

Capitolo 2

La Meccanica della Frattura applicata ai calcestruzzi semplici e fibrorinforzati

2.1 INTRODUZIONE

La progettazione e la valutazione delle strutture di calcestruzzo, sia semplice che rinforzato con fibre o semplicemente armato con barre d'acciaio, può essere effettuata attraverso un ampio numero di modelli materiali che consentono di analizzare in dettaglio le caratteristiche di non linearità, tipiche del calcestruzzo, quali la fessurazione, lo schiacciamento, gli effetti taglianti in corrispondenza di fessure e giunti, la viscosità ed il ritiro, l'ingranamento degli inerti del calcestruzzo fessurato ed, inoltre, la plasticità e l'effetto spinotto del rinforzo. Tra questi modelli, di natura prettamente non lineare, rientrano quelli della fessurazione discreta (discrete crack models), della fessurazione diffusa (smeared crack models) ed i modelli lattice o lattice models, tutti e tre già brevemente accennati nel capitolo precedente. La modellazione agli elementi finiti di strutture di calcestruzzo rinforzato come travi, piastre e telai costituisce una sfida importante nel campo dell'ingegneria a causa del loro complesso comportamento non lineare. In questo capitolo vengono descritti i concetti basilari su cui si fondano i primi due modelli il cui obiettivo fondamentale è quello di superare i limiti presentati dalla meccanica della frattura lineare.

2.2 MODELLO DELLA FESSURAZIONE DISCRETA O COESIVA

La meccanica della frattura è stata sviluppata ed applicata per molti decenni. Le sue applicazioni hanno interessato molte tipologie di materiali come i metalli, i materiali ceramici ed il calcestruzzo. Da quando Kaplan introdusse la meccanica della frattura per la prima volta nel 1961, per misurare la tenacità a frattura di travi di calcestruzzo, molte ricerche sono state eseguite nel campo del calcestruzzo. Uno dei maggiori passi in avanti fatti nel campo della frattura del calcestruzzo fu compiuto da Hillerborg nel 1976; egli, ispirandosi ai lavori di Barenblatt e di Dugdale, migliorò ed adattò al calcestruzzo il modello della fessura coesiva o fittizia detta anche discreta.

Barenblatt sviluppò la prima analisi della meccanica della frattura basata sull'ipotesi dell'esistenza di una zona coesiva, in corrispondenza dell'apice della fessura, in cui egli riteneva che ci fossero delle tensioni coesive a livello atomico con intensità dipendente dagli spostamenti di apertura della fessura. Dugdale, invece, utilizzò un modello simile a quello della fessura coesiva in cui considerò, però, delle tensioni costanti ed invarianti con l'apertura della fessura. Hillerborg, elaborando questi concetti, giunse alla conclusione che queste tensioni producono un fattore di intensificazione delle tensioni di chiusura in equilibrio con il valore dei carichi esterni applicati, rimuovendo in tal modo la singolarità della tensione. In tal modo egli concluse che quando la regione in cui si manifestano la separazione ed il processo dissipativo sono di dimensioni notevoli se messi a confronto con le dimensioni strutturali, ed ogni non linearità è limitata ad una superficie posta all'apice di una classica fessura, è possibile applicare i modelli della fessurazione coesiva.

Il modello della fessura coesiva (CCM: cohesive crack model) o modello della fessura fittizia o FCM (fictitious crack model) consente di modellare in modo accurato l'intero processo di dissipazione dell'energia nei materiali quasi fragili come il calcestruzzo; esso fu in primo luogo proposto per la frattura del calcestruzzo e, solo successivamente in tempi più recenti, è stato anche utilizzato per modellare la fessurazione nei materiali polimerici e ceramici. Questo modello prevede il percorso della fessura ed il comportamento meccanico dell'elemento analizzato al crescere della fessura e viene preferito agli altri metodi quando nella struttura vi è un numero finito di fessure.

Il punto fondamentale da cui il metodo trae le sue origini consiste nel considerare l'esistenza di una fessura fittizia o zona di processo della frattura (FPZ) in

corrispondenza dell'apice della fessura reale. In virtù di tali caratteristiche, ed anche della sua facile comprensione da parte di coloro che non hanno delle approfondite conoscenze sull'argomento, esso risulta essere il più semplice tra gli svariati approcci della meccanica della frattura e viene usato con notevole successo soprattutto quando il percorso di fessurazione è noto a priori. In questi casi la mesh può essere costruita in modo che il percorso di frattura coincida a priori con gli elementi al contorno e la frattura viene descritta come una fessura coesiva che si apre mentre vi è ancora un trasferimento di tensioni da una faccia all'altra, tensioni che agiscono per richiudere la fessura.

La caratterizzazione del modello coesivo o discreto comprende la definizione del comportamento complessivo del materiale, dei dati caratteristici e delle condizioni per la formazione della fessura ed, infine, delle equazioni che tengono conto dell'evoluzione del quadro fessurativo. Il concetto che sta alla base di questo approccio riguarda il comportamento tensione-deformazione del materiale che segue, inizialmente, un andamento elastico-lineare ed una relazione isotropa con modulo elastico E e coefficiente di Poisson ν fino al raggiungimento del punto in cui la tensione principale massima σ^I perviene al valore della resistenza a trazione f_t' , valore in cui si manifesta la fessura che si forma perpendicolarmente alla direzione della massima tensione principale. Dopo il raggiungimento del valore massimo della resistenza a trazione la fessura diventa una macrofessura mentre le tensioni cominciano a trasferirsi da una faccia all'altra. La modellazione della zona di processo viene effettuata come una fessura fittizia, mentre la localizzazione della deformazione viene idealizzata come un salto nello spostamento o apertura di fessura w .

