

# Capitolo 1

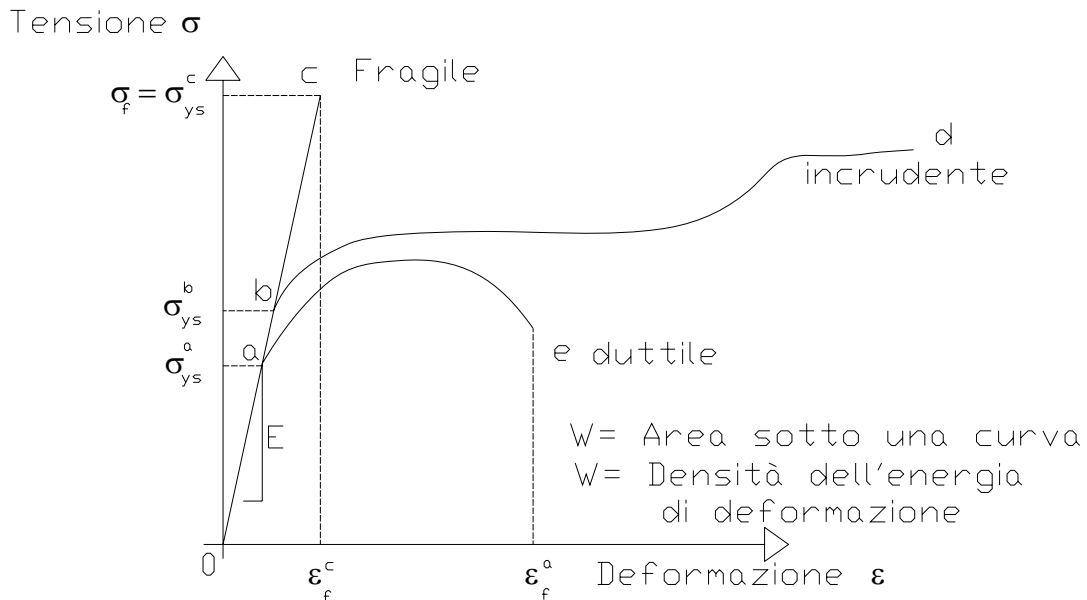
## La Meccanica della Frattura

### 1.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono descritti i principi fondamentali che riguardano i differenti campi che compongono la Meccanica della Frattura, nell'ambito della quale verranno successivamente affrontate le modellazioni agli elementi finiti. Vengono descritti i concetti che stanno alla base della meccanica della frattura e che sono necessari per l'analisi e la descrizione dei fenomeni di rottura delle strutture. In particolare vengono analizzati i principi della frattura duttile, fragile, la distribuzione teorica delle tensioni in corrispondenza delle fessure ed, inoltre, vengono fornite indicazioni su come applicare questi concetti all'analisi delle strutture reali. Nella prima parte vengono descritti i principi della meccanica della frattura lineare, nella seconda quelli della meccanica della frattura non lineare con riferimento alla meccanica della frattura elasto-plastica, visco-plastica e dinamica .

La meccanica della frattura descrive la frattura dei materiali in termini di leggi della meccanica applicata e proprietà macroscopiche dei materiali ed, inoltre, fornisce un trattamento quantitativo basato sull'analisi della tensione che lega la resistenza alla frattura al carico applicato ed alla geometria strutturale di un componente contenente difetti. In particolare, essa consente di studiare lo stato tensionale causato da tali difetti, di valutare la resistenza del materiale alla rottura, di analizzare il comportamento di corpi fessurati soggetti a tensioni e deformazioni ed al contempo di valutare l'origine di queste fessure e le modalità secondo cui crescono e si interrompono. Generalmente il difetto è sostituito da una fessura equivalente in cui la resistenza alla frattura viene valutata in termini di condizioni tensione-deformazione all'apice della fessura. In corrispondenza dei difetti sono presenti tensioni elevate che sono responsabili del degrado di resistenza del materiale. Progettare attraverso la meccanica della frattura necessita della conoscenza della dimensione critica della fessura e di un parametro

che caratterizza la sua propensione ad estendersi. Tale parametro è definito tenacità a frattura (toughness fracture) ed esprime la capacità del materiale di resistere alla rottura in presenza di fessure.



**Fig. 1.1-** Tipiche curve tensione-deformazione per materiali differenti. L'area sottesa dalle curve costituisce una misura della tenacità a frattura in termini di densità di energia di deformazione che viene usata come parametro di controllo nella classificazione dei materiali strutturali.

La curva 0-c è un tipico esempio di curva per materiale fragile caratterizzata da una rottura brusca senza che avvengano precedentemente deformazioni e snervamenti; la curva 0-d si riferisce ad un materiale incoerente in cui la rottura si verifica dopo che si sono avute ampie deformazioni plastiche; infine, la curva 0-e, tipica di un materiale duttile, caratterizzata da una fase di snervamento, cioè da una fase elasto-plastica in cui il materiale pervenuto allo snervamento diventa sede di deformazioni plastiche.

## 1.2 PRINCIPI FONDAMENTALI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

Nell'ambito della meccanica della frattura lineare i problemi della fessurazione e del cedimento del materiale avvengono, come già anticipato, in campo elastico e vengono affrontati mediante uno studio macroscopico e microscopico dei tre fattori che costituiscono il sistema: lo stato di sollecitazione, il materiale e l'ambiente. Lo stato di sollecitazione a livello microscopico viene fortemente influenzato dalla cricca che costituisce una mancanza di materiale.

Il materiale viene considerato come un mezzo continuo, omogeneo, isotropo, però nella realtà esso è disomogeneo ed anisotropo a causa della presenza di inclusioni ed orientazioni preferenziali dovute alle tecniche di formatura come la laminazione ecc.

L'importanza di questa disciplina trae le sue origini dalla possibilità di dare delle risposte concrete ai quesiti che riguardano le dimensioni massime delle fessure che una struttura può contenere o al carico massimo che la struttura può sopportare affinché la frattura venga evitata ed, infine, al tipo di materiale che dovrebbe essere usato in una determinata applicazione per assicurarne la sicurezza.

I processi di frattura generalmente si manifestano in tre fasi; nella prima fase si ha la manifestazione di un difetto preesistente o la formazione di una nuova imperfezione, nella seconda la microfessura cresce in modo stabile e si lega alle altre microfessure per raggiungere la dimensione di una macrofessura; nella terza ed ultima fase la macrofessura si propaga in un modo stabile con un livello critico di tensione.

La frattura è provocata dal raggiungimento di valori più elevati delle tensioni in corrispondenza dei difetti rispetto a quelle del materiale circostante; inoltre essa si può ottenere per rottura dei singoli costituenti o per separazione dell'interfaccia tra i costituenti.

Le cause del maggior numero di cedimenti strutturali rientrano generalmente nelle due categorie seguenti :

- cedimenti dovuti a negligenza durante la progettazione e costruzione della struttura;
- cedimenti causati dall'applicazione di una nuova tipologia di progetto o di materiale che produce un risultato inaspettato o meglio indesiderato.

Il primo tipo di cedimento, provocato dalle parti coinvolte nella progettazione ed esecuzione delle opere, deriva, quindi, per lo più dall'errore umano ed è, pertanto, facilmente prevedibile.

La seconda categoria comprende, invece, quei cedimenti che sono più difficili da prevedere perché l'impiego di materiali dalle prestazioni migliorate fa entrare in gioco dei fattori che il progettista non può anticipare. Infatti se da un lato l'impiego di nuovi materiali offre dei vantaggi, dall'altro crea dei potenziali problemi che potrebbero essere superati solo dopo aver effettuato dei tests ed analisi specifiche. Un

approccio di questo tipo può ridurre la frequenza dei cedimenti ma non eliminarli completamente. Studi effettuati negli Stati Uniti negli anni 70 dal National Bureau of Standards hanno stimato che il costo di cedimenti dovuto ad incidenti, sovradimensionamento della struttura, costi d'ispezione, di riparazione e costruzione è dell'ordine di 120 miliardi di dollari all'anno e che, se fosse stata applicata una tecnica di controllo del processo di frattura, si sarebbero potuti risparmiare annualmente ben 35 miliardi di dollari. A questo si aggiungono due fattori chiave fondamentali che rendono necessario l'utilizzo della meccanica della frattura e sono l'effetto scala, che rappresenta la dipendenza di uno o più parametri della frattura dalle dimensioni del solido in esame, e l'inadeguatezza dei tradizionali criteri di rottura. Mentre l'effetto scala, affrontato da Griffith e da altri ricercatori, si basa sul concetto che la resistenza di un materiale, misurata su una serie di campioni in laboratorio, risulta molto inferiore a quella prevista dai calcoli (influenza delle dimensioni della struttura), i criteri di rottura, invece, risultano inadeguati perché non consentono di spiegare i fenomeni di rottura che si manifestano ad un livello di tensione nominale considerevolmente più basso della resistenza ultima del materiale.

I concetti della meccanica della frattura che furono ricavati ed approfonditi prima del 1960 risultarono applicabili solo ai materiali che obbediscono alla legge di Hooke, cioè a quella tipologia di materiali il cui comportamento era elastico-lineare. Questi concetti non possono essere direttamente applicati al calcestruzzo a causa dell'esistenza di una lenta crescita della fessura, della formazione di una zona di processo non lineare della frattura e del softening del calcestruzzo. A tal fine, infatti, i modelli della meccanica della frattura non lineare sono stati sviluppati per ottenere una migliore descrizione del comportamento reale. In particolare, nel 1961 Kaplan dimostrò che la LEFM non poteva essere applicata alle strutture di calcestruzzo e ad altri materiali quali le rocce ed i materiali ceramici ma solo a materiali omogenei come i metalli e che, pertanto, era necessario avvalersi di un'altra teoria. Gli esperimenti eseguiti da Kaplan e ripresi successivamente da Karihaloo nel 1995, che si basavano sulla misura dell'energia di rilascio critica o del fattore critico di intensificazione delle tensioni, consentirono di arrivare alla conclusione che il valore di  $G_c$  (energia di frattura critica) dipendeva dalla dimensione del campione e che, quindi, non costituiva una proprietà materiale. La necessità dell'utilizzo di un nuovo metodo per

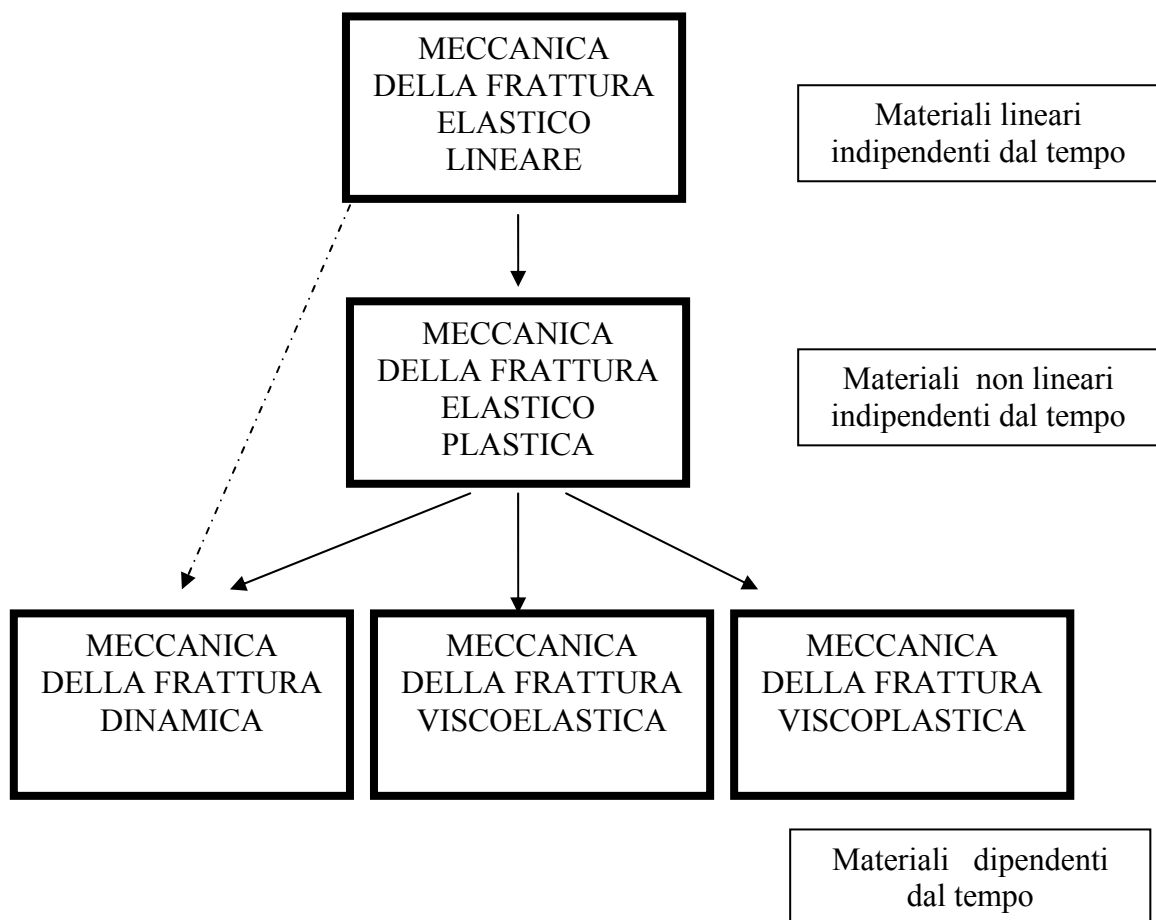
affrontare i problemi di frattura del calcestruzzo si può far risalire al fatto che i processi fisici che in esso si verificano non possono essere spiegati dai principi della Meccanica della frattura lineare. In particolare, i fattori che non rendono possibile l'applicazione della LEFM sono : la presenza di una lenta crescita della fessura ed il fenomeno di softening o meglio modello di tension-softening che introduce una graduale diminuzione della capacità di resistenza a trazione del calcestruzzo. Mentre nei materiali metallici la zona non lineare di processo (FPZ: regione posta in corrispondenza dell'apice della fessura dove prevale il comportamento non lineare del materiale), zona in cui il materiale subisce danni da softening (tearing) ed in cui l'energia è dissipata a causa della formazione di una nuova fessura, è piuttosto piccola ed è sede di plasticità incrudente o snervamento, nel calcestruzzo essa risulta di dimensioni considerevoli e presenta uno scorrimento plastico pressoché nullo.

