli intervalli seguenti:

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}$$

Una semplice procedura consente di trovare gli altri rapporti numerici, compresi tra 1 e 2, corrispondenti alle note musicali, ossia:

- I rapporti numerici noti si prendono uno alla volta e si moltiplicano e dividono per  $\frac{3}{2}$ , ossia si abbassa la nota considerata per quinte;
- Se il risultato è maggiore di 2, si divide per 2, se, invece, è minore di 1 si moltiplica per 2 ottenendo così solo note all'interno di una unica ottava o diapason (intervallo tra una nota musicale ed un'altra, con lo stesso nome, la cui frequenza è doppia.).

Per esempio, se si considera il LA centrale con una frequenza di 440 Hz, il LA posto un'ottava sopra avrà una frequenza di 880 Hz, mentre quello un'ottava sotto avrà una frequenza di 220 Hz. Il rapporto tra le frequenze di due note separate da un'ottava è perciò di 2:1.

| DO | RE            | MI | FA | SOL           | LA            | SI | DO | RE            |
|----|---------------|----|----|---------------|---------------|----|----|---------------|
| -  | $\frac{1}{1}$ | -  | -  | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | -  | -  | $\frac{2}{1}$ |

Effettuando le varie moltiplicazioni e divisioni e considerando soltanto i risultati non noti si ha:

$$\frac{4}{3} : \frac{3}{2} = \frac{8}{9} < 1$$

per cui moltiplicando per  $2 = \frac{16}{9}$  e ancora

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2$$

per cui dividendo per  $2 = \frac{9}{8}$ .

Dunque, i rapporti numerici compresi tra 1 e 2 corrispondenti alle note musicali sono:

$$\frac{1}{1}, \frac{9}{8}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{16}{9}, \frac{2}{1}$$

Le prime cinque note formano una scala *pentatonica*.

| DO | RE            | MI            | FA | SOL           | LA            | SI | DO             | RE            |
|----|---------------|---------------|----|---------------|---------------|----|----------------|---------------|
| -  | $\frac{1}{1}$ | $\frac{9}{8}$ | -  | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | -  | $\frac{16}{9}$ | $\frac{2}{1}$ |

Applicando la stessa procedura ai due rapporti numerici ottenuti si trovano altre due note, ovvero:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16};$$

$$\frac{16}{9} : \frac{3}{2} = \frac{32}{27}$$

| DO | RE            | MI            | FA              | SOL           | LA            | SI              | DO             | RE            |
|----|---------------|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|----------------|---------------|
| -  | $\frac{1}{1}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{32}{27}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{2}{1}$ |

In tal modo si ottiene una scala *diatonica* ovvero con sette note. Molti sono i modi per costruire scale diverse, dipende dalla nota di partenza e non solo. Cosa succede, se si continua a moltiplicare la successione delle frequenze per  $\frac{3}{2}$ ? Ad un certo punto si ritorna sulle stesse note come se si stesse percorrendo un circolo, oppure, questo procedimento produce sempre nuove note? Evidentemente il cosiddetto circolo delle quinte, nella scala pitagorica non si chiude. Esso in realtà è una elicoide (in geometria superficie invariante per tutti gli avvitementi rispetto a un asse, con passo fissato, ovvero per tutti i movimenti rigidi composti da una traslazione lungo l'asse e una rotazione intorno all'asse aventi rapporto fissato) delle quinte.



La scala Pitagorica, perfetta da un punto di vista matematico, ma non musicale, si basa su una sequenza ad intervalli di quinta  $\frac{3}{2}$  e potenzialmente il meccanismo generativo illustrato è in grado di dividere in un numero infinito di parti gli intervalli, rendendo gli intervalli tra due note sempre più piccoli. La teoria musicale dei pitagorici poneva a fondamento dei vari modi il tetracordo (quattro corde). Spesso i tetracordi erano anche omologhi, cioè con la stessa successione di toni e semitoni. Ad esempio il modo la cui scala inizia dal Do era generato dai due tetracordi Do-Si-La-Sol e Fa-Mi-Re-Do in cui la successione tra toni (T) e semitoni (S) era del tipo S-T-T-T. Tramite salti ascendenti e discendenti dei soli intervalli analizzati dal matematico di Samo (quarta, quinta, ottava) si genera la scala diatonica pitagorica che è del tutto soddisfacente nell'intonazione di quarte, quinte e ottave, mentre presenta qualche problema nel caso degli altri intervalli. Se infatti, partendo da una qualsiasi nota, si sale di 12 quinte, si dovrebbe ritrovare la stessa nota 7 ottave più in alto; ma se si fa lo stesso calcolo salendo di 7 ottave i due risultati non coincidono, perchè  $(\frac{3}{2})^{12} = 129,7$  mentre  $2^7 = 128$ . Tale divergenza crea degli scompensi d'intonazione molto percepibili. Il pitagorico Filolao da Crotone (V secolo a.C.), filosofo della scuola pitagorica, celebre per i suoi studi sulla conoscenza armonica. ma ricordato anche per aver venduto a Platone i famosi libri di Pitagora, nell'affrontare il problema di relazionare coerentemente l'universo e i numeri in modo conciso e definitivo si esprime così : "Il cosmo è composto armonicamente di elementi illimitati e di elementi limitanti, sia nel suo insieme, sia nelle sue opere". Filolao fu il primo a precisare i rapporti numerici corrispondenti agli intervalli fra le quattro corde della lira, le cui lunghezze sono pari a sei, otto, nove e dodici unità. Filolao spiega il suo pensiero, attraverso lo studio dei suoni, riflettendo sull'intera scala dei suoni, illimitata negli acuti e nei bassi e con molteplici toni intermedi che usualmente non si avvertono, questo è il principio indefinito dei suoni.

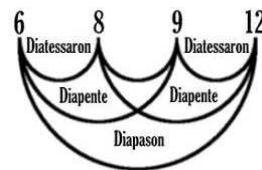


Fig. (2.11) Il tetracordo di Filolao

I rapporti armonici si basano sugli accordi:

- di ottava o diapason (strumento per generare una nota standard) pari a  $6:12=1:2$ ;
- di quinta o diapente pari a  $6:9=8:12=2:3$ ;
- di quarta o diatessaron (dal greco dia tessonon “secondo quattro”) pari a  $6:8=9:12=3:4$ .

A Filolao sono attribuiti anche esperimenti con strumenti a fiato, e le sue esperienze lo portarono a dedurre che l’ottava era il prodotto della quinta per la quarta:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

mentre il loro rapporto dava il tono

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$$



Fig. (2.12) Pitagora e Filolao

### 2.3 Da Pitagora a Platone



Platone aveva intuito che l'architettura e la musica, tra tutte le arti, si accrescono come la matematica che progredisce su se stessa diacronicamente ed è sempre corretta. Dopo la morte del suo maestro Socrate, Platone incomincia a viaggiare e proprio in uno dei suoi viaggi incontra Archita il quale gli salvò la vita, perchè accusato di aver cercato di difendere un consigliere del tiranno di Siracusa. Anche se non si può considerare un matematico professionista, Platone è stato determinante nello sviluppo della matematica, assegnandogli un ruolo chiave nell'interpretazione della natura. Sulla scia dei pitagorici, Platone (V sec. a.C.) nel *Timeo*, spiega che l'ordine e l'armonia sono interamente contenuti in alcuni numeri.



Fig. (2.13) Scuola di Atene - Raffaello Sanzio <sup>(11)</sup>

<sup>(11)</sup> Al centro Platone e Aristotele. Pitagora (a sinistra) ed Euclide (a destra) sono raffigurati il primo intento a dimostrare un teorema, il secondo proiettato sulle forme geometriche

Platone attribuì un ruolo fondamentale alla geometria e alla matematica e se ne servì per descrivere la sua interpretazione della costituzione dell'universo, basata soprattutto sul concetto di proporzione quale sinonimo di bellezza, perfezione e armonia. Egli interpretando concetti espressi soprattutto dai pitagorici, offre una visione del cosmo e dell'ordine che regna in esso, intrecciando concetti matematici con quelli etici. Secondo Platone l'armonia del mondo si manifesta nella serie dei sette numeri interi, espressi nelle due progressioni geometriche:

1,2,4,8

1,3,9,27

I rapporti tra questi numeri racchiudono tutte le armonie musicali; un'ottava nel collegamento verticale ed una quinta nel collegamento orizzontale. La perfezione dell'universo viene espressa tramite legami proporzionali fra i quattro elementi che costituiscono la materia dell'universo: terra, aria, acqua e fuoco, i quali, in proporzioni diverse, "secondo rapporti numerici armonizzati matematicamente", compongono tutte le forme visibili.

L'universo si configura attraverso una forma geometrica che al pari della proporzione è sinonimo di perfezione; questa forma è la sfera che è la figura che abbraccia tutte quante le misure. Ecco perchè l'universo è anche sferico, equidistante in ogni punto dal centro agli estremi, il suo creatore lo arrotonda come un cerchio, "la figura più perfetta di tutte e più simile a se stessa, si tratta di un corpo liscio ed omogeneo e in ogni punto equidistante dal centro, totale e perfetto, composto di corpi perfetti" <sup>(12)</sup>. Secondo i testi dei filosofi e dei teologi: *il cerchio può simbolizzare la divinità considerata non soltanto nella sua immutabilità ma anche nella sua bontà diffusa come origine, sussistenza e consumazione di tutte le cose; secondo la tradizione cristiana, come l'alfa e l'omega* (CHAS, 29). Platone, si serve di altre forme geometriche, i cosiddetti solidi platonici, per spiegare la struttura della materia formata da particelle infinitesimali, non visibili a occhio nudo. Egli, innanzitutto, spiega che ogni corpo è limitato da superfici piane le quali sono, a loro volta, costituite da triangoli. Il triangolo, è la figura geometrica dalla quale hanno origine tutte le altre, in particolare, da esso hanno origine i solidi costituenti i quattro elementi originari. Il triangolo ritenuto più "bello" da Platone, è quello equilatero

---

<sup>(12)</sup> Cfr. Platone, Timeo, 34b, citato in M. Curti, op.cit., p. 16.

dal quale sono generati i quattro poliedri regolari, a ciascuno dei quali è associato uno dei quattro elementi costituenti l'universo:

- il tetraedro al fuoco;
- il cubo alla terra;
- l'ottaedro all'aria;
- l'icosaedro all'acqua;

a questi se ne aggiunge un quinto il dodecaedro quale simbolo dell'universo. Si tratta di solidi inscrittibili in una sfera e, tutti quanti, contengono al loro interno una stella tetraedrica. Erano considerati delle "forme privilegiate della spazialità, ossia le più belle figure dello spazio circoscrivibile a una sfera".



*Fig. (2.14) I solidi platonici*

## 2.4 Da Pitagora ad Euclide



La tradizione ci dipinge Euclide come un “platonico”, infatti, l’opera di Platone influenzò Euclide e le sue opere. Una delle testimonianze più importanti su Euclide è forse quella di Proclo, vissuto nel V secolo dopo Cristo che descrive Euclide come il più giovane dei discepoli di Platone. Verso la fine del IV secolo a.C., si ebbe in Grecia, ad opera di Euclide e dei suoi *Elementi*, il periodo più significativo ed esaltante del processo di razionalizzazione della geometria, iniziato circa tre secoli prima con Talete, sulle orme del primo grande maestro della matematica greca si era poi incamminato Pitagora. La grande opera di Euclide è stata per lungo tempo considerata un modello di perfezione e i suoi “Elementi”, per molti secoli, hanno costituito, il libro più letto, analizzato e sviscerato. Ricordando il significato della parola Elementi, si potrebbe dire che la geometria elementare si occupa di punti, di rette, di piani, e delle più semplici figure che si possono dedurre da un numero finito di tali enti; anche se così facendo risulterebbero assai incerti i limiti e specialmente gli indirizzi secondo i quali vanno considerati detti enti. Il disegno di Euclide fu di “dare i principi della geometria, e per farlo con metodo comincia dalle definizioni, e dalle spiegazioni dei termini i più ordinari” <sup>(13)</sup>.

Euclide, spiega che la geometria non si basa su regole astruse o calcoli difficili, ma insegna soprattutto a comunicare e a collegare le proprie conoscenze con ciò che si osserva nella vita di tutti i giorni, guardando un edificio o semplicemente osservando le varie manifestazioni della natura

---

<sup>(13)</sup> Cfr. Gli Elementi di Euclide, P. Dechales della compagnia di Gesù riveduti, corretti ed accresciuti dall’Ozanam dell’Accademia Reale delle Scienze. Tradotti dal francese. Terza Edizione. Bergamo 1785. Per Francesco Locatelli. Pag.1-libro1

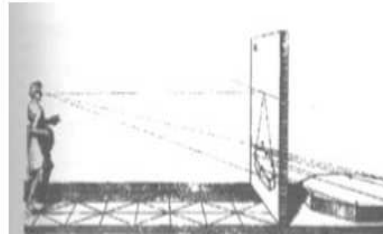
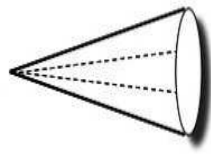
e del mondo in cui viviamo. I risultati provati da Euclide sono stati di notevole importanza sia nella tecnica che nelle idee di studiosi e artisti del periodo successivo al 300 a.C.: si notò, infatti, la presenza di alcuni accorgimenti tecnici nella struttura degli edifici greci. Ricordato soprattutto per la sua grande opera "Elementi", Euclide non fu da meno nelle altre opere forse meno conosciute.

È doveroso ricordare in tale contesto *l'Ottica*, un'opera che contiene le prime proposizioni dell'ottica geometrica, in cui l'autore riprende il pensiero di Pitagora e Platone. Il primo perchè sosteneva che: l'occhio invia raggi visuali, pensati come rette, a esplorare l'ambiente esterno; il secondo perchè riteneva che: il fenomeno della visione è conseguenza dei raggi luminosi emessi dall'occhio. L'opera di Euclide, descrive le proprietà geometriche che derivano dalla propagazione rettilinea della luce, dei limiti del potere visivo dell'occhio e della visione degli oggetti in movimento. Infatti, è giusto poter pensare che, le basi della geometria proiettiva fossero note ad Euclide, anche se risalgono al settecento sia la scoperta della natura della luce (Newton), sia quella dell'ottica dell'occhio (attribuita a Keplero). Tuttavia, il problema conoscitivo dello spazio comincia a raggiungere la sua maturità scientifica solo nel novecento e gli sviluppi più significativi si avranno appena a partire dagli anni cinquanta. Euclide, stabilisce che alla base delle regole geometriche della visione vi è l'ottica, in base alla correlazione che è possibile istituire tra retta e raggio visivo.

Euclide definisce il modello visivo basato su tre elementi fondamentali:

- l'occhio che vede;
- l'oggetto visibile;
- la luce che illumina le cose;

che paragonate alle successive formulazioni relative al modello geometrico della prospettiva sono: il centro di vista, l'oggetto ed i raggi proiettanti. Euclide in tal modo introduce il concetto di cono visivo, definendolo come la figura compresa dai raggi visivi "avente il vertice nell'occhio e la base al margine dell'oggetto visto", formulando, allo stesso tempo, una teoria della rappresentazione dove, i raggi visuali vengono immaginati come uscenti dall'occhio verso l'oggetto.



L'opera di Euclide unisce l'interesse per l'applicazione pratica al rigore del ragionamento matematico indispensabile per la rappresentazione della realtà.



## 2.5 Da Pitagora a Sant'Agostino



Le teorie formulate da Pitagora, Platone ed Euclide furono fondamentali per l'architettura nel Medioevo e nel Rinascimento in quanto rappresentarono il punto di partenza per molte correnti filosofiche che si svilupparono nei due periodi. La legge della formazione delle cose corrisponde a quella della formazione dei numeri, che con il loro ritmo e la loro struttura ne definiscono la forma, e dunque l'essenza profonda. Sant'Agostino, il Vescovo di Ippona (354-430 d.C.), detto anche Doctor Gratiae (*“Dottore della Grazia”*), applicò il misticismo numerico pitagorico e neoplatonico all'interpretazione dell'universo cristiano <sup>(14)</sup>.

La sua teoria estetica fu fondamentale per la cultura medievale la quale subì fortemente l'influenza dei concetti relativi all'Armonia Musicale da lui formulati nel trattato *De Musica*.

Sant'Agostino scrisse: *“I numeri sono il linguaggio universale offerto dalle divinità agli umani come riconferma della verità”*. Analogamente a Pitagora anche Sant'Agostino credeva che tutto avesse una relazione matematica e spettava alla mente ricercare e investigare i segreti di queste relazioni o farsele rivelare da una forza divina. Egli vede nella musica la forma di arte più alta, in quanto, si basa sul numero ed è solo attraverso il numero che si può ottenere la bellezza. Secondo Agostino, infatti, la bellezza e la proporzione sono insite l'una nell'altra; nel trattato *De Ordine* scrive: *“la ragione: avvertii che per lei non aveva valore se non l'armonia e nell'armonia le figure e nelle figure le misure e nelle misure i numeri”*. Riflette per capire se quella linea o quel cerchio o qualsiasi altra forma o figura sensibile è simile a quella che è oggetto dell'intelligenza. Egli constatò che i

---

<sup>(14)</sup> O. von Simson, *La cattedrale gotica. Il concetto medievale di ordine*, Bologna 2008, p. 36.

primi sono “elementi” molto più imperfetti e che non si può assolutamente paragonare l’oggetto visibile con l’oggetto dell’intuizione della mente <sup>(15)</sup>.

Le sue teorie estetiche riguardano tutte le arti figurative e in particolar modo l’architettura che viene considerata dal Santo quasi alla pari della musica dato che anch’essa è esprimibile attraverso il numero; un edificio, pertanto, è bello alla vista se segue la *ragione* è cioè un criterio simmetrico e proporzionale di collocare i singoli elementi che la costituiscono <sup>(16)</sup>.

Di notevole importanza, per l’architettura, in accordo con quanto Platone affermava nel *Timeo*, ossia che l’anima del mondo segue nella sua divisione i rapporti dell’armonia musicale pitagorica, è il concetto espresso da Sant’Agostino che l’universo è creato in misura, numero e peso, ed accosta la creazione del mondo ad una sinfonia musicale. Ma le affinità tra musica e architettura portano a vedere l’universo come creazione architettonica di Dio, l’architetto dell’universo il quale crea secondo le proporzioni dell’Armonia Musicale e dei perfetti rapporti platonici. Queste proporzioni non hanno solo una finalità estetica ma anche uno scopo tecnico, mirato alla solidità di un’opera.

Il mondo è composto con materiali da costruzione le cui quantità sono determinate seguendo le proporzioni perfette dei quadrati e dei cubi; la proporzione geometrica, fra questi elementi, è quel legame che garantisce al mondo di non “dissolversi”, di essere solido e stabile.

## 2.6 Dal Medioevo al Rinascimento

Gli artisti rinascimentali aderirono fermamente al postulato pitagorico “tutto è numero”; si ispirarono a Platone e furono sostenuti da teologi come Sant’Agostino. Convinti della struttura matematica e armonica dell’universo e di ogni creatura <sup>(17)</sup>, nella “convinzione che l’architettura sia scienza, e che ciascuna parte di un edificio, all’interno come all’esterno, debba integrarsi in un unico e identico sistema di rapporti”. Quest’ultima asserzione può essere definita come l’assioma fondamentale degli architetti

---

<sup>(15)</sup> Agostino, *De Ordine*, II, 15, 12, citato in M. Curti, op. cit., p. 53.

<sup>(16)</sup> M. Curti, op. cit., p. 56.

<sup>(17)</sup> R. Wittkover, op. cit., p. 29.

rinascimentali <sup>(18)</sup>. È interessante notare come l'arte dei padri delle teorie matematiche, filosofiche e architettoniche, si sia basata per più di un millennio sulle stesse fondamenta teoriche ma, le diverse interpretazioni dei testi e il differente peso attribuito ad un aspetto più che ad un altro, ha portato ad utilizzare strumenti progettuali diversi.

Analogamente a quanto avviene nella musica, anche la composizione architettonica si avvale delle proporzioni derivate dall'utilizzo di determinati rapporti armonici.

Il Rinascimento cerca di definire attraverso proporzioni e trame geometriche un sistema compositivo complessivo, ove il modulo in pianta corrisponde anche ad una determinata griglia prospettica, basata su precisi rapporti numerici.

Dall'armonia musicale dipende, dunque, anche la bellezza di ciò che vediamo e l'architetto per progettare si ispira a rapporti su cui si basano le armonie musicali.

Gli architetti gotici, utilizzavano principalmente la geometria con le sue figure piane e le sue costruzioni, sfruttando l'ampia valenza pratica, i costruttori rinascimentali, basavano la progettazione soprattutto sulla matematica e, in particolar modo, sui rapporti numerici forniti dall'armonia musicale.

Leon Battista Alberti (1406-1472) fece un ampio uso dei rapporti armonici: nel libro IX del "De Re Aedificatoria" egli descrive i tipi di pianta distinguendoli fra piccoli, medi e grandi. Nelle piante piccole le dimensioni sono determinate dai rapporti armonici semplici come il diapente e il diatessaron ma passando alle medie ed alle grandi egli utilizza rapporti composti, più complicati, formati dalla combinazione di rapporti semplici. Egli, inoltre, afferma che i numeri che conferiscono armonia ai suoni e che, quindi, sono gradevoli all'orecchio, possono anche rendere un edificio gradevole agli occhi e che gli architetti usano questi numeri per determinare le dimensioni degli edifici sia planimetriche sia altimetriche.

Anche Palladio (1508-1580), probabilmente ispirandosi all'Alberti, utilizzava i rapporti armonici per determinare le dimensioni planimetriche degli ambienti: fra i vari tipi di pianta oltre alla quadrata, alla circolare, alla

---

<sup>(18)</sup> Ivi, p. 101

rettangolare generata dalla diagonale del quadrato, egli indica le seguenti proporzioni:

- 1:2 diapason;
- 2:3 diapente;
- 3:4 diatessaron;
- 3:5 sesta maggiore;

il tutto per definire l'altezza degli ambienti e riprendendo anche lui Pitagora, si serve dei medi proporzionali aritmetico, geometrico e armonico. Accanto alla proporzione derivante dall'armonia musicale convivono altri due tipi di proporzione: quella antropomorfa e quella relativa agli edifici sacri.

Queste proporzioni sono considerate espressione di Dio e della perfezione del cosmo, essi concorrono a formare la concezione, di carattere sincretistico, di proporzione rinascimentale. Quello che caratterizzava tutte le proporzioni era la loro origine divina che conferiva loro la proprietà di trasmettere al microcosmo l'armonia del macrocosmo.

Non tutti gli architetti daranno lo stesso peso ai diversi tipi di proporzione ma sicuramente attribuiranno un peso fondamentale agli strumenti matematici con i quali è possibile ottenerli.

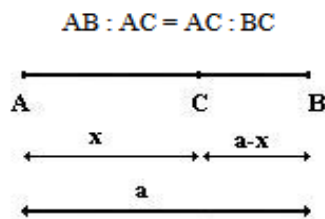
## 2.7 La sezione aurea.

È stato già dato un cenno all'importante concetto di numero aureo e maggiore risalto bisogna dare al concetto matematico e geometrico di "sezione aurea". Le origini dello studio della sezione aurea risalgono al tempo dei Sumeri e degli Egizi. I Pitagorici concessero larghissimo spazio a questo rapporto nei loro studi, come racconta Giamblico (IV sec. d.C.) nella sua "De vita Pythagorica". Il rapporto aureo sembra offrire alla visione dello spettatore una sensazione di geometrica armonia; ciò avviene perchè lo spettatore è condizionato da canoni estetici e da modelli. Il nostro "sistema umano" è stato creato con gli stessi principi sulla base della proporzione aurea. La natura segue le stesse regole; Platone nel Timeo cerca di dare la sua spiegazione del mondo della natura, da qui proviene la celebre ipotesi (di origine pitagorica) dell'esistenza di un'anima del mondo, da essa la convinzione che l'ordine della natura sia qualcosa che antecede la natura <sup>(19)</sup>. Il grande matematico Euclide nel III sec. a. C. l'aveva chiamato "rapporto estremo e medio". Nel 1509 Luca Pacioli, frate francescano, la chiama "Divina proporzione" affermando: "è unica come Dio e regge, come ogni Santa Trinità, una relazione tra tre termini e resta simile a se stessa". Nel 1835 Martin Ohm la definisce "sezione aurea".

### 2.7.1 Aspetto matematico della sezione aurea

Dal punto di vista matematico, la sezione aurea, o parte aurea di un segmento, è quella parte di esso che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente.

Dato un segmento AB, la sua parte aurea è il segmento AC tale che:



<sup>(19)</sup> Cfr. Storia del pensiero filosofico e scientifico - Geymonat - Garzanti, Milano, Vol. 1, pp. 169-183, 1976.

Se chiamiamo  $a$  la misura di  $AB$ ,  $x$  la misura della parte aurea  $AC$ ; passando dalla proporzione tra segmenti alla proporzione tra misure scriviamo:

$$a : x = x : (a - x)$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni numeriche si ha:

$$x^2 = a(a - x)$$

da cui

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Tale equazione ammette la seguente soluzione accettabile:

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Nel caso dei segmenti precedentemente considerati si calcola:

$$\phi = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618\dots$$

Dunque, il rapporto aureo è un numero irrazionale <sup>(20)</sup>.

Le relazioni appena illustrate sono state descritte in una poesia del matematico Paul S. Bruckman intitolata “Media costante” che recita:

*La media aurea non è affatto banale.  
Tutt'altra cosa che un numero irrazionale.  
Capovolta, pensate un pò.  
Resta se stessa meno l'unità.  
Se poi di uno la aumentate.  
Quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato.*

Ed essendo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

---

<sup>(20)</sup> A. Guido Misure e credenze religiose cittàcalabriaeditore (gruppo Rubbettino) 2006 pagg.44-46

così continua la poesia:

*Scritta come frazione con continuità,  
è uno, uno, uno,..., fino a sazietà;  
così chiara che più chiara alcuna non resta  
(non vi comincia a girare un pò la testa?)*

### 2.7.2 Aspetto geometrico della sezione aurea

Euclide, nei suoi “Elementi” (II 11 VI 30), mostra come sezionare un segmento dato in maniera aurea. Infatti basta tracciare un triangolo rettangolo con un cateto AB lungo il doppio dell’altro.

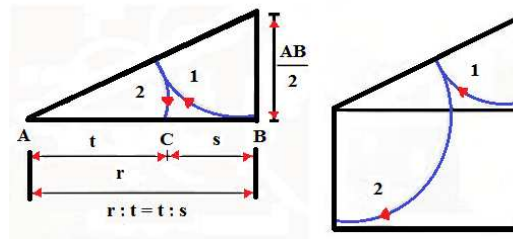


Fig. (2.15) Costruzione secondo Euclide

Puntando poi il compasso sui vertici che i cateti formano con l’ipotenusa, si ottiene C, che divide AB in sezione aurea. È detto rettangolo aureo il rettangolo che ha per base il segmento AB e per altezza la parte aurea AC. Questo rettangolo si può costruire anche rovesciando la diagonale di un semiquadrato al cui lato si sia dato il valore  $1 = AC$ .