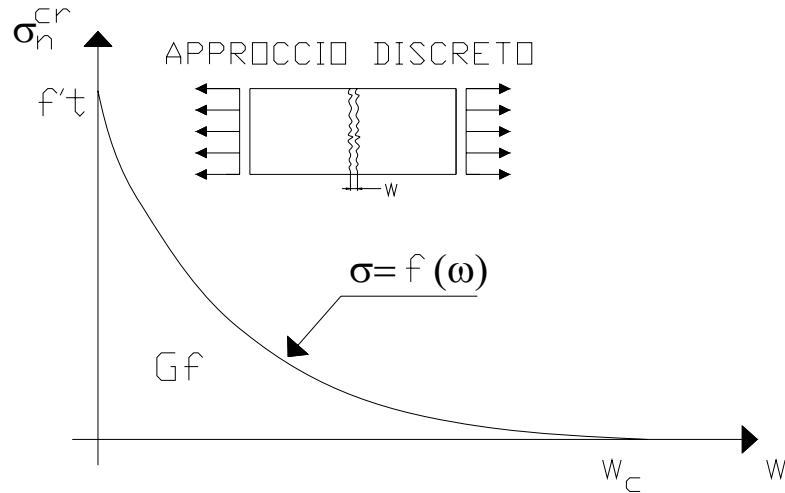


Fig. 2.2 - Diagramma tension-softening nel piano tensione coesiva della fessura-apertura della fessura nell'ambito dell'approccio discreto.

L'ipotesi fondamentale consiste, in sintesi, nel rappresentare, nel caso del modo I di frattura, la zona FPZ (fracture process zone) di profondità finita mediante una linea fittizia della fessura che trasmette tensioni normali $\sigma(x)$ ed, inoltre, nel considerare questa tensione come una funzione, che presenta un andamento monotono decrescente, della separazione w , definita come spostamento di apertura della fessura o profondità dell'apertura :

$$\sigma = f(w) \quad (2.2)$$

La funzione $f(w)$, detta curva di softening, prima discende con un andamento molto ripido e poi, in corrispondenza di $\sigma \approx 0.15f'_t - 0.33f'_t$, raggiunge un andamento pressoché orizzontale con la coda del tratto discendente molto lunga. L'intensità delle tensioni coesive in corrispondenza della superficie della fessura è determinata dalla curva di softening sopra descritta che lega le tensioni agli spostamenti della superficie della fessura attraverso l'energia di frattura G_f .

La funzione di softening possiede tre caratteristiche essenziali, la resistenza a trazione f'_t , l'energia di frattura G_f e l'apertura critica della fessura w_c che vengono identificate rispettivamente con la tensione trasferita in corrispondenza di apertura nulla (punto $(0, f'_t)$ nel piano $\sigma - w$), con il lavoro fornito per allontanare le due facce di una superficie unitaria e con l'apertura della fessura in corrispondenza della

quale la tensione trasferita diventa nulla. L'energia di frattura, infatti, è l'area posta al di sotto della curva di softening, mentre il valore di f'_t dipende dal tipo di calcestruzzo scelto. Mentre i primi due parametri sono di facile determinazione, il terzo risulta essere più complicato da definire.

L'energia di frattura è uno dei più importanti parametri materiali del calcestruzzo; esso dipende sia dalle dimensioni che dalla geometria del campione esaminato. L'energia di frattura, detta anche energia specifica di frattura, e la resistenza a trazione sono proprietà materiali e possono essere sperimentalmente misurate in base alle norme ASTM ed alle normative RILEM.

Il modello della fessura fittizia è illustrato nella seguente figura :

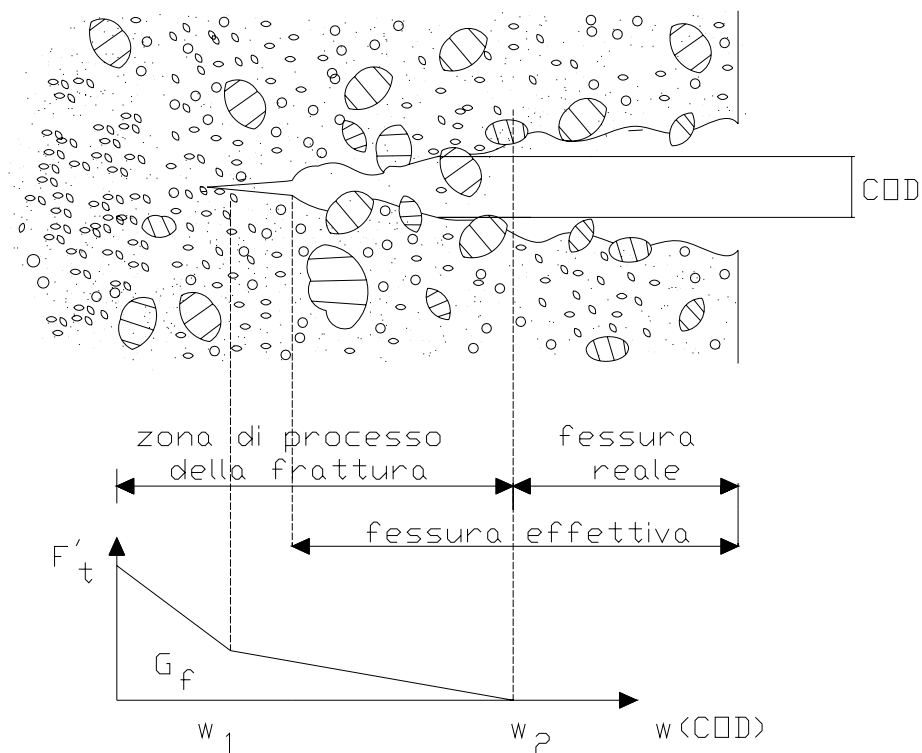


Fig. 2.2.1 - Modello della fessura discreta o fittizia proposta da Hillerborg.

In questo modello la fessura è decomposta in due parti : la parte reale o fisica e la parte fittizia della fessura detta anche zona di processo. Mentre nella prima non vengono trasmesse tensioni e vi sono discontinuità sia nel campo degli spostamenti che in quello delle tensioni, nella seconda, la frattura (FPZ) posta davanti a quella precedente è caratterizzata da :

- tensione di picco in corrispondenza del suo apice pari al valore della resistenza del calcestruzzo;
- diminuzione della distribuzione di tensione in corrispondenza dell'apice della fessura fisica a partire da f_t' fino a zero ;
- discontinuità nel campo degli spostamenti e continuità nel campo delle tensioni.

Molte sono le tipologie di curve di softening sviluppate per modellare il comportamento sperimentale a frattura del calcestruzzo a trazione: lineari, esponenziali, multilineari, bilineari. Le curve bilineari costituiscono una buona approssimazione della curva di softening per il calcestruzzo nonostante non si abbia accordo in merito alla precisa posizione del punto di deformazione. Sebbene la forma della relazione possa differire per le varie categorie di materiali, tutte le relazioni della zona coesiva sono caratterizzate dai tre parametri comuni : resistenza a trazione f_t' , spostamento caratteristico di apertura della fessura w_c , e l'area sotto la curva definita come G_{IC} o energia di rilascio critica. Per valori dell'apertura della fessura più grandi di w_c la relazione stabilisce che nessuna tensione coesiva venga trasferita attraverso la fessura .

