

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

---

DOTTORATO DI RICERCA IN MECCANICA COMPUTAZIONALE

XX CICLO

SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE ICAR-08

PROBLEMI INVERSI NELLA MECCANICA DEL  
DANNEGGIAMENTO

Donato Giuseppe

Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca in  
Meccanica Computazionale

---

Cosenza, Novembre 2007



# UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

Data: Cosenza, Novembre 2007

Autore: **Giuseppe Donato**

Titolo: **Problemi inversi nella meccanica del danneggiamento**

Dipartimento: **Strutture**

---

Firma dell'autore

Tutor:

---

Prof. Raffaele Zinno

Coordinatore:

---

Prof. Maurizio Aristodemo



*“Chi ha da dire qualcosa di nuovo e di importante ci tiene a farsi capire. Farà perciò tutto il possibile per scrivere in modo semplice e comprensibile. Niente è più facile dello scrivere difficile”.*

**Karl Raimund Popper.**



# INDICE

---

<b>Introduzione</b> .....	<b>V</b>
<b>Capitolo 1: <i>Sull'identificazione del danneggiamento</i></b> .....	<b>1</b>
1.1. Definizione di danneggiamento.....	2
1.2. Metodi di identificazione del danneggiamento.....	2
1.3. Metodi di determinazione del danneggiamento basati sulle vibrazioni....	3
1.4. Metodi basati sul cambiamento delle caratteristiche modali.....	5
1.4.1. Cambiamenti di frequenza.....	5
1.4.1.1. Problema diretto.....	6
1.4.1.2. Problema inverso.....	6
1.4.2. Metodi basati sui cambiamenti delle forme modali.....	10
1.4.3. Metodi basati sui cambiamenti della curvatura e dell'energia di deformazione delle forme modali.....	11
1.4.4. Metodi basati sulla flessibilità misurata dinamicamente.....	13
1.4.4.1. Comparazione dei cambiamenti di flessibilità.....	14
1.4.4.2. Metodo del controllo dell'unità. ....	14
1.4.4.3. Metodo della matrice di errore di rigidezza.....	15
1.4.4.4. Effetti della flessibilità residuale.....	15
1.4.4.5. Cambiamenti nella matrice di rigidezza misurata.....	15
1.5. Metodi basati sull'aggiornamento delle matrici.....	15
1.5.1. Funzione obiettivo e condizioni.....	16
1.5.2. Metodi ottimali per l'aggiornamento delle matrici.....	18
1.5.3. Metodi di aggiornamento basati sulla sensitività.....	19
1.6. Metodi basati sulle Reti Neurali.....	20
<b>Capitolo 2: <i>Modelli Matematici nella Dinamica Strutturale</i></b> .....	<b>23</b>
2.1. Descrizioni della dinamica di una struttura.....	24
2.2. Modello ad un solo grado di libertà – SDOF.....	24
2.2.1. Funzioni di risposta in frequenza per il modello SDOF.....	28
2.3. Modello a più gradi di libertà – MDOF.....	30
2.3.1. Caso non smorzato: vibrazione libera, modi e frequenze proprie di vibrazione.....	30
2.3.2. Caso non smorzato: risposta forzata.....	32
2.3.3. Smorzamento proporzionale.....	34
2.3.4. Smorzamento di isteresi: caso generale.....	37
2.3.5. Smorzamento viscoso: caso generale.....	39
<b>Capitolo 3: <i>Dinamica Strutturale Sperimentale Acquisizione delle FRF</i></b> .....	<b>41</b>
3.1. Prove sperimentali di analisi dinamica.....	42
3.2. Determinazione delle FRF con ingresso di tipo generale .....	43
3.2.1. Ingresso periodico.....	43
3.2.2. Ingresso impulsivo.....	44
3.2.3. Ingresso random.....	46

3.3. Impiego di ingressi diversi.....	48
3.3.1. Ingresso sinusoidale con variazione discreta di frequenza.....	48
3.3.2. Ingresso sinusoidale con variazione continua di frequenza.....	49
3.3.3. Ingresso periodico.....	49
3.3.4. Ingresso random.....	49
3.3.5. Ingresso impulsivo.....	51
3.3.6. Il sistema di eccitazione.....	51
3.4. Determinazione dei parametri modali dalle FRF: ipotesi di SDOF.....	52
3.5. Funzioni dell'analizzatore e problemi di analisi del segnale.....	58
3.5.1. Aliasing.....	59
3.5.2. Leakage (dispersione) e windowing.....	60
3.5.3. Zoom.....	63
3.5.4. Procedimenti di media.....	64