Finchè le dimensioni delle fessure si mantengono piccole e quindi scarsamente interagenti sono valide le ipotesi di applicazione della meccanica della frattura elastico lineare; viceversa, per lunghezze sufficientemente elevate, gli effetti delle interazioni reciproche diventano significativi e più marcato è l'effetto della non linearità del calcestruzzo. Infatti la presenza di una zona di processo molto ampia è in contrasto con gli assunti della meccanica della frattura lineare, ed è dovuta alla eterogeneità del materiale costituito da una matrice cementizia e da aggregati di grosse dimensioni che agiscono come dei punti di formazione della microfessurazione, dal momento che le differenti rigidzze tra sabbia, aggregati e pasta di cemento possono causare concentrazioni di tensione. Inoltre quando la fessura si manifesta, gli aggregati possono agire come particelle di collegamento a causa del pull-out frizionale durante l'apertura della fessura, assicurando così un trasferimento continuo di tensione sulla fessura anche per grandi aperture. Da ciò fu immediato dedurre che la LEFM non poteva essere applicata al calcestruzzo quando la dimensione strutturale era di ridotte dimensioni (campioni troppo piccoli) e che la teoria offriva risultati accurati solo nei casi in cui venivano analizzate strutture di grandi dimensioni . A tal proposito, quindi, era necessario ricorrere ad una teoria che fosse in grado di descrivere il comportamento a frattura di campioni di normali dimensioni .

Sulla base di quanto esposto in precedenza è possibile effettuare una suddivisione della meccanica della frattura in cinque aree fondamentali : la LEFM o meccanica della frattura elastico lineare che considera i principi della teoria

---

dell'elasticità lineare, la Meccanica della frattura elasto-plastica non lineare o meccanica della frattura plastica (EPFM o PFM o NLFM: meccanica della frattura non lineare) che tiene conto del comportamento plastico dei solidi duttili, la Meccanica della Frattura dinamica, la Meccanica della Frattura viscoelastica e la Meccanica della Frattura viscoplastica. Nell'ambito di questo lavoro di tesi verranno affrontati nello specifico i concetti della Meccanica della Frattura lineare e non lineare con particolare attenzione a quest'ultima. La figura riportata di seguito illustra lo schema ad albero che descrive i differenti approcci della meccanica della frattura.



**Fig. 1.2** - Schema ad albero semplificato che individua i differenti rami della meccanica della frattura.

La Meccanica della frattura elastico-lineare si occupa dello studio dei solidi che presentano un comportamento lineare elastico, con un legame lineare tensione-deformazione fino alla sollecitazione massima sopportabile, senza deformazioni

plastiche anche su scala microscopica e con valore delle tensioni all'apice della fessura teoricamente infinito. La Meccanica non lineare, invece, tiene conto del comportamento plastico più o meno accentuato che si manifesta all'apice della cricca o fessura. Nell'ambito della meccanica della frattura non lineare la zona "danneggiata" viene chiamata plastica nel caso dei metalli, e zona di processo della frattura nei materiali cementizi e ceramici. La Meccanica della Frattura dinamica, invece, riguarda i fenomeni di frattura per i quali il ruolo dell'inerzia materiale diventa significativa. Inizialmente questa disciplina fu considerata interessante, ma non particolarmente importante, dal momento che si riteneva che all'avanzare della fessura, la struttura giungesse a rottura indipendentemente dalla presenza o meno dei contributi dovuti all'inerzia. Solo più tardi si intuì che, se i carichi vengono applicati rapidamente al corpo fessurato, il campo delle tensioni interne non risulta equilibrato, ed è, quindi, necessario analizzare i meccanismi di frattura in condizioni di crescita dinamica del carico. Si rese necessario, quindi, valutare in modo più dettagliato gli effetti inerziali che possono essere originati sia dai carichi applicati rapidamente su un solido fessurato che da una rapida propagazione della fessura.

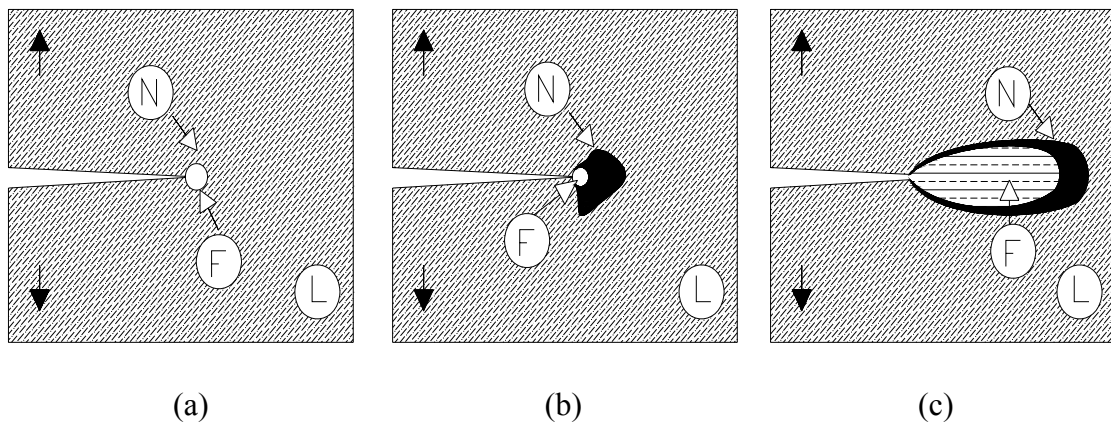
La LEFM si basa fondamentalmente su tre ipotesi : la prima stabilisce che una fessura venga rappresentata come un taglio matematico; la seconda suppone che il materiale sia elastico lineare ed, infine, la terza secondo cui le deformazioni sono piccole fino alla rottura finale.

L'analisi tensione-deformazione nelle vicinanze degli apici della fessura conduce, nei corpi elastico-lineari, a problemi lineari al contorno. Nonostante il termine meccanica della frattura lineare sia ampiamente accettato e diffuso esso non risulta essere corretto poiché la frattura nel suo insieme costituisce un fenomeno fortemente non lineare. Per ciò che concerne la meccanica della frattura elasto-plastica o non lineare è importante evidenziare come essa utilizzi una differente simbologia per descrivere la forza motrice della fessura che, infatti, viene indicata con  $J$  anziché con  $G$ . Mentre la legge di Hooke rappresenta la descrizione matematica dell'andamento della parte elastica lineare della curva sperimentale  $\sigma - \varepsilon$  del materiale, la legge di Ramberg-Osgood (R-O) costituisce un'estensione di tale legge che permette di modellare la regione plastica della curva  $\sigma - \varepsilon$ . In particolare essa è stata creata per descrivere la relazione non lineare tra tensione e deformazione, cioè la curva  $\sigma - \varepsilon$  nei materiali a partire dal loro punto di snervamento. L'impiego dell'integrale  $J$  nell'ambito della frattura non lineare consente

---

di valutare se si può verificare la frattura di materiali molto duttili cioè caratterizzati da ampie deformazioni plastiche nella regione posta in prossimità del fronte della fessura. La prima applicazione dell'integrale  $J$  allo studio di problemi di frattura duttile si fa risalire a Zahoor e Kanninen. Successivamente Paris e Tada hanno proposto un metodo pseudo-plastico per il calcolo di  $J$ . Il metodo da essi sviluppato è di tipo elastico ma tiene conto della plasticizzazione all'apice della fessura tramite una correzione sulla lunghezza della fessura stessa. Le differenze concettuali tra la LFM e la NLFM sono mostrate nella figura riportata di seguito .

La LFM è applicabile fino a quando la zona di processo della frattura e la zona di comportamento non lineare sono molto piccole paragonate con le dimensioni strutturali .



**Fig. 1.2.1** - FPZ (zona di processo della frattura): (a) in un materiale elastico-lineare (modello di Dugdale); (b) in un metallo (materiale duttile); (c) nel calcestruzzo (materiale quasi-fragile). In tutte e tre le figure la parte contrassegnata con la lettera L rappresenta il materiale elastico-lineare, quella indicata dalla lettera N rappresenta la zona plastica, mentre quella contrassegnata dalla lettera F individua la zona di processo della frattura.

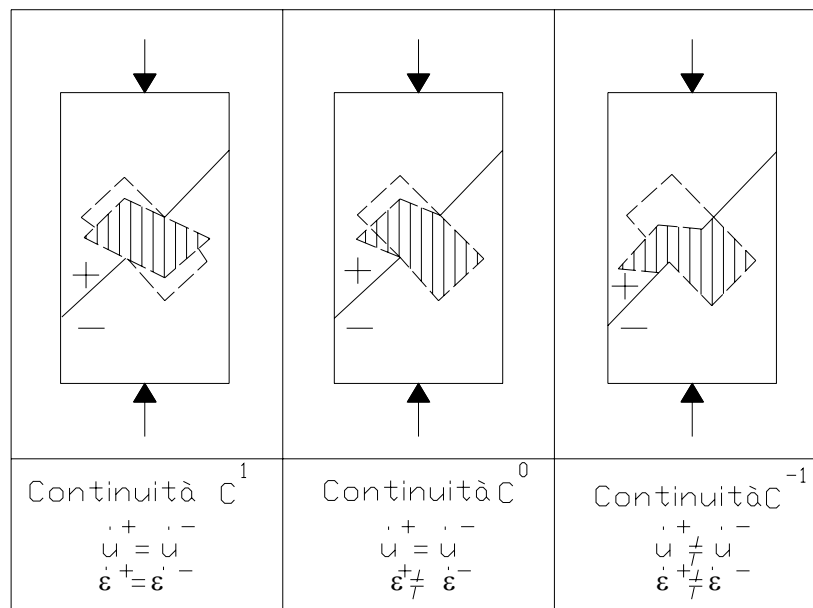
Questi dati sono stati ulteriormente avvalorati nel 1972 dalle sperimentazioni effettuate da Walsh su campioni di travi di calcestruzzo semplice, intagliate e geometricamente simili, dalle quali ottenne dei risultati che si discostavano notevolmente da quelli previsti dalla Meccanica della Frattura elastico lineare (LEFM). L'impossibilità di avvalersi della Meccanica della frattura elastico lineare ha pertanto richiesto, nel caso del calcestruzzo, il ricorso ad una teoria non-lineare denominata Meccanica della frattura non lineare, NLFM (non-linear fracture mechanics) allo scopo di ottenere una migliore descrizione del comportamento reale del materiale .



Dal 1960 in poi le teorie della meccanica della frattura sono state sviluppate per analizzare i vari tipi di comportamento non lineare del materiale come la plasticità, la viscoplasticità e la viscoelasticità.

Il processo di frattura, come già esposto in precedenza, consiste nell'inizio e nella propagazione della fessura. E' possibile distinguere tre modi separati di frattura secondo il grado di discontinuità o continuità che si verifica nei processi di frattura :

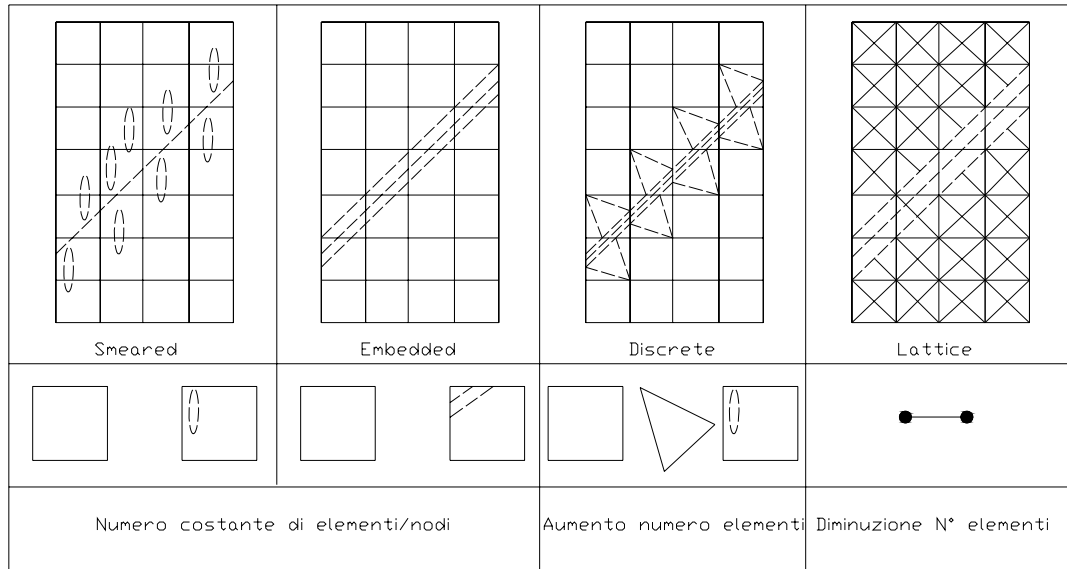
- Il primo modo di frattura riguarda la frattura diffusa o smeared che corrisponde ad una classe  $C^1$  del moto secondo il quale c'è continuità sia degli spostamenti che delle deformazioni in corrispondenza della potenziale superficie di frattura.
- Il secondo modo di frattura corrisponde ad una classe  $C^0$  di continuità del moto che prevede una continuità di spostamenti ed una discontinuità delle deformazioni.
- La terza ed ultima tipologia è quella discreta che corrisponde ad una classe  $C^{-1}$  di continuità del moto che prevede discontinuità sia degli spostamenti che delle deformazioni.