Il modello della fessura fittizia stabilisce una relazione tra apertura normale alla fessura e tensioni coesive, ed assume che non ci siano spostamenti dovuti allo scorrimento ed alle tensioni tangenziali lungo la zona di processo; in particolare esso considera la formazione della fessura solo nell'ambito del modo I o opening mode. Il modello della fessura coesiva è diventato la base della modellazione della fessura discreta non lineare ed è stato incorporato in vari codici agli elementi finiti per modellare la propagazione della fessura secondo il modo I ed il modo misto della fessura.

L'implementazione di questo modello in un software agli elementi finiti comporta la suddivisione della struttura da analizzare in una serie di sottodomini (elementi finiti) i cui contorni coincidono con dei percorsi di frattura prestabiliti che possono essere modellati anche mediante elementi d'interfaccia .

La modellazione agli elementi finiti della fessura discreta per il calcestruzzo rinforzato è costituito da sei componenti : un modello della fessura coesiva per

simulare il comportamento di softening del calcestruzzo a trazione, un modello tensione-scorrimento che considera l'interazione tra rinforzo d'acciaio e calcestruzzo, un criterio di propagazione della fessura basato sull'energia, una procedura di remeshing, le tecniche di mappatura della mesh per trasferire la risposta strutturale da una all'altra mesh ed, infine, un algoritmo numerico per risolvere il sistema di equazioni non lineari. Anche in questo caso come in quello del calcestruzzo semplice, il modello prevede l'esistenza di una fessura fittizia o zona di processo della frattura in corrispondenza dell'apice della fessura reale. La zona di processo (FPZ) ha la capacità di trasferire tensioni attraverso meccanismi come l'ingranamento degli inerti e l'effetto spinotto ed anche in questo caso la propagazione della fessura si manifesta quando la tensione principale massima dell'apice della fessura raggiunge la resistenza a trazione del calcestruzzo.

Il modello della fessura coesiva è stato, da molti, considerato un modello fondamentale che fornisce dei criteri per la valutazione della solidità di altri modelli; ciò è vero solo in parte in quanto esso presenta dei limiti. Uno di questi limiti deriva dal fatto che esso è un modello uniassiale; questo aspetto sembra andare bene nel caso di campioni di calcestruzzo intagliati, ma è discutibile per le classiche applicazioni alle strutture in cui sono presenti tensioni triassiali. Per esempio nella zona di processo della frattura, spesso, sono presenti elevati valori della tensione a compressione parallela alla fessura che agiscono sia nella direzione di propagazione che nella terza direzione (quella ortogonale alla fessura). Tali tensioni hanno un forte effetto sulla frattura e quando viene esaurita la resistenza a compressione f_c' , esse possono causare rottura.

La relazione costitutiva della zona coesiva descrive la relazione tra tensioni coesive σ e COD (crack opening displacement) dopo il raggiungimento della resistenza a trazione massima del materiale.

2.3 MODELLI DELLA FESSURAZIONE DIFFUSA O SMEARED CRACK MODELS

La modellazione numerica della fessurazione diffusa nel calcestruzzo iniziò verso la fine degli anni '60, in particolare nel 1968 con Rashid che introdusse gli smeared crack models o modelli di fessurazione diffusa. Quest'ultimi ottennero molta popolarità negli anni '70 nel corso dei quali vennero investiti molti sforzi in questa direzione; sforzi che consentirono di riprodurre le caratteristiche tensione-deformazione sperimentalmente osservate del calcestruzzo.

La simulazione numerica delle procedure diffuse della fessurazione costituisce un metodo standard agli elementi finiti con campi di spostamento e deformazione continui in corrispondenza della superficie di frattura. La trattazione della fessurazione diffusa nel calcestruzzo viene generalmente affrontata secondo un approccio di tipo continuo che può essere analizzato secondo differenti modelli :quelli basati sulla deformazione decomposta, quelli impostati sulla deformazione totale e quelli fondati sulla plasticità; inoltre nell'ambito delle prime due categorie rientrano tre differenti tipologie di modelli che consentono di modellare la fessurazione a seconda delle condizioni in cui l'orientazione della fessura viene a trovarsi; questi sono il Single Fixed Smeared crack model, il Multi-directional crack model ed, infine, il Rotating crack model in cui l'orientazione della fessura viene rispettivamente mantenuta costante, aggiornata in un modo graduale ed aggiornata continuamente (Rots and Blaauwendraad 1989).

Nonostante queste distinzioni, vi sono dei concetti di base comuni ai tre modelli. Uno di questi stabilisce che l'energia elastica è legata alla tensione attraverso delle equazioni standard di elasticità ; un altro prevede che l'inizio di una fessura abbia luogo quando la tensione principale raggiunge la resistenza uniassiale a trazione; il terzo prevede che una legge trazione-separazione (legge di softening) legghi la deformazione della fessura con la tensione residua trasferita attraverso la fessura stessa

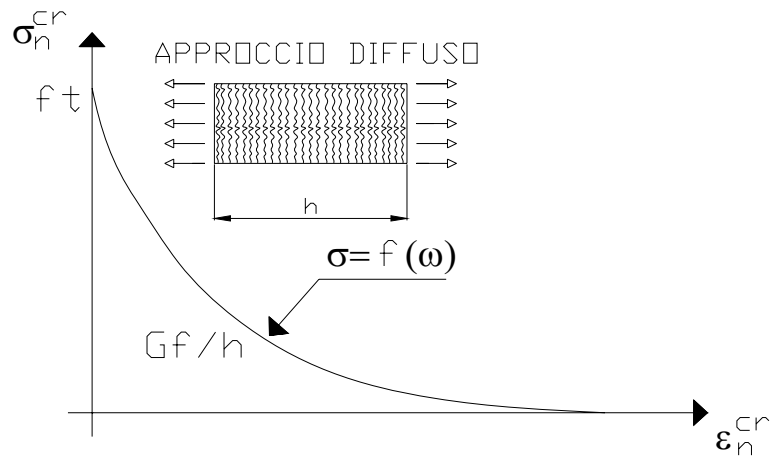


Fig. 2.3.1 - Diagramma tension-softening nell'ambito dell'approccio diffuso della fessura.