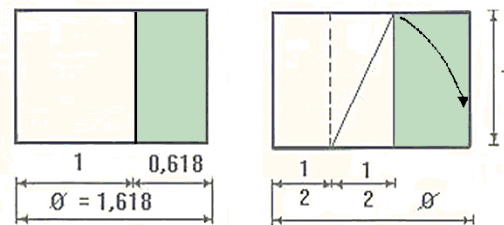


Fig. (2.16) Rettangoli diagon e aureo

Il rettangolo diagon <sup>(21)</sup> si ottiene ribaltando la diagonale del quadrato e considerando il rettangolo che ha per lati il lato del quadrato e la diagonale del quadrato stesso; il rapporto fra i suoi lati ovviamente è  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Il rettangolo diagon può essere utilizzato come doppio diagon considerando, cioè, la misura del lato lungo quella che si ottiene ribaltando la diagonale da entrambe le parti. Con la stessa costruzione geometrica si ottengono altri rettangoli nei quali il rapporto dei lati è di

$$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$$

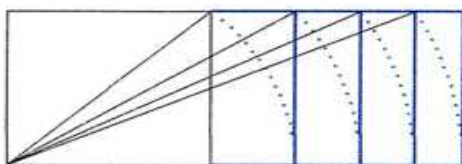


Fig. (2.17) Rettangoli con rapporto fra i lati

Così come accade per il quadrato anche il rettangolo si presta a svariate applicazioni anche se non presenta la versatilità del primo. Questa figura venne utilizzata soprattutto nella composizione delle piante degli edifici sacri per determinare la larghezza della navata principale, di quelle laterali, del transetto o la lunghezza totale della navata; in alzato poteva scandire la suddivisione della facciata, determinare l'altezza delle volte, lo schema compositivo degli archi. Se all'interno di un rettangolo aureo si disegna un quadrato con lato uguale al lato minore del rettangolo, il rettangolo differenza sarà ancora un rettangolo aureo. Ripetendo l'operazione più volte, puntando il compasso sul vertice del quadrato che giace sul lato lungo del rettangolo, tracciando l'arco che unisce gli estremi dei due lati che formano l'angolo scelto, costruendo in ogni quadrato l'arco di circonferenza, si ottiene una curva detta *spirale logaritmica* o *spirale aurea*. La spirale logaritmica è una delle curve più famose e fu probabilmente considerata già dagli antichi egizi; lo fu certamente dagli antichi greci, ma occorre attendere il 17° secolo per una prima rigorosa definizione ed un approfondito studio delle sue proprietà.

<sup>(21)</sup> Il nome diagon è stato attribuito a questo rettangolo da un gruppo di ricercatori del Museo Nazionale di Ljubljana.



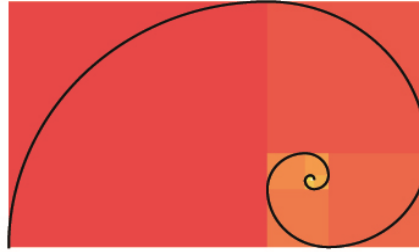


Fig. (2.18) Spirale logaritmica o spirale aurea

La definizione più ricca di fantasia è quella che la vuole “traiettoria di un punto che si muove su una semiretta con velocità proporzionale alla distanza dall’origine, mentre la semiretta ruota uniformemente intorno alla sua origine”; ricorda un pò la definizione del logaritmo data dal suo inventore Neper, e forse anche per questo è raccontata come spirale logaritmica. Sul muro esterno destro della Cattedrale di Cosenza, quasi alla fine della struttura, salendo da corso Telesio, si può notare una piccola spirale logaritmica incisa sulla pietra, la stessa la ritroviamo sul primo pilastro di sinistra dall’altare verso l’uscita. È un segno, la firma lasciata dal costruttore, forse non casuale ma dettata da conoscenze matematiche.



Fig. (2.19) Spirale logaritmica su pilastro

### 2.7.3 Fibonacci. Numero aureo e musica.

Leonardo Pisano, noto anche con il nome di Fibonacci, vissuto tra il XII il XIII secolo fu uno dei più grandi matematici del Medioevo. Nel Libro dell’Abaco, Fibonacci espone i fondamenti di algebra e matematica usati nei paesi arabi. L’introduzione della serie, detta di Fibonacci, si riscontra in numerosi esempi in natura ed ha uno strettissimo legame con il numero aureo. La serie è data da:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...$$

dove ognuno dei termini è somma dei due precedenti, e il rapporto tra ogni successiva coppia di termini rappresenta l'approssimazione, sempre più precisa, del valore  $\phi$ . Il termine  $n$ -esimo è espresso dalla relazione:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ .

La progressione è cadenzata da  $\phi$ ; infatti, se si esegue il rapporto tra il termine  $n$ -esimo della successione di Fibonacci e quello che lo precede, il rapporto tende ad avvicinarsi al numero  $\phi$ , quando  $n$  diventa sempre più grande. Jacques Binet, intorno al 1843, determinò matematicamente un'altra relazione tra la successione di Fibonacci e il numero  $\phi$ ; infatti, il valore del termine  $n$ -esimo può essere calcolato utilizzando la relazione:

$$a_n = \frac{\phi^n - (-\frac{1}{\phi})^n}{\sqrt{5}}$$

già nota a De Moivre e dimostrata da Daniel Bernoulli per la prima volta nel 1728 <sup>(22)</sup>. Tali valori corrispondono, inoltre, agli intervalli musicali:

- unisono = 1
- ottava = 2
- quinta = 1,5
- sesta maggiore = 1,666
- sesta minore = 1,6

e si può dire che gli ultimi sono complementari degli intervalli di terza minore e maggiore. È risaputo che la musica si compone con le sette note fondamentali *DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI* e la distanza tra un *DO* e il *DO* successivo viene definita "ottava". Un gruppo di sette note successive si chiama "scala" e la sua ultima nota è la prima dell'ottava più alta. Nella scala naturale che inizia per *DO*, le distanze tra i diversi suoni non sono sempre uguali, ad esempio, considerando le distanze: *DO-RE, RE-MI, FA-SOL, SOL-LA, LA-SI* sono ognuna un tono (l'intervallo musicale composto da due semitoni), mentre, le distanze *MI-FA* e *SI-DO* sono un semitono (l'intervallo musicale più piccolo che può intercorrere fra due suoni). Raggruppando il numero di vibrazioni dei dodici semitoni che si susseguono si ricava una proporzione continua di questo tipo:

$$T1 : T2 = T2 : T3 = T3 : T4 = \dots$$

---

<sup>(22)</sup> Cfr. Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura N. Sala, G. Cappellato  
- Serie di architettura Francoangeli Pg. 96

Si giunge a osservare che il numero delle variazioni che si differenziano per otto semitoni si comporta come la sezione aurea:

$$T1 : T9 = T9 : T17 = 1 : 1,618$$

#### 2.7.4 Sezione Aurea di un segmento. Costruzione.

Si consideri un segmento  $AB$  e si conduca la perpendicolare a tale segmento  $AB$  nell'estremo  $B$ . Si fissi sulla perpendicolare il punto  $C$  tale che  $BC = \frac{1}{2}AB$ . Si tracci la circonferenza di raggio  $BC$ , che risulterà tangente in  $B$  alla retta  $AB$ . Si unisca  $A$  con  $C$  e si indichino con  $D$  e  $F$  le intersezioni della retta  $AC$  con la circonferenza.

Si porti infine su  $AB$  il segmento  $AE$  congruente ad  $AC$ . Si dimostra che  $AE$  è il segmento cercato, cioè che sussiste la proporzione

$$AB : AE = AE : EB$$

Infatti per il teorema della secante e della tangente (se da un punto si conducono ad una circonferenza una secante e una tangente, il segmento determinato dalla circonferenza sulla tangente è medio proporzionale fra i segmenti determinati sulla secante e aventi un estremo in quel punto) si ha:  $AF : AB = AB : AD$  da cui, scomponendo, si ottiene:

$$(AF - AB) : AB = (AB - AD) : AD$$

Ma dato che  $AB$  è congruente a  $DF$  e  $AD$ , è congruente ad  $AE$  si ha pure:

$$AF - AB = AF - DF = AD = AE$$

$$AB - AD = AB - AE = EB$$

Perciò l'ultima proporzione diventa:  $AE : AB = EB : AE$  da cui, invertendo:  $AB : AE = AE : EB$

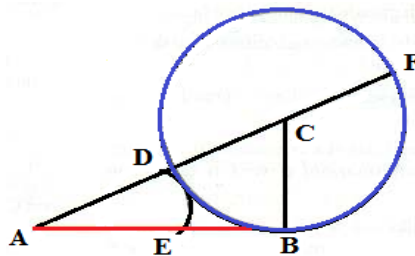


Fig. (2.20) Triangolo Aureo

Quando si parla di sezione aurea il triangolo è una figura importantissima da considerare; quello maggiormente utilizzato era il triangolo equilatero in quanto era il simbolo della Trinità. Venne adoperato anche il triangolo isoscele retto, probabilmente perchè si otteneva facilmente, dividendo a metà un quadrato, oppure si usava il triangolo pitagorico di dimensioni 3 x 4 x 5. Un triangolo isoscele, in cui gli angoli alla base sono doppi dell'angolo al vertice è detto *aureo* di primo tipo. Poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è  $\pi$ , l'angolo al vertice misura  $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$  e gli angoli alla base misurano  $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ .

La ragione dell'attributo aureo risiede nel fatto che in tali triangoli la base è la parte aurea del lato. Tracciando la bisettrice dal vertice B che interseca il lato opposto in D, i triangoli ABC e ABD risultano simili. Vale quindi la proporzione:

$$AC : AB = AB : AD$$

I triangoli ABD e BDC risultano isosceli: in particolare i tre segmenti AB, BD, DC risultano congruenti. Si ha quindi che  $AD = AC - AB$ . La base AB equivale quindi alla parte aurea del lato AC. I triangoli simili al triangolo BCD, cioè i triangoli isosceli in cui l'angolo al vertice è triplo degli angoli alla base, sono detti triangoli aurei di secondo tipo. In questi triangoli isosceli il lato è la parte aurea della base.

### 2.7.5 La sezione aurea e l'Architettura

La sezione aurea, viene indicata con la lettera greca (tau), iniziale della parola greca *tome* che significa "taglio, sezione", oppure con ( $\phi$ ), dall'iniziale del nome di Phidias, il massimo scultore greco, che lega principalmente la sua fama alle sculture del Partenone. La sezione aurea aveva un ruolo preponderante nelle linee architettoniche già dai tempi degli egizi, dei greci e da qui ha continuato ad averne fino al periodo gotico, continuando ancora nei periodi successivi. È importante sottolineare che durante l'epoca aurea dell'architettura greca, il corpo umano era considerato come il più perfetto esempio vivente di simmetria, e serviva all'architetto come ispirazione, se non addirittura come modello. Anticamente gli architetti realizzavano la simmetria mediante il ripetersi di certi rapporti proporzionali privilegiati come l'armonia tra le lunghezze, le superfici e

i volumi dell'edificio, sia nella sua interezza, sia considerando le singole parti. Per far fronte a tali problematiche, gli architetti e gli artisti greci, facevano grande uso dei rettangoli aurei, usati soprattutto per realizzare le varie parti di un manufatto come, ed esempio, disegnare la pianta di un pavimento o la facciata di un tempio. Come abbiamo già avuto modo di riflettere, anche il pentagono regolare si prestava bene a queste considerazioni. Una particolarità che richiede una specifica attenzione, è lo scoprire che il portale della Cattedrale di Cosenza, è perfettamente inscritto in un pentagono stellato, chiamato anche pentagramma o pentalfa o pentacolo. Il pentagramma stellato, pur accettato come simbolo magico, divenne ben presto oggetto di studio dell'analisi geometrica. I Pitagorici presero a studiare quale rapporto ci fosse tra il lato della stella e il lato del pentagono che serviva per costruirla. Loro convinzione era che, comunque fossero scelti due segmenti, esistesse un loro sottomultiplo comune, cioè un segmento capace di dare misure intere per entrambi i segmenti, che risultavano perciò commensurabili. Dall'inscrivibilità del pentagono regolare in una circonferenza derivano importanti proprietà. Vediamone alcune:

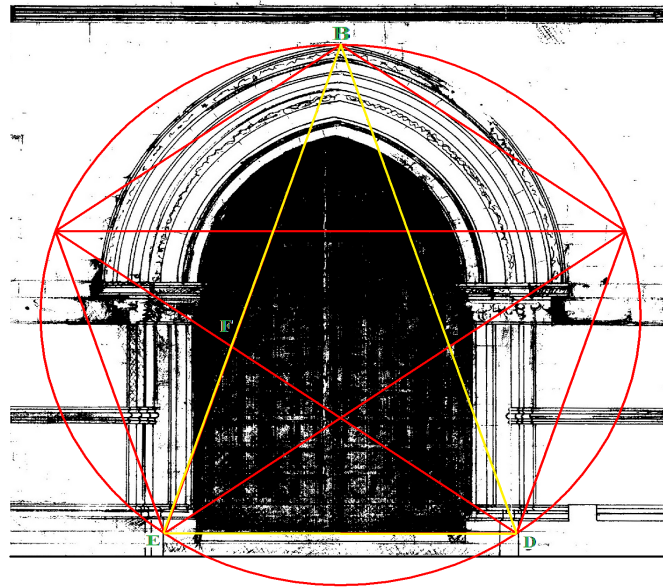
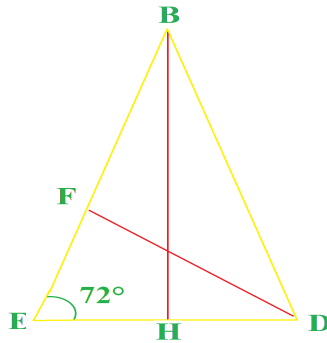


Fig. (2.21) Il pentagono sul portale della Cattedrale di Cosenza

- Considerando il triangolo che ha per base il segmento che unisce le due punte in basso della stella pentagonale, si può notare che queste due punte cadono a livello e a metà delle basi delle pseudo-colonne o lesene del portale. La punta superiore della stella a sua volta va a toccare la chiave di volta dell'arco del portale;
- Considerando ancora lo stesso triangolo, che è uno dei tre triangoli isosceli che appaiono nel pentagono, i suoi lati corrispondono alla misura delle diagonali del pentagono, che equivalgono al lato della stella pentagonale. Il lato ED, è il lato del pentagono;



- Il rapporto  $\frac{EB}{ED} = \phi$ . Infatti, conoscendo l'altezza BH del portale, che coincide con l'altezza del triangolo, e l'angolo alla base BED che vale  $72^\circ$ , possiamo ricavare il lato  $BE = \frac{BH}{\sin(72^\circ)}$ . Allo stesso risultato si arriva applicando il teorema di Pitagora calcolare  $BE^2 = BH^2 + EH^2$ . Da qui conoscendo il lato del pentagono ED si ottiene che il rapporto  $\frac{EB}{ED} = 1,618 = \phi$ .

### 2.7.6 Costruzione del Pentagono regolare

Il procedimento per la costruzione del pentagono regolare, qui di seguito riportato, è uno degli aspetti più interessanti della geometria pitagorica. Dato un pentagono regolare ABCDE, si tracciano le 5 diagonali che costituiscono la stella a 5 punte. Tali diagonali si intersecano nei punti A', B', C', D' e E' che formano un altro pentagono regolare.

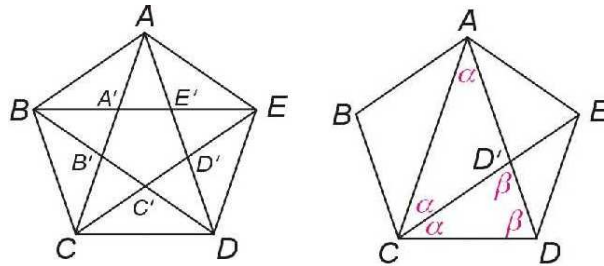


Fig. (2.22) Costruzione del Pentagono regolare

I punti di intersezione trovati dividono le diagonali in modo particolare. Se consideriamo per esempio il punto D' e il triangolo isoscele ACD: esso ha l'angolo al vertice A di  $36^\circ$  e gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice e quindi di  $72^\circ$ . Per simmetria anche l'angolo  $\alpha = ACE$  è di  $36^\circ$  e quindi il triangolo CDD' è simile al triangolo ACD. Si ha allora:

$$AD : CD' = CD' : DD'$$

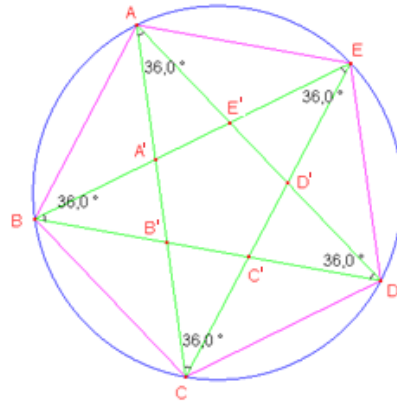
ma

$$CD' = AD'$$

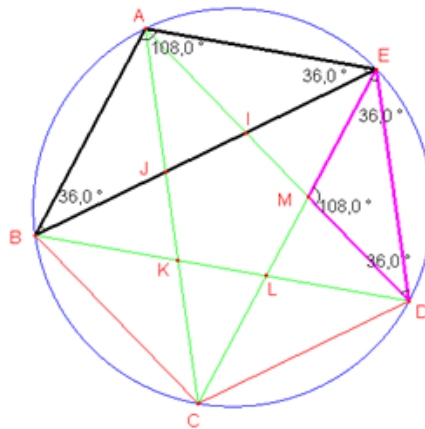
e quindi la precedente relazione diventa

$$AD : AD' = AD' : DD'$$

cioè AD' è la media proporzionale tra l'intero segmento e la restante parte. Si è dimostrato così che la diagonale CE divide la diagonale AD in due segmenti tali che: il rapporto tra la diagonale stessa e il segmento maggiore è uguale al rapporto tra quest'ultimo e il segmento minore. Possiamo così riassumere alcune importanti considerazioni:

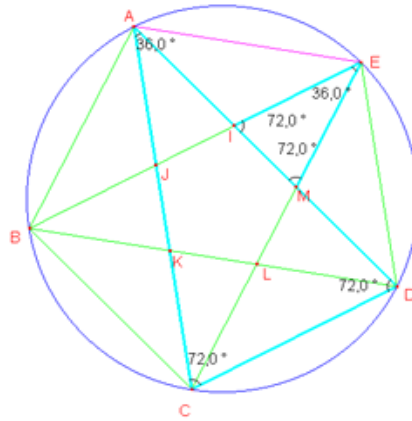


- Gli angoli alla circonferenza che insistono su uno qualunque degli archi AB, BC, CD, DE, EA ossia gli angoli ADB, BEC, CAD, DBE, ECA hanno tutti ampiezza di  $36^\circ$ .
- I triangoli che i due pentagoni individuano sono tutti isosceli di due tipi:



- \* con angoli alla base di  $36^\circ$  e angolo al vertice di  $108^\circ$  come BAE e EMD;
- \* con angoli al vertice di  $36^\circ$  e angoli alla base di  $72^\circ$  come ACD ed EIM





- Se indichiamo con  $c$  la lunghezza dei lati del pentagono e con  $d$  la lunghezza della diagonali; per la similitudine tra i triangoli ABE e AJB (si noti che AJB congruente ad EMD) si ottiene:

$$BE : AE = AB : BJ$$

Poichè  $AJ = BJ$  e  $AE = EJ$

si ha che

$$BJ = BE \quad EJ = (d-c)$$

Sostituendo si ha

$$d : c = c : (d-c)$$

e quindi EJ è la “parte aurea” del segmento BE.

Il rapporto tra BE ed EJ è il numero d'oro  $\phi$ .

- Considerati invece i due triangoli simili ACD e DKC (simile a EIM) si ha:

$$AC:CD = CD:CK$$

ma

$$CD=AB=AK \quad \text{e} \quad CK=AC-AK$$

e quindi si ha

$$AC : AK = AK : (AC-AK)$$

cioè il rapporto fra AC e AK è ancora  $\phi$  e quindi anche il rapporto fra AC e CD è  $\phi$ .

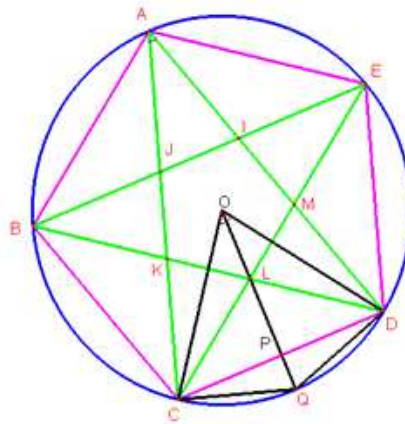
- Congiungendo il centro O della circonferenza con il punto medio Q dell'arco CD si ottiene un triangolo COQ la cui base CQ è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio di raggio OC; l'angolo al

centro COD è il doppio dell'angolo CAD che insiste sul medesimo arco CD e quindi gli angoli COQ e CAD sono uguali.

I triangoli isosceli ACD e OCQ sono simili, pertanto, si ottiene

$$AC : CD = OC : CQ \text{ e quindi}$$

il rapporto tra il raggio del cerchio e il lato del decagono inscritto è ancora il numero d'oro  $\phi$ .





# **CAPITOLO 3**

## **STRUTTURE GEOMETRICHE IN ARCHITETTURA**

### **3.1 Il ruolo dell'architettura**

L'architettura ha come scopo fondamentale l'organizzazione dello spazio in cui vive l'essere umano, quello spazio della nostra vita quotidiana, ossia la dimensione in cui ci spostiamo per incontrarci, per raggiungere un sito, per comunicare. Lo spazio, può essere considerato un linguaggio che ci parla della società in cui noi viviamo e che da esso siamo perfettamente costruiti, diventa allora parole e frasi di un idioma che ci racconta. A volte queste parole diventano architettura, diventano arte per l'uomo, per la vita, per il mondo. Lo spazio è modificato dall'architettura; infatti, nella realizzazione di una struttura edilizia si introduce, nell'ambiente esistente, una modificazione dell'area interessata. Lo spazio una volta creato prende forma, si fa segno che presuppone realtà, volontà e diventa espressione e comunicazione.

Un'opera architettonica, si può giustamente pensare come il frutto della mente umana, intesa come capacità sia di pensiero che di elaborazione e, dunque, di realizzazione materiale; l'opera architettonica, chiude lo spazio e racchiude in se aspetti che sono complementari e fondamentali per la sua creazione. Si parla di aspetto esclusivamente razionale che ha origine dal pensiero dell'uomo, da ciò su cui egli riflette, su cui egli medita ed elabora; da qui segue l'aspetto materiale che nasce dalla mano dell'uomo.

La nascita dell'architettura è da attribuire alle necessità dell'uomo come la protezione dagli agenti atmosferici, dagli animali, e proprio per questo è tra le discipline maggiormente presenti in tutte le civiltà. Solo in un secondo momento, con la comparsa dei caratteri estetici, si ebbe la nascita dell'architettura anche come arte visiva, dotata di proprie caratteristiche peculiari.

Il termine "architettura" deriva da architetto, dal latino *architectus*, ma è di origine greca: che significa proprio "architetto" o "costruttore".

Secondo Platone l'architettura si distingue dalle altre arti in quanto considerata come scienza, ritenendo che l'architetto sia più che un semplice artigiano che esegue un lavoro manuale. Questa affermazione deriva dal fatto che l'architetto si serve delle misure, degli strumenti e dell'arte del calcolo che avvicinano l'arte del costruire alla scienza e, ancora, l'architetto non opera direttamente, ma è a capo di ogni opera, egli fornisce comunque le sue conoscenze, non il lavoro manuale <sup>(23)</sup>.

Una delle definizioni più chiare e complete di architettura e forse una delle più antiche, risale a Vitruvio affermando che: "L'architettura è una scienza adornata di molte cognizioni e con la quale si regolano tutti i lavori che si fanno in ogni arte. Si compone di Pratica e Teorica: la Pratica è una continua valutazione sull'uso della materia, e si esegue con le mani dando una forma propria ai materiali usati; la Teorica poi è quella che può dimostrare e deve tener conto delle opere fatte con le regole della proporzione e con raziocinio".

In ogni opera architettonica questi aspetti sono di vitale importanza, anche se durante le epoche storiche non sempre ebbero il medesimo peso. Per realizzare un'opera architettonica le fasi da seguire sono diverse: dalla progettualità iniziale, legata all'immaginazione dell'opera, si passa all'inventiva tenendo conto del periodo storico, dell'ambito culturale e geografico, delle risorse economiche, delle conoscenze tecniche del periodo ecc.

Tutti questi sono fattori importantissimi in un'opera e contribuiscono alla realizzazione vera e propria della stessa, infatti, è sicuramente vero che la costruzione del Colosseo in Roma ha implicato l'uso di risorse materiali,

---

<sup>(23)</sup> Cfr. Platone, *Timeo*, 34b, citato in M. Curti, *La Proporzione. Storia di un'idea da Pitagora a le Corbusier*, Roma 2006, p. 24.

umane e intellettuali diverse che nella costruzione di una casa bifamiliare realizzata oggi in Italia. Durante ciascuna fase costruttiva si avverte la necessità di usufruire di strumenti, mentali e materiali, che siano di sostegno alla progettazione e alla realizzazione e che ne garantiscano il buon esito dell'opera da costruire.

Bisogna considerare, inoltre, che l'architettura ha finalità mirate alla soddisfazione di esigenze primarie per la vita dell'uomo, e finalità estetiche, individuate dal progettista nel momento in cui nasce l'idea dell'opera, ma, forse, percepite solo più tardi dai destinatari dell'opera stessa.

Gli aspetti fondamentali nell'architettura riguardano, pertanto, la sua creazione nella mente dell'uomo, la sua realizzazione e il messaggio estetico ed emotivo che essa trasmette. L'architetto predispone un blocco ideale di spazio, recingendolo all'esterno e suddividendolo all'interno geometricamente in tante "scatole" giustapposte, seppure di diversa misura e con varie disposizioni; ogni tema, che è insieme spaziale e figurativo, nelle costruzioni è, in qualche modo, imprevedibile, inventato, irregolare, pieno di fascino.

Bisogna considerare che ciascuno di questi aspetti è in qualche modo legato alla forma: l'architetto pensa l'opera da realizzare come un insieme di forme e si serve della rappresentazione grafica per visualizzarle, infatti, l'opera realizzata è un oggetto materiale e in quanto tale ha una sua forma. La forma è espressa tramite l'utilizzo di figure geometriche, le quali a loro volta sono caratterizzate dalle dimensioni proprie espresse da una misura e da un numero. È pertanto, ovvio che ciascun aspetto sopra citato sia legato alla geometria e alla matematica in quanto non è possibile realizzare un'opera architettonica prescindendo dalla sua forma e dalle sue misure. Bairati nel suo libro *"La simmetria dinamica"* afferma: *"la necessità materiale di stabilire delle misure per una costruzione, di un qualunque edificio, si traduce in termini artistici quando la tensione dei rapporti generati da queste misure è afferrata dall'osservatore che trova così soddisfatta la propria natura razionale"* <sup>(24)</sup>. In realtà la comprensione dei rapporti generatori dell'architettura non sempre viene afferrata dall'osservatore e molto spesso lo è solo a livello inconscio.

---

<sup>(24)</sup> C. Bairati, *La simmetria dinamica*. Scienza ed arte nell'architettura classica, Milano 1952, p. 8.

Come le lingue, l'architettura e la matematica sono sistemi altamente strutturati di simboli astratti che, messi in relazione, comunicano significati precisi. Anche chi non ha un'educazione formale in architettura è in grado di distinguere un'opera di architettura da una costruzione qualsiasi.