**Fig. 1.2.2** - Cinematica dei processi di frattura continui e discontinui.

In particolare la simulazione numerica della progressiva frattura dei materiali solidi viene effettuata nell'ambito della plasticità computazionale, della meccanica del danno e, infine, della meccanica della frattura. La figura 1.2.2 evidenzia i tre problemi

di frattura che vengono rispettivamente affrontati nell'ambito della plasticità, della meccanica del danno e della Meccanica della frattura. A tale proposito la figura 1.2.3 riporta le differenti strategie di modellazione della fessurazione :



**Fig. 1.2.3** - Modelli discreti e diffusi della fessurazione.

Quando un solido si frattura si originano al suo interno nuove superfici secondo delle modalità termodinamiche. La separazione del materiale è causata dalla rottura dei legami atomici dovuta alle elevate tensioni locali. Il fenomeno della frattura può essere affrontato da differenti punti di vista che dipendono, infatti, dalla scala di osservazione.

Uno di questi è l'approccio atomico in cui la struttura del materiale può essere rappresentata attraverso una serie di molecole legate da forze interatomiche in cui, pertanto, il fenomeno della frattura si manifesta nell'ambito di distanze dell'ordine di  $10^{-7}$ .

Altro approccio è quello continuo che considera il comportamento del materiale a distanze più grandi di  $10^{-2}$ . I due livelli di scala vengono studiati ed affrontati con due differenti approcci.

Il primo, quello atomico, studia il problema avvalendosi dei concetti della meccanica quantistica; il secondo, quello continuo, si serve della teoria della meccanica del continuo e della termodinamica classica.

### 1.3 EVOLUZIONE STORICA DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

I primi sviluppi di questa disciplina si fanno risalire al 15° secolo quando Leonardo da Vinci fornì alcuni indizi sulle cause all'origine della frattura. Egli effettuò dei test di resistenza su fili d'acciaio di differente lunghezza dai quali ottenne che la resistenza era inversamente proporzionale alla lunghezza del filo. Da ciò fu immediato dedurre che la presenza di difetti nel materiale contribuiva a controllare la resistenza; maggiore risultava la lunghezza del filo e più elevata era la probabilità di campionatura della regione contenente difetti. Nel 19° secolo Cauchy ricavò delle relazioni tensione-deformazione e concentrazione di tensione in corrispondenza di singolarità.

Nel 1898 un ingegnere tedesco Kirsch mostrò che in corrispondenza di un foro circolare in una piastra infinita soggetta a tensioni da trazione uniformi vi era un fattore di concentrazione di tensione pari a tre.

Nel 1913 Inglis effettuò delle ricerche approfondite sulle tensioni ai bordi di un foro ellittico in una lastra infinita di spessore unitario dalle quali dedusse che, non appena la cavità ellittica si approssimava allo zero, le tensioni tendevano all'infinito.

Successivamente, in particolare nel 1924, Griffith, un ingegnere aeronautico di origini britanniche, sulla base degli studi effettuati da Inglis, giunse alla conclusione che il valore delle tensioni all'apice della fessura non poteva essere utilizzato come criterio di frattura del materiale indipendentemente dall'entità del carico applicato, dal momento che esso tendeva all'infinito, ma che poteva essere trattato come un problema di bilancio energetico tra l'energia disponibile per la propagazione della fessura e l'energia di superficie dovuta all'avanzamento della fessura.

Sulla base di tali osservazioni egli arrivò a proporre un criterio di frattura di tipo energetico per la frattura fragile, basato sulla conservazione dell'energia, secondo il quale l'energia totale del sistema è pari alla somma dell'energia di deformazione elastica e dell'energia associata all'avanzamento unitario della fessura. Questo nuovo criterio a frattura, fondato sull'energia e formulato sulla base delle analisi delle tensioni e delle deformazioni in prossimità dell'apice della fessura, consentiva di definire un legame tra tensione di frattura e dimensione del difetto (resistenza del

materiale-dimensione della fessura). L'analisi della condizione di bilancio dell'energia ha dato origine alla seguente formula che esprime il criterio di avanzamento della fessura e definisce il valore della massima tensione a trazione applicabile :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi a}} \quad (1.3)$$

dove "E" rappresenta il modulo di elasticità di Young , "a" è la lunghezza iniziale della fessura e "G<sub>c</sub>" l'energia di rilascio critica, parametro materiale che descrive la quantità di energia necessaria per separare un'area unitaria della superficie di frattura. Se  $\sigma < \sigma_c$  non si avrà alcun fenomeno di fessurazione dal momento che l'energia immagazzinata nel sistema è più bassa del valore critico, se, invece,  $\sigma \geq \sigma_c$  la fessura avanzerà in modo catastrofico poiché l'energia immagazzinata nel sistema è maggiore della tensione critica  $\sigma_c$ . L'equazione di cui sopra definisce il criterio basilare della teoria della frattura dei materiali fragili così come definita da Irwin e Griffith, criterio che gettò le basi della LEFM (meccanica della frattura elastico lineare). Nonostante questo criterio abbia gettato le basi della LEFM, esso presenta non poche contraddizioni soprattutto per quanto riguarda la tendenza all'infinito delle tensioni in corrispondenza dell'apice della fessura ; infatti, ciò è in contraddizione con quanto ci si sarebbe aspettati in una situazione reale in cui il materiale possiede resistenza a trazione.

Il calcestruzzo semplice, infatti, non è un materiale fragile secondo l'accezione di Griffith ma un materiale quasi-fragile in quanto possiede una capacità portante residua dopo il raggiungimento della resistenza a trazione. Il concetto che definisce la singolarità delle tensioni viola, inoltre, anche alcune assunzioni fondamentali legate all'elasticità che riguardano le piccole deformazioni.

Il fenomeno della frattura è stato preso in considerazione ed applicato seriamente alle strutture soltanto in tempi recenti, in particolare intorno al 1940 per esigenze belliche, quando si è cominciato a fare uso delle saldature nelle strutture in acciaio. La presenza delle saldature introduce nelle strutture che si vanno a realizzare una cricca o difetto consistente in una discontinuità del materiale . L'uso della saldatura presenta il vantaggio, rispetto alle giunzioni chiodate, di rendere la struttura monolitica ma, contemporaneamente, la rende più facilmente soggetta ad una propagazione rapida della frattura. Se, quindi, fino ad allora, il fenomeno della frattura

nei metalli era stato di proporzioni contenute, con l'utilizzo delle saldature ebbe conseguenze catastrofiche.

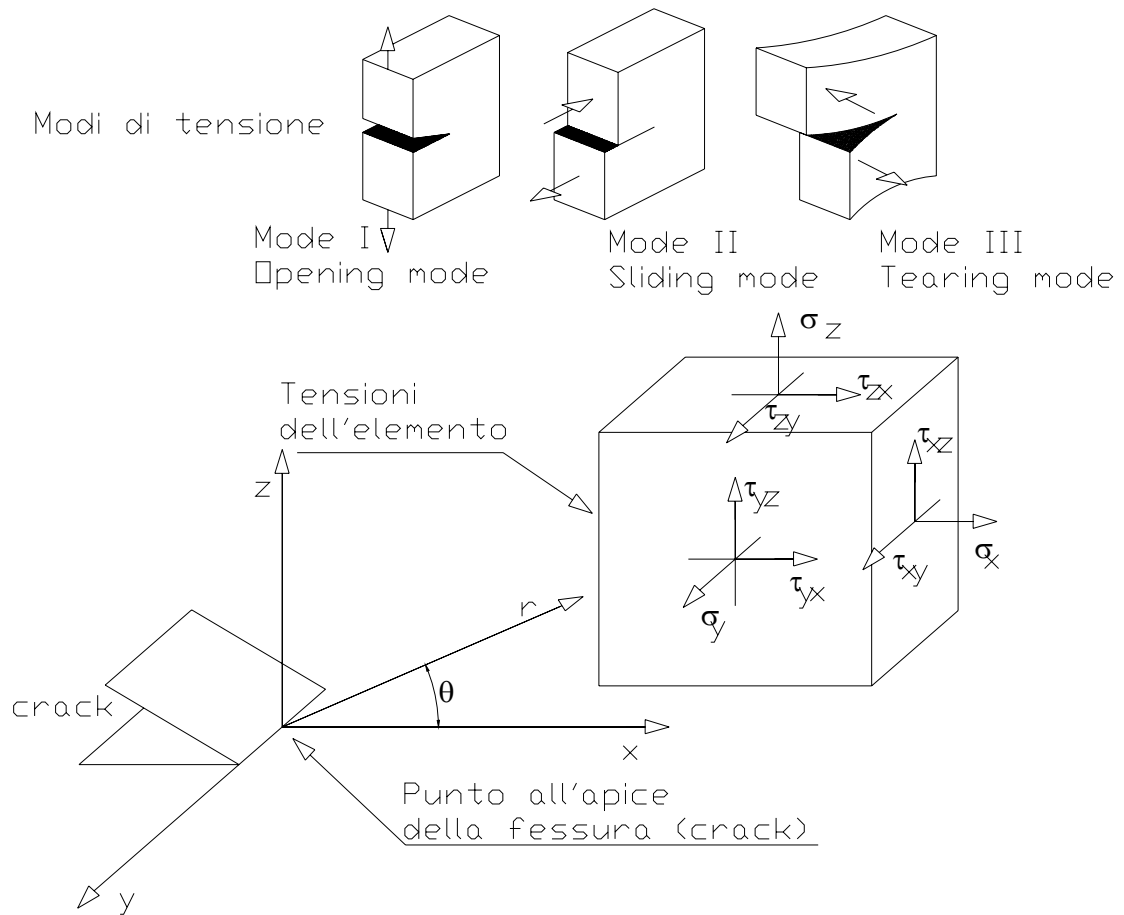
A tal proposito citiamo i tragici eventi accaduti alle navi Liberty nel 1943, quando una di esse si ruppe improvvisamente in due mentre veleggiava nel nord Atlantico. La combinazione dell'olio caldo presente nel serbatoio e dell'acqua fredda a contatto con il guscio esterno produsse delle notevoli variazioni termiche che determinarono la propagazione della frattura. La frattura iniziò a propagarsi dall'aletta di rollio che era stata saldata impropriamente; la saldatura si ruppe dando origine ad una forte concentrazione di tensione. Nonostante il guscio d'acciaio avesse una tenacità adeguata per prevenire l'inizio della fessura, esso non riuscì ad interrompere la propagazione della stessa. Le indagini che seguirono rivelarono che la frattura delle navi Liberty era causata da una combinazione di tre fattori:

- le saldature contenevano difetti ;
- la maggior parte delle fessure si verificava in corrispondenza di punti in cui si aveva una concentrazione locale di tensione;
- l'acciaio di cui erano costituite le navi aveva una bassa tenacità come misurato dai test ad impatto.

Nel 1938 Westergaard definì il fattore di intensificazione delle tensioni all'apice della fessura. Nel 1948 Mott gettò le basi della Meccanica della frattura dinamica che prevedeva la determinazione della velocità di una fessura in una piastra fragile; in pratica la meccanica della frattura dinamica consentiva di analizzare lo spostamento della fessura nell'ambito del modo I dinamico di propagazione della fessura in solidi elastico-lineari. Negli anni '50 Irwin ed Orowan estesero l'approccio di Griffith ai metalli. Uno dei primi gruppi di ricerca sulla Meccanica della Frattura, condotto dal Dr. G.R. Irwin dopo aver studiato i primi lavori di Inglis, Griffith ed altri, concluse che gli strumenti di base necessari per analizzare la frattura erano già disponibili. Irwin infatti, estese l'approccio di Griffith ai metalli, includendo l'energia dissipata dallo scorrimento locale plastico. Egli nel 1956 sviluppò il concetto di energia di rilascio che è legato alla teoria di Griffith ma lo presentò in una forma più interessante da un punto di vista ingegneristico. Alcuni colleghi di Irwin attirarono la sua attenzione su un'articolo pubblicato da Westergaard nel 1938 in cui quest'ultimo esponeva i tratti generali di un metodo da lui sviluppato, quello del semi-inverso che consentiva di analizzare le tensioni e gli spostamenti in corrispondenza di una fessura stretta.