L'importanza dell'utilizzo della curva di tension-softening deriva dall'aver riconosciuto che il calcestruzzo semplice non è un materiale fragile nel senso di Griffith ma presenta una capacità portante residua dopo il raggiungimento della resistenza a trazione ed , inoltre, evita, rispetto ai modelli di resistenza, che si abbia un' inaccettabile e non fisica dipendenza dalla mesh.

Questo approccio pone come ipotesi di base che il mezzo venga mantenuto continuo nell'intero dominio, che non venga introdotta alcuna discontinuità tra gli elementi e che l'energia di frattura G_f sia diffusa sulla profondità h dell'area in cui si localizza la fessura, profondità che per alcuni elementi è pari alla profondità dell'elemento stesso. Oltre a ciò esso prescrive che le discontinuità geometriche indotte dalle fessure siano rappresentate mediante deformazioni da fessurazione distribuite su una certa area all'interno dell'elemento finito, cioè che molte fessure di spessore infinitamente piccolo siano distribuite in modo continuo nell'elemento finito stesso. In particolare nei modelli di fessurazione diffusa la fessura viene distribuita sull'area di un elemento finito rappresentato da un punto di integrazione ed, inoltre, la relazione costitutiva del mezzo continuo può essere descritta in termini di relazioni tensione-deformazione. Generalmente il comportamento del corpo nello stato non fessurato è circoscritto all'elasticità lineare, mentre quello del materiale fessurato è rappresentato da una relazione ortotropa.

Agli inizi questo metodo sembrava possedere delle caratteristiche che lo rendevano meno utile ed applicabile rispetto ai modelli di fessura discreti a causa della

presenza di percorsi di frattura spesso irregolari ed eccessivamente diffusi. Successivamente, nel 1973, Suidan e Schnobrich introdussero, per ovviare ai suddetti inconvenienti, il fattore di ritenzione a taglio β (shear retention factor) per modellare l'effetto spinotto e l'ingranamento degli inerti ed il modello tension-softening per rappresentare la caduta improvvisa della tensione a trazione dopo la formazione della fessura. L'importanza del fattore di ritenzione a taglio β risiede nella possibilità per le tensioni principali di ruotare per un ulteriore incremento di carico, in un punto d'integrazione fessurato, mentre quella del diagramma tension-softening è data dalla possibilità per la resistenza a trazione di superare la resistenza a trazione massima in una direzione diversa da quella della normale alla fessura, se la direzione della fessura è fissata in corrispondenza dell'inizio della fessura. La curva di softening, che rappresenta la capacità portante residua del calcestruzzo ed è definita nel diagramma $\sigma - \varepsilon$ da un ramo discendente, serve per modellare la graduale diminuzione di resistenza a trazione del calcestruzzo fino all'apertura della fessura. L'importanza dell'introduzione del softening nei modelli di fessurazione affonda le sue radici in basi teoriche derivanti dall'impossibilità di utilizzare i modelli di resistenza, usati in passato, che creavano una dipendenza inaccettabile dalla mesh.

Per quanto, invece, concerne la scelta del valore di β , se viene assunto pari a zero sta a significare che gli assi delle tensioni principali rimangono fissi dopo la formazione della fessura e, quindi, non c'è possibilità di rotazione (fixed crack model), mentre per un valore di β diverso da zero vi è la possibilità di rotazione degli assi (rotating crack model). Il valore che viene generalmente adoperato per il coefficiente β è un valore costante, ma può capitare che il valore utilizzato possa variare in funzione della deformazione della fessura. Il fattore β (shear retention factor) non solo risolve le difficoltà numeriche, ma migliora il comportamento da un punto di vista fisico dei fixed crack models di cui si parlerà in seguito.

Il modello di fessurazione diffusa prevede che in corrispondenza della formazione della fessura, la relazione locale tensione-deformazione, che è inizialmente isotropa venga convertita in quella ortotropa che rappresenta la diminuzione di rigidità nella direzione ortogonale alla fessura.

In particolare quando la resistenza a trazione supera il suo valore massimo, o meglio quando le tensioni principali violano il criterio di resistenza, una fessura comincia a

manifestarsi nel calcestruzzo secondo una direzione che è perpendicolare a quella della tensione principale.

Sulla base di ciò, la relazione costitutiva isotropa tensione-deformazione viene sostituita da quella ortotropa e la formazione delle fessure viene simulata sostituendo la matrice isotropa di rigidezza con una matrice di rigidezza ortotropa. Gli assi di ortotropia vengono determinati sulla base delle condizioni all'inizio della fessura. Il legame costitutivo isotropo, elastico-lineare prima della fessurazione è definito per uno stato tensionale bidimensionale attraverso la seguente relazione :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La relazione isotropa tensione-deformazione di cui sopra viene sostituita da una legge ortotropa definita nel seguente modo :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{nt} \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

dove n e t rappresentano rispettivamente la direzione normale alla fessura e la direzione tangenziale alla fessura e costituiscono i cosiddetti assi di ortotropia .

La relazione (2.3.1) mostra che in corrispondenza della fessura le rigidezze normale e tangenziale sono nulle e che, pertanto, tutti gli effetti di contrazione ed espansione laterale scompaiono.

Si noti che la relazione ortotropa tensione-deformazione è stata sviluppata nel sistema di riferimento coincidente con gli assi di ortotropia.

Se
$$\sigma_{nt} = [\sigma_{nn}, \sigma_{tt}, \sigma_{nt}]^T \quad (2.3.2)$$

ed
$$\varepsilon_{nt} = [\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{tt}, \gamma_{nt}]^T \quad (2.3.3)$$

rappresentano rispettivamente il vettore tensione e deformazione in condizioni di stato tensionale piano, la matrice di rigidezza secante è espressa dalla relazione seguente :

$$D^s_{nt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

ed, inoltre, la relazione ortotropa elastica nel sistema di coordinate locale n-t è data da :

$$\sigma_{nt} = D_{nt} \varepsilon_{nt} \quad (2.3.5)$$

Utilizzando il fattore β la matrice di rigidezza secante diventa :

$$D^s_{nt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

Il vantaggio dell'impiego della matrice ortotropa di rigidezza deriva dalle difficoltà riscontrate nello affrontare la situazione in cui si manifestano contemporaneamente in un punto d'integrazione, in presenza di tensioni a compressione, la fessurazione ed altri comportamenti non-lineari (effetti termici, viscosità, ritiro) e, quindi, offre la possibilità di combinare il modello della decomposizione della fessura con un comportamento plastico del calcestruzzo.