**Capitolo 4: Metodi Generali di Ottimizzazione..... 66**

4.1. Descrizione del problema di ottimizzazione.....	66
4.2. Ottimizzazione vincolata e non vincolata.....	67
4.3. Condizioni di ottimalità.....	69
4.4. Generalità sugli algoritmi di ottimizzazione.....	70
4.5. Risoluzione dei problemi di ottimizzazione non vincolata.....	71
4.5.1. Metodi di ottimizzazione non vincolata monodimensionale.....	73
4.5.1.1 Metodo Golden Section.....	74
4.5.1.2 Metodo di Fibonacci.....	75
4.5.2 Metodi di ottimizzazione non vincolata multidimensionale.....	77
4.5.2.1 Metodo del gradiente.....	78
4.5.2.2 Metodo di Newton.....	80
4.5.2.3 Metodo quasi-Newton.....	81
4.6 Algoritmi genetici.....	82
4.6.1. Funzione Fitness.....	84
4.6.2. Funzionamento del metodo.....	84
4.6.2.1. Selezione.....	85
4.6.2.2. Crossover.....	86
4.6.2.3. Mutazione.....	87
4.6.3. Alcune problematiche.....	88
4.6.4. Campi di applicazione.....	88
4.7. Risoluzione Problemi di ottimizzazione vincolata.....	89
4.7.1. Metodo delle funzioni di penalità.....	92
4.7.2. Metodo della funzione di penalità esterna.....	93
4.7.3. Metodo della funzione di penalità interna.....	95

**Capitolo 5: Identificazione su travi soggette a danno diffuso..... 65**

5.1 Introduzione.....	98
5. 2 Problema diretto generale.....	98
5.2.1 Problema diretto discrete damaged.....	98
5.2.2 Problema diretto pseudo continuo.....	101
5.3 Problema inverso.....	104
5. 4 Conclusioni.....	115



<b>Capitolo 6: Identificazione Del Danno In Telai Piani</b> .....	<b>117</b>
6.1. Introduzione.....	118
6.2. Analisi modale del modello pseudo-sperimentale.....	118
6.2.1. Analisi modale con masse di piano.....	119
6.2.2. Analisi modale con masse di piano ed impalcato infinitamente rigido, confronto risultati ottenuti.....	119
6.3. Verifica dell'ortogonalità dei modi sperimentali.....	120
6.4. Verifica della consistenza dei vettori modali.....	121
6.5. Confronto dei modelli.....	122
6.5.1 Caso di studio: analisi del telaio a 3 piani.....	124
6.6. Criteri adottati nella sperimentazione.....	125
6.6.1. Set di prove "A": una variabile per piano.....	127
6.6.1.1. Istogrammi.....	129
6.6.2 Set di prove "B": 2 variabili per piano.....	141
6.6.2.1 Istogrammi. SET B.....	142
6.6.3 Commento risultati.....	151
6.6.4. Simulazione dell'errore sperimentale.....	154
6.6.5 Commento risultati.....	155
6.7. Conclusioni .....	155
<b>Capitolo 7: Identificazione in telai piani tamponati</b> .....	<b>157</b>
7.1. Introduzione.....	158
7.2. Modellazione dei telai tamponati.....	159
7.3. Comportamento dei telai tamponati.....	159
7.4. Il modello del puntone equivalente.....	161
7.4.1. Costruzione del modello.....	164
7.4.2. Calcolo della sezione del puntone equivalente.....	166
7.5. Calcolo della rigidezza laterale.....	167
7.5.1. Il problema delle aperture nel pannello.....	169
7.6 Sperimentazione: identificazione in telai piani tamponati.....	170
7.6.1. Set di prove "A".....	171
7.6.1.1 Istogrammi.....	172
7.6.2. Set di prove "B".....	173
7.6.2.1 Istogrammi.....	174
7.6.3 Commento risultati.....	175
7.7. Influenza dei modi superiori sull'accuratezza della soluzione.....	176
7.7.1. Caso di una variabile per piano.....	177
7.7.2. Caso di due variabili per piano.....	178
7.7.3. Commento risultati.....	179
7.8. Simulazione dell'errore sperimentale.....	180
7.8.1. Una variabile per piano. SET A.....	180
7.8.2. Due variabili per piano. SET B.....	181
7.9. Conclusioni.....	183
<b>Capitolo 8: Problemi di Identificazione di telai 3D</b> .....	<b>185</b>
8.1. Introduzione.....	186
8.2 Schematizzazione telai 3D.....	186
8.2.1 Ordinamento delle variabili cinematiche.....	187