---

Irwin usò l'approccio di Westergaard per mostrare che le tensioni e gli spostamenti in corrispondenza dell'apice della fessura potevano essere descritti da un parametro legato all'energia di rilascio definito poi in seguito come fattore di intensificazione delle tensioni. Egli rilevò che le tensioni in corrispondenza dell'apice di una fessura regolare mostrano la stessa variazione, cioè una singolarità di tipo  $r^{-1/2}$  dove  $r$  è la distanza dall'apice della fessura ( $r \ll a$ , ed "a" è la lunghezza della fessura). Questa singolarità è indipendente dalle condizioni al contorno, di carico e dalla geometria ed, inoltre, anche dai tre modi di apertura della fessura di seguito raffigurati che presentano la stessa singolarità in corrispondenza della fessura stessa.



**Fig. 1.3** – Modi di carico della tensione e sistema di coordinate della fessura.

Una fessura in un corpo può essere soggetta a tre differenti tipi di carico che

comportano spostamenti delle superfici della fessura. Il comportamento meccanico di un solido contenente una fessura di geometria specifica e dimensione può essere previsto valutando i fattori di intensificazione delle tensioni  $K_I, K_{II}, K_{III}$ .

Il postulato fornito da Irwin stabilisce che il fattore  $K_I$ , parametro materiale che rappresenta il fattore di intensificazione delle tensioni o sforzi e che dipende dalle condizioni al contorno, dalla geometria e dal modo di carico del sistema, consente di stabilire se una fessura si propagerà nelle reali circostanze. Le equazioni riportate di seguito, espresse in coordinate polari con origine all'apice della fessura descrivono le tensioni e gli spostamenti vicino al suo apice e ad una distanza  $r$  ed angolo  $\vartheta$  :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\vartheta}{2}\right) \quad (1.3.1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\vartheta}{2}\right) \quad (1.3.2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \quad (1.3.3)$$

$$u = \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{k-1}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (1.3.4)$$

$$v = \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{k-1}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \quad (1.3.5)$$

Se il fattore  $K_I$  raggiunge il valore critico  $K_{IC}$  si ha la propagazione della fessura se, invece, il valore di  $K_I$  è più basso del valore critico, non si ha propagazione di fessurazione. Questo postulato è chiamato criterio di Irwin per la frattura dei materiali fragili.

Il valore di  $K_I$  nel caso di geometria e condizioni di carico analizzate descritte da Griffith è espresso nel seguente modo :  $K_{IC} = \sigma_c \sqrt{\pi a}$  ; sostituendo l'espressione di  $\sigma_c$  della relazione (1.1)

si ricava il valore di  $G_c$  definito nel seguente modo :

$$G_c = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad (1.3.6)$$

Successivamente nel 1959 Barenblatt e Dugdale nel 1960 introdussero i modelli della fessura coesiva. Essi fecero il primo tentativo di includere le forze coesive nella regione all'apice della fessura nell'ambito dei limiti della teoria dell'elasticità. Barenblatt affermò che in corrispondenza di una piccola zona detta coesiva, posta in corrispondenza dell'estremità della fessura, agiscono delle forze di distribuzione non note e tali da far chiudere le facce in modo regolare. Dugdale, invece, affermava che la distribuzione delle forze di chiusura è nota ed è costante in accordo con la teoria per i materiali elastici perfettamente plastici.

Nel 1963 Paris ed altri gettarono le basi della frattura da fatica introducendo il legame tra la velocità di propagazione dei difetti ed il fattore di intensificazione degli sforzi ed, infine nel 1968, Rice introdusse il concetto di integrale J, che è indipendente dal percorso di integrazione in corrispondenza dell'apice della fessura, e viene utilizzato come criterio di crescita delle fessure.

Nella LEFM J è equivalente a G, però, l'approccio di Rice non offre dei risultati corretti per quanto riguarda il calcestruzzo ed i materiali fragili a causa della presenza della curva di scarico tipica di quest'ultimi. I modelli di Barenblatt e di Dugdale, come si evince dai concetti esposti in precedenza, presentano dei limiti ai quali Arne Hillerborg ha cercato di ovviare introducendo un modello che differisce da essi per molti aspetti. Le ricerche di Hillerborg sulla Meccanica della Frattura del calcestruzzo cominciarono nella metà degli anni '70 quando egli, divenuto professore di materiali da costruzione all'Istituto di Tecnologia di Lund in Svezia, introdusse il suo modello adatto per gli elementi di calcestruzzo di comuni dimensioni ai quali non poteva essere applicata la LEFM.

Nel 1976 egli introdusse insieme a due suoi studenti, Petersson e Modeer, il modello della fessura fittizia o Fictitious Crack Model secondo il quale la meccanica della frattura elastico lineare poteva essere applicata solo alle strutture di grandi dimensioni e non agli elementi di calcestruzzo di normali dimensioni, assicurando l'indipendenza dell'energia di rilascio dalla mesh in corrispondenza della propagazione della fessura. Nei suoi lavori Hillerborg introdusse il concetto della lunghezza caratteristica di un materiale  $l_{ch}$  per descrivere la dipendenza dalla dimensione strutturale. Nel 1979 Bazant e Cedolin mostrarono che per effettuare un'obiettiva analisi di una struttura di calcestruzzo fessurato dovevano essere impiegati i concetti



della meccanica della frattura e che i criteri di resistenza classici dei modelli materiali avrebbero fornito dei risultati fortemente dipendenti dalla mesh.

Sempre nello stesso anno (1979) venne formato il primo comitato tecnico RILEM di cui fu presidente Wittman ed a cui partecipò anche Hillerborg con il compito di effettuare una serie di test a flessione su tre punti su provini intagliati per la determinazione dell'energia di frattura del calcestruzzo. Dopo che nel 1985 il lavoro della RILEM TC 50 FMC venne completato, Hillerborg propose un nuovo gruppo di lavoro con lo scopo di proseguire gli studi sulla meccanica della frattura del calcestruzzo già intrapresi in precedenza. Hillerborg propose modello che introduceva la cosiddetta zona di processo di tension softening, attraverso una fessura fittizia, senza separazione completa delle due facce in corrispondenza della fessura preesistente i cui bordi si comportano come bordi di chiusura in modo che non ci sia concentrazione di tensione all'apice della fessura estesa.

Nell'approccio di Hillerborg nella fessura è possibile distinguere due zone : una fessura reale in cui non c'è più trasferimento di tensione ed una zona danneggiata, estesa nella zona di processo della frattura (F.P.Z.) in cui le tensioni vengono ancora trasferite. Nel 1983 Bazant e Oh adattando questo concetto all'approccio diffuso, svilupparono il modello della fessura bandata o Crack Band Model in cui l'energia di frattura introdotta da Hillerborg veniva diffusa sulla profondità dell'area in cui si localizzava la fessura, per elementi di ordine più basso tipicamente uguale alla profondità di un elemento. Durante gli anni '80 vennero sviluppati altri approcci alternativi a quelli precedentemente citati. Tra questi rientrano i principi della meccanica del danno che, affrontati dalla scuola francese, vennero usati per modellare la fessurazione nel calcestruzzo rinforzato. Altri metodi furono adottati da Bazant e suoi collaboratori adattando alla frattura del calcestruzzo le prime idee di Batdorf e Budiansky sulla plasticità dei metalli. Feenstra e de Borst formularono una categoria di modelli basati sulla plasticità adattandola alla fessurazione del calcestruzzo con lo scopo principale di evitare l'approccio duale che veniva usato nei modelli di fessurazione diffusa a trazione.

La modellazione numerica della fessurazione nel calcestruzzo venne effettuata a partire dalla fine degli anni '60, in particolare nel 1967 con Ngo e Scordelis e nel 1968 con Rashid che introdussero rispettivamente i modelli della fessurazione discreta ed i modelli della fessurazione diffusa. Ngo e Scordelis furono i primi che consentirono la

---

formazione di fessure in una mesh agli elementi finiti, stabilendo che le fessure potevano propagarsi lungo i contorni predefiniti tra gli elementi. L'approccio diffuso ottenne molta popolarità e nel 1970 notevoli sforzi vennero investiti nello sviluppo di modelli costitutivi in ambiente diffuso che potevano riprodurre le grandezze caratteristiche  $\sigma - \varepsilon$  del calcestruzzo sperimentalmente osservate .

Molta attenzione fu dedicata alla modellazione del comportamento del calcestruzzo in condizioni di tensioni triassiali a compressione. Ciò rappresentò qualcosa di sorprendente dal momento che la maggior parte delle non linearità del calcestruzzo è causata dalla fessurazione, fenomeno altamente non lineare generato dalla limitata capacità del calcestruzzo stesso di sopportare tensioni a trazione o meglio deformazioni dovute a trazione, che genera in realtà degli stati tensionali triassiali che nella maggior parte delle applicazioni del calcestruzzo non vengono considerate ed approssimate a stati tensionali piani.

Nel 1993 Schlangen e nel 1994 Van Mier, introdussero i modelli lattice originariamente concepiti dal fisico Hrennikoff nel 1941, che prevedevano l'assegnazione ad ognuna delle particelle o grani della struttura di elementi lattice o truss element, cioè elementi biella ai quali venivano assegnate delle differenti proprietà. I modelli lattice ottennero molta popolarità nella simulazione del comportamento meccanico dei materiali con microstruttura complessa, perché consentivano di determinare la risposta all'applicazione di un carico esterno di una rete di elementi generalmente molle o elementi biella in cui veniva scomposta la struttura.

Questi modelli sono costituiti da semplici elementi monodimensionali connessi su un fitto insieme di posizioni nodali che possono essere distribuite regolarmente o irregolarmente .

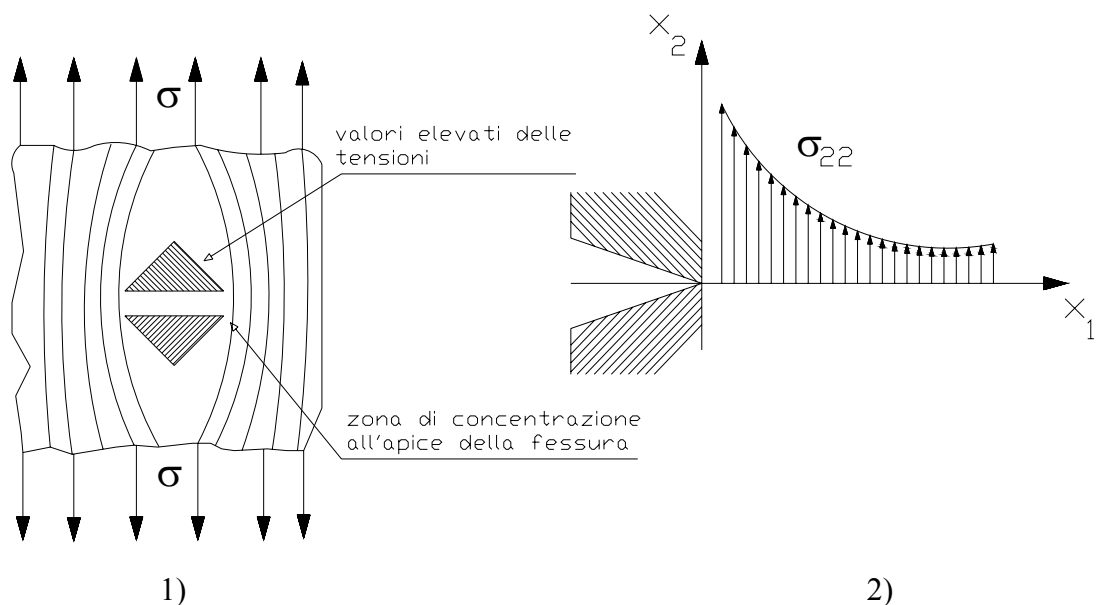
La giustificazione di questi modelli fa riferimento, fondamentalmente, alla struttura fisica del materiale, ad un livello di scala molto piccolo, dove il materiale può essere visto come un insieme di particelle in equilibrio con le loro forze d'interazione.

I modelli lattice sono anche stati usati per studiare il comportamento di una varietà di materiali a scale più grandi, con particolare interesse per il loro disordine e ripartizione sotto carico.

## 1.4 MODELLI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA LINEARE

Lo studio del problema in ambito lineare della crescita di fessure esistenti, vuoti o altri difetti all'interno di un materiale è stato affrontato ricorrendo ad analisi delle tensioni e criteri di frattura.