L'inserimento della matrice ortotropa di rigidezza fessurata in una legge elasto-plastica da luogo ad uno stato di tensione che non soddisfa la funzione di frattura né aderisce alla funzione di snervamento, pertanto rende importante effettuare una chiara distinzione tra deformazioni del calcestruzzo (concrete strains) e deformazioni delle fessure (crack strains). La decomposizione della deformazione nei suddetti contributi consente lo sviluppo di un algoritmo che origina uno stato di tensione che soddisfa contemporaneamente la funzione di snervamento e l'energia di frattura. Questo concetto, che fu proposto per primo da Litton nel 1974, successivamente nel 1985 da De Borst e Nauta, nel 1986 da Riggs e Powell ed, infine nel 1988 da Rots, da luogo ai cosiddetti decomposed crack models o modelli della decomposizione della deformazione che verranno introdotti nel paragrafo successivo.

2.4 DECOMPOSED CRACK MODEL O MODELLO DELLA FESSURAZIONE DECOMPOSTA

L'aspetto fondamentale di questo modello riguarda la decomposizione della deformazione totale $\bar{\varepsilon}$ in una deformazione elastica che interessa il calcestruzzo ed in una deformazione che riguarda la fessura. Questo concetto si può esprimere nel seguente modo :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{cls} + \bar{\varepsilon}_{cr} \quad (2.4)$$

ed in termini incrementali è dato dalla espressione seguente :

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \Delta\bar{\varepsilon}^{cls} + \Delta\bar{\varepsilon}^{cr} \quad (2.4.1)$$

In sostanza si stabilisce che dopo la formazione della fessura si possa considerare la decomposizione del vettore deformazione in un primo contributo $\bar{\varepsilon}_{cls}$, che rappresenta il vettore deformazione del calcestruzzo tra le fessure, ed in un secondo contributo $\bar{\varepsilon}_{cr}$ che definisce il vettore deformazione della fessura stessa o meglio del calcestruzzo fessurato.

Il vettore deformazione incrementale della fessura, nel sistema di riferimento locale, è definito nel seguente modo :

$$\Delta\bar{\varepsilon}_l^{cr} = [\Delta\varepsilon_n^{cr}, \Delta\gamma_t^{cr}]^T \quad (2.4.2)$$

Il vettore deformazione della fessura nel sistema di riferimento globale (GCS), $\Delta\bar{\varepsilon}^{cr}$, ha le componenti seguenti :

$$\Delta\bar{\varepsilon}^{cr} = [\Delta\varepsilon_1^{cr}, \Delta\varepsilon_2^{cr}, \Delta\gamma_{12}^{cr}]^T \quad (2.4.3)$$

La trasformazione del vettore di deformazione incrementale della fessura dal sistema di riferimento locale CrCS a quello globale GCS si esprime con la relazione riportata di seguito :

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_1^{cr} \\ \Delta\varepsilon_2^{cr} \\ \Delta\gamma_{12}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & -\text{sen} \vartheta \cos \vartheta \\ \text{sen}^2 \vartheta & \text{sen} \vartheta \cos \vartheta \\ 2\text{sen} \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \text{sen}^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_n^{cr} \\ \Delta\gamma_t^{cr} \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

oppure
$$\Delta\bar{\varepsilon}^{cr} = [\bar{T}^{cr}]^T \Delta\bar{\varepsilon}_l^{cr} \quad (2.4.5)$$

dove $[\bar{T}^{cr}]^T$ è la matrice di trasformazione del vettore deformazione e ϑ l'angolo tra x_1 ed n .

Il vettore tensione della fessura, in termini incrementali, nel sistema di riferimento locale è definito da :

$$\Delta \bar{\sigma}_i^{cr} = [\Delta \sigma_n^{cr}, \Delta \tau_t^{cr}]^T \quad (2.4.6)$$

dove $\Delta \sigma_n^{cr}$ e $\Delta \tau_t^{cr}$ rappresentano rispettivamente le tensioni incrementali normali e tangenziali della fessura . La relazione tra vettore tensione nel sistema locale e vettore tensione nel sistema globale è riportata di seguito :

$$\begin{bmatrix} \Delta \sigma_n^{cr} \\ \Delta \tau_t^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin^2 \vartheta & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \sigma_1 \\ \Delta \sigma_2 \\ \Delta \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

oppure :

$$\Delta \bar{\sigma}_i^{cr} = \bar{T}^{cr} \Delta \bar{\sigma} \quad (2.4.8)$$

Tale approccio consente di modellare un certo numero di fessure che si verificano contemporaneamente. La deformazione del materiale tra le fessure può essere decomposta in una parte elastica, una dovuta alla viscosità (creep), ed una parte plastica e/o termica. Questo consente la combinazione della fessurazione con altri fenomeni non lineari. Inoltre la deformazione della fessura può essere decomposta nelle deformazioni locali di un numero di fessure a differenti orientazioni.

Per quanto concerne il calcestruzzo presente tra le fessure, cioè quello non danneggiato, il legame costitutivo è dato dalla seguente relazione :

$$\Delta \bar{\sigma} = \bar{D}^{cls} \Delta \bar{\epsilon}^{cls} \quad (2.4.9)$$

dove la matrice di rigidezza D^{cls} è definita da :

$$D^{cls} = \frac{E_{cls}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

E_{cls} rappresenta il modulo di Young e ν è il coefficiente di Poisson . Il legame costitutivo del calcestruzzo fessurato è pari a :

$$\Delta \bar{\sigma}_i^{cr} = \bar{D}^{cr} \Delta \bar{\epsilon}_i^{cr} \quad (2.4.11)$$

dove D^{cr} è la matrice di rigidezza del calcestruzzo fessurato che presenta una struttura molto più complessa rispetto a quella della matrice del calcestruzzo semplice in quanto

la sua dimensione dipende dal numero di fessure aperte in un punto di integrazione.

Nel caso in cui, in corrispondenza di un punto di integrazione si abbia una sola fessura, la matrice D^{cr} è una matrice 2x2, se sono presenti due fessure è una matrice 4x4 e così via.