8.2.3 Piano rigido.....	188
8.2.4 Forme modali utilizzate.....	189
8.3 Analisi effettuate.....	189
8.4 Processo di identificazione.....	192
8. 5 Strutture esaminate.....	192
8.5.1. Analisi SET A.....	193
8.5.2 Errore sperimentale, SET A.....	196
8.5.3. Influenza del numero di modi SET A.....	196
8.5.4. Analisi SET B.....	197
8.5.5 Errore sperimentale SET B.....	198
8.5.6 Influenza del numero di modi SET B.....	200
8.6 Conclusioni.....	101
<b>Conclusioni.....</b>	<b>203</b>
<b>Bibliografia.....</b>	<b>209</b>

## INTRODUZIONE

Le strutture civili ed industriali, in cemento armato, in acciaio o in altro materiale, possono raggiungere dimensioni notevoli e rivestire ruoli nell'area in cui sorgono, tali che la garanzia della loro stabilità ed efficienza diventa un problema sociale volto alla salvaguardia di uomini e cose.

La necessità di un controllo strutturale si fa, anche, più pressante per le seguenti ragioni:

- la progettazione delle strutture moderne diviene sempre più sofisticata e porta a sfruttare maggiormente le caratteristiche dei materiali
- il progresso e l'ulteriore miglioramento dei criteri di progettazione e di costruzione richiedono che si conosca il comportamento delle strutture e dei materiali che le costituiscono in modo il più possibile quantitativo
- la struttura costituisce, unitamente a quanto le è annesso, un patrimonio che va conservato e mantenuto efficiente
- la conservazione di una struttura può richiedere, specie per opere di antica costruzione, interventi di restauro ed in questo caso il controllo acquista un particolare significato di garanzia di sicurezza e di verifica della validità degli interventi.

In ultima analisi si può affermare che l'esigenza di un controllo sia dettata prevalentemente da ragioni di sicurezza. La sicurezza può essere pensata come una grandezza legata allo stato di deterioramento della struttura, poiché all'aumentare di questo aumenta sicuramente anche la probabilità di rovina.

Una struttura si dice sotto controllo quando si possono fornire gli strumenti capaci di misurare il suo stato di deterioramento. Questa operazione può essere fatta ad esempio attraverso le misure dello stato tensionale relativo ai carichi ed a quelli indotti da cause naturali e non, e non sempre identificabili. Lo stato tensionale deve essere confrontato con la resistenza dei materiali che a sua volta è legata al suo stato di deterioramento. Ma la misura degli sforzi non è tra le più facili ed, inoltre, risente moltissimo delle disomogeneità locali, poiché coglie solo l'effetto differenziale delle sollecitazioni.

Questi aspetti negativi hanno orientato gli studiosi alla scelta di misurare un'altra grandezza, di tipo geometrico, che risultasse più facilmente quantificabile ed egualmente correlata al deterioramento e di conseguenza alla distribuzione degli sforzi: la deformazione o lo spostamento o il movimento.

I movimenti di una struttura possono manifestarsi in tempi molto brevi oppure in tempi più lunghi: nel primo caso si parla dei movimenti dinamici, nel secondo dei movimenti quasi stazionari. Si possono controllare gli uni o gli altri o entrambi i movimenti.

Nel primo caso si deve disporre di strumenti che consentano di seguire con continuità il movimento; nel secondo ci si limita a controllare gli spostamenti (controllo statico di una struttura) che si manifestano in lunghi periodi di tempo, mediante operazioni di misura intervallate successivamente nel tempo e che si svolgono in condizioni di temporanea stabilità del manufatto. Il controllo statico evidenzia tra l'altro il residuo permanente di movimenti prodotti da sollecitazioni dinamiche e, pertanto, si presenta come uno strumento fondamentale per consentire di esprimere un giudizio sul grado di sicurezza di una struttura.

L'analisi sperimentale dinamica permette sia di svelare le caratteristiche vibrazionali, sia di formulare giudizi in base alle variazioni riscontrate in successive campagne sperimentali. Pur con i limiti prima descritti, una modellazione matematica lineare ad elementi finiti permette, soprattutto se affiancata da prove sperimentali sui materiali e dinamiche sull'intera struttura, di cogliere alcuni aspetti globali del comportamento strutturale indispensabili per la conoscenza complessiva del manufatto. Per alcuni particolari costruttivi potrebbe essere utile una micromodellazione con infittimento della mesh e ipotesi di comportamento non lineare nel materiale, ma tali studi approfonditi sconfinano nella ricerca pura e non si ritengono ancora idonei per un loro uso di routine.

Nell'ambito delle attività di valutazione della sicurezza delle strutture esistenti, i modelli matematici sono divenuti strumenti fondamentali ai fini della interpretazione del comportamento delle opere in chiave diagnostica.