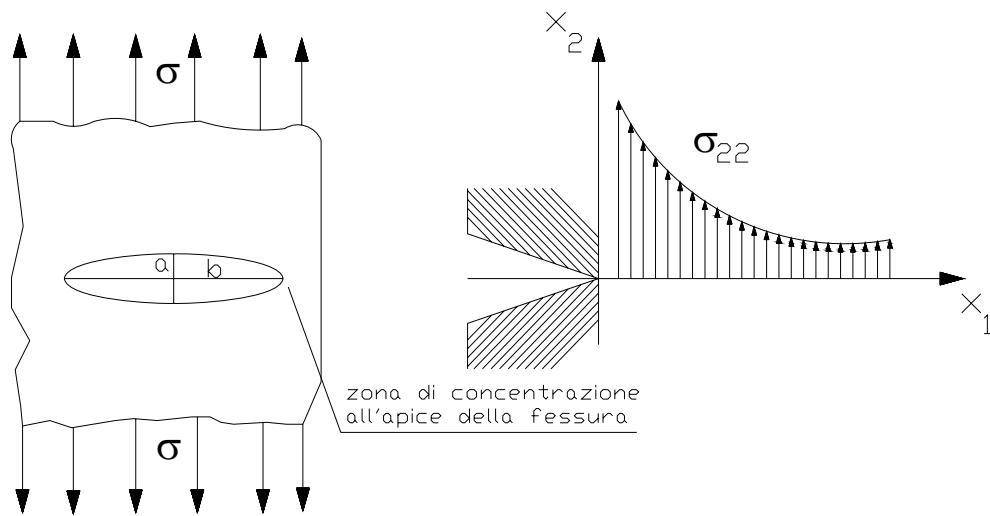
Il primo modello vero e proprio, in tale direzione, fu sviluppato da Inglis nel 1913 quando, analizzando il fenomeno della formazione di una fessura in un solido elastico soggetto ad una tensione uniforme uniassiale, mostrò che le traiettorie delle tensioni tendevano a modificare il loro percorso in corrispondenza della fessura stessa. Dalla figura che segue, infatti, si può vedere facilmente come le tensioni presentino una certa interruzione nelle loro traiettorie, in corrispondenza dell'apice della fessura, ed anche un valore singolare con una certa concentrazione sempre in corrispondenza dell'apice stesso.



**Fig. 1.4** – 1) Foro in una piastra soggetta a delle tensioni a trazione  $\sigma$  uniassiali; 2) Valore singolare delle tensioni in corrispondenza dell'apice della fessura.

Il modello di Inglis consente di definire lo stato di tensione in corrispondenza del bordo o apice del foro, a sezione ellittica, presente in una lastra piana illimitata sollecitata a trazione. La figura seguente riporta la geometria della lastra e della fessura con le indicazioni dell'andamento delle tensioni in corrispondenza dell'apice

della fessura :



**Fig. 1.4.1** – 1) Foro ellittico in una piastra soggetta a delle tensioni a trazione  $\sigma$  uniassiali; 2) Valore singolare delle tensioni in corrispondenza dell'apice della fessura.

dove  $a$  e  $b$  sono i semiassi dell'ellisse,  $\rho = \frac{b^2}{a}$  rappresenta il raggio di curvatura in corrispondenza del vertice dell'ellisse e  $\sigma_v$  lo sforzo di trazione .

La relazione che esprime  $\sigma_v$  è la seguente :

$$\sigma_v = \sigma_n \left( 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \sigma_n \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \tag{1.4}$$

All'aumentare di  $\frac{a}{b}$ , cioè man mano che il foro assume la forma di cricca il valore di  $\sigma_v$  aumenta e , per  $\rho$  o  $b$  che tendono a zero, lo sforzo normale tende all'infinito .

Nel caso di foro a sezione circolare i due semiassi assumono lo stesso valore ( $a=b$ ) e la tensione diventa  $\sigma_v = 3\sigma_n$ , cioè presenta un valore più basso. La tensione massima all'apice della cricca è tre volte più grande di quella applicata dall'esterno; ciò vuol dire che in presenza di cricca la resistenza di una lastra forata di dimensioni maggiori di quelle del foro risulta ridotta ad  $\frac{1}{3}$  rispetto alla resistenza della lastra integra.

Sulla base degli studi svolti da Inglis, un ingegnere aeronautico britannico, Alan Arnold Griffith effettuò degli studi teorici sulla natura della tensione e della rottura nei metalli; egli, sulla base delle nozioni comunemente impiegate all'epoca (1913), si

accorse che in ogni materiale esistevano numerose microfratture, ed ipotizzò che quest'ultime provocassero una riduzione della resistenza complessiva del materiale stesso.

Egli riteneva che questa riduzione di resistenza traesse le sue origini dalla presenza di vuoti all'interno del materiale, vuoti che provocavano, in un dato punto, aumenti della concentrazione della tensione ed originavano, nello stesso punto, il superamento del valore di resistenza massima, molto prima di quanto ciò non avvenisse per il solido nel suo insieme. In un tale contesto Griffith sentì la necessità di introdurre delle considerazioni di tipo energetico e non solo tensionale per analizzare il fenomeno della frattura. La principale innovazione che egli introdusse fu il comprendere che era possibile ricavare un criterio termodinamico per la frattura considerando il cambiamento totale di energia di un corpo fessurato all'aumento della lunghezza della fessura. In particolare Griffith riteneva che la propagazione della fessura potesse avvenire sulla base di due concetti importanti : il primo secondo cui, in ogni fase di avanzamento della fessura, l'energia accumulata nel materiale diminuisce, ed un secondo che prevede l'esistenza di un meccanismo molecolare che consente la trasformazione dell'energia. Entrambi questi concetti gettarono le basi del criterio energetico da lui proposto che si fondava su una teoria della crescita della fessura basata sul bilancio globale di energia dell'intero sistema.

Un materiale deformato, infatti, contiene energia potenziale elastica che deve essere liberata. Se il materiale si frattura completamente questa energia viene liberata. Nelle fasi intermedie del processo di fessurazione, cioè quelle successive alla manifestazione della fessura , quest'ultima si allarga leggermente facendo separare lentamente i suoi bordi. In tale situazione il materiale posto nelle immediate vicinanze della fessura ha raggiunto il limite elastico, liberando l'energia potenziale elastica. Proprio sulla base di quanto si verifica in corrispondenza dell'apice della fessura, Griffith concluse che la rottura del materiale si aveva, non per il raggiungimento della tensione massima, ma piuttosto per considerazioni di natura energetica .

I concetti che stanno alla base della teoria di Griffith stabilivano che l'avanzamento della fessura si manifesta quando l'energia disponibile per la crescita della fessura è sufficiente a superare la resistenza del materiale, cioè la propagazione di una qualsiasi fessura ha luogo se l'energia rilasciata dal sistema è sufficiente a fornire tutta l'energia richiesta perché avvenga tale incremento di fessura. Inoltre l'avanzamento della

---

fessura si basa su un criterio che stabilisce che l'energia deve essere conservata in tutti i processi.

Griffith, in sintesi, sosteneva che l'energia potenziale del sistema, costituita dall'energia elastica interna immagazzinata e dall'energia potenziale esterna dei carichi applicati, variava con la dimensione della fessura e che, quindi, la frattura è associata al consumo di energia.

A tal proposito se si considera una fessura di area  $A$ , all'interno di un mezzo continuo deformabile soggetto ad un carico arbitrario, la legge di conservazione dell'energia stabilisce che :

$$\dot{W} = \dot{E} + \dot{K} + \dot{T} \quad (1.4.1)$$

dove  $\dot{W}$  è il lavoro per unità di tempo dai carichi applicati,  $\dot{E}$  e  $\dot{K}$  sono le derivate dell'energia interna e dell'energia cinetica del corpo, e  $\dot{T}$  è l'energia per unità di tempo impiegata per aumentare l'area della fessura. L'energia interna può essere espressa nella forma seguente :

$$E = U^e + U^p \quad (1.4.2)$$

dove  $U^e$  rappresenta l'energia di deformazione elastica e  $U^p$  il lavoro plastico.

Se i carichi applicati sono indipendenti dal tempo e la fessura cresce lentamente, l'energia cinetica  $K$  è trascurabile e può essere omessa dall'equazione di bilancio dell'energia (1.4).

Dal momento che tutti i cambiamenti rispetto al tempo sono provocati dalle variazioni nelle dimensioni della fessura, è possibile stabilire che :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial}{\partial A} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A}, \quad A \geq 0 \quad (1.4.3)$$

e l'equazione (1.4.2) diventa :

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \left( \frac{\partial U^e}{\partial A} + \frac{\partial U^p}{\partial A} \right) + \frac{\partial T}{\partial A} \quad (1.4.4)$$

L'equazione (1.4.3) rappresenta il bilancio dell'energia durante la crescita della fessura; essa indica che il lavoro fornito al continuo dai carichi applicati è uguale alla derivata dell'energia di deformazione elastica ed al lavoro plastico di deformazione più l'energia dissipata nella propagazione della fessura.

L'equazione (1.4.3) può essere espressa nella seguente forma :

$$-\frac{\partial \pi}{\partial A} = \frac{\partial U^p}{\partial A} + \frac{\partial T}{\partial A} \quad (1.4.5)$$

dove :

$$\Pi = U^e - W \quad (1.4.6)$$

$\Pi$  è l'energia potenziale del sistema. L'equazione (1.4.4) mostra che la derivata dell'energia potenziale diminuisce all'aumentare della crescita della fessura ed è pari alla derivata dell'energia misurata nella deformazione plastica e nella crescita della fessura.

Nel caso di materiali idealmente fragili, l'energia dissipata nella deformazione plastica è trascurabile e può essere omessa dall'equazione (1.4.3).

Se  $\gamma_s$  rappresenta l'energia richiesta per formare un'unità di una nuova superficie materiale, l'equazione (1.4.3) può essere espressa nel seguente modo :

$$G = \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial U^e}{\partial A} = \frac{\partial T}{\partial A} = 2\gamma_s \quad (1.4.7)$$

dove il fattore 2 che appare nel lato destro dell'equazione si riferisce alle due superfici del materiale formate durante la crescita della fessura, il termine del lato sinistro dell'equazione rappresenta l'energia disponibile per la crescita della fessura ed è data dal simbolo G in onore di Griffith.

G rappresenta la resistenza del materiale e prende il nome di energia di rilascio. L'equazione (1.4.4) rappresenta il criterio di frattura per la crescita della fessura.

La teoria di Griffith descrive il fenomeno della propagazione della frattura considerando l'energia coinvolta nel processo; in sostanza egli riteneva che quando una fessura si propaga in modo da portare a rottura un solido, il valore dell'energia superficiale accumulata coincide con la perdita di energia di coesione. Inoltre poiché l'energia rilasciata è proporzionale al quadrato della lunghezza della fessura, solo quando quest'ultima è relativamente corta l'energia necessaria alla sua espansione supera l'energia disponibile. L'approccio di Griffith rappresenta un'alternativa al criterio per la propagazione della fessura basato sulla resistenza della singolarità e costituisce il primo tentativo di formulare una teoria elastico-lineare per la propagazione della fessura.

L'importanza del modello di Griffith per i solidi elastici, e di quelli successivi di Irwin e Orowan per i solidi elasto-plastici, risiede nel fatto che la propagazione della fessura

è causata dal passaggio dell'energia da lavoro esterno e/o energia di deformazione ad energia di superficie.

Questo tipo di approccio è di tipo globale ed è stato sviluppato precedentemente a quello di Westergaard che si basa sulle tensioni poste in corrispondenza degli apici della fessura.

## 1.5 MODELLO DI WESTERGAARD

La risoluzione di alcune categorie di problemi di fessurazione nell'ambito dell'elasticità lineare può essere effettuata mediante il metodo del semi-inverso proposto da Westergaard, metodo che, in tale direzione, costituisce un mezzo semplice e di facile applicazione. Esso, in sintesi, risulta essere molto utile nella risoluzione dei problemi che riguardano la fessurazione, nel caso di elasticità piana ; in particolare esso rappresenta un approccio di tipo locale, diversamente da quello di Griffith che è di natura prettamente globale e consente di determinare, per un solido elastico omogeneo ed isotropo soggetto a fessurazione, i campi delle tensioni e degli spostamenti.

L'intuizione di Westergaard fu di capire che in corrispondenza dell'apice della fessura erano presenti tensioni singolari che, quindi, con il tendere a zero della distanza dall'estremità stessa, tendevano all'infinito .