Un aspetto particolare del rapporto tra l'architettura e la matematica è messo in evidenza dall'applicazione dei motivi geometrici al fine di rendere armonioso e bello uno spazio. Ma viene spontaneo chiedersi cosa è la bellezza. Sant'Agostino si pone una interrogazione sul decidere se alcune cose sono belle, egli si chiede: *“Sono belle in quanto piacciono, oppure piacciono in quanto sono belle”* (un quesito che mette esplicitamente al centro dell'attenzione la relatività o meno della bellezza). Sant'Agostino, senza alcun dubbio risponde che *“esse piacciono poichè sono oggettivamente belle”*. Quindi per Sant'Agostino, la bellezza è una qualità oggettiva delle cose create <sup>(25)</sup>. Può risultare comunque difficile dare una definizione di bellezza, essa è soddisfazione razionale dello spirito, delle sensazioni attraverso forme, figure, dunque, espressione del sentire più profondo. L'architettura è un mezzo molto potente, è un “persuasore” e sarà sempre una forza: per l'ordine, il caos o, più semplicemente per una più cupa indifferenza. Il motivo geometrico aiuta in tal senso, è ideale per una decorazione, però, la geometria è più di una semplice decorazione perchè, quando viene “sfruttata” al meglio, funziona come una mappa a due dimensioni nello spazio architettonico tridimensionale. La disposizione di linee e punti su un pavimento ci può indicare, ad esempio, una direzione dello sguardo o del movimento; può scandire il ritmo del nostro spostamento; può invitare a posizionarci in un punto ideale intorno al quale si spiega tutto lo spazio architettonico; può indicare una gerarchia degli spazi.

L'architettura nei secoli è cambiata così come sono cambiati i saperi tecnici e teorici degli architetti, tanto che oggi tali saperi non sono più percepiti esplicitamente da chi osserva un edificio, perchè, non siamo in grado di codificare correttamente il linguaggio formale utilizzato dal costruttore. È spesso difficile ad un primo sguardo, senza operare uno studio attento di un'opera, individuare il principio generatore che ha condotto l'ideatore a creare nella sua mente un manufatto per poi realizzarlo. In tal senso

---

<sup>(25)</sup> M. Curti, *La Proporzione. Storia di un'idea da Pitagora a le Corbusier*, Roma 2006, p. 53

l'architettura può essere considerata portatrice di conoscenza in grado di tramandare ai posteri, con la sua materialità e tangibilità, ciò che materiale non è, ossia quelle nozioni tecniche e teoriche degli architetti di ogni tempo.

Una chiave di lettura necessaria per tradurre le conoscenze dell'architettura è proprio la sua analisi geometrica. Per poter operare correttamente l'analisi geometrica di un edificio, in qualunque periodo esso sia stato realizzato, è necessario conoscere effettivamente quali erano le nozioni in possesso degli architetti nel momento storico in esame. Ciò è necessario, per non incorrere nell'errore di attribuire costruzioni geometriche mai utilizzate in una certa epoca e soprattutto per non cadere nella tentazione di forzare la mano per giustificare la presenza di particolari rapporti o figure geometriche esistenti solo nei ragionamenti di chi sta analizzando l'edificio. In questo senso l'analisi geometrica rappresenta uno strumento molto utile che può incrementare la conoscenza dell'architettura ma anche uno strumento che se non viene usato correttamente porta a conclusioni sbagliate e fini a se stesse.

L'architettura è ordine matematico, indagine, percezione armoniosa mediante rapporti che sollecitano emozioni, sensazioni che i nostri occhi ci trasmettono attraverso le forme. Queste forme sono percepite grazie ai colori, i quali rivelano forme geometriche che sono le grandi forme primarie che la luce ed i colori esaltano, al punto che l'immagine ci appare netta, tangibile e senza ambiguità.

La difficoltà di tale operazione, di una attenta analisi geometrica, è legata al fatto che in mancanza di testi scritti e documenti grafici qualunque ragionamento, seppure ben argomentato, possa essere del tutto arbitrario e soggettivo e rimanga, pertanto, una mera meditazione. Questa difficoltà si attenua, quasi del tutto, quando questi ragionamenti sono supportati da documenti storici e d'archivio se non addirittura da disegni o da trattati dai quali si evince inconfutabilmente l'utilizzo della conoscenze geometriche e architettoniche del periodo.

Non è il caso dell'architettura posta in essere per costruire la Cattedrale di Cosenza; su questo argomento sono giunti fino ad oggi numerose testimonianze dalle quali si evince che la geometria e la matematica erano considerate i saperi principali dell'architetto. È ormai accertato da numerosi studi basati non solo sull'analisi geometrica di disegni medievali



o dai rilievi del monumento ma, soprattutto, dall'esame di testi d'epoca inerenti le costruzioni gotiche-cistercensi che gli architetti possedevano una conoscenza teorica che si basava sull'uso della geometria.

Le conoscenze geometriche in possesso dell'architetto medievale, se paragonate a quelle di oggi, possono sembrare semplici perché si basavano sull'utilizzo di figure piane elementari quali il quadrato, il triangolo, il cerchio e sulle figure più elaborate che da esse derivano tramite il loro studio. Limitare le conoscenze teoriche dell'architetto medievale alla capacità di manipolare figure geometriche basilari, sembra alquanto riduttivo: il bagaglio culturale dell'architetto doveva essere sicuramente più complesso e variegato.

È indubbio che l'architetto medievale, doveva possedere conoscenze sia pratiche che teoriche, come d'altronde succede ancora oggi per numerosi professionisti, nonostante la forte settorializzazione dell'architettura contemporanea. Le conoscenze teoriche in realtà spaziavano fra la geometria e la matematica e, a monte vi erano una serie di riflessioni teologiche e una forte valenza simbolica. Il ruolo degli ordini religiosi è fondamentale in tutto ciò, sia per la divulgazione dei testi antichi, attraverso le forme e le immagini, sia per l'elaborazione delle teorie che sicuramente transitavano nei vari ambienti e che furono poi utilizzate prima per progettare e poi per realizzare le costruzioni.

### **3.2 Le conoscenze dell'architetto.**

Chi era l'architetto del mondo medievale? L'architetto era colui che progettava, pensava l'edificio e poi dirigeva i lavori della sua costruzione; egli era, pertanto, un tecnico e in quanto tale doveva avere una preparazione anche tecnica.

Il compito di progettare edifici, accordare le loro lunghezze, superfici e volumi, doveva toccare ad architetti che fossero "partecipi della scienza conoscitiva", come indica Vitruvio, per i quali raccomanda una formazione di tipo universale: *"Occorre che l'architetto sia letterato, esperto di disegno, sapiente in geometria, che conosca un assai grande numero di opere storiche, che abbia ascoltato con attenzione i filosofi, che sappia di musica, che conosca il diritto, che abbia delle conoscenze di astronomia e sul sis-*

*tema celeste. In ogni arte ed in ogni scienza l'architetto deve poter fare più di quelli che con i loro talenti e le loro ricerche hanno portato ogni dominio al suo più alto splendore".*

Ma come poteva l'architetto racchiudere, nel suo progetto, una così grande varietà di conoscenze? In realtà tutte queste discipline non vivono separate l'una dall'altra, ma sono correlate da una struttura di fondo comune, un'omogeneità di principi che unisce le leggi della composizione architettonica a quelle dell'armonia musicale, della geometria e dell'astronomia, ai principi dell'arte medica, oratoria o figurativa.

Questa struttura di fondo si esprimeva in termini di ordine, armonia e proporzione. La formazione culturale e professionale dell'architetto medievale, avveniva all'interno delle scuole di pensiero che regolavano rigidamente non solo il periodo di apprendistato ma anche la sua condotta di vita personale. Ogni aspirante architetto, doveva effettuare un apprendistato per un periodo abbastanza lungo in cantiere dove, acquisiva le conoscenze necessarie per costruire. Il bagaglio tecnico acquisito a fine apprendistato era costituito da conoscenze sia pratiche che teoriche.

Fino agli inizi del XII secolo, gli architetti erano definiti come esperti nell'arte della muratura e della carpenteria, e cioè esperti di quei mestieri che si avvalgono fundamentalmente del lavoro manuale; successivamente incominciano ad essere descritti come coloro che vanno in cantiere; sono sempre più diffuse le espressioni quali *experto in arte geometria* <sup>(26)</sup>. Ciò che caratterizza l'architetto, pertanto, non sono più soltanto le sue capacità manuali e pratiche ma quelle intellettuali e teoriche.

Con il passare degli anni, le nuove competenze dell'architetto derivano dal ruolo assunto in cantiere. In quel tempo, le costruzioni gotiche presentavano non poche difficoltà, il cantiere era complesso e si iniziava ad avere una forte differenziazione dei ruoli fra i vari mestieri, l'architetto era colui che aveva pensato l'opera e che ne sovrintendeva la costruzione assumendo il compito di coordinatore, non necessariamente prestando più

---

<sup>(26)</sup> J. S. Ackerman, "Ars sine scientia nihil est" Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan, in "Art Bulletin", Vol. 31, 1949, p.90; la definizione si riferisce a Gabriele Stornaloco che venne convocato nel 1391 per risolvere il problema del disegno della facciata della cattedrale di Milano. Si fa notare che Stornaloco era un matematico.

opera manuale ma solo intellettuale <sup>(27)</sup>.

Pian piano le conoscenze pratiche, le regole dettate dall'esperienza, non bastano più all'architetto il quale, giustifica sempre più le sue scelte progettuali con teorie basate sull'uso di figure geometriche o di rapporti matematici. Nel periodo gotico ormai egli doveva essere "abile nell'arte della geometria che era la più apprezzabile dal momento che derivava da Dio stesso".

La produzione scientifica, sulle conoscenze geometriche degli architetti nel Medio Evo e sull'utilizzo che essi ne facevano, è vasta; negli anni sono stati pubblicati numerosi studi di carattere sia generale sia particolare sull'argomento.

Da questi contributi emerge che indubbiamente l'architetto medievale non solo era in possesso di nozioni geometriche, seppure elementari, che spaziavano fino alla matematica, ma le applicava per progettare le proprie costruzioni.

### 3.3 L'Architettura con Vitruvio.

Per ritrovare le radici delle teorie geometriche e matematiche degli architetti gotici, di quell'estetica medievale, che trova nell'architettura gotica una delle sue maggiori realizzazioni, bisogna guardare all'idea di "rapporto" teorizzata dalla scuola Pitagorica e Platonica. In realtà, la matematica e la geometria fornivano uno strumento concettuale applicabile a qualunque aspetto dell'architettura. Le leggi matematiche, le figure e le costruzioni geometriche erano in grado di rendere oggettive qualità del tutto soggettive come la bellezza, di giustificare scelte tecniche e strutturali e allo stesso tempo di illustrare la progettazione di qualunque elemento architettonico. In particolare con l'architettura, "si può affermare che le teorie, in qualche misura riconducibili a Pitagora e alla sua scuola, costituiscono per gli artisti di ogni epoca una tentazione permanente" <sup>(28)</sup>, soprattutto per il ruolo fondamentale attribuito al numero, alle figure

---

<sup>(27)</sup> M. Borgherini, *Disegno e progetto nel cantiere medievale. Esempi toscani del XIV secolo*, Marsilio Editori, Venezia 2001, pp. 11-16.

<sup>(28)</sup> M. Curti, *La Proporzione. Storia di un'idea da Pitagora a le Corbusier*, Roma 2006, p. 14.

geometriche e ai significati simbolici ad essi conferiti. Vitruvio nella sua opera *De Architectura* (I sec. a.C.), analizza ed esamina, nei suoi diversi aspetti, l'arte del costruire. Per Vitruvio, la proporzione, espressa nel suo trattato, facendo riferimento alle sei categorie dell'architettura <sup>(29)</sup>, si ottiene quando le parti di un'opera sono in un rapporto armonico, sia prese singolarmente sia in relazione all'opera nel suo complesso. Il termine di confronto, sul quale fondare questo rapporto, è il modulo, l'unità base su cui è impostata la costruzione. Tramite il modulo vengono determinate le dimensioni totali dell'edificio e di ogni sua parte, non solo per ottenere quella proporzione fra l'altezza, la larghezza e la lunghezza di un'opera, che la rende esteticamente bella ed armoniosa, ma anche per soddisfare requisiti statici ed ottenere un edificio stabile. Vitruvio fornisce precise indicazioni su come calcolare il modulo il cui valore non è preso a caso. Il modello di proporzione al quale si rifà Vitruvio è il corpo umano quale espressione di perfezione.

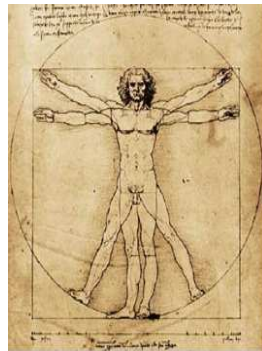


Fig. (3.1) L'uomo Vitruviano di Leonardo Da Vinci

Le proporzioni del corpo umano vengono riportate dettagliatamente, indi-

---

<sup>(29)</sup> Vitruvio per indicare la proporzione utilizza più termini, ai quali però, attribuisce significati molto simili. La proporzione architettonica è uno tra i concetti più importanti trattati da Vitruvio, esprimibile tramite la matematica e la geometria, per tale motivo l'architetto deve conoscere queste due discipline per risolvere i problemi relativi alla simmetria di un'opera. I termini più utilizzati sono: proporzione, simmetria, euritmia, armonia, disposizione, ordinamento. Ivi, p. 29.

cando i rapporti numerici commensurabili che intercorrono fra le sue parti prese singolarmente e il corpo intero.

Vitruvio, oltre a dare una descrizione in termini numerici, ne fornisce una in termini geometrici che prevede la ben nota rappresentazione dell'uomo inscritto all'interno di un cerchio, con baricentro nell'ombelico e inscritto in un quadrato. La proporzione antropomorfa in Vitruvio occupa un ruolo centrale e il concetto che più di altri espressi nel suo trattato sarà destinato ad essere oggetto di interpretazione nei periodi storici successivi.

Vitruvio nel *De Architectura* scrive:

*Il centro del corpo umano è inoltre per natura l'ombelico;  
infatti, se si sdraia un uomo sul dorso, mani e piedi allargati,  
e si punta un compasso sul suo ombelico,  
si toccherà tangenzialmente, descrivendo un cerchio,  
l'estremità delle dita delle sue mani e dei suoi piedi*

### 3.4 Matematica e Architettura.

L'uso della geometria, forse l'origine della geometria stessa, deriva dalla necessità dell'uomo di distinguere l'ordine dal caos, infatti, la tendenza a riconoscere una struttura, anche se non perfetta, e il tentativo di migliorarla appartiene solo agli uomini.

Per capire perchè questo avviene bisogna ricordare che, la capacità umana, di riconoscere le strutture, è uno dei nostri istinti di sopravvivenza e come per tutti gli altri istinti umani, diviene poi un piacere fine a se stesso. In epoca gotica, l'utilizzo della geometria e della matematica, assolveva a funzioni di diversa natura: era una guida su cui impostare la progettazione di qualunque elemento dal punto di vista formale, dalla distribuzione planimetrica all'alzato ma serviva anche per progettare l'aspetto strutturale delle costruzioni.

Tramite l'uso della geometria si dimensionavano correttamente gli elementi strutturali in modo che fossero robusti: i costruttori gotici, infatti, si servivano delle figure geometriche, specialmente del quadrato, per ottenere

la giusta misura senza la quale l'opera architettonica non avrebbe potuto rispettare i canoni di bellezza del tempo ma soprattutto, non avrebbe potuto essere robusta e duratura nei secoli.

Un esempio che aiuta a farsi un'idea di quanto detto è rappresentato proprio dalla costruzione della Cattedrale di Cosenza. In questa struttura si percepisce una rappresentazione fedele di come si doveva procedere per la costruzione di una Cattedrale, dei problemi ad essa connessi e degli strumenti teorici e pratici messi in campo dai suoi costruttori. Gli aspetti importanti che derivano da questa costruzione sono la conferma dell'utilizzo di determinate forme geometriche e del ricorso a rapporti numerici per determinare le dimensioni degli elementi, ma anche un utilizzo di formule matematiche che derivano spesso solo dall'osservazione empirica. Ma accanto alla geometria delle figure piane, convive un aspetto pratico basato sull'esperienza che porta ad utilizzare formule matematiche senza alcun supporto teorico.

Entrambe le parti si basano sulla propria esperienza costruttiva, da cui risulta evidente che la preparazione tecnica e il modo di procedere di un architetto era all'epoca ancora un misto di teoria e pratica <sup>(30)</sup>. Durante il trascorrere dei secoli si assiste a profondi cambiamenti in ambito artistico i quali, naturalmente, interessarono anche l'architettura. L'imitazione dei classici e della natura porterà alla ricerca di un ordine e di un'armonia che si manifesterà nella volontà di creare ogni opera secondo proporzione, che si ottiene fundamentalmente per via matematica, utilizzando nella progettazione moduli e collegando le dimensioni di ogni parte dell'edificio tramite i rapporti armonici.

È per questo motivo che dalla fine del XV secolo in poi, si assiste ad un interesse sempre maggiore da parte degli architetti nei confronti della matematica e in particolare di determinati numeri e dei rapporti fra di essi. La proporzione antropomorfa, di derivazione vitruviana, viene interpretata in modo diversa da come l'aveva intesa il suo autore. Vitruvio, infatti, aveva preso come modello il corpo dell'uomo, maschile e femminile, in modo generico e astratto e dai rapporti fra le varie parti del corpo aveva dedotto i rapporti fra i diversi elementi degli ordini architettonici.

---

<sup>(30)</sup> J. S. Ackerman, "Ars sine scientia nihil est" Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan, in "Art Bulletin", p. 106.

Nel Rinascimento il corpo dell'uomo diventa un modello da imitare, in maniera quasi impersonale, in ogni tipo di costruzione e non solamente nella definizione dimensionale degli ordini architettonici <sup>(31)</sup>. Uno degli architetti che fece ampio uso della proporzione antropomorfa fu Francesco Di Giorgio (1439-1501). Egli accostò il corpo umano addirittura alla città, passando poi per la fortezza, per il singolo edificio, per gli ambienti che lo compongono, fino ad arrivare agli elementi decorativi.

Nei suoi disegni, Di Giorgio concretizza fisicamente il corpo umano all'interno dell'opera da realizzare in un processo di imitazione perfetta.

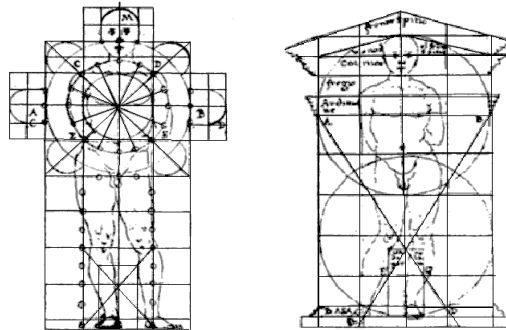


Fig. (3.2) Disegni di Francesco di Giorgio Martini

*Rapporto tra il corpo umano e l'edificio.*

L'uso della geometria, che era stata fondamentale per gli architetti gotici, non scompare durante il Rinascimento ma affianca, seppure con un ruolo non così preponderante, la matematica.

Le figure geometriche favorite dagli architetti rinascimentali, saranno il cerchio ed il quadrato; la predilezione per queste due forme deriva dal significato simbolico da sempre ad esse attribuito. Abbiamo già visto che il cerchio ha rappresentato fin dai tempi di Pitagora la perfezione della divinità e che anche Platone riprende questo concetto nel Timeo, non sorprende, pertanto, che durante il Rinascimento fosse considerata la figura più perfetta come simbolo di Dio sulla terra; infatti, per usare le parole di Palladio essa: “è attissima a dimostrare l'Unità, l'Infinita Essenza, l'Uniformità, et la Giustizia di Dio”. <sup>(32)</sup> Secondo i testi dei filosofi e dei teologi “il

<sup>(31)</sup> M. Curti, op. cit., p. 76.

<sup>(32)</sup> Cfr. Palladio, Quattro Libri, Lib.IV, citato in R. Wittkower, op. cit. p.25.

cerchio può simbolizzare la divinità, considerata non soltanto nella sua immutabilità ma anche nella sua bontà diffusa come: origine, sussistenza e consumazione di tutte le cose; secondo la tradizione cristiana, come l'alfa e l'omega" (CHAS, 29). Euclide nelle definizioni dice: *"Il Circolo è una figura piana terminata dal contorno di una linea, che si chiama circonferenza o periferia, che è per ogni parte egualmente distante dal punto di mezzo della figura. Questo punto T, di mezzo del Circolo, chiamasi centro"* <sup>(33)</sup>. Combinata con quella del quadrato, la forma del cerchio richiama immediatamente un'idea di movimento, di cambiamento di ordine o di livello. *"La figura circolare, aggiunta alla figura quadrata, viene spontaneamente interpretata dalla mente umana come l'immagine dinamica di una dialettica fra il celeste trascendente a cui aspira l'uomo e la terra su cui si trova in questo momento"* (CHAS, 13). Il quadrato è una delle figure geometriche più frequenti e più universalmente usate nel linguaggio dei simboli. È uno dei quattro simboli fondamentali (secondo CHAS, 28), insieme al centro, al cerchio e alla croce. È il simbolo della terra, in opposizione al cielo, ma anche, a un altro livello, è il simbolo dell'universo creato, terra e cielo. *"È una figura antidinamica, ancorata su quattro lati. Mentre il movimento scorrevole è circolare e rotondo, l'arresto e la stabilità sono associati a figure angolose, con linee dure e a sbalzi"* (CHAS, 30-31). Il cerchio è universalmente il simbolo di ciò che è celeste (il cielo, Dio, l'anima; Platone rappresenta la psiche con una sfera), già presso i Babilonesi troviamo questa unione cielo-terra espressa dal cerchio e dal quadrato: il quadrato esprime un limite; il cerchio esprime l'illimitato. Per la proporzione antropomorfa, le dimensioni del corpo dell'uomo sono da ricercare negli edifici sacri e il passaggio dalle due figure esaminate (quadrato e cerchio), al loro utilizzo nella distribuzione planimetrica degli edifici religiosi è breve <sup>(34)</sup>.

Partendo dal cerchio e dal quadrato gli architetti ottengono le altre figure derivate quali i rettangoli e i poligoni; i primi hanno origine direttamente dal quadrato: il doppio quadrato, un quadrato e un mezzo, un quadrato e un terzo, nelle dimensioni dei quali si ritrovano i prediletti rapporti dell'armonia musicale. Le forme poligonali si ottengono partendo

---

<sup>(33)</sup> Cfr. Gli Elementi di Euclide - P. Dechaes della compagnia di Ges riveduti, ecc. op.cit. Pag.2 - libro I.

<sup>(34)</sup> 100 Ivi, p. 18.



dal cerchio; lo stesso Alberti nel libro settimo del *De Re Aedificatoria*, in relazione alle piante degli edifici religiosi, spiega come ottenere geometricamente queste figure.

### 3.5 Il modulo ad quadratum nella Cattedrale di Cosenza.

Le conoscenze geometriche dell'architetto nel Medio Evo, si basavano fondamentalmente sull'utilizzo di figure elementari. Queste figure si potevano facilmente ottenere con gli strumenti in possesso all'epoca: il compasso, la riga, la squadra ed erano agevolmente riproducibili sia sui fogli di pergamena sia sul terreno per ottenere il tracciato regolatore della pianta degli edifici. Il quadrato è la figura più semplice che si prestava meglio di altre a vari usi e per questo motivo, la più utilizzata sia nella sua forma semplice sia nelle figure derivate che da esso si potevano ottenere. Il quadrato come figura semplice era utilizzato, come modulo per determinare in pianta una griglia sulla quale posizionare le parti principali dell'edificio; scelto un quadrato di base, tramite la sua divisione o moltiplicazione, si ottenevano per esempio la larghezza delle navate laterali piuttosto che la distanza fra i pilastri. Il quadrato era utilizzato non solo per la composizione dell'edificio in pianta ma anche nell'alzato; è nota l'espressione "*ascendere ad quadratum*" che indicava appunto lo schema utilizzato per la definizione delle facciate.

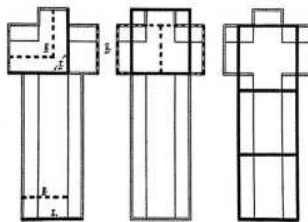


Fig. (3.3) Composizione ad quadratum di chiese cistercensi

È evidente che, allo stato attuale, la pianta della chiesa della Cattedrale di Cosenza, non è un rettangolo perfetto, ma non è errato poter pensare che quando fu edificata avesse tale forma geometrica, pertanto, sorgono

spontanee le conoscenze di geometria sul rettangolo aureo al quale, probabilmente, è da attribuire il motivo della sua armonicità.

In particolare, la pianta della chiesa appare come un reticolo a maglie ortogonali, anche se non rigidamente perfetto.

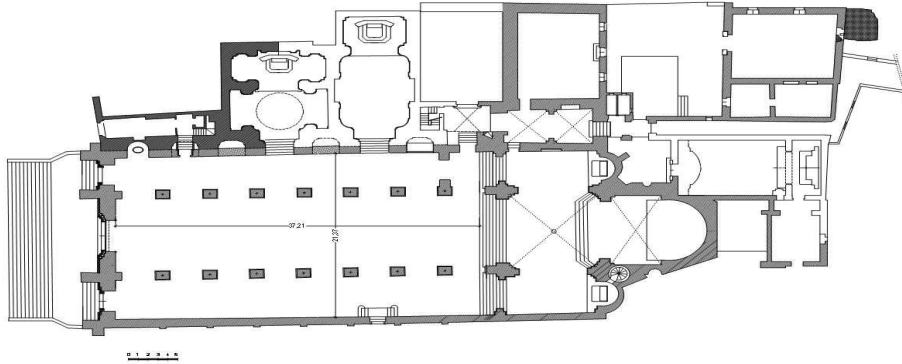


Fig. (3.4) Pianta della Cattedrale di Cosenza

Le campate sono quadrate; a ogni due campate della navata minore, corrisponde una campata della navata maggiore; siamo in presenza del modulo “ad quadratum”. La forma base della chiesa è il “modulo ad quadratum” che viene usato soprattutto nelle navate laterali e nella navata centrale.

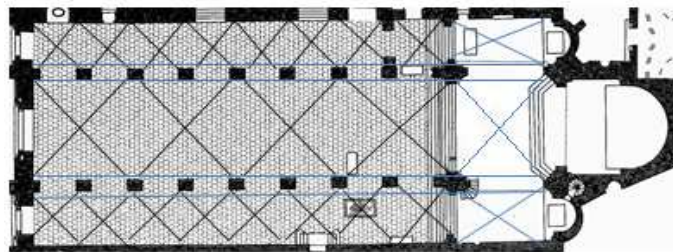


Fig. (3.5) Pianta della Cattedrale di Cosenza

Il modulo del doppio quadrato o rettangolo con i lati in rapporto 1:2, rappresenta il Tempio, dimora terrestre di Dio (congiunzione del Cielo=1 e della Terra=2).

Sin dall'antichità gli architetti, hanno studiato i moduli: unità di misura convenzionale sulla quale si rapportano le varie parti di un edificio allo

scopo di ottenere proporzione tra loro e rispetto dell'ambiente circostante. Il modulo è una unità di misura basata sulla sezione aurea, quindi su un rapporto fisso. L'idea di bellezza, negli antichi Greci, era espressa sotto forma di numeri e proporzioni, grazie ai quali fu possibile definire una proporzione molto semplice, che utilizzava due sole grandezze  $a$  e  $b$ , e la loro somma  $a + b$  come terzo termine. Si ottiene in questo modo la proporzione geometrica che origina il rapporto della sezione aurea.