La formula generale per la matrice di rigidezza del calcestruzzo fessurato è :

$$D^{cr} = \begin{bmatrix} D_1^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & D_2^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & D_n^{cr} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

Come si può notare i termini misti (quelli fuori dalla diagonale) sono tutti zero e ciò significa che non sono stati presi in considerazione gli effetti di accoppiamento tra fessure differenti.

Combinando le equazioni costitutive del calcestruzzo semplice e di quello fessurato si ottiene la legge costitutiva del calcestruzzo fessurato espressa dalla relazione seguente :

$$\Delta \bar{\sigma} = D^{cls} \left(\Delta \bar{\varepsilon} - [\bar{T}^{cr}]^T \Delta \bar{\varepsilon}_i^{cr} \right) \quad (2.4.13)$$

Moltiplicando ambo i membri della (2.4.6) per \bar{T}^{cr} si ottiene :

$$\bar{T}^{cr} \Delta \bar{\sigma} = \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} \Delta \bar{\varepsilon} - \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T \Delta \bar{\varepsilon}_i^{cr} \quad (2.4.14)$$

e ponendo la (2.4.8) nella (2.4.13) si ottiene :

$$\Delta \bar{\sigma}_i^{cr} + \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T \Delta \bar{\varepsilon}_i^{cr} = \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} \Delta \bar{\varepsilon} \quad (2.4.15)$$

Sostituendo la relazione (2.4.11) nel lato destro della (2.4.15) si ottiene l'equazione che definisce il vettore deformazione incrementale nel sistema di riferimento locale CrCS :

$$\Delta \bar{\varepsilon}_i^{cr} = \left(\bar{D}^{cr} + \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T \right)^{-1} \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} \Delta \bar{\varepsilon} \quad (2.4.16)$$

La legge costitutiva del calcestruzzo fessurato si ottiene sostituendo la (2.4.16) nella (2.4.13) :

$$\Delta \bar{\sigma} = \left(\bar{D}^{cls} - \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T \left(\bar{D}^{cr} + \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T \right)^{-1} \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} \right) \Delta \bar{\varepsilon} \quad (2.4.17)$$

oppure :

$$\Delta \bar{\sigma} = \bar{D}^{crcls} \Delta \bar{\varepsilon} \quad (2.4.18)$$

dove \bar{D}^{crcls} è la matrice costitutiva per il calcestruzzo fessurato :

$$\bar{D}^{crcls} = \bar{D}^{cls} - \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}]^T (\bar{D}^{cr} + \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} [\bar{T}^{cr}])^{-1} \bar{T}^{cr} \bar{D}^{cls} \quad (2.4.19)$$

Nonostante il modello sia concettualmente interessante la difficoltà sta nell'implementazione in un codice di calcolo e nella scelta dei parametri. A tal proposito le maggiori difficoltà sono date dai complicati algoritmi interni che necessitano di interazioni interne per maneggiare i cambiamenti di stato come le fasi di scarico, di chiusura e riapertura, etc.

Quando fessure multiple si manifestano questa procedura interna di iterazione può fallire e la creazione di substeps non può sempre garantire successi. La valutazione dei parametri, quali le funzioni di shear retention e gli angoli di soglia tra le fessure, non è di facile scelta, un'errata decisione potrebbe dar luogo ad una risposta troppo rigida, ai fenomeni di stress-locking o ad una incontrollabile rotazione delle tensioni principali.

2.5 TOTAL STRAIN CRACK MODEL

Gli inconvenienti mostrati dai modelli di fessurazione decomposta hanno spinto alcuni ricercatori (Feenstra et al.) a realizzare un modello di fessurazione basato sulla deformazione totale.

Questo modello prevede che il comportamento del materiale venga descritto mediante una relazione tensione– deformazione totale nel sistema ad assi fissi o ad assi rotanti.

Per la versione ad assi fissi sono richiesti i parametri shear retention, mentre la versione ad assi rotanti si utilizza un termine tangenziale implicito utile per fornire coassialità tra le tensioni principali rotanti e le deformazioni. L'importanza di questo modello risiede proprio nella possibilità di lavorare in termini di tensione e deformazione senza il bisogno di utilizzare delle funzioni astratte di snervamento o leggi sofisticate di fessurazione.

L'impiego della relazione σ - ε offre dei buoni risultati anche nel caso di schiacciamento a compressione. Da un punto di vista algoritmico il modello non richiede iterazioni interne; infatti dopo aver aggiornato un certo numero di variabili

interne di stato, la tensione è valutata direttamente dalla deformazione. Problemi di convergenza locale o difficoltà di chiusura o riapertura non esistono. Il principio di base del modello è che la tensione viene valutata nelle direzioni che sono date dalle direzioni della fessura.

La relazione totale tensione-deformazione in una configurazione di stato piano di tensione è data dalla seguente relazione espressa nel sistema di coordinate della fessura n,t :

$$\sigma_{n,t} = D_{n,t} \varepsilon_{n,t} \quad (2.5)$$

con

$$D_{n,t} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{lt} E}{1 - \alpha_n \alpha_t \nu^2} & \frac{\alpha_t \alpha_n E}{1 - \alpha_n \alpha_t \nu^2} & 0 \\ \frac{\alpha_t \alpha_n E}{1 - \alpha_n \alpha_t \nu^2} & \frac{\alpha_s E}{1 - \alpha_n \alpha_t \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_t G \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

dove α_t ed α_n sono fattori di riduzione per il modulo elastico E e sono espressi in funzione delle deformazioni a trazione nelle direzioni considerate :

$$\alpha_n = \alpha_n(\varepsilon_{nn}) \quad (2.5.2)$$

$$\alpha_t = \alpha_t(\varepsilon_{tt}) \quad (2.5.3)$$

e

$$\beta_t = \beta_t(\gamma_{nt}) \quad (2.5.4)$$

La relazione costitutiva (2.5) può essere trasformata nel sistema di coordinate globale usando la matrice di trasformazione della deformazione $T(\vartheta)$ nel modo seguente :

$$\sigma_{x,y} = [T(\vartheta)^T D_{n,t} T(\vartheta)] \varepsilon_{x,y} \quad (2.5.5)$$

in cui l'indice T indica la trasposta e ϑ è l'angolo formato tra il sistema di coordinate locale della fessura ed il sistema globale.