Tra i metodi di indagine di tipo non distruttivo assumono un rilievo sempre maggiore quelli che abbinano la modellazione numerica e la sperimentazione sul campo basata su prove dinamiche (forzate, se si utilizza un sistema di eccitazione artificiale, o non forzate, se ci si basa sulle vibrazioni ambientali) o prove statiche. Tali prove consentono di ottenere le informazioni indispensabili per mettere a punto modelli che siano in grado di simulare il reale comportamento delle opere e derivarne indicazioni che possono essere utilizzate, attraverso opportuni procedimenti, con finalità diagnostiche. Il processo, teso a "calibrare" i modelli matematici per riprodurre il comportamento reale delle strutture misurato durante le prove sperimentali, è noto con il nome di identificazione strutturale. La metodologia si configura, quindi, come una tecnica diagnostica indiretta e di tipo non distruttivo, in quanto i parametri fisici del materiale e quelli meccanici della struttura (in termini di rigidità, massa e smorzamento) sono dedotti dai modi dinamici di risposta misurati sulla struttura in esame, senza che il rilievo sperimentale arrechi danno o modifica alla struttura stessa.

Il divario tra le caratteristiche modali misurate su una struttura reale durante una prova di vibrazione (forzata o non) e quelle simulate numericamente mediante un modello agli elementi finiti viene ridotto correggendo i parametri del materiale, nonché le condizioni di vincolo.

Passi da seguire nel processo identificativo della struttura:

1. analisi dei segnali:
  - estrazione di modelli complessi;
  - trattamento di casi di eccitazione del tutto generali, incluso quello ambientale, per ridurre il costo delle misure;
  - filtraggio del rumore dai dati grezzi.
2. analisi modale complessa ad elementi finiti: estensione dell'analisi modale al campo complesso, al fine di analizzare i comportamenti dissipativi delle strutture con accresciuta precisione rispetto all'analisi in campo reale;
3. modulo di identificazione: codice di calcolo che consente di ridurre, in campo reale, il divario tra le frequenze e modi misurati e i corrispondenti valori calcolati e consente di
  - applicare il procedimento ad una qualunque tipologia strutturale;
  - formulare una funzione obiettivo basata su grandezze modali complesse;
  - calcolare la matrice di sensibilità (derivate di frequenze e modi rispetto ai parametri incogniti) in campo complesso;
  - eseguire il processo identificativo sui parametri di rigidità, densità e smorzamento.

Un modello continuo presenta infiniti gradi di libertà, utilizzando il FEM si restringe il tutto ad un problema semplificato, concentrando le informazioni in un numero finito di elementi e di nodi. La scelta è, come sappiamo, del tutto arbitraria, si può infittire la mesh oppure diradarla a nostro piacimento, il tutto ragionando nel modello numerico. Una considerazione potrebbe essere quella che siccome infittire la mesh è del tutto gratuito, o quasi, nulla vieta di utilizzare più parametri cinematici.

Allo stesso modo, si ha una semplificazione anche nella modellazione sperimentale, in primis non è possibile inserire un numero infinito di sensori, dunque anche in questo caso ci si deve accontentare di avere delle informazioni concentrate in alcuni punti. In più da questo numero si deve ancora scendere perché quando si modella sperimentalmente una struttura, spesso si ha un numero di risorse limitate, anzi, inserire più sensori farà modificare l'intero sistema di identificazione e, quindi, lievitare notevolmente il costo. Infine, spesso con un numero di sensori prefissato, non si riescono nemmeno a ricavare con molta precisione tutte le informazioni che teoricamente si potrebbero determinare, allora per queste motivazioni, spesso ci si deve accontentare, ad esempio solo delle prime forme modale, perché le altre sarebbero affette da errori e, quindi, non utilizzabili.

Nel Model Updating (MU) ci si trova, quindi, spesso a lavorare con problemi non lineari in cui il numero di incognite eccede quello delle equazioni, quindi si tratta di problemi mal posti. Di conseguenza, a seconda del problema, si devono inserire delle restrizioni che ne limitano il campo di utilizzo, per esempio si possono determinare le informazioni medie globali di una struttura e non quelle locali di un singolo elemento. Infatti effetti locali spesso non vengono distintamente riconosciuti, ed un certo gruppo di informazioni modali può risultare insensibile alla variazione strutturale di un elemento. La sensibilità deve essere valutata, volta per volta, altrimenti si rischia di ottenere una soluzione che non possiede un reale significato fisico e che, quindi, diverge rispetto alla soluzione reale.