### 3.6 Rapporti modulari e Proporzioni armoniche.

Alcuni dei rapporti modulari presenti nella Cattedrale di Cosenza si possono così sintetizzare:

- La linea di base della chiesa è uguale all'altezza della facciata, con la quale forma un quadrato;
- Se la parte inferiore è esattamente la metà della superficie del quadrato, quella superiore, riguardo al quadrato tra i lati obliqui, equivale a un quarto;
- Dividendo ancora questa superficie in quattro si ottengono dei sedicesimi di superficie che inscrivono con precisione i lati obliqui laterali;
- Il portale centrale è alto una volta e mezzo la sua larghezza (rapporto di  $2/3$ );

A questo punto, ci si pone una domanda: fino a che punto i rapporti armonici della scala musicale influenzano le proporzioni architettoniche? Da una analisi geometrica, della Cattedrale di Cosenza, si arriva a delle interessanti considerazioni. Intanto, c'è da dire che la difficoltà riscontrata nell'effettuare l'analisi geometrica è riconducibile in prevalenza allo stato di conservazione della struttura; questa, infatti, essendo un edificio sacro storico, con il passare dei secoli ha subito l'aggressione degli agenti atmosferici e il naturale deteriorarsi della materia che, hanno compromesso molti elementi architettonici decorativi. Al normale degrado si somma poi, quello creato dall'uomo, con interventi edilizi che hanno modificato l'impostazione generale della fabbrica. Alla luce di tali considerazioni, sono state esaminate le varie parti della struttura, facendo riferimento alle conoscenze geometriche e matematiche degli architetti del tempo; sono stati presi in considerazione i metodi di progettazione grafica

applicati, adeguatamente documentati, allo scopo di non veicolare l'esame geometrico verso ragionamenti arbitrari e soggettivi, evitando così forzature che non avrebbero avuto alcun valore scientifico. Pertanto, l'indagine è stata compiuta su diverse scale partendo dall'esame globale del prospetto per arrivare ai singoli elementi architettonici che lo compongono. In un secondo tempo è stata analizzata la composizione degli elementi presenti nella fabbrica. Lo scopo di questo studio è stato quello di mettere in evidenza il metodo geometrico e proporzionale seguito nell'impostazione generale dell'edificio sacro. Successivamente si è passati ad un esame più dettagliato con il quale sono stati studiati i singoli elementi che compongono la facciata quali: i moduli ed i rapporti armonici anche se riguardano singole parti del prospetto, il portale, i rosoni, i fregi, i mosaici. Lo studio non è stato condotto al di fuori dalle varie parti strutturali dell'edificio ma nel suo contesto complessivo. Le relazioni delle varie parti fra di loro e con l'intera struttura, sono stabilite da un armonico sistema proporzionale derivato dai semplici rapporti che stanno alla base dell'armonia musicale. Questo sistema di rapporti permette di definire la posizione e la dimensione di ogni elemento del prospetto. Le caratteristiche più evidenti possiamo così riassumerle:

- La forma più utilizzata nella costruzione è il quadrato, infatti, la facciata si iscrive in un quadrato avente il lato coincidente con la linea di base della chiesa;
- Suddividendo questo quadrato in sedici parti si scandiscono le sezioni fondamentali della facciata: la zona inferiore, l'ordine superiore, gli ingressi;
- Dividendo ancora questi quadrati in quadrati ancora più piccoli ( $1/16$  del quadrato di partenza) si vengono a determinare le altre misure dell'edificio;
- Il rapporto di 1:2 (proporzioni basate sull'ottava) domina la composizione dell'intera facciata, che risulta inscritta nel quadrato, mentre i quadrati minori, con lato pari ad  $1/4$  di quello maggiore, stabiliscono il rapporto tra i due piani. La facciata è scandita da 8 quadratini nella parte inferiore e altri 8 quadratini nella parte superiore;
- La campata del portale inoltre è di altezza pari a una volta e mezzo la sua larghezza, secondo il rapporto 2:3 (proporzioni basate sulla quinta).

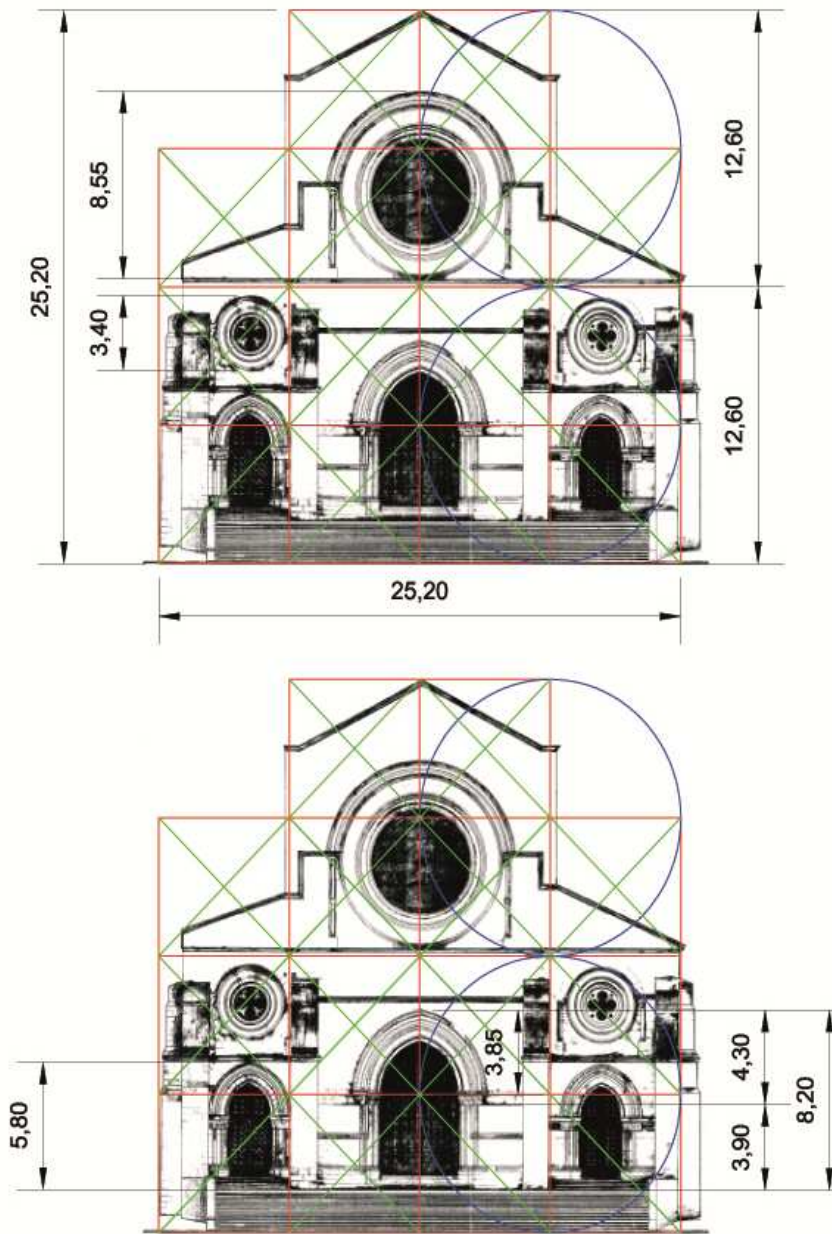


Fig. (3.6) Analisi geometrica della facciata della Cattedrale di Cosenza

# CAPITOLO 4

## LA SIMMETRIA

### 4 – Distanza euclidea

Nel piano euclideo <sup>(35)</sup>, consideriamo la distanza associata a due punti qualsiasi  $p$  e  $q$ , un numero reale positivo  $\delta(p, q)$ , in modo che siano verificate le condizioni (D0) a (D6) sotto elencate.

(D0) Dati due punti  $p$  e  $q$ , le distanze  $\delta(p, q)$  e  $\delta(q, p)$  sono uguali. La distanza  $\delta(p, q)$  è uguale a 0 se e solo se i punti  $p$  e  $q$  coincidono.

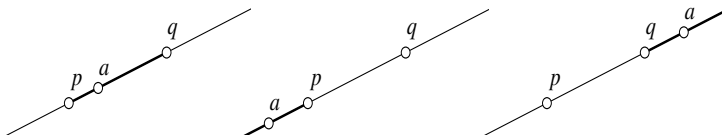
(D1) Dati tre punti non allineati  $p$ ,  $q$  ed  $r$ , abbiamo

$$|\delta(p, q) - \delta(q, r)| < \delta(p, r) < \delta(p, q) + \delta(q, r) .$$

(D2) Dati tre punti allineati  $p$ ,  $q$  ed  $r$ , abbiamo

$$\delta(p, r) = \delta(p, q) + \delta(q, r) \quad \text{o} \quad \delta(p, r) = |\delta(p, q) - \delta(q, r)| .$$

**Osservazione (4.1.1)** — Indichiamo con  $p$  e  $q$  due punti distinti.



---

<sup>(35)</sup> *Euclide*, IV secolo a.C., matematico greco.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto  $a$  giaccia sul segmento  $pq$  ossia su ambedue le semirette  $pq$  e  $qp$  <sup>(36)</sup>, è che si abbia

$$\delta(p, q) = \delta(p, a) + \delta(a, q) .$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto  $a$  giaccia sull'opposta della semiretta  $pq$  è che si abbia

$$\delta(p, q) = \delta(q, p) = \delta(q, a) - \delta(a, p) .$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto  $a$  giaccia sull'opposta della semiretta  $qp$  è che si abbia

$$\delta(p, q) = \delta(p, a) - \delta(a, q) .$$

Le asserzioni precedenti possono essere utilizzate come definizione dei concetti di semiretta e di segmento.

(D3) Dati due punti distinti  $p$  e  $q$  e dati due numeri reali strettamente positivi  $\lambda$  e  $\mu$ , con

$$\delta(p, q) < \lambda + \mu ,$$

esistono esattamente due punti  $a$  e  $b$  tali che si abbia

$$\delta(a, p) = \delta(b, p) = \lambda \quad \text{e} \quad \delta(a, q) = \delta(b, q) = \mu .$$

(D4) Dati due punti distinti  $p$  e  $q$  e dati due numeri reali strettamente positivi  $\lambda$  e  $\mu$ , con

$$\delta(p, q) = \lambda + \mu \quad \text{o} \quad \delta(p, q) = |\lambda - \mu| ,$$

esiste esattamente un punto  $c$ , giacente sulla retta  $pq$ , tale che si abbia

$$\delta(c, p) = \lambda \quad \text{e} \quad \delta(c, q) = \mu .$$

**Osservazione (4.1.2)** — Indichiamo con  $\lambda$  la distanza tra due punti distinti  $p$  e  $q$ .

La proprietà (D4) fornisce due punti  $a$  e  $b$  giacenti sulla retta  $pq$ , tali che si abbia

---

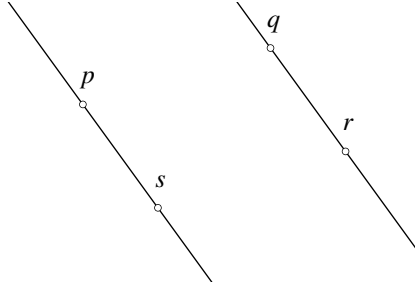
<sup>(36)</sup> Dati due punti distinti  $p$  e  $q$ , indicheremo con  $pq$  sia la retta passante per i punti  $p$  e  $q$ , sia la semiretta di estremità  $p$  passante per il punto  $q$  e sia il segmento di estremità  $p$  e  $q$ .

$$\delta(a, p) = \delta(a, q) = \lambda/2 \quad \delta(b, p) = 2\lambda \quad \delta(b, q) = \lambda .$$

Diremo che il punto  $a$  è il *punto medio del segmento*  $pq$ .

Osserviamo che il punto  $q$  è il punto medio del segmento  $pb$ .

Chiameremo *parallelogramma* una famiglia  $(p, q, r, s)$  di punti non allineati e a due a due distinti, tale che le rette  $pq$  ed  $sr$  siano parallele e le rette  $ps$  e  $qr$  parallele <sup>(37)</sup>.



(D5) Indichiamo con  $(p, q, r, s)$  una famiglia di punti non allineati e a due a due distinti.

Se la famiglia  $(p, q, r, s)$  è un parallelogramma, abbiamo

$$\delta(p, q) = \delta(s, r) \quad \text{e} \quad \delta(p, s) = \delta(q, r) .$$

Viceversa, se i punti  $q$  ed  $r$  giacciono dalla stessa parte della retta  $ps$  <sup>(38)</sup>, se le rette  $pq$  ed  $sr$  sono parallele e se abbiamo

$$\delta(p, q) = \delta(s, r) ,$$

le rette  $ps$  e  $qr$  sono parallele.

**Osservazione (4.1.3)** — L'utilizzo della seconda parte della proprietà - (D5) richiede alcune precauzioni in quanto la condizione che i punti  $q$  ed  $r$  giacciono dalla stessa parte della retta  $ps$  non è sempre di facile verifica (anche se ogni volta sembrerà ovvio guardando la figura). Per aiutarci, introdurremo ora un importante concetto riguardante le semirette.

---

<sup>(37)</sup> Nella definizione precedente, bisogna rispettare l'ordine dei punti. Ad esempio, nella figura seguente, la famiglia  $(p, q, s, r)$  non è un parallelogramma.

<sup>(38)</sup> Questo significa che la retta  $ps$  non incontra il segmento  $qr$ .



Diremo che due semirette  $\alpha$  e  $\beta$  sono *cofinali* se hanno stesso supporto e se tutti i punti giacenti su  $\alpha$  giacciono su  $\beta$  oppure se tutti i punti giacenti su  $\beta$  giacciono su  $\alpha$ .

La seguente asserzione risulta immediatamente dalle definizioni.

**Lemma (4.1.4)** — *Indichiamo con  $\alpha$  e  $\beta$  due semirette distinte che abbiano stesso supporto e con  $p$  e  $q$  le loro rispettive estremità.*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché le semirette  $\alpha$  e  $\beta$  siano cofinali è che il punto  $q$  giaccia sulla semiretta  $\alpha$  e che il punto  $p$  non giaccia sulla semiretta  $\beta$  oppure, viceversa, che il punto  $p$  giaccia sulla semiretta  $\beta$  e che il punto  $q$  non giaccia sulla semiretta  $\alpha$ .*

**Lemma (4.1.5)** — *Indichiamo con  $A$  e  $B$  due rette disgiunte, con  $a$  un punto giacente sulla retta  $A$ , con  $p$  e  $q$  due punti distinti giacenti sulla retta  $B$ .*

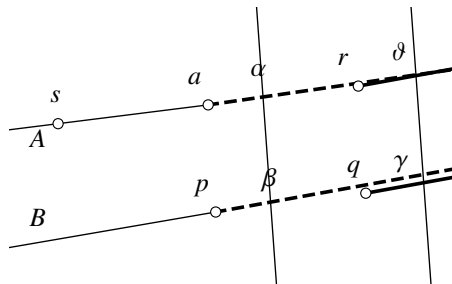
*Indichiamo poi con  $\alpha$  una delle due semirette di supporto  $A$  ed estremità  $a$ , con  $\beta$  e  $\gamma$  le sue immagini per le proiezioni parallele dalla retta  $A$  sulla retta  $B$  che portino il punto  $a$ , rispettivamente, sul punto  $p$  e sul punto  $q$ . Le semirette  $\beta$  e  $\gamma$  sono cofinali.*

**Dimostrazione** — La parallela alla retta  $ap$  passante per il punto  $q$  incide la retta  $A$  in un punto  $r$  mentre la parallela alla retta  $aq$  passante per il punto  $p$  incide la retta  $A$  in un punto  $s$ .

Poiché i punti  $p$  e  $q$  sono distinti, lo sono anche i punti  $r$  e  $s$ . Inoltre, in base alla proprietà (D5), abbiamo

$$\delta(a, r) = \delta(p, q) = \delta(a, s).$$

In particolare, uno ed uno solo dei punti  $r$  oppure  $s$  giace sulla semiretta  $\alpha$ . Supponiamo, ad esempio, che sia il punto  $r$ .

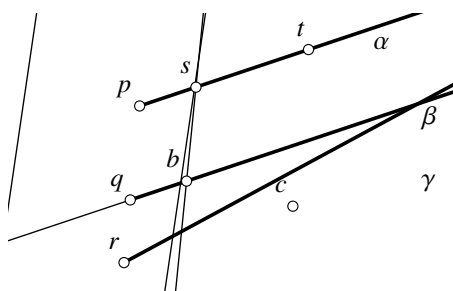


Ogni punto giacente sulla semiretta  $\vartheta$ , opposta della semiretta  $ra$ , giace sulla semiretta  $\alpha$  e si conclude osservando che l'immagine della semiretta  $\vartheta$  per la proiezione parallela della retta  $A$  sulla retta  $B$  che porti il punto  $a$  sul punto  $p$  coincide con la semiretta  $\gamma$ .

**Lemma (4.1.6)** — *Indichiamo con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tre semirette i cui supporti siano a due a due disgiunti e le cui estremità  $p$ ,  $q$  ed  $r$  siano allineate.*

*Supponiamo che le semirette  $\beta$  e  $\gamma$  siano, rispettivamente, l'immagine della semiretta  $\alpha$  per la proiezione parallela che porti il punto  $p$  sul punto  $q$  o sul punto  $r$ .*

*Qualsiasi punto giacente sulla semiretta  $\beta$  e qualsiasi punto giacente sulla semiretta  $\gamma$  giacciono dalla stessa parte della retta  $qr$ .*



**Dimostrazione** — Ogni punto  $b$  giacente sulla semiretta  $\beta$  è l'immagine di un punto  $s$  giacente sulla semiretta  $\alpha$  e, analogamente, ogni punto  $c$  giacente sulla semiretta  $\gamma$  è l'immagine di un punto  $t$  giacente sulla semiretta  $\alpha$ .

Se la retta  $qr$  incide il segmento  $bc$  in un punto  $u$ , il punto  $p$  giace sul segmento  $st$ , ma questo non è possibile, da cui l'asserzione.

Dati due punti distinti  $p$  e  $q$ , chiameremo *asse del segmento  $pq$*  <sup>(39)</sup>, la perpendicolare alla retta  $pq$  passante per il punto medio del segmento  $pq$ .

(D6) Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto  $a$  sia equidistante da due punti distinti  $p$  e  $q$  è che giaccia sull'asse del segmento  $pq$ .

---

<sup>(39)</sup> Si utilizza anche la parola *mediatrice* al posto della parola *asse*.

## 4.2 Isometrie

Chiameremo *isometria* una costruzione  $\varphi$  che ad ogni punto  $p$  del piano associa un punto  $a$ , chiamato *immagine del punto  $p$*  ed indicato con  $\varphi(p)$ , in modo che siano conservate le distanze ossia in modo che, dati due punti qualsiasi  $p$  e  $q$ , si abbia

$$\delta(\varphi(p), \varphi(q)) = \delta(p, q) .$$

**Lemma (4.2.1)** — *Ogni isometria  $\varphi$  è biunivoca ossia, per ogni punto  $a$ , esiste un punto  $p$  ed uno solo che abbia come immagine il punto  $a$ .*

**Dimostrazione** — L'unicità del punto  $p$  risulta immediatamente dalla proprietà (D0): due punti distinti hanno immagini distinte.

Per dimostrarne l'esistenza, indichiamo con  $q$  ed  $r$  due punti distinti qualsiasi e, rispettivamente, con  $b$  e  $c$  le loro immagini  $\varphi(q)$  e  $\varphi(r)$ .

Supponiamo, in un primo tempo, che il punto  $a$  non giaccia sulla retta  $bc$ . Essendo i punti  $a$ ,  $b$  e  $c$  non allineati, la proprietà (D1) implica che, posto

$$\lambda = \delta(a, b) \quad \text{e} \quad \mu = \delta(a, c) ,$$

si abbia

$$\delta(q, r) = \delta(\varphi(q), \varphi(r)) = \delta(b, c) < \delta(b, a) + \delta(a, c) = \lambda + \mu .$$

In base alla proprietà (D3), esistono pertanto due punti distinti  $s$  e  $t$  tali che si abbia

$$\delta(s, q) = \delta(t, q) = \lambda \quad \text{e} \quad \delta(s, r) = \delta(t, r) = \mu .$$

Osserviamo che

$$\delta(\varphi(s), b) = \delta(\varphi(s), \varphi(q)) = \delta(s, q) = \lambda = \delta(a, b)$$

e, analogamente,

$$\delta(\varphi(s), c) = \delta(a, c) \quad \delta(\varphi(t), b) = \delta(a, b) \quad \delta(\varphi(t), c) = \delta(a, c) .$$

In base alla proprietà (D3), uno dei punti  $\varphi(s)$  o  $\varphi(t)$  coincide con il punto  $a$  il che, in questo caso, conclude la dimostrazione del lemma.

Se il punto  $a$  giace sulla retta  $bc$ , possiamo procedere nella stessa maniera, utilizzando le proprietà (D2) e (D4) anziché le proprietà (D1) e (D3).

Conserviamo le notazioni del lemma (4.2.1).

Chiameremo *reciproca di  $\varphi$*  l'operazione  $\psi$  che ad ogni punto  $a$  associa l'unico punto  $p$  che abbia come immagine il punto  $a$ . Osserviamo che, per definizione, condizione necessaria e sufficiente affinché il punto  $\varphi(p)$  coincida con il punto  $a$  è che il punto  $\psi(a)$  coincida con il punto  $p$ .

In base a queste *relazioni di reciprocità* e alle definizioni risulta che la costruzione  $\psi$  è anch'essa una isometria.

**Lemma (4.2.2)** — *Indichiamo con  $\varphi$  una isometria.*

*Condizione necessaria e sufficiente affinché tre punti  $p$ ,  $q$  ed  $r$  siano allineati è che lo siano le loro immagini  $\varphi(p)$ ,  $\varphi(q)$  e  $\varphi(r)$ .*

**Dimostrazione** — Supponiamo che i punti  $p$ ,  $q$  ed  $r$  siano allineati.

Risulta dalla proprietà (D1) che abbiamo

$$\delta(p, r) = \delta(p, q) + \delta(q, r) \quad \text{o} \quad \delta(p, r) = |\delta(p, q) - \delta(q, r)| .$$

Dalle proprietà (D1) e (D2) e dalle relazioni

$$\delta(\varphi(p), \varphi(r)) = \delta(\varphi(p), \varphi(q)) + \delta(\varphi(q), \varphi(r))$$

o

$$\delta(\varphi(p), \varphi(r)) = |\delta(\varphi(p), \varphi(q)) - \delta(\varphi(q), \varphi(r))|$$

risulta che i punti  $\varphi(p)$ ,  $\varphi(q)$  ed  $\varphi(r)$  sono allineati, il che dimostra la necessità della condizione.

La sufficienza si dimostra osservando che la reciproca di  $\varphi$  è una isometria.

Indichiamo con  $\varphi$  una isometria, con  $p$  e  $q$  due punti distinti giacenti su una retta  $A$ .

Risulta dal lemma (4.2.2) che l'immagine di qualsiasi punto giacente sulla retta  $A$  giace sulla retta  $B$  passante per i punti  $\varphi(p)$  e  $\varphi(q)$  e che, viceversa, qualsiasi punto giacente sulla retta  $B$  è l'immagine di un punto giacente sulla retta  $A$ .

Chiameremo la retta  $B$  *l'immagine della retta  $A$  per l'isometria  $\varphi$*  e la indicheremo con  $\varphi(A)$ .

**Lemma (4.2.3)** — *Le immagini di due rette parallele per una isometria sono parallele.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria, con  $A$  e  $B$  due rette parallele.

Supponiamo poi che le rette  $\varphi(A)$  e  $\varphi(B)$  non siano disgiunte ossia che esista un punto  $c$  che giaccia su ambedue. Esistono due punti, uno indicato con  $p$  giacente sulla retta  $A$  e uno indicato con  $q$  giacente sulla retta  $B$ , che abbiano ambedue come immagine il punto  $c$ .

In base al lemma (4.2.1), i punti  $p$  e  $q$  coincidono. Ne risulta che le rette  $A$  e  $B$  coincidono, così come le loro immagini, il che conclude la dimostrazione del lemma.

Indichiamo con  $\varphi$  una isometria e con  $A$  una retta di direzione  $\Gamma$ .

Risulta dal lemma (4.2.3) che, per ogni retta  $B$  di direzione  $\Gamma$ , le rette  $\varphi(A)$  e  $\varphi(B)$  hanno stessa direzione  $\Delta$  e che, viceversa, ogni retta di direzione  $\Delta$  è l'immagine di una retta di direzione  $\Gamma$ .

Chiameremo la direzione  $\Delta$  *l'immagine della direzione  $\Gamma$  per l'isometria  $\varphi$*  e la indicheremo con  $\varphi(\Gamma)$ .

**Osservazione (4.2.4)** — Abbiamo visto come la sua caratterizzazione metrica consente di definire l'immagine di una retta per una isometria. Nello stesso modo, possiamo definire l'immagine di una semiretta, di un segmento o di un semipiano.

Indichiamo con  $\varphi$  e  $\psi$  due isometrie.

L'immagine di un punto  $p$  per  $\varphi$  è un punto  $q$  mentre l'immagine del punto  $q$  per  $\psi$  è un punto  $a$ . Chiameremo *composta di  $\varphi$  e di  $\psi$* , ed indicheremo con  $\psi \circ \varphi$ , la costruzione che fa passare direttamente dal punto  $p$  al punto  $a$  ossia dal punto  $p$  al punto  $\psi(\varphi(p))$ .

Risulta immediatamente dalle definizioni che la costruzione  $\psi \circ \varphi$  è anche essa una isometria.

La strana costruzione che ad ogni punto fa corrispondere se stesso è una isometria che chiameremo *identità*, e che indicheremo con  $\iota$ .

**Lemma (4.2.5)** — *L'operazione che a due isometrie fa corrispondere la loro composta è associativa.*

*In altre parole, date tre isometrie  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\chi$ , l'isometria  $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$  coincide con l'isometria  $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$  <sup>(40)</sup>.*

---

<sup>(40)</sup> Dire che due isometrie *coincidono* significa che le immagini per l'una e per l'altra di qualsiasi punto coincidono.

**Dimostrazione** — L'asserzione risulta immediatamente dalle definizioni.

**Osservazione (4.2.6)** — L'operazione di composizione munisce l'insieme delle isometrie di una struttura di gruppo. Infatti, tale operazione è associativa, l'identità funge da elemento neutro mentre la reciproca di ogni isometria funge da simmetrico della stessa.

Questo consente di poter utilizzare alcune *formule* la cui verifica diretta rimane comunque elementare.

Indichiamo, ad esempio, con  $\varphi$  e  $\psi$  delle isometrie qualsiasi, con  $\chi$  e  $\kappa$  delle isometrie reciproche l'una dall'altra.

Le isometrie  $(\psi \circ \kappa) \circ (\chi \circ \varphi)$  e  $\psi \circ \varphi$  coincidono.

Condizione necessaria e sufficiente affinché le isometrie  $\chi \circ \varphi$  e  $\psi$  coincidano è che le isometrie  $\varphi$  e  $\kappa \circ \psi$  coincidano e, analogamente, condizione necessaria e sufficiente affinché le isometrie  $\varphi \circ \chi$  e  $\psi$  coincidano è che le isometrie  $\varphi$  e  $\psi \circ \kappa$  coincidano.

La reciproca della composta  $\psi \circ \varphi$  si ottiene componendo *nell'ordine* la reciproca di  $\psi$  e la reciproca di  $\varphi$ .

Studiare una isometria  $\varphi$ , significa essenzialmente studiare i suoi *invarianti* ossia i punti, le rette e le direzioni lasciati fissi.

Un *punto fisso* dell'isometria  $\varphi$  è un punto  $p$  la cui immagine  $\varphi(p)$  coincide con il punto  $p$ .

Una *retta fissa* dell'isometria  $\varphi$  è una retta  $A$  la cui immagine  $\varphi(A)$  coincide con la retta  $A$ . Questo non significa che ogni punto  $p$  giacente sulla retta  $A$  sia fisso, ma che la sua immagine  $\varphi(p)$  giaccia ancora sulla retta  $A$ .