La matrice di rigidezza globale si ottiene differenziando la relazione seguente :

$$\sigma_{x,y} = T^t(\vartheta) \sigma_{n,t} \quad (2.5.6)$$

da cui si ricava :

$$\dot{\sigma}_{x,y} = D_{x,y} \dot{\varepsilon}_{x,y} \quad (2.5.7)$$

dove $D_{x,y}$ è la matrice di rigidità tangente espressa dalla relazione riportata di seguito:

$$D_{x,y} = \left[T^t(\vartheta) \frac{\partial \sigma_{n,t}}{\partial \varepsilon_{n,t}} T(\vartheta) + \frac{\partial T^t(\vartheta)}{\partial \vartheta} \sigma_{n,t} \frac{\partial \vartheta^T}{\partial \varepsilon_{x,y}} \right] \quad (2.5.8)$$

Gli svantaggi del modello derivano dalla impossibilità di modellare la fessurazione multidirezionale non ortogonale. Ciò, però, non rappresenta un grosso problema in quanto nella maggior parte dei problemi ingegneristici si ha solo fessurazione ortogonale. Altro svantaggio è dato dalle difficoltà incontrate nella descrizione in termini di deformazione totale riunita quando sono presenti i contributi della viscosità, del ritiro e delle deformazioni termiche.

In questi casi il modello della fessurazione decomposta viene preferito.

2.6 SINGLE FIXED CRACK MODEL

Il single-fixed smeared crack model stabilisce che, in corrispondenza della formazione della fessura, l'orientazione della fessura, corrispondente alla direzione ortogonale al piano della fessura stessa, coincida, con l'orientazione della tensione principale massima e rimanga fissa durante i processi di carico. Per comprendere meglio i principi base del single-fixed smeared crack model riportiamo la seguente figura che descrive la morfologia di una fessura nel caso di stato piano di tensione.

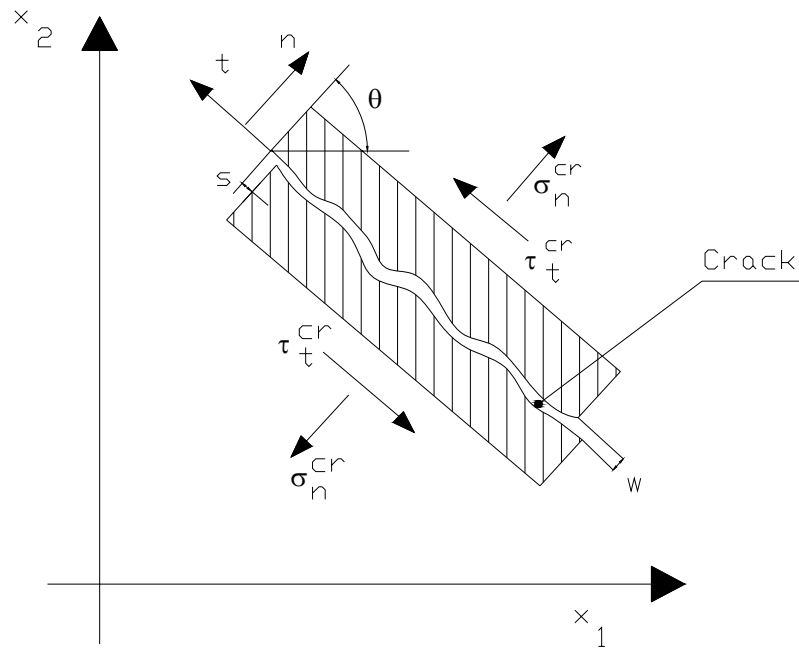


Figura 2.6 - Single-fixed smeared crack model : tensioni della fessura, spostamenti relativi e sistema di coordinate locale e globale.

Come si può ben vedere la formazione della fessura è definita da due parametri di spostamento relativo w ed s che rappresentano rispettivamente lo spostamento legato all'apertura della fessura o meglio crack opening displacement nella direzione della normale alla fessura, ed il crack sliding displacement ovvero lo scorrimento tra i due lembi della fessura nella direzione tangenziale. Il sistema di assi cartesiani ortogonali X_1X_2O costituisce il sistema di coordinate globale (GCS), mentre gli assi n e t , che rappresentano l'uno la direzione normale alla fessura e l'altro la direzione tangente alla fessura, definiscono un sistema locale (l) di coordinate (CrCS). Nel sistema locale di coordinate l'apertura normale alla fessura w è sostituita dalla deformazione normale alla fessura ε_n^{cr} mentre lo scorrimento s è sostituito dalla deformazione tangenziale γ_t^{cr} .

Se θ rappresenta l'angolo che si forma tra l'asse X_1 e l'asse n , è possibile legare le componenti di ε_n e σ_n definite nel sistema di coordinate locale a quelle del sistema globale attraverso le matrici di trasformazione standard $T\varepsilon$ e $T\sigma$ tramite le seguenti relazioni ed è possibile, inoltre, definire il legame elastico ortotropo nel sistema di riferimento locale attraverso le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_{nt} = T_{\varepsilon}(\vartheta)\varepsilon_{x_1x_2} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{nt} = T_{\sigma}(\vartheta)\sigma_{x_1x_2} \quad (2.6.1)$$

$$\sigma_{nt} = D_{nt}\varepsilon_{nt} \quad (2.6.2)$$

Inoltre, il legame ortotropo definito nel sistema locale può essere trasformato nel sistema di riferimento globale X_1X_2O mediante la seguente relazione:

$$\sigma_{x_1x_2} = T_{\sigma}^{-1}(\vartheta)D_{nt}^s T_{\varepsilon}(\vartheta)\varepsilon_{x_1x_2} \quad (2.6.3)$$

Se l'angolo ϑ rimane fisso in corrispondenza della formazione della fessura, cioè quando la resistenza a trazione supera il valore massimo (tension cut-off criterion), la relazione che lega il vettore deformazione incrementale nel sistema locale a quello del sistema globale è definita nel seguente modo :

$$\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_1^{cr} \\ \Delta\varepsilon_2^{cr} \\ \Delta\gamma_{12}^{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & -\text{sen} \vartheta \cos \vartheta \\ \text{sen}^2 \vartheta & \text{sen} \vartheta \cos \vartheta \\ 2\text{sen} \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta - \text{sen}^2 \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_n^{cr} \\ \Delta\gamma_t^{cr} \end{bmatrix} \quad (2.6.4)$$

oppure
$$\Delta\vec{\varepsilon}^{cr} = [\vec{T}^{cr}]^T \Delta\vec{\varepsilon}_l^{cr} \quad (2.6.5)$$

Gli svantaggi che questo metodo possiede sono dovuti ai contributi dell'effetto spinotto e dell'ingranamento degli inerti che consentono agli assi di assumere una diversa orientazione dando origine ad una risposta numerica che è più rigida delle osservazioni sperimentali .