Lo scopo della presente ricerca è quella di valutare la metodologia del MU, nel caso di edifici intelaiati in c.a. di civile abitazione. Le strutture 3D prese in esame presentano anche maglia non regolare sia in pianta che in elevazione. Il codice realizzato in ambiente MATLAB si spinge nel determinare la funzione obiettivo migliore per poi esaminare qualche caso specifico che più avvicina il modello teorico a quello reale. In effetti la ricerca del modello analitico con il quale si possa costruire il problema diretto, risulta un aspetto importantissimo. La ricerca è stata focalizzata su diversi obiettivi come si seguito elencati:

- Studio di identificazione del danno, via FEM, su una trave testata sperimentalmente.
- Identificazione strutturale di telai piani.
- Identificazione strutturale di telai piani con tamponatura e studio delle problematiche connesse
- Identificazione strutturale di telai 3D

La seguente dissertazione è così organizzata:

- Identificazione del danneggiamento (Capitolo 1)
- Test modale sperimentale (Capitoli 2,3)
- Ottimizzazione strutturale (Capitolo 4)
- Identificazione del danno su travi (Capitolo 5)
- Identificazione del danno nei telai piani (Capitolo 6)
- Problematiche relative ai telai piani con elementi di disturbo (Capitolo 7)
- Identificazione del danno in telai tridimensionali (Capitolo 8)



# CAPITOLO 1

## SULL' IDENTIFICAZIONE DEL DANNEGGIAMENTO

*Il capitolo presenta una panoramica generale sui metodi per identificare, localizzare, e caratterizzare il danneggiamento nei sistemi strutturali e meccanici, esaminando e misurando i cambiamenti nella loro risposta vibrazionale.*

*L'idea che sta alla base di questa tecnologia è la seguente: i parametri modali (frequenze naturali, forme modali e fattore di smorzamento modale) sono funzioni delle caratteristiche fisiche di una struttura (la massa, la rigidità e i coefficienti di smorzamento), di conseguenza alterazioni in tali proprietà fisiche causeranno variazioni apprezzabili delle sue caratteristiche modali.*

*Nel capitolo sono presentate le motivazioni dello sviluppo di questa tecnologia, i vari metodi di identificazione del danneggiamento e la loro classificazione. I metodi sono descritti in termini generali e vengono discusse la loro affidabilità e le difficoltà connesse alla loro applicazione.*

## 1.1. Definizione di danneggiamento.

Per gli scopi di questo lavoro, il danneggiamento è definito come una modificazione, intenzionale o non intenzionale, introdotta all'interno di un sistema che determina conseguenze negative nelle *performances* presenti o future di quel sistema.

Gli effetti del danno in una struttura possono essere classificati come lineari o non lineari. Uno stato di danno è definito lineare nel caso in cui la struttura inizialmente elastica-lineare rimanga tale dopo il danneggiamento. In tal caso le variazioni nelle proprietà modali saranno il risultato di cambiamenti nella geometria e/o nelle caratteristiche fisiche della struttura, ma la risposta strutturale potrà essere modellata utilizzando equazioni del moto di tipo lineare.

Il danno è definito non lineare nel caso in cui la struttura inizialmente elastica-lineare si comporti in maniera non lineare dopo che sia stato provocato il danneggiamento. Un tipico esempio di danno non lineare è la formazione di una fessura per fatica che, di conseguenza, si apre e si chiude sotto un regime di vibrazione. Altri esempi di danno non lineare riguardano i giunti a contatto che vibrano, altri ancora il comportamento non lineare di alcuni materiali come i polimeri.

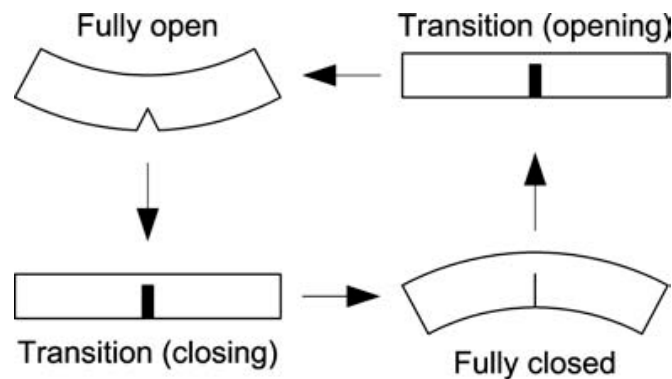


Figura 1.1. Comportamento non lineare di un elemento trave con fessura centrale.

## 1.2. Metodi di identificazione del danneggiamento.

I metodi di identificazione del danneggiamento possono essere classificati in metodi globali e metodi locali. Un metodo si definisce globale quando consente l'individuazione del danneggiamento in una struttura, indipendentemente dalla sua entità ed ubicazione, nel caso contrario il metodo è definito locale. I metodi globali sono distinti a loro volta in metodi lineari o non lineari a seconda del tipo di danno individuato.