Una *direzione fissa* dell'isometria  $\varphi$  è una direzione  $\Gamma$  la cui immagine  $\varphi(\Gamma)$  coincide con la direzione  $\Gamma$ . Questo non significa che ogni retta  $A$  di direzione  $\Gamma$  sia fissa, ma che la sua immagine  $\varphi(A)$  sia ancora una retta di direzione  $\Gamma$  ossia che sia parallela alla retta  $A$ .

**Lemma (4.2.7)** — *Una isometria che lasci fissi due punti distinti lascia fissi tutti i punti della retta passante per questi due punti.*

*Una isometria che lasci fisse due rette incidenti lascia fisso il loro punto di incidenza.*

*Una isometria che lasci fissa una retta lascia fissa la sua direzione.*

*Una isometria che lasci fissi una direzione ed un punto lascia fissa la retta di quella direzione passante per quel punto.*

**Dimostrazione** — Se una isometria  $\varphi$  lascia fissi due punti distinti  $p$  e  $q$ , lascia certamente fissa la retta  $pq$ . Inoltre, per ogni punto  $r$  giacente su questa retta, l'osservazione (4.1.1) implica che abbiamo

$$\delta(r, p) = \delta(r, q) - \delta(q, p) \quad \delta(p, r) = \delta(p, q) - \delta(q, r)$$

$$\delta(r, p) = \delta(r, q) + \delta(q, p),$$

a secondo che il punto  $r$  giaccia sull'opposta della semiretta  $pq$ , sul segmento  $pq$  o sull'opposta della semiretta  $qp$ .

A secondo della posizione del punto  $r$ , abbiamo pertanto

$$\delta(\varphi(r), p) = \delta(\varphi(r), q) - \delta(q, p) \quad \delta(p, \varphi(r)) = \delta(p, q) - \delta(q, \varphi(r))$$

$$\delta(\varphi(r), p) = \delta(\varphi(r), q) + \delta(q, p).$$

In ogni caso, sempre in base all'osservazione (4.1.1), il punto  $\varphi(r)$  coincide con il punto  $r$ , il che dimostra la prima asserzione.

Per dimostrare la seconda, indichiamo con  $\varphi$  una isometria che lasci fisse due rette  $A$  e  $B$  incidenti in un punto  $p$ .

Il punto  $\varphi(p)$  giace sulla retta  $\varphi(A)$ , ossia sulla retta  $A$ , e sulla retta  $\varphi(B)$ , ossia sulla retta  $B$ . Coincide pertanto con il punto  $p$ .

Per dimostrare la terza asserzione, indichiamo con  $\varphi$  una isometria che lasci fissa una retta  $A$  di direzione  $\Gamma$ . In base al lemma (4.2.3), l'immagine  $\varphi(B)$  di qualsiasi retta  $B$  di direzione  $\Gamma$  è una retta parallela alla retta  $\varphi(A)$  ossia alla retta  $A$  e quindi di direzione  $\Gamma$ .

Infine, per dimostrare la quarta asserzione, indichiamo con  $\varphi$  una isometria che lasci fissi un punto  $p$  ed una direzione  $\Gamma$ . L'immagine  $\varphi(A)$  della retta  $A$  di direzione  $\Gamma$  passante per il punto  $p$  è una retta di direzione  $\Gamma$  passante per il punto  $p$ , il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Lemma (4.2.8)** — *Indichiamo con  $\varphi$  una isometria e con  $p$  un punto la cui immagine  $a$  è distinta dal punto  $p$ .*

*Eventuali punti fissi dell'isometria  $\varphi$  giacciono sull'asse del segmento  $pa$ .*

**Dimostrazione** — Supponiamo che l'isometria  $\varphi$  possieda un punto fisso  $c$ .

Possiamo scrivere

$$\delta(p, c) = \delta(\varphi(p), \varphi(c)) = \delta(a, c)$$

e l'asserzione risulta dalla proprietà (D6) del secondo paragrafo.

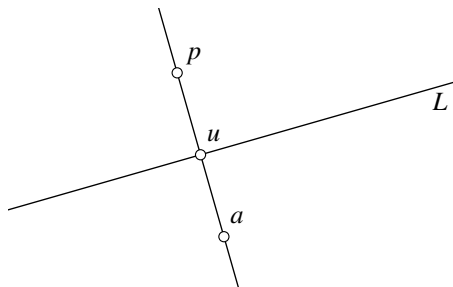
**Teorema (4.2.9)** — *Una isometria  $\varphi$  che possieda tre punti fissi non allineati coincide con l'identità.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria distinta dall'identità. Per definizione, esiste un punto  $p$  la cui immagine  $a$  è distinta dal punto  $p$ . In base al lemma (4.2.8), i punti fissi dell'isometria  $\varphi$  si trovano sull'asse del segmento  $pa$  e sono, in particolare, allineati il che conclude la dimostrazione del teorema.

### 4.3 Ribaltamenti

Data una retta  $L$ , chiameremo *ribaltamento di asse  $L$*  ed indicheremo con  $\sigma_L$ , o semplicemente con  $\sigma$  se non vi sono rischi di confusione, la costruzione che ad ogni punto  $p$  associa il punto  $\sigma(p)$  così definito:

- Se il punto  $p$  non giace sulla retta  $L$ , la sua immagine  $\sigma(p)$  è l'unico punto  $a$  tale che la retta  $L$  coincida con l'asse del segmento  $pa$ .



In altre parole, indicato con  $u$  il piede della perpendicolare alla retta  $L$  passante per il punto  $p$ , il punto  $a$  è l'unico che verifichi le relazioni

$$\delta(a, u) = \delta(p, u) \quad \text{e} \quad \delta(a, p) = 2\delta(p, u) .$$

- Se il punto  $p$  giace sulla retta  $L$ , la sua immagine  $\sigma(p)$  coincide con il punto  $p$ .

**Teorema (4.3.1)** — *Ogni ribaltamento è una isometria.*



**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\sigma$  un ribaltamento di asse  $L$  e con  $p$  e  $q$  due punti distinti.

Dobbiamo dimostrare che vale la relazione

$$\delta(\sigma(p), \sigma(q)) = \delta(p, q) . \quad (4.3.2)$$

Per semplificare le notazioni, indicheremo con  $a$  il punto  $\sigma(p)$  e con  $b$  il punto  $\sigma(q)$ . Indicheremo poi con  $u$  il piede della perpendicolare alla retta  $L$  passante per il punto  $p$  e con  $v$  il piede della perpendicolare alla retta  $L$  passante per il punto  $q$ .

Osserviamo prima di tutto che la relazione (4.3.2) è certamente verificata se ambedue i punti  $p$  e  $q$  giacciono sull'asse mentre, se questo accade soltanto per uno di loro, l'asserzione risulta dalla proprietà (D6). Supponiamo infatti che il punto  $p$  non giaccia sull'asse e il punto  $q$  invece sì. In tal caso, la retta  $L$  è per definizione l'asse del segmento  $pq$  e abbiamo

$$\delta(a, b) = \delta(a, q) = \delta(p, q) .$$

Possiamo pertanto supporre che né il punto  $p$  né il punto  $q$  giacciono sulla retta  $L$ .

Se la retta  $pq$  è perpendicolare alla retta  $L$ , i punti  $u$  e  $v$  coincidono e abbiamo per costruzione

$$\delta(p, u) = \delta(a, u) \quad \text{e} \quad \delta(u, q) = \delta(u, b) . \quad (4.3.3)$$

Se il punto  $q$  giace sul segmento  $pu$ , il punto  $b$  giace sul segmento  $au$  e, in base alla proprietà (D2), abbiamo

$$\delta(p, q) = \delta(p, u) - \delta(u, q) \quad \text{e} \quad \delta(a, b) = \delta(a, u) - \delta(u, b) . \quad (4.3.4)$$

In base alle relazioni (4.3.3) e (4.3.4), abbiamo allora

$$\delta(a, b) = \delta(a, u) - \delta(u, b) = \delta(p, u) - \delta(u, q) = \delta(p, q) ,$$

il che, in questo caso, dimostra l'asserzione.

Se il punto  $q$  giace sull'opposta della semiretta  $pu$  o sull'opposta della semiretta  $up$ , possiamo procedere nello stesso modo.

A questo punto, affrontiamo il caso in cui la retta  $pq$  è parallela alla retta  $L$ . La famiglia  $(p, u, v, q)$  è allora un parallelogramma e, in base alla proprietà (D5), abbiamo

$$\delta(p, u) = \delta(q, v) \quad \text{e} \quad \delta(p, a) = 2\delta(p, u) = 2\delta(q, v) = \delta(q, b) .$$

Poiché i punti  $a$  e  $b$  giacciono dalla stessa parte della retta  $pq$ , la stessa proprietà implica che la famiglia  $(p, a, b, q)$  sia anch'essa un parallelogramma e abbiamo

$$\delta(a, b) = \delta(p, q) .$$

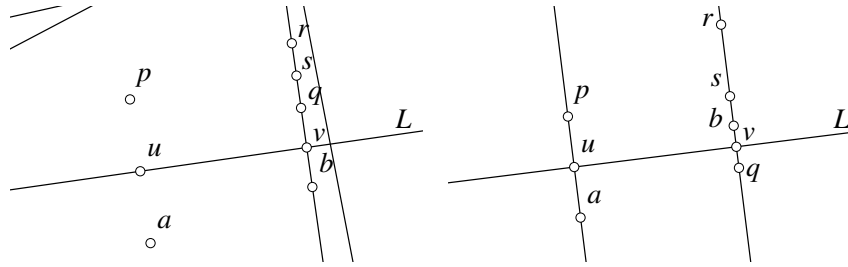
Rimane pertanto il caso in cui la retta  $pq$  incide la retta  $L$  senza esservi perpendicolare

Per semplificare le notazioni, poniamo

$$\delta(p, u) = \delta(u, a) = \lambda \quad \text{e} \quad \delta(q, v) = \delta(v, b) = \mu .$$

Scambiando eventualmente tra di loro i punti  $p$  e  $q$ , possiamo supporre che  $\mu$  sia strettamente minore di  $\lambda$ .

Indichiamo con  $r$  ed  $s$  i punti giacenti sulla retta  $qb$  e, rispettivamente, sulla parallela alla retta  $ab$  passante per il punto  $p$  e sulla parallela alla retta  $L$  passante per il punto  $p$ .



Nella figura di sinistra, i punti  $p$  e  $q$  giacciono dalla stessa parte della retta  $L$ , in quella di destra, invece, giacciono da una parte e dall'altra.

In ambedue i casi, la famiglia  $(p, a, b, r)$  è un parallelogramma e, in base alla proprietà (D5), abbiamo

$$\delta(p, a) = \delta(r, b) = 2\lambda \quad \text{e} \quad \delta(a, b) = \delta(p, r) . \tag{4.3.5}$$

D'altra parte, anche la famiglia  $(p, u, v, s)$  è un parallelogramma e abbiamo

$$\delta(p, u) = \delta(s, v) = \lambda . \tag{4.3.6}$$

Osserviamo poi che, in ambedue i casi, abbiamo

$$\delta(r, s) = \delta(r, v) - \delta(v, s) . \tag{4.3.7}$$

Nel primo caso, abbiamo inoltre

$$\delta(r, v) = \delta(r, b) - \delta(b, v) .$$

In base alle relazioni (4.3.5), (4.3.6) e (4.3.7), abbiamo pertanto

$$\delta(r, s) = \delta(r, b) - \delta(b, v) - \delta(v, s) = 2\lambda - \mu - \lambda = \lambda - \mu$$

e, in definitiva,

$$\delta(s, q) = \delta(s, v) - \delta(v, q) = \lambda - \mu = \delta(r, s) . \quad (4.3.8)$$

Nel secondo caso, abbiamo invece

$$\delta(r, v) = \delta(r, b) + \delta(b, v) .$$

In base alle relazioni (4.3.5), (4.3.6) e (4.3.7), abbiamo pertanto

$$\delta(r, s) = \delta(r, b) + \delta(b, v) - \delta(v, s) = 2\lambda + \mu - \lambda = \lambda + \mu$$

e, in definitiva,

$$\delta(s, q) = \delta(s, v) + \delta(v, q) = \lambda + \mu . \quad (4.3.9)$$

Risulta dalle relazioni (4.3.8) e (4.3.9) che, in ambedue i casi, il punto  $s$  è il punto medio del segmento  $rq$  e che quindi la retta  $ps$  è l'asse di quel segmento. In base alla proprietà (D6), abbiamo pertanto

$$\delta(p, r) = \delta(p, q)$$

il che, in base alla seconda delle relazioni (4.3.5), conclude la dimostrazione del teorema.

Il lettore sarà forse stupito dall'apparente complessità della dimostrazione precedente. Il punto fondamentale è che abbiamo utilizzato soltanto le proprietà della distanza elencate nel secondo paragrafo. La dimostrazione si poteva semplificare notevolmente utilizzando il teorema di Talete <sup>(41)</sup>.

**Proposizione (4.3.10)** — *Gli invarianti di un ribaltamento sono:*

- (1) *Tutti i punti giacenti sull'asse.*
- (2) *L'asse e tutte le rette perpendicolari all'asse.*
- (3) *La direzione dell'asse e la direzione perpendicolare all'asse.*

**Dimostrazione** – L'asserzione risulta dalle definizioni e dal lemma (4.2.7).

---

<sup>(41)</sup> *Talete di Mileto*, VI secolo a.C., filosofo, matematico e geografo greco.

**Osservazione (4.3.11)** — Componendo un ribaltamento con se stesso, otteniamo l'identità  $o$ , in altre parole, l'isometria reciproca di un ribaltamento coincide con il ribaltamento stesso.

**Proposizione (4.3.12)** — *Una isometria distinta dall'identità che possieda due punti fissi distinti è un ribaltamento il cui asse passa per i punti fissi.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria diversa dall'identità ma che possieda due punti fissi distinti  $p$  e  $q$ . Indichiamo poi con  $r$  un punto la cui immagine  $c$  è distinta dal punto  $r$ .

In base al lemma (4.2.7), il punto  $r$  non giace sulla retta  $pq$  mentre, in base al lemma (4.2.8), i punti  $p$  e  $q$  giacciono sull'asse  $A$  del segmento  $rc$ .

Ne risulta che l'isometria  $\sigma_A \circ \varphi$  possiede tre punti fissi non allineati  $p$ ,  $q$  ed  $r$  e pertanto, in base al teorema (4.2.9), coincide con l'identità.

In altre parole, l'isometria  $\varphi$  coincide con il ribaltamento  $\sigma_A$ , il che conclude la dimostrazione della proposizione.

**Lemma (4.3.13)** — *Indichiamo con  $A$  e  $B$  due rette distinte.*

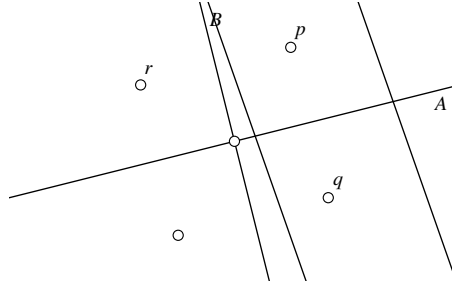
*Condizione necessaria e sufficiente affinché le isometrie  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e  $\sigma_A \circ \sigma_B$  coincidano è che le rette  $A$  e  $B$  siano perpendicolari.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $p$  un punto che giaccia sulla retta  $A$  ma non sulla retta  $B$  e con  $a$  la sua immagine per il ribaltamento  $\sigma_B$ .

Osserviamo che i punti  $p$  ed  $a$  sono distinti e che, per definizione, la retta  $B$  è l'asse del segmento  $pa$ .

Se le isometrie  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e  $\sigma_A \circ \sigma_B$  coincidono, il punto  $a$ , immagine del punto  $p$  per la prima, coincide con il punto  $\sigma_A(a)$ , immagine del punto  $p$  per la seconda. In altre parole, il punto  $a$  è lasciato fisso dal ribaltamento  $\sigma_A$  e giace pertanto sulla retta  $A$ . In particolare, la retta  $A$  coincide con la retta  $pa$  e le rette  $A$  e  $B$  sono perpendicolari.

Viceversa, supponiamo che le rette  $A$  e  $B$  siano perpendicolare ed indichiamo con  $p$  un punto qualsiasi, con  $q$  il punto  $\sigma_A(p)$  e con  $r$  il punto  $\sigma_B(p)$ .



Osserviamo prima di tutto che ogni perpendicolare alla retta  $A$  è parallela alla retta  $B$  e che, viceversa, ogni perpendicolare alla retta  $B$  è parallela alla retta  $A$ .

Ne risulta che il punto  $\sigma_B(q)$  giace sulla parallela alla retta  $A$  passante per il punto  $q$  e sulla parallela alla retta  $B$  passante per il punto  $r$ , così come il punto  $\sigma_A(r)$ , il che conclude la dimostrazione del lemma.

#### 4.4 Traslazioni

Chiameremo *traslazione* l'isometria ottenuta componendo due ribaltamenti di assi disgiunti.

**Lemma (4.4.1)** — Indichiamo con  $A$  e  $B$  due rette disgiunte, con  $\tau$  la traslazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e con  $\lambda$  la distanza tra le rette  $A$  e  $B$  <sup>(42)</sup>.

La distanza tra un qualsiasi punto  $p$  e la sua immagine  $\tau(p)$  è uguale a  $2\lambda$ .

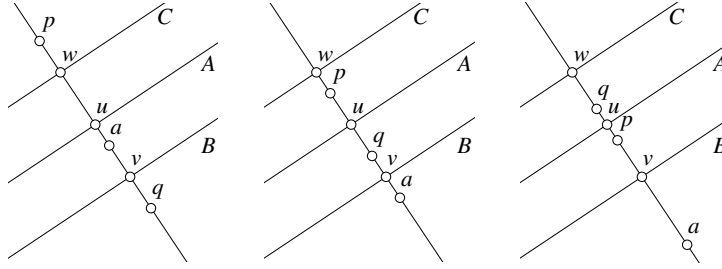
**Dimostrazione** — Indichiamo con  $a$  il punto  $\tau(p)$  e con  $u$  e  $v$  i punti in cui la perpendicolare passante per il punto  $p$  incide ciascuna delle rette  $A$  e  $B$ .

Indichiamo poi con  $q$  e  $w$  i punti  $\sigma_A(p)$  e  $\sigma_A(v)$  e con  $C$  la retta  $\sigma_A(B)$ .

Osserviamo che il punto  $a$  coincide con l'immagine del punto  $q$  per il ribaltamento  $\sigma_B$ .

---

<sup>(42)</sup> Ricordiamo che la distanza tra due rette disgiunte è la distanza tra due punti giacenti uno su ciascuna e ambedue sulla stessa perpendicolare.



Se il punto  $p$  giace sull'opposta della semiretta  $wu$ , il punto  $q$  giace sull'opposta della semiretta  $vu$ , il punto  $a$  sull'opposta della semiretta  $vq$  e quindi sulla semiretta  $vu$ . In tal caso, abbiamo

$$\delta(p, a) = \delta(p, q) - \delta(q, a) = 2(\delta(u, q) - \delta(q, v)) = 2\delta(u, v) = 2\lambda .$$

Se il punto  $p$  giace sul segmento  $wu$ , il punto  $q$  giace sul segmento  $uv$  e, in particolare, sulla semiretta  $vu$ . In tal caso, il punto  $a$  giace sull'opposta della semiretta  $vu$  e abbiamo

$$\delta(p, a) = \delta(p, q) + \delta(q, a) = 2(\delta(u, q) + \delta(q, v)) = 2\delta(u, v) = 2\lambda .$$

Infine, se il punto  $p$  giace sull'opposta della semiretta  $uw$ , il punto  $q$  giace sulla semiretta  $uw$ , il punto  $a$  sull'opposta della semiretta  $uw$  e quindi sulla semiretta  $uv$ . In tal caso, abbiamo

$$\delta(p, a) = \delta(a, p) = \delta(a, q) - \delta(q, p) = 2(\delta(v, q) - \delta(q, u)) = 2\delta(v, u) = 2\lambda ,$$

il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Proposizione (4.4.2)** — *Gli invarianti di una traslazione sono:*

- (1) *Nessun punto fisso.*
- (2) *Tutte le rette di una direzione.*
- (3) *Tutte le direzioni.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $A$  e  $B$  due rette disgiunte e con  $\tau$  la traslazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

La prima asserzione risulta immediatamente dalla proprietà (D0) e dal lemma (4.4.1): la distanza tra un punto e la sua immagine non è mai uguale a 0.

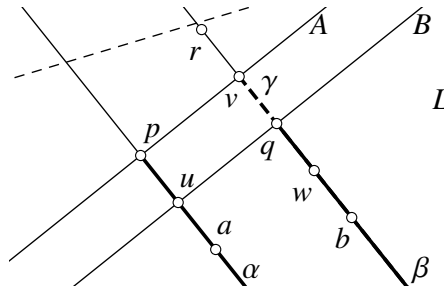
La seconda risulta poi dalla proposizione (4.3.10): ogni retta perpendicolare alle rette  $A$  e  $B$  è invariante sia per  $\sigma_A$ , sia per  $\sigma_B$ .

Per dimostrare la terza, dobbiamo verificare che ogni retta  $L$  è parallela alla sua immagine  $\tau(L)$ . Sempre in base alla proposizione (4.3.10), possiamo supporre che  $L$  non sia né perpendicolare né parallela alle rette  $A$  e  $B$ .

Indichiamo con  $p$  e  $q$  i punti in cui la retta  $L$  incide, rispettivamente, le rette  $A$  e  $B$ , con  $u$  il punto in cui la perpendicolare alla retta  $A$  passante per il punto  $p$  incide la retta  $B$  e con  $v$  il punto in cui la perpendicolare alla retta  $B$  passante per il punto  $q$  incide la retta  $A$ .

Indichiamo poi con  $r$  l'immagine del punto  $q$  per il ribaltamento  $\sigma_A$  e con  $a$  e  $b$ , rispettivamente, le immagini dei punti  $p$  ed  $r$  per il ribaltamento  $\sigma_B$ . Osserviamo che i punti  $a$  e  $b$  coincidono con le immagini dei punti  $p$  e  $q$  per la traslazione  $\tau$ .

Indichiamo infine con  $\alpha$  la semiretta  $pu$  e con  $\beta$  e  $\gamma$  le immagini di  $\alpha$  per le proiezioni parallele dalla retta  $pu$  sulla retta  $vg$  che portino il punto  $p$ , rispettivamente, sul punto  $q$  e sul punto  $v$ .



Risulta dal lemma (4.1.5) che le semirette  $\beta$  e  $\gamma$  sono cofinali. Poiché il punto  $q$  giace sulla semiretta  $\gamma$  il lemma (4.1.4) implica che il punto  $v$  giace sull'opposta della semiretta  $\beta$ .

Osserviamo poi che il punto  $r$  giace sull'opposta della semiretta  $vg$  e, in particolare, sulla semiretta  $qv$ . Ne risulta che il punto  $b$  giace sull'opposta della semiretta  $qv$  e quindi, in base a quello che precede, sulla semiretta  $\gamma$ .

Il lemma (4.1.6) implica pertanto che i punti  $a$  e  $b$  giacciono dalla stessa parte della retta  $pq$ . Poiché le rette  $pa$  e  $qb$  sono parallele e poiché il lemma (4.4.1) implica che abbiamo

$$\delta(p, a) = \delta(q, b),$$

la seconda parte della proprietà (D5) implica che le rette  $pq$  ed  $ab$  siano parallele, il che conclude la dimostrazione della proposizione.

Indichiamo con  $A$  e  $B$  due rette disgiunte.

Chiameremo *direzione della traslazione*  $\sigma_B \circ \sigma_A$  la direzione delle sue rette fisse ossia la direzione perpendicolare a quella delle rette  $A$  e  $B$ .

Come vedremo nel seguito, la proposizione (4.4.2) caratterizza completamente le traslazioni. Cominciamo per precisare un po' meglio le cose.

**Lemma (4.4.3)** — *Indichiamo con  $\varphi$  una isometria che non possieda punti fissi ma lasci fisse tutte le direzioni.*

- (1) *Ogni retta che passi per un punto e per la sua immagine è una retta fissa.*
- (2) *Le rette fisse sono tutte le rette di una direzione e nessun'altra.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $p$  un punto e con  $a$  la sua immagine  $\varphi(p)$ .

Come tutte le direzioni, quella della retta  $pa$  è fissa. In altre parole, poiché parallela alla retta  $pa$  e poiché passa per il punto  $a$ , l'immagine della retta  $pa$  coincide con la retta  $pa$ , il che dimostra il primo punto.

Indichiamo poi con  $q$  un punto qualsiasi e con  $b$  la sua immagine  $\varphi(q)$ . In base a quello che precede, la retta  $qb$  è fissa.

Se il punto  $q$  giace sulla retta  $pa$ , le rette  $pa$  e  $qb$  coincidono. Altrimenti, poiché l'isometria  $\varphi$  non possiede punti fissi, il lemma (4.2.7) implica che le rette  $pa$  e  $qb$  siano disgiunte.

In altre parole, tutte le rette passanti per un punto e per la sua immagine sono fisse e parallele.

Indichiamo con  $\Gamma$  la loro direzione e con  $r$  un punto giacente su una retta  $A$  di direzione  $\Gamma$ . La retta passante per il punto  $r$  e per la sua immagine essendo fissa, quello che precede implica che coincida con la retta  $A$ .

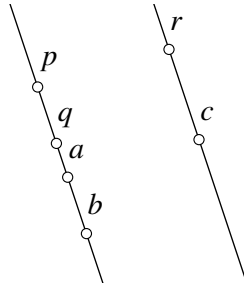
Osserviamo infine che, sempre in base al lemma (4.2.7), non esiste nessuna retta fissa di altra direzione, il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Osservazione (4.4.4)** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria che verifichi le condizioni del lemma (4.4.3), con  $p$  un punto e con  $a$  la sua immagine  $\varphi(p)$ .

La seguente *regola del parallelogramma* consente di trovare l'immagine  $b$  di qualsiasi punto  $q$ :



- Se il punto  $q$  non giace sulla retta  $pa$ , il punto  $b$  è l'unico per il quale la famiglia  $(p, q, b, a)$  è un parallelogramma. Infatti, in base al lemma (4.4.3), tale punto giace sulla parallela alla retta  $pa$  passante per il punto  $q$  e, la direzione della retta  $pq$  essendo fissa, sulla parallela alla retta  $pq$  passante per il punto  $a$ .
- Se il punto  $q$  giace sulla retta  $pa$ , si sceglie un punto ausiliare  $r$  che non vi giaccia e si costruisce la sua immagine  $c$  con la regola precedente. In tal caso, il punto  $b$  è l'unico per il quale la famiglia  $(r, q, b, c)$  è un parallelogramma.



Osserviamo che la regola precedente implica l'unicità di una isometria  $\varphi$  che verifichi le condizioni del lemma (4.4.3) e porti un punto  $p$  su un punto  $a$ .

**Proposizione (4.4.5)** — *Ogni isometria che non possieda punti fissi ma lasci fisse tutte le direzioni è una traslazione.*

*Nel rappresentare tale traslazione come composta di due ribaltamenti, possiamo scegliere arbitrariamente uno degli assi, purché sia perpendicolare alla direzione della traslazione.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria che non possieda punti fissi ma lasci fisse tutte le direzioni.

In base al lemma (4.4.3), tale isometria lascia fisse tutte le rette di una direzione  $\Gamma$ .