La determinazione delle tensioni e degli spostamenti viene effettuata mediante l'uso delle variabili complesse che costituiscono un modo efficace per risolvere questo tipo di problemi. Questo approccio introduce una funzione di tensione complessa detta funzione di Westergaard  $Z(z)$  definita nel modo seguente:

$$Z(z) = \text{Re} Z + y \text{Im} Z \quad (1.5)$$

in cui

$$z = x + iy \quad (1.5.1)$$

$$i = \sqrt{-1} \quad (1.5.2)$$

La funzione  $Z$  è una funzione analitica le cui derivate sono espresse nel modo seguente:

$$\overline{\overline{Z}} = \frac{d\overline{\overline{Z}}}{dz} \quad (1.5.3)$$



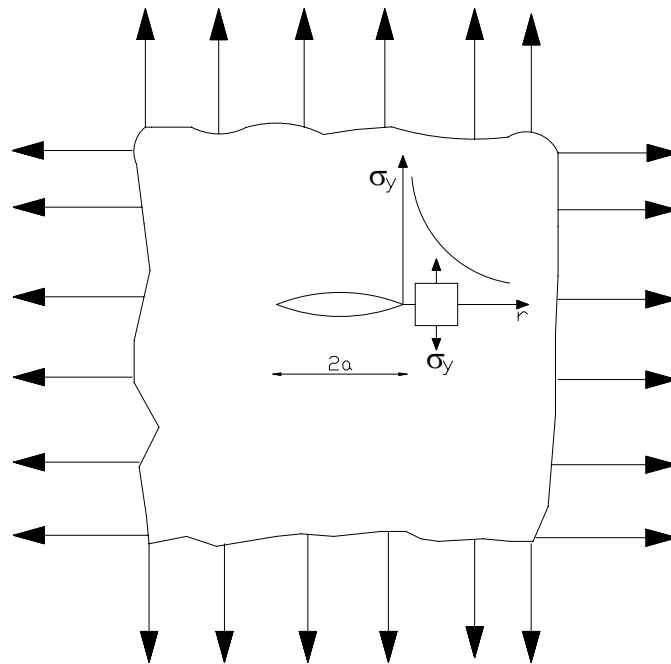
$$Z = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (1.5.4)$$

$Z$  è legata alla funzione delle tensioni di Airy dalla relazione riportata di seguito :

$$\Phi = \text{Re} \bar{\bar{Z}} + y \text{Im} \bar{Z} \quad (1.5.5)$$

dove Re e Im indicano rispettivamente le parti reali ed immaginarie della funzione e le barre su  $Z$  rappresentano l'integrazione rispetto a  $z$ . Il modello che Westergaard sviluppò gli consentì di affermare che il campo tensionale presente all'estremità della fessura in una lastra piana illimitata non era mai stato ben definito e che presentava una zona plasticizzata, di piccole dimensioni anche nei materiali fragili; il modello, infatti, mostra che, in corrispondenza dell'apice della fessura, vi sono delle singolarità delle tensioni.

Avvalendosi di tali concetti si può determinare il valore delle tensioni che si manifestano all'apice di una cricca passante di lunghezza  $2a$  su una lastra piana illimitata sollecitata a trazione come si vede nella figura seguente :



**Fig. 1.5.1** – Singolarità tensionale all'apice di una fessura di lunghezza  $2a$  .

Se si considera un elementino posto vicino alla cricca di coordinate  $r$  e  $\vartheta$ , la cricca agisce sull'elementino come elemento perturbatore dando luogo ad uno stato tensionale non più uniforme. Questo stato di sollecitazione può essere definito avvalendosi della funzione  $Z$  nel modo seguente :

$$Z = \frac{\sigma_{\infty} z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1.5.6)$$

dove  $\sigma_{\infty}$  è la tensione singolare in corrispondenza del tip ed  $a$  è la metà della lunghezza della fessura. Per  $-a < x < a$ , la funzione  $Z$  è immaginaria, mentre per  $|x| > |a|$  le tensioni normali nel piano della fessura sono date da :

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \quad (1.5.7)$$

$$\sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \quad (1.5.8)$$

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (1.5.9)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z = \frac{\sigma_x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (1.5.10)$$

Se con  $x^* = x - a$  si indica la distanza orizzontale dall'apice della fessura l'espressione della tensione diventa :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}} \quad (1.5.11)$$

per  $x \ll a$ .

Le tensioni sul piano della fessura sono date da :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x^*}} \quad (1.5.12)$$

da cui, confrontando con la (1.6.9) si ottiene :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.5.13)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_n \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \dots \right] \quad (1.5.14)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_n \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) + \dots \right] \quad (1.5.15)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.5.16)$$

$$\tau_{YX} = \tau_{XY} = \sigma_n \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \quad (1.5.17)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.5.18)$$

Omettendo il pedice  $n$  si ha :

$$\sigma_{ij} = \sigma \sqrt{\pi a} f(r, \vartheta) \quad (1.5.19)$$

da cui si vede che gli sforzi possono essere calcolati mediante una funzione  $f(r, \vartheta)$  moltiplicata per un parametro  $K$  definito come :

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1.5.20)$$

e, quindi,

$$\sigma_{ij} = K \cdot f(r, \vartheta) \quad (1.5.21)$$

dove  $K$  rappresenta il fattore di intensificazione delle tensioni .

## 1.6 MODELLI DELLA FRATTURA ELASTO-PLASTICA

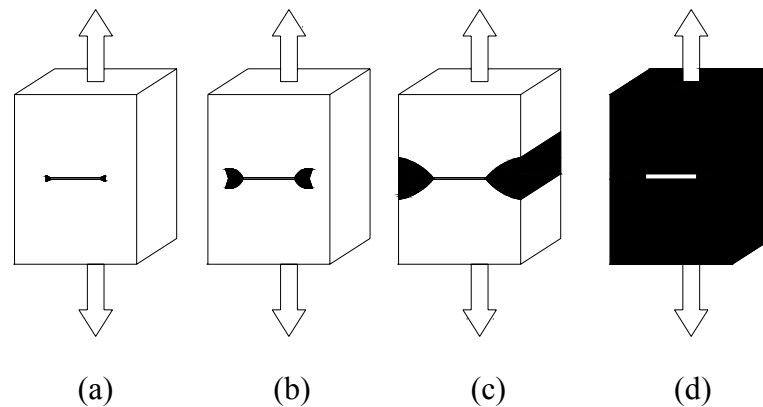
Come ribadito più volte in precedenza la Meccanica della frattura elastico lineare (LEFM) si può applicare solo ai materiali idealmente fragili, cioè a quei materiali in cui la deformazione non lineare, in corrispondenza dell'apice della fessura (crack tip), risulta trascurabile.

Nella maggior parte dei casi è, però, sempre presente una piccola zona danneggiata in corrispondenza del crack tip dovuta alla resistenza finita dei materiali; questa zona prende il nome di “crack tip plastic zone” o zona plastica dell'apice della fessura.

Se le dimensioni di questa zona sono abbastanza piccole, essa può essere contenuta nella regione  $K$ -dominant, ed è possibile utilizzare i parametri della LEFM,  $K$  e  $G$ . Una tale condizione prende il nome di condizione di snervamento a piccola scala (SYY: small-scale yielding condition).

Qualora questa zona risultasse più grande rispetto alla regione  $K$ , allora le ipotesi della meccanica della frattura lineare non sarebbero accettabili, la LEFM non applicabile e dovrebbero essere impiegati dei criteri non lineari. La figura seguente mostra le differenti situazioni che riguardano la diffusione della zona plastica in corrispondenza

dell'apice della fessura in un corpo solido.



**Fig. 1.6** - Da sinistra a) elastico-lineare; b) elasto-plastico; c) interamente plastico; d) totalmente plastico.

La prima immagine riporta la condizione  $S_{YY}$ , enunciata sopra, (lineare-elastica), la seconda mostra la situazione in cui la zona plastica all'apice della fessura presenta delle dimensioni tali da provocare delle non linearità nella risposta complessiva della struttura (elasto-plastica); la terza descrive la condizione in cui l'apice della fessura è completamente plastico, e la quarta presenta condizioni di completa plasticità in corrispondenza dell'apice della fessura e per tutta la struttura.

Pertanto nei casi in cui le non linearità sono abbastanza sviluppate, la struttura in esame viene analizzata e studiata secondo i modelli non lineari, introducendo un valore  $J$  non lineare dell'energia di rilascio, generalmente conosciuto anche come  $J$ -Integral o secondo altri approcci che verranno presentati in seguito. Nei casi in cui la plasticità in corrispondenza dell'apice della fessura è diffusa a tal punto da prevedere la presenza di legamenti plastici il parametro più appropriato è lo spostamento di apertura della fessura o crack-tip opening displacement (CTOD)

La dimensione della zona plastica in corrispondenza dell'apice della fessura può essere determinata, quando si ha uno snervamento moderato (yielding locale al crack tip), mediante due metodi che vengono fatti rientrare nella meccanica della frattura elasto-plastica : l'approccio di Irwin in cui l'analisi della tensione viene utilizzata per stimare il contorno elasto-plastico ed il metodo di snervamento della striscia o strip yield model proposto da Dugdale e successivamente anche da Barenblatt. Entrambi i metodi consentono di determinare la zona plastica effettuando delle correzioni sulle dimensioni della fessura stessa. L'introduzione della zona plastica come parametro di

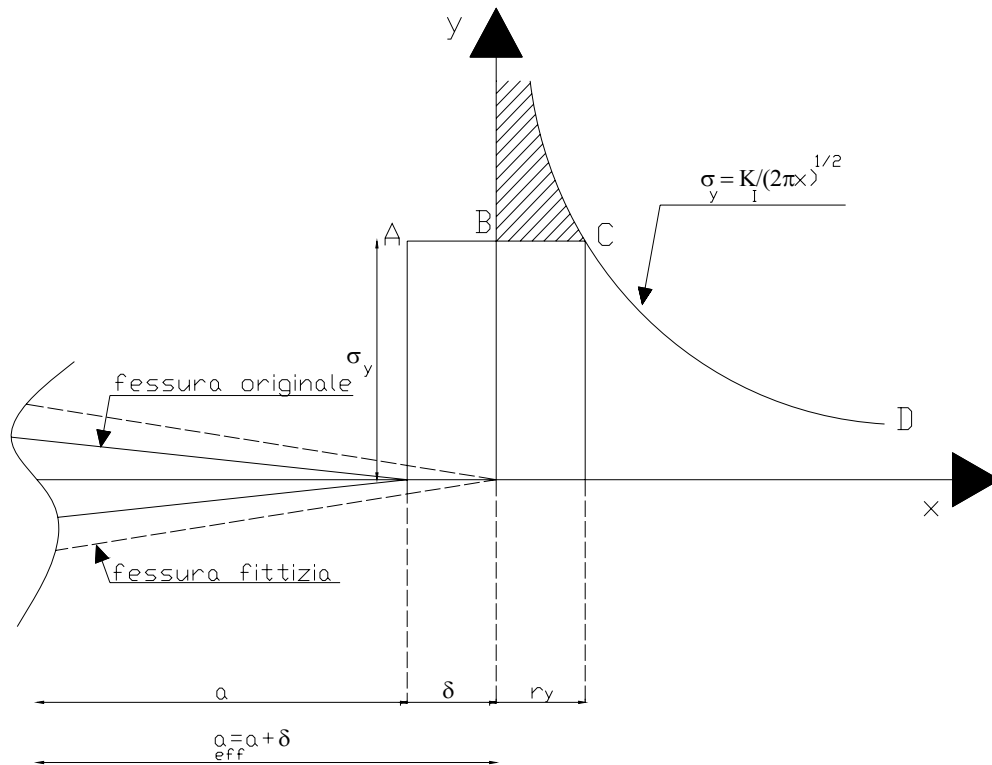
correzione che tiene conto degli effetti di plasticità in corrispondenza dell'apice della fessura, è importante per quanto concerne la determinazione del fattore effettivo di intensificazione delle tensioni  $K_e$  o fattore corretto.

Finchè la dimensione della zona plastica ( $r$ ) è pari a zero, le tensioni all'apice della fessura raggiungono valori infiniti (stress singularity),  $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 0$ ; nel momento in cui si originano delle deformazioni plastiche, allora, le tensioni elastiche sono limitate dallo snervamento, dato che non si può avere la singolarità delle tensioni, ed il rallentamento delle tensioni si verifica all'interno della zona plastica.

La deformazione plastica si manifesta in una piccola regione che, se risulta essere molto inferiore ad  $a$  (dimensione fessura) ( $r \ll a$ ), da luogo, come già esposto sopra, allo small-scale yielding.

## 1.7 MODELLO DI IRWIN

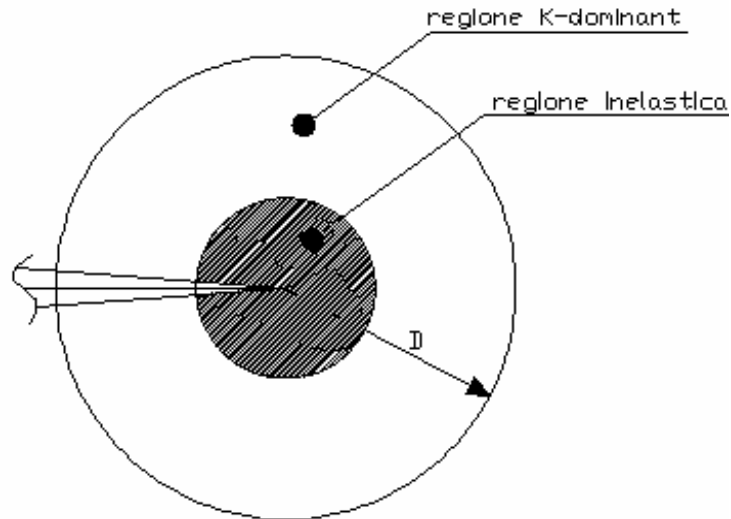
Irwin presentò un modello semplificato per la determinazione, nel caso di materiali elastico-perfettamente plastici, della zona plastica che si trova in corrispondenza dell'apice della fessura in condizioni di snervamento su piccola scala (SYY). Irwin ha fissato la sua attenzione soltanto sull'estensione dell'asse della fessura e non sulla forma della zona plastica, mostrando che il suo effetto consiste nell'estendere artificialmente la fessura di una distanza  $r_y$ , definita come correzione della zona plastica.



**Fig. 1.7** – Modello di Irwin : distribuzione elasto-plastica della tensione in corrispondenza dell'apice della fessura.