I metodi lineari possono essere ulteriormente classificati in metodi modello-dipendenti e metodi modello-indipendenti.

I metodi modello-dipendenti presuppongono che la struttura esaminata risponda in alcuni modi predeterminati, che possono essere accuratamente discretizzati in un'analisi secondo il metodo degli elementi finiti (si pensi alla risposta descritta dalla teoria della trave di Eulero-Bernoulli). Questa tesi tratterà dei metodi globali.

Un differente sistema di classificazione dei metodi di individuazione del danno definisce i seguenti quattro livelli di identificazione [1]:

- Livello 1: Determinazione della presenza del danno nella struttura.
- Livello 2: Livello 1 più la determinazione dell'ubicazione geometrica del danno.
- Livello 3: Livello 2 più quantificazione della gravità del danno.



- Livello 4: Livello 3 più predizione della vita di servizio rimanente della struttura.

I livelli 1 e 2 sono entrambi metodi di identificazione del danno basati sull'analisi vibrazionale che possono essere determinati senza alcun modello strutturale. Il livello 3, di identificazione del danno, presuppone che i metodi vibrazionali vengano accoppiati con l'utilizzo di un modello strutturale. In tal caso le problematiche, come si vedrà in seguito, sono più complesse per cui non sempre è possibile ottenere tutte le informazioni previste dal livello. Il livello 4 è un livello predittivo associato coi campi di formazione delle fratture, analisi di vita a fatica, o accertamento sul progetto strutturale. I metodi globali, a cui appartengono i metodi vibrazionali, sono almeno di livello 3.

Un altro sistema di classificazione, per le tecniche di identificazione del danno, distingue tra metodi usati per il monitoraggio continuo delle capacità strutturali e metodi usati per la determinazione del danneggiamento causato da eventi estremi. Per esempio, un sistema che usa misure accelerometriche, continue o intermittenti, provenienti da sensori permanenti montati ad un ponte è diverso, in termini di strumentazione e requisiti di acquisizione dati, da un sistema che non acquisisce dati in modo permanente ma solo durante ed immediatamente dopo un terremoto o un uragano.

### **1.3. Metodi di determinazione del danneggiamento basati sulle vibrazioni.**

Il recente sviluppo dell'attività di ricerca nell'ambito della determinazione del danneggiamento, attraverso i metodi basati sulle vibrazioni, è il risultato della concomitanza di molti fattori: disastri spettacolari che generalmente hanno dato luogo a perdita di vite umane, considerazioni di carattere economico, recenti avanzamenti tecnologici. Disastri come la perdita in volo dell'involucro esterno di alcuni aerei, per esempio, hanno focalizzato l'attenzione generale sul bisogno di esaminare e monitorare, le strutture ed i sistemi meccanici utilizzati dal pubblico per valutarne ed assicurarne la sicurezza. La preoccupazione pubblica, quindi, di tanto in tanto, focalizza l'attenzione degli enti amministrativi su questo problema e, negli ultimi tempi, industria ed organismi di controllo sono stati spinti a provvedere al reperimento delle risorse necessarie allo sviluppo di questa tecnologia. Lo stato attuale di invecchiamento delle infrastrutture e le questioni economiche associate al loro ripristino sta producendo lo sviluppo di metodi che possono essere usati per scoprire la presenza di danno o di deterioramento il prima possibile.

Si può a giusta ragione ritenere che l'individuazione del danno, attraverso l'analisi dei cambiamenti nelle proprietà dinamiche o di risposta dei sistemi, sia stata messa in pratica in una maniera qualitativa, attraverso l'uso di tecniche acustiche, fin da quando l'uomo moderno ha cominciato ad usare utensili. Solo di recente, tale ambito di ricerca ha ricevuto attenzione considerevole nella letteratura tecnica, dove c'è stato un sforzo concentrato a dare fondamenti fisici e matematici più solidi a questa tecnologia.

L'idea di base rimane che i parametri modali normalmente misurati (frequenze principali, forme modali e fattore di smorzamento) siano funzioni delle proprietà fisiche della struttura (massa, rigidità, smorzamento), perciò, variazioni nelle proprietà fisiche, come riduzioni nella rigidità derivanti dall'insorgere di fessure, dall'allentarsi di un collegamento, provocheranno variazioni apprezzabili delle caratteristiche modali. Poiché cambiamenti nelle caratteristiche modali o in caratteristiche derivate da queste quantità possono essere usati come indicatori di danno, il processo di identificazione vibrazionale del danneggiamento si riconduce nella forma di un problema di identificazione del modello. La maggior parte degli sviluppi moderni nel campo della determinazione del danno tramite i metodi vibrazionali, trae origine dagli studi e dalle applicazioni compiuti negli anni settanta e nei primi anni ottanta sulle piattaforme petrolifere. Buona parte delle tecniche proposte non ebbero però i successi