Indichiamo con  $A$  una qualsiasi retta perpendicolare alla direzione  $\Gamma$ , con  $p$  un punto giacente sulla retta  $A$ , con  $a$  il punto  $\varphi(p)$  e con  $B$  l'asse del segmento  $pa$ .

Osserviamo che il punto  $a$  coincide con l'immagine del punto  $p$  per la traslazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

Poiché ambedue le isometrie  $\varphi$  e  $\sigma_B \circ \sigma_A$  non possiedono punti fissi ma fissano tutte le direzioni, l'osservazione (4.4.4) implica che coincidono.

Per concludere la dimostrazione della proposizione, dobbiamo verificare la possibilità di scegliere arbitrariamente l'asse  $B$ .

Indichiamo pertanto con  $B$  una qualsiasi retta perpendicolare alla direzione  $\Gamma$ , con  $a$  un punto giacente su tale retta e con  $p$  l'unico punto la cui immagine coincide con  $a$ . Se indichiamo con  $A$  l'asse del segmento  $pa$ , possiamo dimostrare come prima che l'isometria  $\varphi$  coincide con la traslazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

**Osservazione (4.4.6)** — L'osservazione (4.4.4) e la proposizione (4.4.5) si applicano alle traslazioni. In particolare, dati due punti distinti  $p$  ed  $a$ , esiste una traslazione  $\tau$  ed una sola che porti il punto  $p$  sul punto  $a$ . Nello scrivere tale traslazione come composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  di due ribaltamenti, possiamo scegliere arbitrariamente uno degli assi  $A$  o  $B$ , purché sia perpendicolare alla retta  $pa$ .

**Proposizione (4.4.7)** — *La reciproca di una traslazione è una traslazione.*

*Se non coincide con l'identità, la composta di due traslazioni è una traslazione che non dipende dall'ordine nel quale vengono composte.*

**Dimostrazione** — Ogni traslazione  $\tau$  si ottiene componendo due ribaltamenti  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  i cui assi  $A$  e  $B$  sono disgiunti. La sua reciproca che, in base all'osservazione (4.2.6) coincide con la composta  $\sigma_A \circ \sigma_B$ , è anch'essa una traslazione.

Indichiamo con  $\tau_1$  e  $\tau_2$  due traslazioni.

Se l'isometria  $\tau_2 \circ \tau_1$  possiede un punto fisso  $p$ , le immagini del punto  $p$  per la traslazione  $\tau_1$  e per la reciproca della traslazione  $\tau_2$  coincidono. In base all'osservazione (4.4.6), queste due traslazioni coincidono e la composta  $\tau_2 \circ \tau_1$  coincide con l'identità.

Se invece non possiede punti fissi, l'isometria  $\tau_2 \circ \tau_1$  fissa comunque tutte le direzioni e, in base alla proposizione (4.4.5), è una traslazione.

Rimane da verificare che le traslazioni  $\tau_2 \circ \tau_1$  e  $\tau_1 \circ \tau_2$  coincidono.

Supponiamo, in un primo tempo, che le direzioni di  $\tau_1$  e  $\tau_2$  siano distinte ed indichiamo con  $p$  un qualsiasi punto, con  $a$  il punto  $\tau_1(p)$  e con  $b$  il punto  $\tau_2(p)$ .

Risulta dall'osservazione (4.4.4) che l'immagine del punto  $a$  per la traslazione  $\tau_2$  è l'unico punto  $c_1$  tale che la famiglia  $(p, b, c_1, a)$  sia un parallelogramma.

Analogamente, l'immagine del punto  $b$ , per la traslazione  $\tau_1$ , è l'unico punto  $c_2$  tale che la famiglia  $(p, a, c_2, b)$  sia un parallelogramma.

Poiché i punti  $c_1$  e  $c_2$  coincidono, l'osservazione (4.4.6) implica che le traslazioni  $\tau_2 \circ \tau_1$  e  $\tau_1 \circ \tau_2$  coincidono.

A questo punto, supponiamo che le traslazioni  $\tau_1$  e  $\tau_2$  abbiano stessa direzione ed indichiamo con  $\tau_3$  una traslazione di direzione distinta.

In base a quello che precede, le traslazioni  $(\tau_3 \circ \tau_2) \circ \tau_1$  e  $(\tau_2 \circ \tau_3) \circ \tau_1$  coincidono. Inoltre, poiché le traslazioni  $\tau_1$  e  $\tau_2 \circ \tau_3$  hanno direzioni distinte, le traslazioni  $(\tau_2 \circ \tau_3) \circ \tau_1$  e  $\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3)$  coincidono e, poiché le traslazioni  $\tau_1 \circ \tau_2$  e  $\tau_3$  hanno direzioni distinte, le traslazioni  $(\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3$  e  $\tau_3 \circ (\tau_1 \circ \tau_2)$  coincidono. Ne risulta che le traslazioni  $\tau_3 \circ (\tau_2 \circ \tau_1)$  e  $\tau_3 \circ (\tau_1 \circ \tau_2)$  coincidono e, in base all'osservazione (4.2.6), che le traslazioni  $\tau_2 \circ \tau_1$  e  $\tau_1 \circ \tau_2$  coincidono, il che conclude la dimostrazione della proposizione.

**Osservazione (4.4.8)** — La proposizione (4.4.7) si esprime dicendo che l'insieme di tutte le traslazioni, al quale aggiungiamo l'identità, è un sottogruppo abeliano del gruppo di tutte le isometrie.

## 4.5 Rotazioni

Chiameremo *rotazione* l'isometria ottenuta componendo due ribaltamenti di assi incidenti.

**Lemma (4.5.1)** — *Indichiamo con  $\rho$  una rotazione ottenuta componendo due ribaltamenti  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  i cui assi incidono in un punto  $c$ .*

*L'unico punto fisso della rotazione  $\rho$  è il punto  $c$ .*

**Dimostrazione** — Poiché lasciato fisso da ambedue i ribaltamenti, il punto  $c$  è lasciato fisso dalla rotazione.

D'altra parte, se un punto  $d$  è lasciato fisso dalla rotazione, l'osservazione (4.2.6) implica che le immagini  $\sigma_A(p)$  e  $\sigma_B(p)$  coincidono. Indichiamo con  $a$  questo punto.

Se il punto  $a$  fosse distinto dal punto  $p$ , l'asse del segmento  $pa$  coinciderebbe con ambedue con le rette  $A$  e  $B$ , in contraddizione con il fatto che queste rette incidono.

Il punto  $a$  coincide quindi con il punto  $p$  e, poiché lasciato fisso da ambedue i ribaltamenti, quest'ultimo coincide con il punto  $c$ , il che conclude la dimostrazione del lemma.

Il lemma precedente caratterizza le rotazioni. Vale infatti il seguente risultato.

**Proposizione (4.5.2)** — *Ogni isometria che possieda un unico punto fisso è una rotazione.*

*Nel rappresentare tale rotazione come composta di due ribaltamenti, possiamo scegliere arbitrariamente uno degli assi, purché passi per il centro.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria che possieda un unico punto fisso  $c$ , con  $A$  una qualsiasi retta passante per il punto  $c$ , con  $a$  un punto distinto dal punto  $c$  giacente sulla retta  $A$  e con  $p$  l'unico punto la cui immagine per  $\varphi$  coincida con  $a$ .

Osserviamo che, in base al lemma (4.2.8), l'asse  $B$  del segmento  $pa$  passa per il punto  $c$ .

Se l'isometria  $\sigma_B \circ \varphi$  coincidesse con l'identità, l'isometria  $\varphi$  coinciderebbe con il ribaltamento  $\sigma_B$ , in contraddizione con l'ipotesi che possieda un unico punto fisso.

Risulta, pertanto, dalla proposizione (4.3.12) che l'isometria  $\sigma_B \circ \varphi$ , che possiede due punti fissi distinti  $c$  e  $p$ , coincide con il ribaltamento  $\sigma_A$ .

In altre parole, l'isometria  $\varphi$  coincide con la rotazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

Per concludere la dimostrazione della proposizione, dobbiamo verificare la possibilità di scegliere arbitrariamente l'asse  $B$ .

Indichiamo pertanto con  $B$  una qualsiasi retta passante per il punto  $c$ , con  $a$  un punto distinto dal punto  $c$  giacente sulla retta  $B$  e con  $p$  l'unico punto la cui immagine coincide con  $a$ . Indicato con  $A$  l'asse del segmento  $pa$ , possiamo dimostrare come prima che l'isometria  $\varphi$  coincide con la rotazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

**Corollario (4.5.3)** — *Indichiamo con  $c$ ,  $p$  ed  $a$  tre punti distinti tali che si abbia*

$$\delta(c, p) = \delta(c, a).$$

Esiste una rotazione  $\rho$  di centro  $c$  ed una sola che porti il punto  $p$  sul punto  $a$ .

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $A$  l'asse del segmento  $pa$  e con  $B$  la retta  $ca$ .

Osserviamo che, in base alla proprietà (D6), la retta  $A$  passa per il punto  $c$ . Ne risulta che l'isometria  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una rotazione di centro  $c$  che porti il punto  $p$  sul punto  $a$ .

Per verificarne l'unicità, indichiamo con  $\rho$  una rotazione di centro  $c$  che porti il punto  $p$  sul punto  $a$ . Si vede come nella dimostrazione della proposizione (4.5.2) che l'isometria  $\rho \circ \sigma_A$  coincide con il ribaltamento  $\sigma_B$  e che la rotazione  $\rho$  coincide con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

**Proposizione (4.5.4)** — *Ogni isometria si ottiene componendo al più tre ribaltamenti.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\varphi$  una isometria distinta dall'identità, con  $p$  un punto che non coincida con la sua immagine  $a$ , con  $A$  l'asse del segmento  $pa$  e con  $\psi$  l'isometria  $\sigma_A \circ \varphi$ .

Poiché lascia fisso il punto  $p$ , l'isometria  $\psi$  coincide con l'identità, con un ribaltamento o con una rotazione. Poiché l'isometria  $\varphi$  coincide con la composta  $\sigma_A \circ \psi$ , questo dimostra l'asserzione.

**Proposizione (4.5.5)** — *Data una rotazione  $\rho$  di centro  $c$ , le condizioni seguenti sono equivalenti:*

- (1) *La rotazione coincide con la sua reciproca.*
- (2) *Ogni qualvolta la rotazione si scrive come composta di due ribaltamenti, gli assi sono perpendicolari.*
- (3) *L'immagine per  $\rho$  di qualsiasi punto  $p$  distinto dal centro  $c$  giace sulla retta  $pc$ .*
- (4) *Esiste un punto  $p$  distinto dal punto  $c$  la cui immagine per  $\rho$  giace sulla retta  $pc$ .*

**Dimostrazione** — Supponiamo che la prima condizione sia soddisfatta ed indichiamo con  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  due ribaltamenti la cui composta coincide con  $\rho$ . In base all'osservazione (4.2.6), la reciproca di  $\rho$  coincide con la composta  $\sigma_A \circ \sigma_B$  e, in base al lemma (4.3.13), le rette  $A$  e  $B$  sono perpendicolari.

Supponiamo pertanto che la seconda condizione sia soddisfatta ed indichiamo con  $p$  un qualsiasi punto diverso dal centro  $c$ , con  $a$  la sua immagine  $\rho(p)$  e con  $A$  la retta  $pc$ . L'asse  $B$  del segmento  $pa$  passa per il punto  $c$  e la rotazione  $\rho$  coincide con la rotazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

Ne risulta che le rette  $A$  e  $B$  sono perpendicolari e, poiché giace sulla perpendicolare alla retta  $B$  passante per il punto  $p$ , il punto  $a$  giace sulla retta  $A$ .

Considerato che la terza condizione implica chiaramente la quarta, supponiamo che quest'ultima sia verificata.

Indichiamo con  $a$  il punto  $\rho(p)$ , con  $A$  la retta  $pc$  e con  $B$  l'asse del segmento  $pa$ . La rotazione  $\rho$  coincide con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e, poiché il punto  $a$  giace sulla retta  $A$ , le rette  $A$  e  $B$  sono perpendicolari.

Risulta pertanto dal lemma (4.3.13) che le isometrie  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e  $\sigma_A \circ \sigma_B$  coincidono e dall'osservazione (4.2.6) che la rotazione  $\rho$  coincide con la sua reciproca, il che conclude la dimostrazione della proposizione.

Chiameremo *mezzogiro* ogni rotazione che verifichi le condizioni della proposizione (4.5.5).

**Osservazione (4.5.6)** — Per ogni punto  $c$ , esiste un unico mezzogiro di centro  $c$ . Tale rotazione si ottiene componendo due qualsiasi ribaltamenti i cui assi sono perpendicolari e incidono nel punto  $c$ .

**Proposizione (4.5.7)** — *Gli invarianti di una rotazione sono:*

- (1) *Un unico punto fisso.*
- (2) *Tutte le rette passanti per il punto fisso se la rotazione è un mezzogiro, nessuna nel caso contrario.*
- (3) *Tutte le direzioni se la rotazione è un mezzogiro, nessuna nel caso contrario.*

**Dimostrazione** — La prima asserzione risulta dal lemma(4.5.1).

Per dimostrare la seconda, indichiamo con  $\rho$  una rotazione di centro  $c$  e osserviamo che, in base al lemma (4.2.7), la parallela ad una retta fissa passante per il punto  $c$  è anch'essa una retta fissa. In tal caso, in base alla quarta condizione della proposizione (4.5.5), la rotazione  $\rho$  è un mezzogiro e, in base alla terza condizione della stessa proposizione, tutte le rette passanti per il punto  $c$  sono fisse. Il punto  $c$  essendo peraltro l'unico punto

fisso, il lemma (4.2.7) implica che la rotazione  $\rho$  non lascia fissa nessun'altra retta.

La terza asserzione risulta allora dal solito lemma (4.2.7).

Nello studio della composta di due rotazioni, utilizzeremo il seguente risultato che preciseremo meglio nel paragrafo successivo.

**Lemma (4.5.8)** — *Indichiamo con  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre rette passanti per uno stesso punto  $c$ .*

*L'isometria  $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$  è un ribaltamento e, in particolare, coincide con la sua reciproca  $\sigma_A \circ \sigma_B \circ \sigma_C$ .*

**Dimostrazione** — Per comodità, indichiamo con  $\varphi$  l'isometria  $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ .

Se le rette  $A$  e  $B$  coincidono, l'isometria  $\varphi$  coincide con il ribaltamento  $\sigma_C$ .

Altrimenti, la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una rotazione  $\rho$  di centro  $c$ . In base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $D$ , distinta dalla retta  $C$ , tale che la rotazione  $\rho$  coincide con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_D$ .

In base all'osservazione (4.2.6), l'isometria  $\varphi$  coincide pertanto con il ribaltamento  $\sigma_D$ , il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Proposizione (4.5.9)** — *La reciproca di una rotazione è una rotazione.*

*Se non coincide con l'identità, la composta di due rotazioni dello stesso centro è una rotazione che non dipende dall'ordine nel quale vengono composte.*

**Dimostrazione** — Ogni rotazione  $\rho$  si ottiene componendo due ribaltamenti  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  i cui assi  $A$  e  $B$  sono incidenti. Ne risulta che, in base all'osservazione (4.2.6), la sua reciproca coincide con la rotazione  $\sigma_A \circ \sigma_B$ .

Indichiamo quindi con  $\rho_1$  e  $\rho_2$  due rotazioni di centro  $c$ .

Per definizione, esistono due rette  $A$  e  $B$  passanti per il punto  $c$  tali che la rotazione  $\rho_1$  coincida con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e, in base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $C$  passante anch'essa per il punto  $c$ , tale che la rotazione  $\rho_2$  coincida con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_C$ .

Ne risulta che l'isometria  $\rho_2 \circ \rho_1$  coincide con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_A$  e che, se non coincide con l'identità, è una rotazione.

D'altra parte, la rotazione  $\rho_1 \circ \rho_2$  coincide con la composta  $\sigma_B \circ (\sigma_A \circ \sigma_C \circ \sigma_B)$  ossia, in base al lemma (4.5.8), con la composta  $\sigma_B \circ (\sigma_B \circ \sigma_C \circ \sigma_A)$  e, in definitiva, con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_A$  ossia con la rotazione  $\rho_2 \circ \rho_1$ , il che conclude la dimostrazione della proposizione.

**Osservazione (4.5.10)** — La proposizione (4.5.9) si esprime dicendo che l'insieme di tutte le rotazioni di un determinato centro al quale aggiungiamo l'identità è un sottogruppo abeliano del gruppo di tutte le isometrie.

**Proposizione (4.5.11)** — *L'isometria ottenuta componendo una rotazione ed una traslazione oppure una traslazione ed una rotazione è una rotazione.*

*L'isometria ottenuta componendo due rotazioni di centri distinti è una rotazione o una traslazione.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\rho$  una rotazione di centro  $c$ , con  $\tau$  una traslazione e con  $a$  il punto  $\tau(c)$ .

Indichiamo poi con  $B$  l'asse del segmento  $ca$  e con  $C$  la parallela alla retta  $B$  passante per il punto  $c$ .

Osserviamo che la traslazione  $\tau$  coincide con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_C$  e che, in base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $A$  passante per il punto  $c$  tale che la rotazione  $\rho$  coincida con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_A$ . Poiché distinta dalla retta  $C$ , la retta  $A$  incide la retta  $B$  e la composta  $\tau \circ \rho$  coincide con la rotazione  $\sigma_B \circ \sigma_A$ .

Si dimostra nello stesso modo che la composta  $\rho \circ \tau$  è una rotazione.

A questo punto, indichiamo con  $\rho_1$  e  $\rho_2$  due rotazioni i cui rispettivi centri  $c$  e  $d$  siano distinti e con  $C$  la retta  $cd$ .

In base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $A$  passante per il punto  $c$ , distinta dalla retta  $C$ , tale che la rotazione  $\rho_1$  coincida con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_A$  ed esiste una retta  $B$  passante per il punto  $d$ , anch'essa distinta dalla retta  $C$ , tale che la rotazione  $\rho_2$  coincida con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_C$ .

La composta  $\rho_2 \circ \rho_1$  coincide pertanto con la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$ , il che dimostra l'asserzione: se le rette  $A$  e  $B$  sono incidenti, la composta è una rotazione mentre, se sono disgiunte, è una traslazione.



## 4.6 Trasribaltamenti

Chiameremo *trasribaltamento* ogni isometria ottenuta componendo tre ribaltamenti i cui assi non sono paralleli e non passano per uno stesso punto. Come risulta dalla seguente proposizione, che completa e precisa il lemma (4.5.8), un trasribaltamento non è un ribaltamento.

**Proposizione (4.6.1)** — *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'isometria ottenuta componendo tre ribaltamenti sia un ribaltamento è che i tre assi siano paralleli o passino per uno stesso punto.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre rette qualsiasi e con  $\varphi$  l'isometria  $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ .

Se le rette  $A$  e  $B$  coincidono, le rette  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono parallele o passano per uno stesso punto mentre l'isometria  $\varphi$  coincide con il ribaltamento  $\sigma_C$ .

Possiamo pertanto supporre che le rette  $A$  e  $B$  siano distinte.

Se le rette  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono parallele, la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una traslazione e, in base all'osservazione (4.4.6), esiste una retta  $D$  per cui tale traslazione coincide con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_D$ .

Analogamente, se le rette  $A$ ,  $B$  e  $C$  passano per uno stesso punto, la composta  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una rotazione e, in base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $D$  per cui tale rotazione coincide con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_D$ .

In ambedue i casi, l'isometria  $\varphi$  coincide con il ribaltamento  $\sigma_D$ , il che dimostra la sufficienza della condizione.

Supponiamo pertanto che l'isometria  $\varphi$  sia un ribaltamento di asse  $D$ .

Osserviamo che, in tal caso, le isometrie  $\sigma_B \circ \sigma_A$  e  $\sigma_C \circ \sigma_D$  coincidono.

Se le rette  $A$  e  $B$  sono parallele di direzione  $\Gamma$ , l'isometria precedente è una traslazione di direzione perpendicolare alla direzione  $\Gamma$  e, poiché anch'essa perpendicolare a tale direzione, la retta  $C$  è parallela alle rette  $A$  e  $B$ .

Se le rette  $A$  e  $B$  sono incidenti in un punto  $c$ , l'isometria  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una rotazione di centro  $c$  e, in base al lemma (4.5.1), la retta  $C$  passa anch'essa per tale punto, il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Corollario (4.6.2)** — *L'isometria ottenuta componendo in un ordine qualsiasi una traslazione e un ribaltamento è un ribaltamento o un trasribaltamento, a secondo che l'asse del ribaltamento sia perpendicolare oppure no alla direzione della traslazione.*

L'isometria ottenuta componendo in un ordine qualsiasi una rotazione e un ribaltamento è un ribaltamento o un trasribaltamento, a secondo che l'asse del ribaltamento passi oppure no per il centro della rotazione.

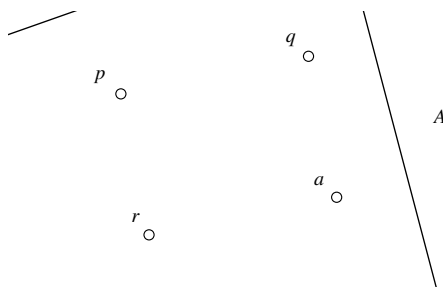
**Lemma (4.6.3)** — *Condizione necessaria e sufficiente affinché la composta di una traslazione e di un ribaltamento non dipenda dall'ordine nel quale si effettua la composizione è che l'asse del ribaltamento sia parallelo alla direzione della traslazione.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\tau$  una traslazione di direzione  $\Gamma$  e con  $\sigma$  un ribaltamento di asse  $A$ .

Supponiamo che la retta  $A$  sia parallela alla direzione  $\Gamma$  e verifichiamo che le immagini di un qualsiasi punto  $p$  per le isometrie  $\sigma \circ \tau$  e  $\tau \circ \sigma$  coincidono.

Se il punto  $p$  giace sulla retta  $A$ , l'asserzione risulta immediatamente dalle definizioni.

Supponiamo pertanto che il punto  $p$  non giaccia sulla retta  $A$  ed indichiamo con  $q$  ed  $r$ , rispettivamente, le sue immagini per la traslazione  $\tau$  e per il ribaltamento  $\sigma$ .



L'immagine della retta  $pq$  per il ribaltamento  $\sigma$  è la parallela alla retta  $A$  passante per il punto  $r$  mentre l'immagine della retta  $pr$  per la traslazione  $\tau$  è la perpendicolare alla retta  $A$  passante per il punto  $q$ . Queste due immagini incidono in un punto  $a$  che coincide sia con l'immagine del punto  $q$  per il ribaltamento  $\sigma$ , sia con l'immagine del punto  $r$  per la traslazione  $\tau$ , il che dimostra la sufficienza della condizione.

Supponiamo, viceversa, che le isometrie  $\sigma \circ \tau$  e  $\tau \circ \sigma$  coincidano. Indichiamo poi con  $p$  un punto giacente sulla retta  $A$  e con  $a$  la sua immagine per la traslazione  $\tau$ . L'immagine del punto  $p$  per l'isometria  $\sigma \circ \tau$  è il punto  $\sigma(a)$  mentre la sua immagine per l'isometria  $\tau \circ \sigma$  è il punto  $a$ . Se queste due

immagini coincidono, il punto  $a$  giace sull'asse  $A$ . Si conclude osservando che la direzione della traslazione  $\tau$  coincide con la direzione della retta  $pa$ .

**Lemma (4.6.4)** — *Ogni trasribaltamento  $\omega$  coincide con una isometria della forma  $\sigma \circ \tau \circ \tau \circ \sigma$ , dove  $\tau$  indica una traslazione e  $\sigma$  un ribaltamento il cui asse non è perpendicolare alla direzione della traslazione.*

**Dimostrazione** — Per definizione, esistono tre rette  $A$ ,  $B$  e  $C$ , che non siano parallele e non passino per uno stesso punto, tale che l'isometria  $\omega$  coincida con la composta  $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ .

L'ipotesi implica che le rette  $A$ ,  $B$  e  $C$  siano a due a due distinte.

Se le rette  $A$  e  $B$  sono disgiunte, l'isometria  $\sigma_B \circ \sigma_A$  è una traslazione  $\tau$  la cui direzione è perpendicolare a quella delle rette  $A$  e  $B$ . D'altra parte, la retta  $C$  non essendo parallela alle rette  $A$  e  $B$ , la sua direzione non è perpendicolare a quella della traslazione il che, in questo caso, dimostra l'asserzione.

Supponiamo pertanto che le rette  $A$  e  $B$  siano incidenti in un punto  $c$  e, in un primo tempo, che le rette  $B$  e  $C$  siano incidenti in un punto  $d$ . Poiché le rette  $A$ ,  $B$  e  $C$  non passano per uno stesso punto, i punti  $c$  e  $d$  sono distinti. In particolare, la retta  $A$  e la parallela  $D$  alla retta  $A$  passante per il punto  $d$  sono disgiunte.

In base alla proposizione (4.5.2), esiste una retta  $E$ , che incide la retta  $D$  nel punto  $d$ , tale che la rotazione  $\sigma_C \circ \sigma_B$  coincida con la composta  $\sigma_E \circ \sigma_D$  e il trasribaltamento  $\omega$  coincide con la composta  $\sigma_E \circ \sigma_D \circ \sigma_A$ . Si conclude allora come prima.

Rimane pertanto da considerare il caso in cui le rette  $A$  e  $B$  sono incidenti e le rette  $B$  e  $C$  disgiunte. L'isometria  $\sigma_C \circ \sigma_B$  è quindi una traslazione  $\tau$  la cui direzione è perpendicolare a quella delle rette  $B$  e  $C$ . D'altra parte, la retta  $A$  non essendo parallela alle rette  $B$  e  $C$ , la sua direzione non è perpendicolare a quella della traslazione, il che conclude la dimostrazione del lemma.

**Proposizione (4.6.5)** — *Ogni trasribaltamento si ottiene componendo una traslazione ed un ribaltamento il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione.*

**Dimostrazione** — Indichiamo con  $\omega$  un trasribaltamento che, in base al lemma (4.6.4), possiamo supporre della forma  $\sigma_A \circ \tau \circ \tau \circ \sigma_A$ , dove  $\tau$  indica

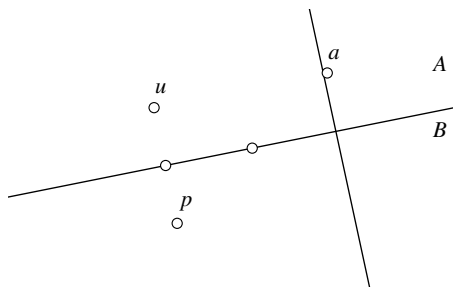
una traslazione e  $\sigma_A$  un ribaltamento il cui assi non è perpendicolare alla direzione della traslazione.

Supponiamo di essere nel primo caso.

Indichiamo allora con  $a$  un punto giacente sulla retta  $A$  e con  $p$  l'unico punto la cui immagine  $\tau(p)$  coincide con il punto  $a$ .

Poiché la retta  $pa$  è parallela alla direzione della traslazione, il piede  $u$  della perpendicolare alla retta  $A$  passante per il punto  $p$  non coincide con il punto  $a$ .

Indichiamo con  $\kappa$  la traslazione che porti il punto  $u$  sul punto  $a$ .



Se il punto  $p$  coincide con il punto  $u$ , le traslazioni  $\tau$  e  $\kappa$  coincidono, così come le rette  $A$  e  $pa$  il che, in questo caso, dimostra l'asserzione.

Supponiamo pertanto che i punti  $p$  ed  $u$  siano distinti.

Indichiamo allora con  $B$  l'asse del segmento  $pu$  e con  $\eta$  la traslazione che porti il punto  $p$  sul punto  $u$ .