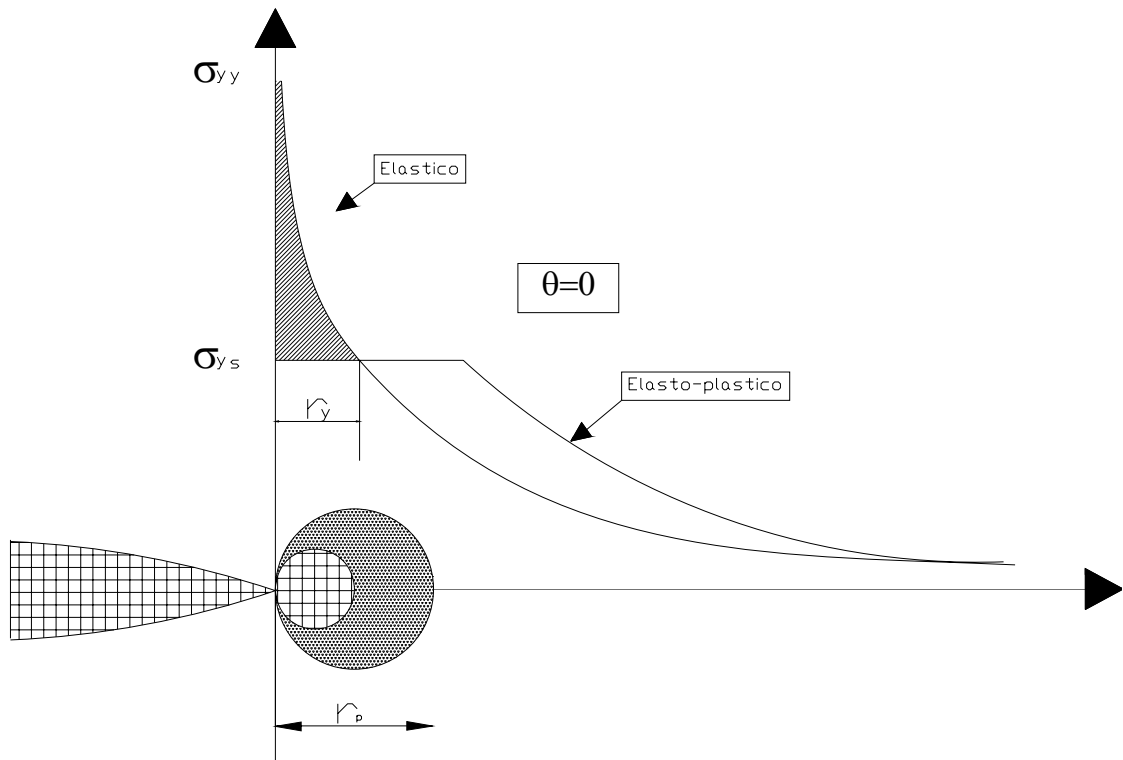
A tal proposito, infatti, egli intuì che la presenza della plasticità fa sì che la fessura si comporti come se avesse dimensioni maggiori di quelle fisiche ed, inoltre, egli notò che gli spostamenti risultavano essere più grandi, e la rigidezza più bassa rispetto alla condizione in cui il materiale è elastico. In sintesi il corpo fessurato, nel caso analizzato da Irwin una piastra, si comporta come se la fessura avesse delle dimensioni maggiori.

La dimensione effettiva della fessura  $a_{eff}$  è uguale a  $a + \delta$  cioè la dimensione fisica della fessura più una correzione  $\delta$ .



**Fig. 1.7.1** – Regione non elastica e K-dominant in corrispondenza dell'apice della fessura.

Le considerazioni di Irwin per la determinazione della zona plastica si basano sul calcolo della distanza  $r_y$  che intercorre tra il tip della fessura ed il punto in cui la tensione di snervamento  $\sigma_y$  viene superata. Se viene trascurato lo strain hardening, la distribuzione di tensione per  $r \leq r_y$  può essere rappresentata da una linea orizzontale in corrispondenza di  $\sigma_{yy} = \sigma_{ys}$  e la singolarità della tensione viene interrotta dallo snervamento all'apice della fessura. Quando si verifica lo snervamento, le tensioni devono ridistribuirsi in modo da soddisfare l'equilibrio.



**Fig.1.7.2** – Regione plastica in corrispondenza dell’apice della fessura

La regione ombreggiata con tratteggio inclinato, rappresentata nella figura, indica le forze che dovrebbero essere presenti in un materiale elastico ma che non possono essere sopportate da un materiale elasto-plastico in quanto la tensione non può superare il limite di snervamento  $\sigma_{ys}$ .

In tali condizioni la zona plastica deve aumentare le sue dimensioni allo scopo di sistemare queste forze. Dal semplice bilancio delle forze si arriva ad una stima del secondo ordine della dimensione della zona plastica :

$$\sigma_{ys} r_p = \int_0^{r_y} \sigma_{yy} dr = \int_0^{r_y} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (1.7)$$

Il valore di  $r_p$  è dato dalla seguente relazione :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (1.7.1)$$

La distribuzione della tensione  $\sigma_y$  lungo l’asse x che, in condizioni di materiale elastico, era definita dalla seguente relazione :



$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (1.7.2)$$

ora assume la forma seguente :

$$\sigma_{yy} \approx \frac{K_{eff}}{\sqrt{2\pi r(r-r_y)}} \quad (1.7.3)$$

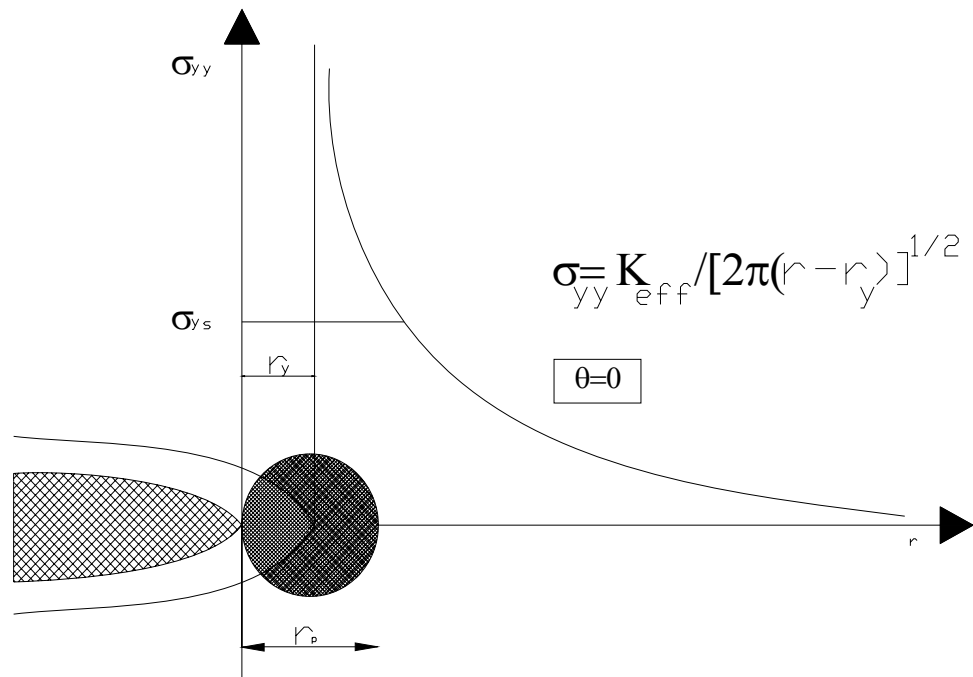
La tensione ridistribuita nella regione elastica risulta essere maggiore di quanto stabilisce la relazione che esprime il valore di  $\sigma_y$  in condizioni elastiche:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.7.4)$$

L'area tratteggiata è  $\sigma_y r_y$ , la distribuzione delle tensioni è rappresentata dalla curva ABCD cosicché l'area al di sotto di questa curva è uguale all'area al di sotto della curva  $\sigma_y$  e l'equilibrio è mantenuto. In tal modo la lunghezza della zona plastica in corrispondenza della fessura è pari a  $2r_y$  ed è data dalla seguente relazione :

$$r_y = \frac{1}{3\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_Y} \right)^2 \quad (1.7.5)$$

in cui  $\sqrt{3}$  costituisce il fattore di cui, secondo Irwin, deve essere aumentata la tensione richiesta per produrre snervamento.



**Fig. 1.7.3** - Correzione della zona plastica di Irwin. L'aumento del fattore di intensificazione efficace delle tensioni è preso in considerazione assumendo che la fessura sia più lunga di  $r_y$ .

Il valore del fattore di intensificazione delle tensioni per una fessura passante in una piastra infinita in condizioni piane di tensione (plane stress) è il seguente :

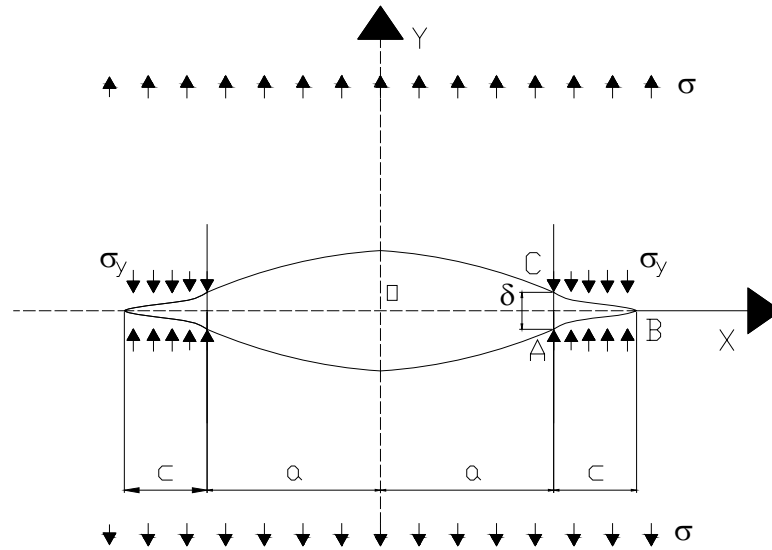
$$K_{\text{eff}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}}\right)^2}} \quad (1.7.6)$$

La definizione della lunghezza della zona plastica secondo il modello di Irwin è importante ai fini della caratterizzazione dello stato di tensione in una piastra fessurata sia nel caso di tensione piana che di deformazione piana (plane strain).

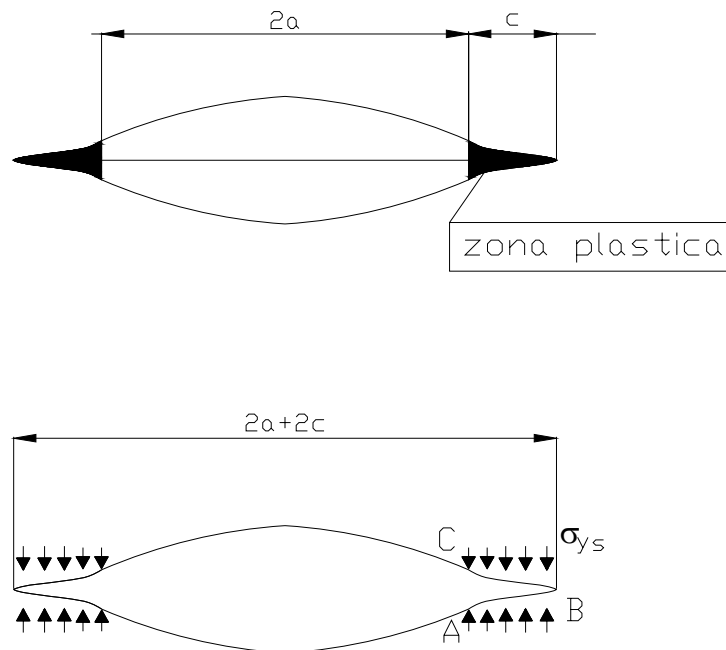
## 1.8 MODELLO DI DUGDALE

Il modello proposto da Dugdale, ripreso in seguito da Barenblatt e definito anche “strip yield model”, consente di determinare la zona plastica posta in prossimità del tip (apice) della fessura in piastre di spessore molto piccolo in cui dominano le condizioni di plane stress (tensione piana) ; in particolare, il metodo si applica a quei materiali che possiedono comportamento elastico-perfettamente plastico che obbediscono al criterio di resistenza di Tresca. Il modello consente sostanzialmente di determinare le dimensioni della cosiddetta zona plastica generata dal superamento delle tensioni di snervamento e, di stabilire, sulla scorta di tali risultati, se applicare i principi della LEFM o della EPFM a seconda delle dimensioni che questa zona possiede.

Anche questo modello, come quello esposto da Irwin, considera una fessura effettiva che è più lunga di quella fisica; in particolare esso prevede oltre alla presenza della fessura vera e propria, l'esistenza di due zone plastiche più snelle poste in corrispondenza dei due apici della fessura. Le zone plastiche sono date da due strisce sottili che si estendono ad una distanza  $r$  e sono soggette a delle tensioni di snervamento  $\sigma_y$ . La zona plastica viene modellata considerando una fessura di lunghezza pari a  $2a + 2c$ , dove  $c$  è la lunghezza della zona plastica che possiede una tensione di chiusura pari a  $\sigma_y$  applicata all'apice della fessura nella regione in cui  $a < x < c$ .