sperati. Le condizioni ambientali come la crescita marina, che aggiungeva massa significativa alla struttura, i disturbi provocati dai macchinari in moto e i cambiamenti di massa associati alla variazione di livello dei fluidi nei serbatoi provocavano variazioni nelle misurazioni che non erano il risultato di un qualche danneggiamento. Le prove evidenziarono, quindi, problemi di unicità associati alla localizzazione spaziale del danno. Fu trovato solo che misurazioni effettuate al di sopra del livello dell'acqua potevano procurare informazioni riguardanti la frequenza di risonanza. A causa dell'insuccesso l'industria del petrolio abbandonò questa tecnologia a metà degli anni 80.

Sviluppi tecnologici recenti come il miglioramento nelle capacità di calcolo, di memoria e di velocità, l'avanzamento nella tecnologia dei sensori, compresi i sensori non-contact e di monitoraggio a distanza, lo sviluppo del metodo degli elementi finiti, hanno contribuito agli attuali miglioramenti nel campo della ricerca sui metodi globali di identificazione del danno. Fattori supplementari che hanno contribuito a questi miglioramenti sono stati l'implementazione di tecniche sperimentali come il test modale sperimentale (recentemente introdotto nell'ambito dell'ingegneria civile), e lo sviluppo di metodi di identificazione lineari e non lineari.

L'idea che variazioni nelle caratteristiche di vibrazione possano offrire informazioni riguardo al danneggiamento di una struttura è molto intuitiva per cui risulterà spontaneo chiedersi come mai sia passato molto tempo prima che fosse formalizzata e generalmente adottata dalla moderna comunità ingegneristica. La risposta va individuata nel fatto che ci sono molti fattori di disturbo, che fanno dei metodi vibrazionali di identificazione del danno un'applicazione difficile da perfezionare nella pratica.

Primo fattore di disturbo: le caratteristiche modali rappresentano una forma compressa di dati, esse, infatti, sono stimate sperimentalmente attraverso la misura delle storie di risposta temporali (*response-time histories*) misurate in vari punti e con tempi minimi di acquisizione. Attraverso procedure di identificazione di sistema che comunemente vanno sotto il nome di analisi modale sperimentale questa notevole quantità di dati è ridotta fino ad un numero di frequenze di risonanza, modi di vibrare e valori di smorzamento modali. Si opera questa compressione affinché le quantità modali risultino più facili da visualizzare, interpretare fisicamente e trattare in termini di modelli matematici di sistemi vibranti, rispetto alle misurazioni delle "*time-histories*".

Un altro fattore deviante è connesso al fatto che il danneggiamento è tipicamente un fenomeno locale. La risposta locale è individuata dai modi con frequenze più alte, mentre i modi con frequenze più basse tendono a catturare la risposta globale della struttura e sono meno sensibili alle modificazioni locali. Dal punto di vista sperimentale è più difficile eccitare la risposta con frequenza più alta di una struttura, in quanto per produrre delle risposte misurabili è richiesta una quantità di energia, per le alte frequenze, maggiore rispetto a quella richiesta dai modi con frequenze più basse. Questi fattori accoppiati con la perdita di informazioni, che deriva dalla necessaria riduzione delle misurazioni delle "*time-histories*", aggiunge ulteriori difficoltà connesse al processo di identificazione del danneggiamento. Tali difficoltà hanno, per molto tempo, contribuito alla limitazione di questa tecnologia all'ambito della ricerca con limitate applicazioni pratiche nel mondo dell'ingegneria.

Sembra logico chiedersi perché non si esaminino direttamente le "*time-histories*" per ottenere indicazioni sul danno. La risposta è che, nonostante le difficoltà associate con la determinazione del danno sulla base delle caratteristiche modali, risulta ancora più difficile identificare il danneggiamento attraverso l'esame delle "*time-histories*". È molto difficile identificare quale danno sia in corso, sulla base dei cambiamenti delle "*time-histories*" nel modello e mettere in relazione questi cambiamenti con i cambiamenti delle caratteristiche fisiche della struttura. Se le fonti di eccitazione cambiano, e/o cambiano le condizioni

ambientali, questo processo si complica maggiormente. Solo in una situazione dove la risposta del sistema varia, da lineare a non lineare, le “*time-histories*” da sole potrebbero essere sufficienti ad identificare il danno. Ma anche in questi casi, l'identificazione corretta, richiede che l'ubicazione del danno sia nota priori.