Per ovviare a questi inconvenienti sono stati introdotti i multi-directional ed i rotating crack models che verranno descritti di seguito.

2.7 MULTI-FIXED CRACK MODEL

L'approccio multi-fixed è stato introdotto con lo scopo di simulare la formazione di più di una fessura in ciascun punto d'integrazione sulla base di un criterio di resistenza .

La figura riportata di seguito descrive le caratteristiche fondamentali del multi-directional fixed crack model. Esso stabilisce innanzitutto che in corrispondenza di ciascun punto di integrazione si abbia la formazione di una prima fessura allineata con il sistema n_1t_1 e di una seconda fessura coincidente con il sistema n_2t_2 inclinata di un angolo α rispetto a n_1t_1 , e poi, che siano presenti la tensione σ_i e la deformazione ε^{cr}_i nel sistema di coordinate n-t allineato con la generica fessura i-esima

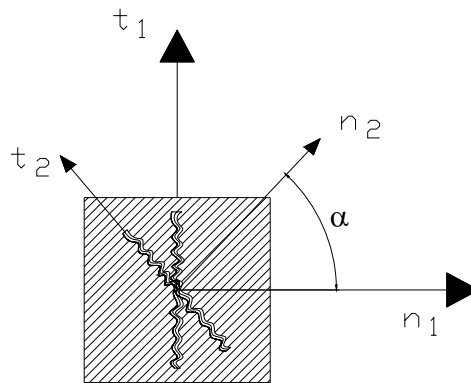


Figura 2.7 - Multi-directional fixed crack model

$$\text{con } t_2 = \begin{Bmatrix} l_y \\ m_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad n_2 = \begin{Bmatrix} l_x \\ m_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Gli assi n_1 e t_1 coincidono, come si può vedere dalla figura, con la fessura verticale, mentre gli assi n_2 e t_2 coincidono con una seconda fessura inclinata rispetto alla prima di un angolo α .

$$\text{Se } e^{cr} = (e_1^{cr}, e_2^{cr}, \dots, e_n^{cr})^T \quad (2.7)$$

rappresenta il vettore che assembla le deformazioni di ogni singola fessura nella condizione di stato piano di tensione, è possibile esprimere la relazione tra deformazione globale ε^{cr} ed il vettore e^{cr} nel seguente modo :

$$\varepsilon^{cr} = Ne^{cr} \quad (2.7.1)$$

dove N rappresenta la matrice assemblata di trasformazione

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_n] \quad (2.7.2)$$

N_i è, invece, la matrice di trasformazione dell' i -esima fessura definita nello stato di deformazione piana nel seguente modo :

$$N_i = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ m_x^2 & m_x m_y \\ n_x^2 & n_x n_y \\ 2l_x m_y & l_x m_y + l_y m_x \end{bmatrix} \quad (2.7.3)$$

dove $n^T = \{l_x, m_x, n_x\}$ è il vettore normalizzato perpendicolare al piano della fessura. Il vettore contenente le tensioni per ciascuna fessura è definito nel seguente modo :

$$s^{cr} = [s_1^{cr}, s_2^{cr}, \dots, s_i^{cr}, \dots, s_n^{cr}]^T \quad (2.7.4)$$

Il vettore tensione per la fessura i -esima è dato da :

$$s^{cr} = \{\sigma_{m,i}^{cr}, \tau_{nt,i}^{cr}\}^T \quad (2.7.5)$$

mentre la relazione tra tensione globale e vettore s^{cr} si può esprimere nel seguente modo.

$$s^{cr} = N^T \sigma \quad (2.7.6)$$

Le tensioni della fessura possono essere espresse in funzione delle deformazioni della fessura mediante la relazione sotto riportata:

$$s^{cr} = f(e^{cr}) \quad (2.7.7)$$

2.8 ROTATING CRACK MODEL

Il modello di fessurazione rotante o rotating crack model prevede che la direzione della tensione massima principale possa ruotare e che alcune fessure

parzialmente si chiudano mentre altre, aventi una orientazione diversa, comincino a formarsi. In alcuni casi può verificarsi che le fessure secondarie diventino quelle maggiori mentre le primarie possano chiudersi .

La relazione costitutiva che lo rappresenta è data dalla relazione seguente :

$$\sigma_{x,y} = [T(\vartheta)^T D_{n,t} T(\vartheta)] \varepsilon_{x,y} \quad (2.8)$$

con $T(\vartheta)$ che rappresenta una funzione delle deformazioni globali.

La matrice di rigidezza $D_{x,y}$ è definita dalla relazione che segue :

$$D_{x,y} = \left[T(\vartheta) \frac{\partial \sigma_{n,t}}{\partial \varepsilon_{n,t}} T(\vartheta) + \frac{\partial T^T(\vartheta)}{\partial \vartheta} \sigma_{n,t} \frac{\partial \vartheta^T}{\partial \varepsilon_{x,y}} \right] \quad (2.8.1)$$

in cui il primo termine al secondo membro è pari alla matrice di rigidezza tangenziale che deriva dall'approccio della fessura fissata, il secondo termine, dovuto alla rotazione degli assi principali è, invece, funzione delle tensioni e dell'angolo ϑ tra il sistema di coordinate locale e quello globale. Esso differisce notevolmente dal modello della fessura fissata nella fase di post fessurazione. Infatti gli assi principali di ortotropia non rimangono costanti ma ruotano coassialmente con le deformazioni principali durante la propagazione della fessura.

Questo approccio può essere ricavato come un caso particolare del modello mutidirezionale, assumendo un angolo di soglia nullo tra le fessure, in modo che una nuova fessura si manifesta in corrispondenza di un piccolo angolo mentre le fessure precedenti si scaricano elasticamente. Inoltre esso non coinvolge un fattore β (shear retention factor) indipendente, ma definisce la condizione di coassialità attraverso una rigidezza tangenziale che è associata con la rotazione degli assi principali.

In merito alla scelta tra metodo a fessurazione fissa o rotante c'è da dire che il modello rotante è preferibile nel caso di fessurazione localizzata in quanto genera , rispetto alla versione fissa, meno stress-locking.