**Fig. 1.8** - Modello di Dugdale per una fessura di lunghezza  $2a$  in modo I



**Fig. 1.8.1** - Strip yield model : la zona plastica è modellata dall'intensità delle tensioni a compressione in corrispondenza dei due apici della fessura.

Come si evince dalla figura e come anticipato sopra, i bordi della fessura  $c$  sopportano la tensione di snervamento  $\sigma_y$  che tende a richiudere la fessura; la parte  $c$  non è realmente fessurata ed il materiale può ancora sopportare la tensione di

snervamento. Il modello di Dugdale costituisce una applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti in quanto sovrappone due soluzioni elastiche: quella di una fessura passante soggetta a tensioni a distanza, e quella di una fessura passante con tensioni di chiusura all'apice della fessura. Poiché le tensioni assumono valori finiti nella striscia di snervamento, non può esserci una singolarità della tensione all'apice della fessura. Il valore di  $c$  è scelto in modo tale che la singolarità della tensione scompaia nel momento in cui  $K_\sigma = -K_I$  dove  $K_\sigma$  è il fattore di intensificazione dovuto alle tensioni applicate e  $K_I$  il fattore di intensificazione dovuto allo snervamento. La forza di chiusura può essere definita nel seguente modo :

$$P = -\sigma_{YS} dx \quad (1.8)$$

I fattori di intensificazione delle tensioni dovuti alle forze interne in corrispondenza dei due apici sono dati dalle seguenti relazioni :

$$K_A = \int_a^{a+r} \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (1.8.1)$$

$$K_B = \int_a^{a+r} \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (1.8.2)$$

Secondo il principio di sovrapposizione il fattore di intensificazione totale delle tensioni è ottenuto sostituendo  $a$  con  $a+c$  e sommando i contributi di entrambi gli apici :

$$K_I = K_A + K_B \quad (1.8.3)$$

Sommando le due espressioni riportate sopra per  $K_A$  e  $K_B$  si ottiene il valore seguente di  $K_I$  :

$$K_I = -2P \sqrt{\frac{a}{\pi}} ar \cos \frac{x}{a} \quad (1.8.4)$$

La correzione della zona plastica può essere fornita sostituendo la lunghezza della fessura  $a$  con  $a+c$  che rappresenta la lunghezza virtuale della fessura; in questo

modo si ottiene :

$$K_I = -\frac{2\sigma_{YS}}{\pi} \sqrt{\pi(a+c)} \arccos \frac{x}{a+r} \quad (1.8.5)$$

$$K_\sigma = \sigma \sqrt{\pi(a+c)} \quad (1.8.6)$$

Ma poiché

$$K_\sigma = -K_I \quad (1.8.7)$$

sostituendo nella (1.8.5) si ottiene l'equazione semplificata che assume la forma seguente:

$$\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}} = \arccos \frac{x}{a+c} \quad (1.8.8)$$

sostituendo e sviluppando le funzioni trigonometriche e trascurando i termini di ordine superiore si arriva alla seguente espressione :

$$K_\sigma = \sigma \alpha \sqrt{\pi a \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_{YS}} \right)^2 \right]} \quad (1.8.9)$$

$$K_I = -2\sigma_{YS} \sqrt{\frac{a+c}{\pi}} \cos^{-1} \left( \frac{a}{a+c} \right) \quad (1.8.10)$$

se  $c \ll a$  le correzioni della plasticità non sono necessarie, se, invece,  $c > a$  la Meccanica della Frattura elastico lineare (LEFM) risulta essere un approccio incerto per la risoluzione dei problemi ingegneristici che coinvolgono i materiali fragili o i solidi elastici e , pertanto, il metodo più idoneo risulta essere la EPFM (meccanica della frattura elasto-plastica).

## 1.9 IL MODELLO DI RICE

Rice ha applicato la plasticità all'analisi delle fessure nei materiali non lineari ed ha introdotto, a tal fine, l'integrale J per caratterizzarne la frattura e determinare l'inizio della crescita della fessura. Egli ha mostrato che la percentuale dell'energia di rilascio non lineare potrebbe essere scritta come un integrale di linea indipendente dal percorso. L'importanza di questo integrale risiede nella sua capacità di caratterizzare i campi tensionali e deformativi in corrispondenza dell'apice della fessura. Sulla base di

ciò  $J$  può essere visto sia come parametro dell'energia che come parametro di intensificazione delle tensioni. L'integrale di Rice è un integrale al contorno indipendente dal percorso, pari alla percentuale dell'energia di rilascio del corpo che contiene il crack ; il suo valore è :

$$J = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (1.9)$$

dove  $\Pi$  è l'energia potenziale ed  $A$  è l'area della fessura ; l'energia potenziale, a sua volta, è pari a

$$\Pi = U - F \quad (1.9.1)$$

dove  $U$  è l'energia di deformazione immagazzinata nel corpo ed  $F$  è il lavoro fatto dalle forze esterne. Per definire al meglio l'integrale  $J$  e la sua corrispondenza con l'energia potenziale, consideriamo un corpo al cui interno si trovi una fessura con superfici parallele all'asse  $x$ .

L'integrale  $J$ , il cui valore è dato dalla seguente relazione :

$$J = \int_T \omega dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (i = 1,2) \quad (1.9.2)$$

è calcolato lungo un percorso chiuso  $T$ , partendo in senso antiorario da un punto arbitrario sulla parte piana della superficie più bassa dell'intaglio e finendo in un punto arbitrario sulla parte superiore piana dell'intaglio. I termini che compaiono nella relazione di sopra rappresentano la densità dell'energia di deformazione  $\omega$  :

$$\omega = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.9.3)$$

con  $\sigma_{ij}$  ed  $\varepsilon_{ij}$  che indicano rispettivamente i tensori delle tensioni e delle deformazioni, ed il vettore  $T_i$  rappresenta le componenti del vettore tensione che agisce sul contorno,

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.9.4)$$

$u_i$  rappresentano le componenti degli spostamenti ed, infine  $ds$  è l'incremento di lunghezza lungo il contorno  $T$ . La regione racchiusa all'interno del contorno chiuso è libera da singolarità ed il valore corrispondente dell'integrale  $J$  è nullo.

L'energia potenziale del corpo  $\Pi(a)$  è data da :

$$\Pi(a) = \int_A \omega dA - \int_T T_i u_i ds \quad (1.9.5)$$

dove  $A$  è l'area del corpo  $T$  il suo contorno. Differenziando l'energia potenziale si ottiene :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_A \frac{d\omega}{da} dA - \int_T T_i \frac{du_i}{da} ds \quad (1.9.6)$$

Se si considera un nuovo sistema di coordinate cartesiane  $X_1 X_2$  definito nel modo seguente :  $X_1 = x_1 - \alpha$  ;  $X_2 = x_2$  si ha :

$$\frac{d\Pi}{da} = \int \left( \frac{\partial \omega}{\partial a} - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) dA - \int_T T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.9.7)$$

poiché 
$$\frac{\partial \omega}{\partial a} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} \quad (1.9.8)$$

ed applicando il principio dei lavori virtuali (P.L.V.) si ha :

$$\int_A \frac{\partial \omega}{\partial a} dA = \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} dA = \int_T T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \quad (1.9.9)$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene :

$$\int_A \frac{\partial \omega}{\partial x_1} dA = \int_T \omega dx_2 \quad (1.9.10)$$

Ponendo l'equazione rimaneggiata con il P.L.V. nell'espressione che esprime la variazione dell'energia potenziale rispetto all'ampiezza della fessura si ottiene :

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_T \omega dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (1.9.11)$$

oppure

$$J = \frac{-d\Pi}{da} \quad (1.9.12)$$

per ogni percorso di integrazione che circonda l'apice della fessura. L'equazione (1.9.12) esprime l'integrale  $J$  come percentuale di diminuzione dell'energia potenziale rispetto alla lunghezza della fessura. Sulla base di quanto detto sopra è possibile concludere che l'integrale  $J$  consente di caratterizzare le condizioni della regione posta in corrispondenza dell'apice della fessura.

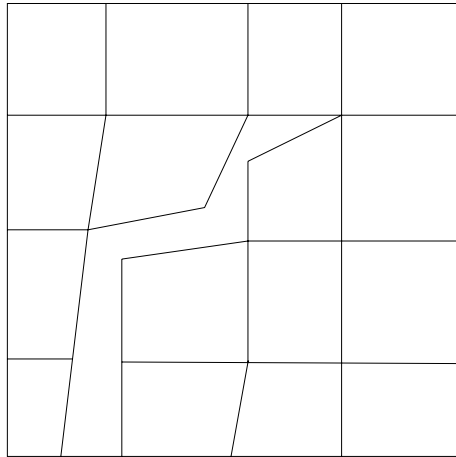


## 1.10 MODELLI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA NON LINEARE (NLFM)

Il comportamento quasi-fragile del calcestruzzo, nella Meccanica della Frattura non-lineare e nell'ambito della teoria agli elementi finiti, può essere valutato e descritto mediante tre modelli : i modelli discreti (discrete crack models), quelli diffusi (smeared crack model) ed i lattice models (1993) o modelli lattice. Questi consentono di ovviare agli inconvenienti ed ai limiti presentati dalla meccanica della frattura lineare che, per i motivi già enunciati, non è in grado di prevedere il comportamento a frattura del calcestruzzo e di quei materiali che, come il calcestruzzo, sono caratterizzati da una zona di processo non lineare di dimensioni notevoli rispetto alle dimensioni dell'intera struttura.

Il modello discreto, affrontato per la prima volta nel 1967 da Ngo e Scordelis poi ripreso da Hillerborg ed altri nel 1976 e successivamente affrontato nel 1988 da Rots e nel 1992 da Bittencourt, è stato il primo metodo utilizzato nella modellazione della frattura del calcestruzzo in quanto particolarmente adatto per simulare il comportamento delle strutture di calcestruzzo in cui la frattura è regolata dalla formazione di un piccolo numero di fessure con un percorso che può essere facilmente previsto in cui, cioè, è possibile fare ipotizzare il percorso della fessura.

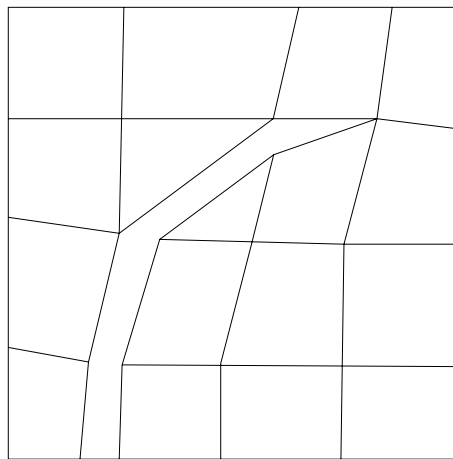
La fessurazione, nell'ambito di questo primo metodo, si manifesta non appena la resistenza in un particolare nodo dell'elemento finito viene superata dal valore massimo della tensione di trazione. Nell'ambito del metodo agli elementi finiti questo approccio modella la fessura direttamente mediante lo spostamento della discontinuità posta tra gli elementi finiti, mentre la parte continua viene modellata utilizzando la meccanica del continuo classica. In particolare la modellazione delle fessure viene effettuata mediante la separazione dei punti nodali (nodi dell'elemento finito) che inizialmente occupavano la stessa posizione spaziale.



(a)

**Figura 1.10** - (a) Approccio discreto della propagazione della fessura senza effettuare il remeshing del modello.

Il principale svantaggio di questo approccio consiste nella possibilità per la fessura di formarsi unicamente lungo i contorni dell'elemento e, quindi, nella stretta dipendenza dei risultati dalla mesh. Inoltre quando una fessura si propaga, la topologia della mesh dell'elemento finito viene continuamente modificata e ciò comporta un notevole dispendio di tempo nella risoluzione delle procedure di calcolo.



(b)

**Figura 1.10.1** - (b) Approccio discreto della propagazione della fessura effettuando il remeshing del modello.

L'approccio diffuso o smeared, invece, prevede che la fessurazione abbia origine quando la massima tensione principale in un punto supera la resistenza a trazione del

materiale e che la fessurazione sia concentrata nei punti di integrazione all'interno degli elementi, dove la relazione tensione- deformazione viene modificata per tenere conto della diminuzione di rigidità e di resistenza conseguenti. Il processo di formazione della fessura è regolato dal diagramma tension-softening e dall'energia di frattura  $G_f$  che è un parametro materiale.

In particolare il diagramma tension-softening descrive l'evoluzione del processo di frattura consistente in un declino graduale post-picco della tensione all'aumentare della deformazione, mentre l'energia di frattura rappresenta l'energia dissipata per creare una fessura con superficie unitaria (è pari all'area al di sotto della curva tensione-apertura della fessura).

Diversamente dall'approccio discreto, quello continuo presenta il vantaggio che la topologia della mesh non viene modificata quando la fessura cresce ed, inoltre, non ci sono limiti all'orientazione della fessura. (Jirasek and Zimmerman 1998).

Secondo quanto stabilito dal modello lattice, invece, il mezzo continuo da analizzare è sostituito a priori da elementi trave di tipo "lattice" o truss ai quali vengono assegnate delle differenti proprietà. I primi studi su questo metodo sono stati effettuati nel 1993 da Schlangen e da Van Mier nel 1994.