Osserviamo che le traslazioni  $\eta$  e  $\sigma_A \circ \sigma_B$  coincidono e che, in base alla proposizione (4.4.7), le traslazioni  $\tau$ ,  $\kappa \circ \eta$  e  $\eta \circ \kappa$  coincidono.

Ne risulta che l'isometria  $\omega$ , che coincide con la composta  $\sigma_A \circ \tau$ , coincide con la composta  $\sigma_A \circ (\eta \circ \kappa)$  ossia con la composta  $\sigma_B \circ \kappa$  il che, in questo caso, dimostra l'asserzione.

Se il trasribaltamento  $\omega$  è della forma  $\tau \circ \sigma_A$ , si osservi che la sua reciproca si ottiene componendo la traslazione reciproca di  $\tau$  con il ribaltamento  $\sigma_A$  e quindi, in base a quello che precede e al lemma (4.6.3), componendo in un ordine qualsiasi una traslazione e un ribaltamento il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione.

Ne risulta che anche l'isometria  $\omega$  è della stessa forma, il che conclude la dimostrazione della proposizione.

**Proposizione (4.6.6)** — *Gli invarianti di un trasribaltamento sono:*

- (1) *Nessun punto fisso.*
- (2) *Una unica retta fissa.*
- (3) *Due direzioni perpendicolari.*

**Dimostrazione** — In base alla proposizione (4.6.5), qualsiasi trasribaltamento  $\omega$  si ottiene componendo una traslazione  $\tau$  ed un ribaltamento  $\sigma_A$  il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione.

Indichiamo con  $p$  un punto e con  $a$  la sua immagine  $\omega(p)$ .

Se il punto  $p$  giace sulla retta  $A$  il punto  $\tau(p)$  giace sulla stessa retta e coincide pertanto con il punto  $a$ . Se invece non giace sulla retta  $A$ , i punti  $p$  e  $\tau(p)$  giacciono dalla stessa parte mentre il punto  $a$  giace dalla parte opposta. In ogni caso, il punto  $p$  non è lasciato fisso dall'isometria  $\omega$ .

Per definizione, la traslazione  $\tau$  fissa tutte le parallele alla retta  $A$ . L'unica di queste rette lasciata fissa dall'isometria  $\omega$  è quindi la retta  $A$  stessa. D'altra parte, in base al lemma (4.2.7) e a quello che precede, l'isometria non può fissare nessun'altra retta.

Poiché la traslazione  $\tau$  fissa tutte le direzioni, le direzioni lasciate fisse dall'isometria  $\omega$  sono due: quella della retta  $A$  e quella perpendicolare alla retta  $A$ .

Chiameremo *asse di un trasribaltamento* la sua unica retta fissa.

## 4.7 Risultati

Per comodità del lettore e per un possibile futuro utilizzo, riportiamo di seguito le definizioni e i principali risultati riguardanti le isometrie.

- (1) Ogni isometria si ottiene componendo al più tre ribaltamenti (4.5.4).
- (2) Ogni isometria ottenuta componendo due ribaltamenti coincide con l'identità se gli assi coincidono, con una traslazione se sono disgiunti e con una rotazione se sono incidenti.
- (3) Ogni isometria ottenuta componendo tre ribaltamenti è un ribaltamento se gli assi sono paralleli o se passano per uno stesso punto, un trasribaltamento negli altri casi (4.6.1).

- (4) Ogni isometria ottenuta componendo un numero pari di ribaltamenti coincide con l'identità, con una traslazione o con una rotazione (4.5.11).
- (5) Ogni isometria ottenuta componendo un numero dispari di ribaltamenti è un ribaltamento o un trasribaltamento (4.6.2).
- (6) Ogni isometria che lasci fissi tre punti non allineati coincide con l'identità (4.2.9).
- (7) Ogni isometria distinta dall'identità che lasci fissi due punti distinti è un ribaltamento (4.3.12).
- (8) Ogni isometria che lasci fisso un unico punto è una rotazione (4.3.2).
- (9) Ogni isometria che non abbia punti fissi è una traslazione o un trasribaltamento, a secondo che lasci fisse tutte le rette di una direzione o una sola.
- (10) L'insieme di tutte le isometrie è un gruppo non abeliano generato dai ribaltamenti.
- (11) L'insieme di tutte le traslazioni al quale aggiungiamo l'identità è un sottogruppo abeliano del gruppo di tutte le isometrie (4.4.7).
- (12) L'insieme di tutte le rotazioni di un determinato centro al quale aggiungiamo l'identità è un sottogruppo abeliano del gruppo di tutte le isometrie (4.5.9).
- (13) L'insieme di tutte le traslazioni e di tutte le rotazioni al quale aggiungiamo l'identità è un sottogruppo non abeliano del gruppo di tutte le isometrie (4.5.10).



## **CAPITOLO 5**

### **ROSONI, FREGI E MOSAICI**

#### **5.1 Storia e significato dei Rosoni**

Il rosone è un elemento decorativo di forma circolare le cui origini risalgono alle basiliche cristiane primitive del V e VI secolo. Solitamente è presente sull'asse della navata principale di un edificio sacro, talvolta anche sulle navate secondarie, o in corrispondenza di cappelle o bracci trasversali. Fino alla fine del XII secolo, queste aperture consistono in semplici fori circolari di dimensioni contenute, privi di cornice. Con l'architettura romanica il rosone divenne elemento costitutivo tipico delle facciate. Lo schema decorativo che arricchisce i prospetti di opere architettoniche, quali la Cattedrale di Cosenza, si modificò nelle architetture romaniche sentendo gli effetti dell'influenza bizantina. Il gotico italiano sviluppò i motivi romanici, con l'adozione di caratteristici elementi costruttivo-decorativi, mentre in Francia, l'adozione di ardite tecniche strutturali e di una avanzata tecnologia, diede modo ai costruttori di esaltare le dimensioni dei rosoni, i quali raggiunsero anche i 13 mt. di diametro. I rosoni venivano sistemati su pareti, le sue funzioni strutturali erano ridotte a un secondario contributo all'ossatura principale dell'edificio, i costruttori facendo leva su una grande abilità tecnico-artistica, realizzavano l'intelaiatura di suddivisione del vano e di sostegno delle vetrate. La forma circolare, i motivi geometrici, oltre alla loro valenza decorativa, accompagnano anche la funzione pratica di illuminare lo spazio interno della struttura. L'architettura gotica, riprende il tema del rosone, sviluppa e rende più elaborati gli schemi ge-



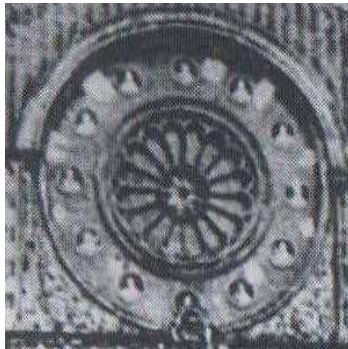
ometrici e decorativi romanici, giungendo a soluzioni strutturali spesso coraggiose, sfruttando al massimo sia le potenzialità costruttive dei materiali, sia quelle espressive e simboliche. È così che i rosoni cambiano aspetto, vengono realizzati in vetro utilizzando la gamma cromatica al fine di consentire ai maestri vetrai, di provata e notevole abilità tecnica, di creare opere d'arte sacra raffigurando, sotto forma di icona, passi del Vangelo, operando ai limiti delle capacità di resistenza dei materiali.

Il rosone, aperto sulla fronte delle chiese, è un elemento decorativo, risultante dalla composizione attorno a un centro o a un sistema di assi radiali di motivi geometrici, variamente stilizzati e posti al centro di spazi regolari simmetrici. Simbolicamente il rosone è la rappresentazione stilizzata più nota del motivo della rosa in architettura, dalla quale il rosone ne prende il nome. Si collega anche alla riproduzione della ruota, il cui simbolo prevalente è rappresentato dal disco solare, ovvero dalla ruota della vita che simboleggia l'alternarsi delle stagioni e che scandisce la sequenza della vita nella disposizione immutabile dei cicli cosmici. Quindi i rosoni non hanno solo funzione decorativa ma rappresentano, per la loro forma, la bellezza e la perfezione della creazione, un esplicito richiamo al cielo, al mistero di Dio-luce e Fonte di vita. La luce, infatti, è intesa come l'immagine della Rivelazione Divina che penetra nella chiesa, è il simbolo dell'interiorità dell'uomo; gli archetipi del rosone nell'architettura religiosa sono gli "occhi" delle strutture religiose. I rosoni delle finestre romaniche e gotiche, sono in relazione con la simbologia astrale del cerchio e si rifanno a modelli mesopotamici e ancora a modelli siriaci e copti (ruota del sole, cerchio delle virtù, girotondo degli angeli e dei martiri ecc.). Non di rado hanno l'intenzione di ricordare l'armonia platonica delle sfere: la rivoluzione celeste dei pianeti o dei segni dello zodiaco con il loro influsso sulla vita dell'uomo. Il rosone rappresenta il Sè dell'uomo trasferito sul piano cosmico. È unità nella totalità. Il simbolismo ricongiunge nel baricentro del rosone il centro cosmico e il centro mistico, la cui unione si compie e si armonizza quando si stabilisce una doppia corrente, attraverso i raggi dal centro alla circonferenza e da questa verso il centro. Come tale il rosone si inserisce nel quadro generale dei simboli dell'emanazione e ritorno, che esprimono l'evoluzione dell'universo e quello della persona. Inoltre spesso fanno riferimento a Cristo, il sole della giustizia. Il rosone, ancora, è una riproduzione stilizzata della rosa. La Rosa, emblema del fem-

minile per antonomasia, nella simbologia Cristiana diventa simbolo della Vergine Maria, Rosa Mistica delle Litanie e del Rosario: è equiparabile anche alla coppa quando ha i petali aperti, quindi al Santo Graal; così come la Rosa Rossa è simbolo del Sacro Cuore di Gesù, circondato da una corona di spine. Ulteriori valenze simboliche sono poi legate al numero dei “petali” (di solito colonnine) del rosone: sei petali rappresentano la stella a sei punte, l’emblema della sapienza, sette petali alludono all’ordine settenario del cosmo, otto petali rappresentano rigenerazione, e così via.

## 5.2 I Rosoni nel Duomo di Cosenza

Nel Duomo di Cosenza sono presenti cinque rosoni. Uno collocato sulla facciata principale, sopra il portale d’ingresso, altri due si trovano sulle facciate laterali dei transetti e due nelle navate minori. Il rosone centrale in origine era composto da sedici colonnine che si irradiavano dal centro, secondo angoli uguali, a loro volta connessi con un gioco di archi a motivo di cornice, quindi era suddiviso in sedici “spicchi”. Questi ultimi erano decorati con diaframmi traforati, contenenti i dodici Apostoli e creando così decorazioni differenti ottenute esclusivamente con la tecnica del traforo, facendo apparire il rosone come un ricamo merlettato. Il rosone presentava 16 rotazioni e 16 simmetrie assiali, rispetto alle colonnine che delimitavano ognuna delle 16 parti (lancette) del rosone. Si avrebbe dunque un gruppo diedrale D16.



*Fig. (5.1) Antico rosone centrale*

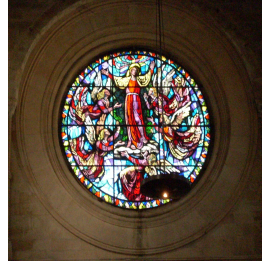
Al centro del rosone le sedici colonnine poggiavano su un cerchio di pietra

lavorata a definire una decorazione che ricorda una rosa, simbolo di invocazione di Maria. Gli archi che sormontavano le colonnine, per ricoprire l'intero rosone, erano ancora sedici. Poichè le colonnine erano in numero pari (sedici), il rosone appariva simmetrico. La scelta di questo numero di colonnine, però, non è casuale, infatti, il numero sedici ha un forte significato simbolico. Pur essendo un numero pari, che nella simbologia numerica ha una valenza passiva, quindi di stasi, rappresenta un'eccezione esprimendo uno straordinario dinamismo. Il sedici è un numero ambivalente, simboleggia le avversità, che possono essere benefiche quando portano ad un cambiamento costruttivo, mentre sono negative quando portano l'individuo alla caduta verso la distruzione. La riduzione del sedici lo mette in rapporto con il sette ( $16 = 1 + 6 = 7$ ) e dunque con la perfezione. Mentre come prodotto della moltiplicazione del quattro per se stesso ( $16 = 4 \times 4$ ) è il numero della realtà concreta e della terra. Il sedici incarna l'orgoglio, le prove della vita, la formazione attraverso gli insuccessi e le disillusioni. È il numero dell'avvio e dell'inizio ovvero, in termini cristiani l'Alfa e l'Omega. Rappresenta la montagna, il successo nella forma più nobile. Inoltre, il sedici è il doppio del numero otto, simbolo dell'unione tra la "Gerusalemme celeste" e la "Gerusalemme terrestre", il passaggio dalla terra al cielo. Come dimostra la prassi della "gemetria" (corruzione del gr. gheometria, un procedimento caro agli antichi, secondo il quale una data cifra designa un uomo od un oggetto perchè il valore numerico delle lettere costituiscono il suo nome corrispondente al numero in questione), i numeri posseggono anche un contenuto simbolico ben definito e il numero otto è la forma che più di tutte è adatta a canalizzare energie nascoste. Il numero otto individua anche l'ottavo giorno dell'antico patto (confr. Lev. 9:1; 12:3; 14:10; 23:11; 36:39), poichè la settimana ha solo sette giorni, si è trovato ad essere il primo giorno del nuovo patto, il giorno della risurrezione in gloria del Signore, della vittoria su satana, sul peccato, sulla morte e sul mondo. Il numero otto, essendo formato da due cerchi comunicanti, rappresenta l'infinito e designa il principio di un nuovo ordine di cose. È un particolarissimo numero che cerca di avvicinarsi sempre più al problema della quadratura del cerchio <sup>(43)</sup>.

---

<sup>(43)</sup> A. Guido *Misure e credenze religiose* cittàcalabriaeditore (gruppo Rubbettino) 2006 pag.66

Il rosone, in definitiva, è la sintesi di diversi influssi stilistici, prodotto unico ed originale di raffinatezza artistica, priva di esemplari con cui possa essere paragonato. Allo stato attuale, quest'opera magnifica è andata persa: i bombardamenti del 12 aprile 1943 hanno causato molti danni alla statica del rosone e una volta distrutto non venne più ricostruito. Oggi si presenta con una vetrata colorata su cui è rappresentato Cristo che sale in Cielo.



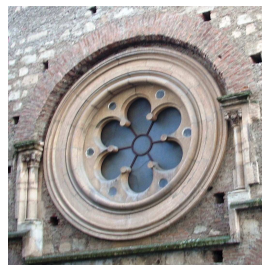
*Fig. (5.2) Rosone centrale*

Sulla facciata delle navate minori, come già detto, si trovano dei rosonei quadrilobati sovrastanti i portali laterali. Sono rosonei di tipo D4



*Fig. (5.3) Rosone facciata navate minori*

Sui lati delle navate minori, in prossimità del transetto, troviamo altri due rosonei a sei lobi di tipo D6.



*Fig. (5.4) Rosone laterale*

### 5.3 La geometria del rosone

La parola “rosone” in matematica indica una figura piana il cui gruppo di simmetria contiene solo un numero finito di trasformazioni. I gruppi finiti di isometrie del piano possono contenere solo rotazioni e riflessioni e sono dati dal “gruppo dei rosoni”. Il rosone, è dunque una figura finita che ammette un numero finito di isometrie le quali non potendosi ripetere indefinitamente non contengono traslazioni. La categoria dei rosoni, a sua volta, si divide in due sottogruppi:

- \* i gruppi ciclici, che contengono solo rotazioni di centro  $O$  e di angoli sottomultipli dell'angolo giro. Non presentano assi di simmetria e hanno solo rotazioni del motivo base attorno al centro di simmetria;
- \* i gruppi diedrali, che contengono tante rotazioni di centro  $O$  quante riflessioni in rette passanti per il centro  $O$ . Presentano uno o più assi di simmetria,  $n$  rotazioni ed  $n$  riflessioni.

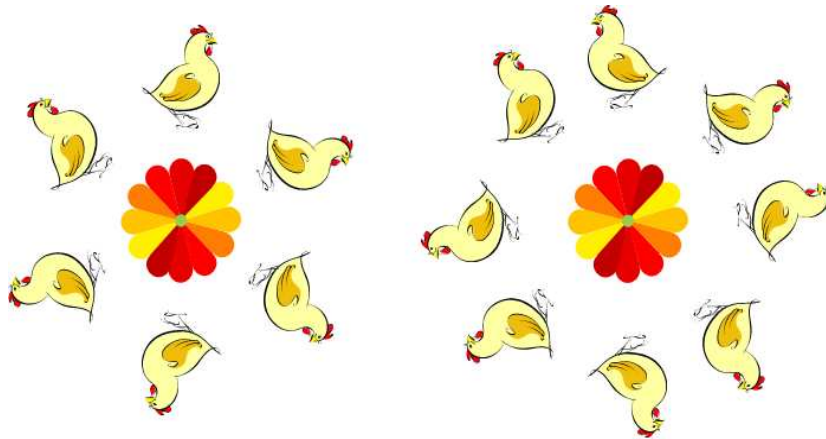


Fig. (5.5) Rosone ciclico  $C_6$  - Rosone diedrale  $D_4$

#### 5.4 I Fregi nel Duomo di Cosenza

I capitelli sui pilastri che dividono in campate quadrate le navatelle della Cattedrale di Cosenza, si presentano scolpiti con dei fregi dall'aspetto floreale o con cenni geometrici, nessuno dei quali è zoomorfo o antropomorfo. Tutti i fregi sono diseguali, i temi ricorrenti in tali fregi sono le foglie di acanto e le palmette. Le foglie di acanto, si presentano dentellate; anticamente, presso le popolazioni di Giava e dell'Asia Minore, alle foglie di acanto si attribuiva la capacità di impedire l'ingresso degli spiriti maligni nelle abitazioni e nei templi, certamente per via delle sue dure spine. Gli scultori greci imitarono tali foglie per ornare il capitello corintio ma furono anche riprodotte nello stile gotico (*acanthus mollis*). Un esempio di fregio con foglie di acanto è mostrato nel fregio scolpito sul capitello del terzo pilastro di sinistra, per chi entra in chiesa.



Fig. (5.6) Fregio su pilastro con foglie di acanto

Il disegno di questo fregio risulta pulito e netto, il fogliame non troppo ricco ma abbastanza particolareggiato con foglie lunghe, ampie, dentellate, armoniose, disegnate dalla mano di un artista. Per la realizzazione del fregio venivano utilizzati, con molta probabilità, dei "cartoni" con i disegni delle foglie da riportare sulla superficie del blocco da scolpire. Tali cartoni venivano poi utilizzati come modelli durante l'esecuzione e la finitura del fregio. Quello delle foglie di acanto, è un tema comune a molti dei fregi della Cattedrale di Cosenza, infatti, si nota una certa ripetitività, anche se stilizzati in modo differente, nei disegni e nei particolari. La decorazione del fregio è scolpita in bassorilievo su una superficie di fondo che sembra presentare una leggera concavità appena accennata.

Frequente è ancora il fregio a palmette, motivo ornamentale a forma di ventaglio. Sul sesto e settimo pilastro nella navata sinistra, dall'ingresso

principale, si trovano dei tipici capitelli che constano di un fregio rispettivamente di palmette e pseudo-palmette stilizzate.



*Fig. (5.7) Fregio su pilastro con palmette*



*Fig. (5.8) Fregio su pilastro con pseudo-palmette*

Il fregio scolpito sul capitello del quarto pilastro di sinistra, per chi entra in chiesa, è suddiviso in due fasce, nella fascia superiore si ripetono delle palmette e in quella inferiore un fregio particolare che rappresenta, alternativamente, il Fiore della Vita ed un quadrato con due diagonali e delle sferette nei quattro quadranti formati dalle diagonali.



*Fig. (5.9) Fregio su pilastro con fiore della vita e quadrati*

Il Fiore della vita è una forma complessa, formata da sei cerchi, intorno ad uno; si pensava che all'interno del Fiore della Vita erano inscrivibili tutte le

forme dell'universo e, ancora, tutto era stato creato e completato attraverso questo schema: i linguaggi, le leggi della fisica, le forme biologiche e anche noi singolarmente. Nella sua forma più semplice, il Fiore della Vita è chiamato anche "Sesto giorno della Genesi" poichè ottenuto dalla *rotazione* di sei cerchi o sfere, corrispondenti ognuna ad un giorno della Creazione. Di origine antichissima, la sua rappresentazione è stata trovata in tante parti del mondo ed in molte culture. Era conosciuto, ad esempio, dai primi cristiani copti, che lo incisero sulle pareti del tempio di Ibis, a El Kharga o nelle mura dell'Osireion di Abydo; dagli Etruschi, raffigurato sullo scudo di un guerriero in un bassorilievo nelle rovine di Vetulonia; dai Cinesi, nell'ex dimora dell'Imperatore, inciso sotto le zampe di un leone solare; dagli Ebrei, che lo raffigurarono all'interno del Tempio di Gerusalemme.

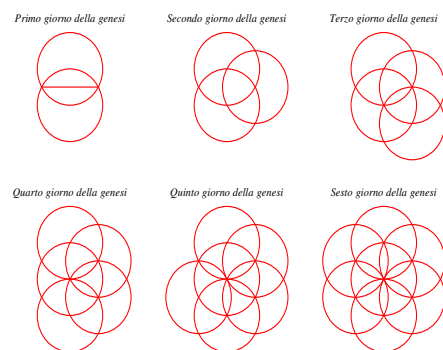
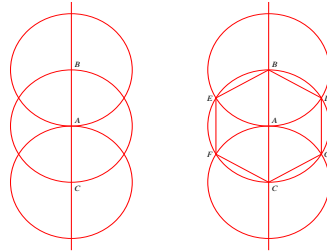


Fig. (5.10) Creazione del Fiore della Vita

Può essere costruito geometricamente secondo ciò che Euclide, nel libro IV della sua opera "Elementi" espone nella proposizione XV, per costruire l'esagono regolare. Questo simbolo si può ottenere anche con una composizione di trasformazioni geometriche ad una circonferenza. Volendo rappresentare questo simbolo con l'aiuto del compasso, di un righello, una matita ed un foglio per disegnare si ha la seguente costruzione: Disegnato un cerchio (basta disegnare una linea e posizionare la punta del compasso su un punto della medesima, ad esempio nel punto A), si punta il compasso in uno dei due punti in cui il cerchio tocca la linea (ad esempio nel punto B), siano i due cerchi della stessa dimensione. Se si aggiunge un terzo cerchio, dall'altro lato del primo (posizionando la punta del compasso nel punto C), si ottengono i sei punti di un esagono perfetto CDEBFG.





A questo punto, se si costruiscono tanti cerchi con centri nei sei vertici dell'esagono si ottiene il fiore della vita.

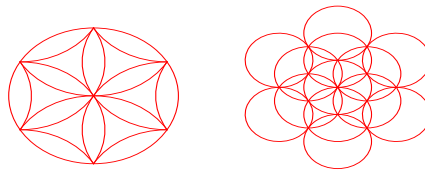


Fig. (5.11) Costruzione del Fiore della Vita

Il fiore della vita veniva considerato dai simbolisti, dai primi iniziati e dalle scuole mistiche il punto di partenza per la costruzione dei solidi platonici, secondo un meccanismo che consente di passare dalla bidimensionalità alla tridimensionalità.

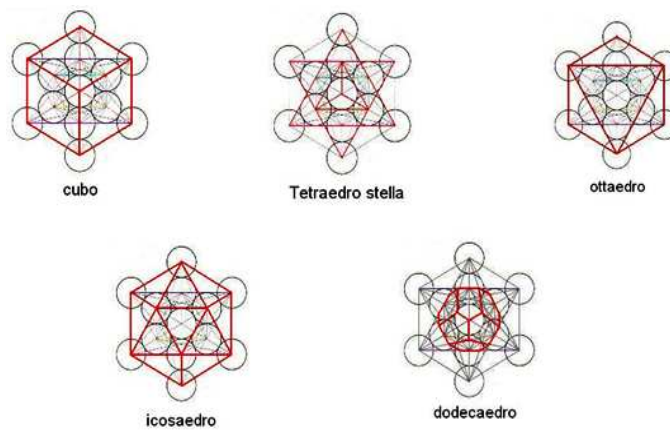


Fig. (5.12) Costruzione dei solidi platonici

Infatti, unendo con un segmento i centri di ogni cerchio si ottiene uno schema in cui sono rintracciabili i cinque solidi platonici: cubo, tetraedro,

ottaedro, icosaedro e dodecaedro <sup>(44)</sup>.

Continuando la nostra visita nella Cattedrale di Cosenza, sul quinto pilastro di sinistra, entrando dal portone principale, troviamo un fregio a doppia fascia. La parte superiore è scolpita a cerchi interconnessi, mentre la parte inferiore da motivi floreali. Il cerchio è il simbolo della perfezione, dell'eternità, della morte e risurrezione.



Fig. (5.13) Fregio su pilastro con cerchi interconnessi

I cerchi interconnessi della parte superiore si possono ottenere seguendo la costruzione dell'esagono vista prima e, ripetendo il procedimento si ottiene il fregio in esame.

### 5.5 La geometria dei fregi

In geometria le tipologie di gruppi ornamentali di rango 1, sono soltanto sette e sono i Fregi.

L'arte ha applicato i gruppi di trasformazione delle figure geometriche nei fregi i quali contengono traslazioni in una sola direzione e tutte multiple di una traslazione-base. In questa simmetria non viene alterata la forma né la dimensione della figura, ma solo la sua posizione nello spazio.

Nei fregi è presente un "modulo" che si ripete e che può possedere una propria simmetria interna. Definito il "modulo" questo si ripete sempre uguale, riempiendo una striscia di piano, una tale figura è necessariamente illimitata, infatti, si può operare la stessa traslazione due volte, tre volte, mille volte e più.

In teoria ci potrebbero essere sedici tipi di fregi, perchè altrettante sono le possibili combinazioni di rotazioni, riflessioni orizzontali o verticali, e

---

<sup>(44)</sup> A. Guido Misure e credenze religiose cittàcalabriaeditore (gruppo Rubbettino) 2006 pag.82

trasribaltamenti. In pratica, però, alcuni tipi sono impossibili: ad esempio, non si possono avere riflessioni orizzontali e verticali senza rotazioni; analogamente, non si può avere un ribaltamento orizzontale senza un trasribaltamento, questo perchè si suppone che ci sia una traslazione orizzontale.

In questo modo si può asserire che esistono esattamente sette tipi diversi di fregi. Il gruppo che identifica i sette tipi di fregi è indicato dai simboli internazionali; si tratta di un simbolo composto da quattro segni, numeri o lettere, così costruito:

La notazione estesa è identificata con la notazione  $pxyz$  con:

- $p$  primitivo (e non può essere altro!);
- $x$  simmetria di ribaltamento relativa all'asse verticale;
- $y$  simmetria di ribaltamento relativa all'asse orizzontale;
- $z$  simmetria rotazionale relativa all'asse verticale;
- Con  $1$  si intende nessuna simmetria;
- Con  $a$  si intende un trasribaltamento rispetto a una retta orizzontale;

Si possono avere, pertanto, i seguenti tipi di fregi:

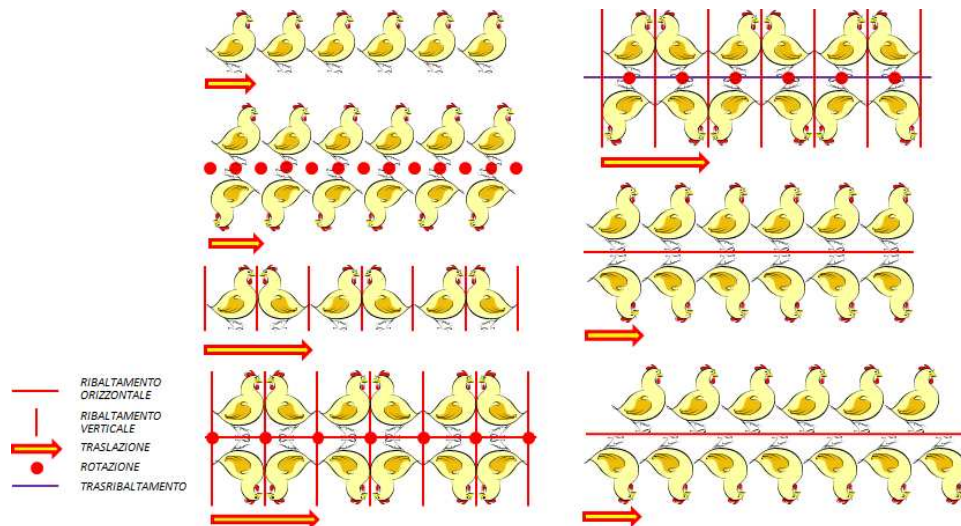


Fig. (5.14) I sette tipi di Fregi

Nella figura sono schematizzati, nello stesso ordine (ovvero con le stesse regole), i sette casi possibili di simmetria per la categoria dei fregi, realizzati

prendendo come modulo una figura molto semplice: una gallina. Dei sette tipi di fregio, ne esiste uno che è invariante soltanto per traslazioni; gli altri sono invarianti anche rispetto a rotazioni e riflessioni. Se alle rotazioni e ai ribaltamenti si unisce una traslazione si ottengono i gruppi di fregi che non sono finiti.

### 5.6 I Mosaici nel Duomo di Cosenza

Entrando in chiesa, quasi alla fine della navata di sinistra, è stato portato alla luce, a seguito dei lavori di restauro conservativo a cura della FIDATA nel 1998 (così si legge sulla lapide), un frammento del pavimento originario della Cattedrale di Cosenza, in tessere di marmo policrome, di fattura normanna del sec. XII. Il mosaico indica la decorazione di una superficie architettonica, come il pavimento, realizzata per mezzo di piccole pietre, terrecotte e paste vitree saldamente fissate su uno strato di supporto. L'ispirazione era quella di creare dei motivi di riempimento, ossia una tassellatura del piano con combinazioni di forme geometriche.

Una tecnica di antichissima origine che prosegue ininterrottamente e che nasce, prima di tutto, con intenti pratici più che estetici. L'argilla smaltata o i ciottoli venivano impiegati per ricoprire e proteggere i muri o i pavimenti in terra battuta.



*Fig. (5.15) Frammento del mosaico pavimentale*

Un aspetto particolare del rapporto tra l'architettura e la matematica è messo in evidenza proprio dall'applicazione dei motivi geometrici nei pavimenti decorati. In un certo senso, il pavimento è ideale per una decorazione

geometrica, essendo di solito la più grande superficie piana ininterrotta, a differenza di pareti e soffitti che sono interrotti da porte, finestre e costoloni.

Il mosaico pavimentale medievale è definito il “tappeto in pietra” per sottolineare le qualità dei materiali, di tutto quell’insieme di piccoli elementi accostati per creare una superficie decorata. Tecnicamente venivano assemblati dei piccoli frammenti di marmo costituiti da pietra e pasta vitrea, ceramica e altri materiali, formando delle tessere, disposte su un supporto, per rappresentare disegni geometrici, fiori, vegetazione, figure simboliche, antropomorfe e quant’altro. Nella stesura pavimentale compaiono sia lastre di marmo di una certa dimensione secondo la tecnica *opus sectile* (ossia giustapposte le une alle altre senza lasciare spazi intermedi), sia tessere di pietra più piccole, *opus tessellatum*, spesso usate contemporaneamente per creare diversi effetti di superficie.

La posa in opera di questo tipo di pavimenti richiedeva l’intervento di maestranze specializzate e tempi di realizzazione abbastanza lunghi, comportando così elevati costi di realizzazione, infatti l’utilizzo del mosaico, oltre a sottolineare l’importanza del luogo, indicava il livello economico e sociale della committenza. In genere i materiali usati erano di provenienza locale, spesso si reimpiegavano frammenti antichi, in particolare marmi, porfidi e altre pietre dure. La preparazione del materiale tassellato risale all’età romana, gli operai, per la realizzazione del mosaico, seduti dinanzi ad un ceppo su cui era infisso il tagliolo, un attrezzo di acciaio di sezione rettangolare con la parte tagliente rivolta verso l’alto, cominciavano il lavoro. I frammenti di pietra venivano frazionati battendo il materiale per mezzo della martellina, un attrezzo di forma affusolata con i bordi taglienti.



Fig. (5.16) Tagliolo e martellina

Le tessere erano tagliate a forme irregolare, simili a poligoni quadrangolari e ricavate da pietre naturali: marmi, ciottoli o da materiali artificiali, smalti, paste vitree, ori, argenti. Il supporto dove dovevano essere sistemate le tessere era costituito da una malta grossolana mista a ciottoli. La malta, era composta da un legante (idrossido di calcio), grassello - calcespenta e da aggregati (sabbia, polvere di marmo, cotto), oggi viene sostituita o da malte "bastarde" (idrossido di calcio e cemento) o da adesivi complessi (cementi prescelti) pronti all'uso con la sola aggiunta di acqua o apposite soluzioni. Il numero degli strati variava da uno a tre, per uno spessore che diventava più sottile salendo in superficie. Il pavimento a mosaico veniva eseguito generalmente al termine della costruzione dell'edificio, quando il suolo era livellato. Dopo la preparazione della malta di posa veniva eseguito un disegno o sinopia (la sinopia ha la funzione di definire la ripartizione degli spazi e creare una guida durante l'esecuzione) rappresentati sulla superficie ancora fresca.

Le fasi del lavoro dei mosaicisti, sono chiaramente identificabili su alcuni pavimenti in tassellato, che conservavano tracce delle linee di giunzione, corrispondenti al limite raggiunto dalla disposizione delle tessere lungo una linea continua che in genere era rettilinea. Queste congiunzioni corrispondono in genere alle stecche di legno che erano utilizzate come una specie di armatura per tenere insieme la malta di posa ancora fresca. Il disegno veniva realizzato tracciando il contorno con tessere più scure, un po' più lunghe delle altre, affondate in profondità nella sinopia. A partire da questo schema compositivo di base, le superfici venivano riempite con una o più file di cubetti disposti generalmente lungo il perimetro, per poi giungere progressivamente al rivestimento di tutto il fondo. Evidentemente, il mosaico non era opera di un solo artista ma veniva realizzato in collaborazione da più persone. Sebbene sia difficile distinguere le diverse mani che hanno contribuito alla realizzazione di un mosaico, da una analisi approfondita, dalla scelta del colore, dal taglio delle tessere e dalla loro disposizione nel letto di malta, emergono in modo chiaro, le diverse scelte, anche stilistiche, di ciascun artista.

La committenza dei mosaici, quasi sempre era da parte di ecclesiastici, comunque, se si considera che i costi per realizzare un mosaico pavimentale, anche semplicissimo, erano abbastanza onerosi, si può giustamente pensare che, i finanziamenti per effettuare i lavori non provenissero esclusivamente

dalle chiese del territorio. Queste ultime divennero ricche e potenti, soprattutto nel periodo normanno, in cui i nuovi conquistatori, per legittimare il loro potere, patrocinarono le costruzioni di chiese e monasteri ottenendo in tal modo l'appoggio del clero e delle comunità locali.

Il mosaico pavimentale della Cattedrale di Cosenza lascia intravedere l'esigua traccia di una decorazione a motivi geometrici con tessere di varie dimensioni in marmo bianco (la pietra naturale per eccellenza, una roccia metamorfica composta prevalentemente di carbonato di calcio) e ardesia (classificata come roccia tenera o semidura in quanto facilmente scindibile in lastre piane, leggere e sottili di colore tipico nero-grigiastro).

### 5.7 La geometria dei mosaici

In geometria le tipologie di gruppi ornamentali di rango 2, sono diciassette e sono proprio i Mosaici. La parola "mosaico" in matematica indica una figura piana il cui gruppo di simmetria è discreto e contiene delle traslazioni, di cui almeno due in direzioni diverse. Il "modulo", in un mosaico è in grado di muoversi lungo due direzioni indipendenti, fino a riempire tutto il piano. I criteri di classificazione dei mosaici tengono pertanto conto della compatibilità fra la simmetria interna, locale, del modulo con una simmetria globale dettata dallo spostamento, in una oppure in due direzioni.

Si può dimostrare che i possibili gruppi di simmetria per un mosaico sono 17 di cui:

- Due contengono rotazioni di  $60^\circ$  e suoi multipli ( $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ , e  $300^\circ$ , oltre all'identità). Sono il gruppo  $p6$  che contiene solo traslazioni e rotazioni (di  $60^\circ$  e multipli) e  $p6m$  che contiene anche riflessioni;
- Tre contengono rotazioni di  $90^\circ$  e suoi multipli ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ ), oltre all'identità e sono il gruppo  $p4$  che contiene solo traslazioni e rotazioni (di  $90^\circ$  e multipli),  $p4m$  che contiene anche riflessioni, rispetto a rette in quattro direzioni diverse e  $p4g$  che contiene anche riflessioni, rispetto a rette in due direzioni diverse;
- Tre contengono rotazioni di  $120^\circ$  e multipli ( $120^\circ$  e  $240^\circ$ , oltre alla identità) e sono il gruppo  $p3m1$  che contiene anche riflessioni; tutti i

- centri di rotazione appartengono a un asse di simmetria della figura,  $p31m$  che contiene anche riflessioni; esistono centri di rotazione che non appartengono a un asse di simmetria della figura e  $p3$  che contiene solo traslazioni e rotazioni (di  $120^\circ$  e multipli);
- Cinque contengono rotazioni di  $180^\circ$  (oltre all'identità) e sono il gruppo  $p2$  che contiene solo traslazioni e rotazioni (di  $180^\circ$  e multipli),  $pmm$  che contiene anche riflessioni, rispetto a rette in due direzioni diverse; tutti i centri di rotazione appartengono a un asse di simmetria della figura,  $cm$  che contiene anche riflessioni, rispetto a rette in due direzioni diverse; esistono centri di rotazione che non appartengono a un asse di simmetria della figura,  $pmg$  che contiene riflessioni rispetto a rette in un'unica direzione e  $pgg$  che non contiene riflessioni; contiene dei trasribaltamenti (composizione di un ribaltamento rispetto a una retta con una traslazione di un vettore parallelo a questa retta);
  - Quattro non contengono rotazioni (diverse dalla rotazione di  $360^\circ$ , cioè l'identità, che appartiene al gruppo di simmetria di una qualsiasi figura) e sono il gruppo  $p1$  che contiene solo traslazioni,  $pm$  che contiene riflessioni; non contiene trasribaltamenti, salvo quelle "obbligatorie" che si ottengono per composizione del ribaltamento in un asse di simmetria della figura con una traslazione parallela,  $cm$  che contiene riflessioni, trasribaltamento rispetto a rette parallele e agli assi di simmetria, ma che non sono a loro volta assi di simmetria della figura,  $pg$  che non contiene riflessioni e trasribaltamenti.





### *Conclusione*

Lo scopo che la presente tesi di ricerca si è prefissato è stato quello di dare una descrizione matematica della Cattedrale di Cosenza utilizzando, come strumento d'indagine la geometria e il suo legame con la rappresentazione architettonica. Il punto di partenza della ricerca, è stato lo studio della struttura nei suoi aspetti morfo-geologici, storici, geometrici e dimensionali, ritenuti fondamentali per poter dare una descrizione esaustiva, basata sulla osservazione diretta della fabbrica. Considerato che l'architettura è legata ai luoghi dove un'opera viene realizzata e che non è possibile, dunque, prescindere dal contesto geografico, ho ritenuto opportuno partire dall'aspetto storico della città, rivolgendo l'attenzione, in particolare, alle vicissitudini che hanno visto protagonista la Cattedrale. Tramite l'utilizzo di questa indagine storica, ho seguito un percorso che aggiunge a quelli già pubblicati sull'argomento l'aspetto matematico. La ricerca è partita da questo tipo di analisi basandosi esclusivamente su informazioni ottenute attraverso l'osservazione dimensionale e geometrica, non operando un'ulteriore indagine storica e stilistica, e facendo sì che tutte le considerazioni riportate scaturissero da analisi dimensionali e morfologiche.

Le operazioni di osservazione hanno permesso di individuare i caratteri fondamentali della facciata della chiesa la quale, opportunamente studiata, ha permesso di ottenere una visione generale del manufatto. Ho tenuto conto del fatto che lo schema generale della cattedrale, ha subito sensibili mutamenti negli anni, sia da un punto di vista dimensionale che da un punto di vista formale, infatti, degli elementi che caratterizzano il prospetto, alcuni si sono conservati quasi immutati nel corso dei secoli, come i rosoni laterali che caratterizzano alcuni degli esempi meglio riusciti di una chiesa gotico-cistercense.

Le varianti individuate nell'intero periodo di diffusione della chiesa hanno mutato la fisionomia della stessa, pur passando attraverso alcuni secoli inalterate; gli elementi che compongono la fabbrica, infatti, mutano nel loro aspetto adeguandosi ai nuovi stili architettonici, senza andare ad intaccare lo schema originario. A testimonianza di quanto asserito sono gli elementi dello stile cistercense, che arrivano, intatti, sino ai giorni nostri.

La facciata ed i suoi elementi architettonici, privata di ogni connotato stilistico gotico, ci mostra la sua staticità esaminando, in particolare, la sua impostazione formale, che riesce bene ad adattarsi alle nuove tendenze stilistiche. Infatti, è vero che si tende a riproporre uno schema che si è sviluppato sotto l'influsso del gotico-cistercense ma è anche vero che questo modello, proprio per le sue caratteristiche formali, si adatta benissimo ad essere interpretato in chiave classicista. Il motivo per cui la Cattedrale di Cosenza ha avuto una così lunga vita è dovuto certamente alla tendenza delle maestranze a rifarsi a un repertorio architettonico collaudato ma, anche, al fatto che il modello poteva esprimere pienamente il concetto di modulo, ordine e armonia che sta alla base delle opere della sua epoca.

Il ricorso ad elementi gotici come la merlatura e il rosone, del periodo post-terremoto, che hanno avuto una funzione puramente decorativa, non ha inficiato quello che è il sentimento classicista in quanto dal repertorio gotico si prende l'aspetto estetico ma le dimensioni e le proporzioni fra le parti sono rimaste intatte. L'analisi condotta nella presente tesi di ricerca è un'ulteriore conferma della necessità di affiancare all'analisi storica e stilistica l'indagine profonda offerta dal rilievo formale il quale, indagando l'architettura nei suoi aspetti più rappresentativi permette di conoscere profondamente il manufatto e di svelare la sua più intima essenza. Inoltre, è stato messo in evidenza come il legame dell'architettura con il territorio sia fondamentale per inquadrare globalmente l'edificio sacro, il quale, senza questi elementi non potrebbe essere compreso nella sua interezza e rischierebbe di essere letto limitatamente e parzialmente, perdendo informazioni e comprensioni fondamentali. Tuttavia, l'importanza storica trae origine dalle circostanze descritte sulla Cattedrale, e cioè: l'essere stata associata ad un edificio sacro dotata di significati simbolici, e l'essere stata occasione di riesame del pensiero geometrico della scuola pitagorica. Nella Cattedrale lo spazio architettonico esprime l'astratto attraverso elementi tangibili, confrontabili ad occhio, come accade nella complessa struttura musicale di J.S. Bach, che da limitati rapporti fra note, costruisce l'arte della fuga.

La Geometria ha determinato lo sviluppo di una particolare "forma mentis" e, facendo riferimento ancora una volta agli scritti, si può cercare di capire in che modo e in che misura la concezione del mondo e dell'architettura, il significato attribuito alle figure e l'iconografia usata ne siano

il frutto. Questa tesi di ricerca tenta di scrutare l'habitat in cui viviamo, attraverso l'architettura, l'arte, la matematica e altro ancora, il tutto con occhi curiosi, riconoscendo le dimensioni della realtà attraverso figure, forme, simboli, schemi riscontrabili in quelle discipline studiate sui libri. L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica, oggi non è più appannaggio di una ristretta élite, infatti, trova la sua vera dimensione nel contributo che la disciplina può dare alla formazione del pensiero e della personalità nella sua interezza, oltre che alla formazione del pensiero attivo, caratterizzato da fantasia, creatività, intuito.

L'esperienza maturata nei tre anni di dottorato mi ha persuasa, ancora una volta, che è possibile raggiungere un grande pubblico, anche con "cose" semplici e con metodo altrettanto essenziale: utilizzando un linguaggio chiaro, semplice, stimolante, creativo e sfruttando una "elegante" sensibilità, quella legata ad esempio alla curiosità di rincorrere una storia, un racconto o di scoprire i misteri celati dietro un simbolo. Questi e altri metodi permettono, secondo me, di "illuminare" gli intelletti in ascolto e sviluppare sempre più quella attenzione che porta verso il necessario arricchimento interiore e il continuo piacere della scoperta.

La conclusione della tesi di ricerca ricorda le parole di Pascal: *"non basta lo spirito della geometria che distingue e rende incontestabili le proprietà delle figure e degli elementi. Non occorre solo lo spirito di finezza che è comune a tutti, parla al cuore, sorprende e vede con spontaneità. La finezza è intuizione, la geometria è intelligenza: bisogna perciò integrare entrambe"*<sup>(45)</sup>.

---

<sup>(45)</sup> Pascal inserisce la fisica, la musica e l'architettura nelle discipline che dipendono da esperienza e ragionamento, cfr. M. Dal Pra, "Profilo di storia della filosofia", Firenze, 1971, II, pp. 115-116



## Bibliografia

- [01] Testo 3 - Strabone, *Geografia*, VI, 1, 4: *l'origine del popoli dei Brettii* ( F. Lassre, *Strabon. Gographie, Tome III (Livres V et VI)*, Paris 1967);
- [02] Durand De Mende G., *Manuale per comprendere il significato simbolico delle cattedrali e delle chiese*. Arkeios, Roma 1999;
- [03] *Storia della Calabria. Le cattedrali*. Gangemi Editore;
- [04] Tuoto G., *La Cattedrale di Cosenza, Legenda*, 1998;
- [05] Di Dario Guida M. Pia, *Itinerario d'arte dai Bizantini agli Svevi*, ed. *l'Espresso*, Roma, 1983;
- [06] Napolillo V., *Storia e fede a Cosenza, la Madonna del Pilerio*, Edizioni Santelli, Cosenza, 2002;
- [07] Florenskij P., *La colonna e il fondamento della verità*, in G. Gharib;
- [08] *Notizie storiche sul culto della Madonna del Pilerio*, *Patrona di Cosenza*, aggiornate e redatte da mons. Michele Caruso, pubblicate a cura di Don Giacomo Tuoto, Cosenza, 1985;
- [09] Terzi F., *Simbologia nell'Architettura religiosa*, *Accademia Cosentina* - 23 giugno 1989;
- [10] Bairati C. , *La simmetria dinamica. Scienza ed arte nell'architettura classica*, Milano, 1952;
- [11] Curti M., *La Proporzione. Storia di un'idea da Pitagora a le Corbusier*, Roma 2006;
- [12] *Gli Elementi di Euclide*, dal P. Dechaes della compagnia di Gesù riveduti, corretti ed accresciuti dall'Ozanam dell'Accademia Reale delle Scienze - Bergamo 1785;
- [13] O. Von Simson, *La cattedrale gotica. Il concetto medievale di ordine* - Bologna 2008;
- [14] Ackerman J. S., "Ars sine scientia nihil est" - Milano, 1949;
- [15] Borgherini M., *Disegno e progetto nel cantiere medievale. Esempi toscani del XIV secolo*, Marsilio Editori - Venezia 2001;
- [16] Guido A., *Misure e credenze religiose, cittàcalabriaeditore (gruppo Rubbettino)*, 2006;

- [17] Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano, 1976;
- [18] Artin E., *Algebra geometrica*, Feltrinelli, 1968;
- [19] Betti R., Marchetti E., Rossi Costa L., *Simmetria: una scoperta matematica*, Polipress, 2007;
- [20] Choquet G., *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris, 1964;
- [21] Dedò M., *Forme. Simmetria e topologia*, Zanichelli, Bologna, 1999;
- [22] De la Harpe P., *Quelques problèmes non résolus en Géométrie plane*, Université de Genève, 1986;
- [23] Delessert A., *Une construction de la géométrie élémentaire fondée sur la notion de réflexion*, L'enseignement mathématique, Université de Genève, 1964;
- [24] Du Sautoy M., *Il disordine perfetto - L'avventura di un matematico nei segreti della simmetria*, BUR Saggi Rizzoli, 2010;
- [25] Ferrari M., *Le isometrie piane - Mostra di materiale didattico*, 1988;
- [26] Guenot J., *I fondamenti della geometria - Quaderni Mathesis - Cosenza*, 1980;
- [27] Hilbert D., *Grundlagen de Geometrie - Leipzig*, 1930;
- [28] Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometria intuitiva - Boringhieri*, 1972;
- [29] Jablan S.V., *Theory of Simmetry and Ornaments - Beograd Mat. Institut n.17*, 1995;
- [30] Jaglom I.M., *Trasformazioni geometriche - Le isometrie - Zanichelli*, Bologna, 1972;
- [31] Lockwood E.H., Macmillan R.H., *Geometric Simmetry - Cambridge University Press*, 1978;
- [32] MacLane S., *Metric postulates for plane geometry*, American Math. Monthly - vol. 66, 1959;
- [33] Martin G.E., *Transformation Geometry. An introduction to Simmetry - Springer*, 1982;
- [34] Stewart I., *L'eleganza della verità - Storia della simmetria - Einaudi*, 2008;
- [35] Weyl H., *La simmetria - Feltrinelli*, 1962.
- [36] Ferguson K., *La musica di Pitagora - La nascita del pensiero scientifico - Longanesi*, 2008

- [37] *Arte e Matematica, un sorprendente binomio*, Arte Tipografica Editrice, Napoli, 2006;
- [38] AAVV, *Quadrivium-Numero, Geometria, Musica, Astronomia*–Sironi Editore, Milano 2011;
- [39] Bartocci C., Olifreddi P., *La matematica: Suoni, forme, parole*–Einaudi, Torino 2011 Vol. III;
- [40] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, a cura di L. Lombardo Radice–Mondadori, Milano 1980;
- [41] Maurizio Giangiulio, Giamblico, *La vita di Pitagora*, BUR, Milano 1991;
- [42] C. L. Joost-Gaugier, *Pitagora e il suo influsso sull'arte (Measuring Heaven)*–Edizioni Arkeios, Roma 2008;
- [43] Gareth Loy *Musimatics - The mathematical foundations of music*, The Mit Press Cambridge, Boston, 2006, Vol. I.





**Indice**

|  |           |
|--|-----------|
| Introduzione . . . . .   | 5         |
| <b>CAPITOLO 1. LA CATTEDRALE DI COSENZA . . . . .</b>            | <b>9</b>  |
| 1.1 Cosenza nella storia . . . . .                               | 9         |
| 1.2 La Cattedrale di Cosenza nella storia della città . . . . .  | 15        |
| 1.3 Architettura gotico-cistercense . . . . .                    | 20        |
| 1.4 Struttura della Cattedrale di Cosenza . . . . .              | 26        |
| 1.4.1 Costruzione dell'arco a tutto sesto . . . . .              | 29        |
| 1.4.2 Struttura Architettonica . . . . .                         | 32        |
| 1.4.3 La Chiesa . . . . .  | 37        |
| 1.4.4 La Cappella della Madonna del Pilerio . . . . .            | 39        |
| <b>CAPITOLO 2. IL VALORE DELLA MATEMATICA . . . . .</b>          | <b>43</b> |
| 2.1 Pitagora. Numeri e Proporzioni . . . . .                     | 43        |
| 2.2 Pitagora. Armonia e Musica . . . . .                         | 50        |
| 2.3 Da Pitagora a Platone . . . . .                              | 58        |
| 2.4 Da Pitagora ad Euclide . . . . .                             | 61        |
| 2.5 Da Pitagora a Sant'Agostino . . . . .                        | 64        |
| 2.6 Dal Medioevo al Rinascimento . . . . .                       | 65        |
| 2.7 La sezione Aurea . . . . .                                   | 68        |
| 2.7.1 Aspetto matematico della sezione aurea . . . . .           | 68        |
| 2.7.2 Aspetto geometrico della sezione aurea . . . . .           | 70        |
| 2.7.3 Fibonacci. Numero aureo e musica . . . . .                 | 72        |
| 2.7.4 Sezione aurea di un segmento. Costruzione . . . . .        | 74        |
| 2.7.5 La sezione aurea e l'Architettura . . . . .                | 75        |
| 2.7.6 Costruzione del Pentagono Regolare . . . . .               | 78        |
| <b>CAPITOLO 3. LA MATEMATICA IN ARCHITETTURA . . . . .</b>       | <b>83</b> |
| 3.1 Il ruolo dell'architettura . . . . .                         | 83        |
| 3.2 Le conoscenze dell'architetto . . . . .                      | 87        |
| 3.3 L'Architettura di Vitruvio . . . . .                         | 90        |
| 3.4 Matematica e Architettura . . . . .                          | 92        |
| 3.5 Il modulo ad quadratum nella cattedrale di Cosenza . . . . . | 96        |
| 3.6 Rapporti modulari e proporzioni Armoniche . . . . .          | 98        |

|     |  |                |
|-----|--|----------------|
|     | <i>CAPITOLO 4. LA SIMMETRIA . . . . .</i>                | <i>101</i>     |
| 4.1 | <i>Distanza Euclidea . . . . .</i>                       | <i>101</i>     |
| 4.2 | <i>Isometrie . . . . .</i>                               | <i>106</i>     |
| 4.3 | <i>Ribaltamenti . . . . .</i>                            | <i>111</i>     |
| 4.4 | <i>Traslazione . . . . .</i>                             | <i>116</i>     |
| 4.5 | <i>Rotazioni . . . . .</i>                               | <i>122</i>     |
| 4.6 | <i>Trasribaltamenti . . . . .</i>                        | <i>128</i>     |
| 4.7 | <i>Risultati . . . . .</i>                               | <i>132</i>     |
|     | <br><i>CAPITOLO 5. ROSONI, FREGI E MOSAICI . . . . .</i> | <br><i>135</i> |
| 5.1 | <i>Storia e significato dei Rosoni . . . . .</i>         | <i>135</i>     |
| 5.2 | <i>I Rosoni nel Duomo di Cosenza . . . . .</i>           | <i>137</i>     |
| 5.3 | <i>La Geometria del rosone . . . . .</i>                 | <i>140</i>     |
| 5.4 | <i>I Fregi nel Duomo di Cosenza . . . . .</i>            | <i>141</i>     |
| 5.5 | <i>La geometria dei fregi . . . . .</i>                  | <i>145</i>     |
| 5.6 | <i>I Mosaici nel Duomo di Cosenza . . . . .</i>          | <i>147</i>     |
| 5.7 | <i>La geometria dei mosaici . . . . .</i>                | <i>150</i>     |
|     | <br><i>Conclusione . . . . .</i>                         | <br><i>153</i> |
|     | <i>Bibliografia . . . . .</i>                            | <i>157</i>     |