Oltre a queste problematiche teoriche, molte e differenti sono anche le difficoltà tecniche e pratiche, che ostacolano il successo dei sistemi vibrazionali di individuazione del danno, e di *health-monitoring*. Fra quelle più importanti ci sono quelle connesse alla scelta del tipo e dell'ubicazione dei sensori, e delle eccitazioni. Un'altra importante problematica è quella legata all'elaborazione dei segnali, basata su metodi come analisi di *Fourier*, l'analisi di tempo-frequenza e l'analisi *wavelet*.

Nonostante le difficoltà sopra discusse, gli sviluppi nel campo della determinazione vibrazionale del danno, durante il corso degli ultimi 20-30 anni, hanno prodotto nuovi metodi per l'analisi di dati dinamici, che forniscono informazioni sul danneggiamento strutturale. Questi metodi stanno producendo applicazioni molto estese.

Uno dei più significativi esempi di queste applicazioni è il sistema di ispezione modale dello *shuttle* Nasa. A causa delle difficoltà di accesso alla superficie esterna determinate dal sistema di protezione termica (scudo termico), è stato sviluppato, ad hoc, un sistema vibrazionale di determinazione del danno. Questo sistema ha consentito di identificare dei danneggiamenti che avrebbero eluso i tradizionali metodi di controllo non distruttivi a causa della inaccessibilità delle componenti danneggiate, e, per questo, è stato adottato come un metodo di ispezione standard per tutte le strutture dello *Space Shuttle Orbiter*.

Come già detto prima, il settore dell'identificazione del danno è molto esteso ed include metodi locali e globali. Questa tesi si occuperà dei metodi globali. Lo scopo di questo studio sarà limitato ai metodi che utilizzano cambiamenti nelle proprietà modali (i.e. frequenze modali, parametri di smorzamento modali e forme modali) e alle applicazioni di questi metodi ad alcune problematiche dell'ingegneria civile.

Alla luce di quanto detto si è ritenuto opportuno, esaminare alcune delle metodologie di identificazione globale del danno strutturale attualmente in uso. La panoramica include sia i metodi basati solamente sui cambiamenti dei dati misurati, che quelli che usano modelli ad elementi finiti (F.E.M.) nella formulazione.

## **1.4. Metodi basati sul cambiamento delle caratteristiche modali.**

In questo contesto le proprietà modali saranno definite come frequenze naturali, coefficiente di smorzamento modale, forme modali, curvatura delle forme modali.

### **1.4.1. Cambiamenti di frequenza.**

E' possibile determinare la presenza di danneggiamento in una struttura attraverso l'analisi delle variazioni nelle sue frequenze naturali. L'osservazione che cambiamenti nelle proprietà strutturali provocano variazioni nelle frequenze di vibrazione, ha dato recentemente un impulso all'utilizzo dei metodi modali di identificazione del danneggiamento, e di *Health Monitoring* delle strutture. Referenze e bibliografie più complete si trovano in [3].

Prima di passare all'analisi di dettaglio dei metodi basati sulle variazioni di frequenza, vedremo quali sono le principali difficoltà e limitazioni connesse al loro utilizzo. I cambiamenti di frequenza possono non essere sufficienti per la localizzazione del danneggiamento, infatti, difetti simili in punti diversi di una struttura possono provocare cambiamenti di frequenza praticamente identici. Nelle strutture simmetriche danneggiamenti localizzati in punti simmetrici danno origine agli stessi cambiamenti di frequenza. Inoltre un

danneggiamento notevole può causare cambiamenti pressoché minimi nelle frequenze naturali, e ciò avviene in particolar modo nelle strutture larghe. Se i valori delle variazioni misurate sono molto piccoli questi possono essere confusi con l'errore di misura. La scarsa riconoscibilità dei cambiamenti di frequenza richiede quindi o misurazioni molto precise o grandi livelli di danno. Le frequenze di risonanza, che, come studi recenti hanno dimostrato, presentano statisticamente minori variazioni provocate da errori casuali rispetto ad altri parametri modali, risultando così affidabili.

Alcune prove condotte su ponti negli U.S.A hanno dimostrato che i cambiamenti di frequenza possono non essere sensibili indicatori di danneggiamento. In particolare si è visto, in alcuni ponti, che riducendo di molto sia la rigidità trasversale, che quella flessionale di una trave al centro dell'impalcato, non si osservava nessuna riduzione significativa nelle frequenze modali.

Attualmente l'uso dei cambiamenti di frequenza per la determinazione del danneggiamento sembra essere più praticabile nelle applicazioni dove tali cambiamenti possono essere misurati con grande precisione ovvero in ambienti controllati, come quelli in cui si effettua un processo di controllo sulla qualità della produzione.

In ogni caso i metodi, per la determinazione del danneggiamento, basati sui cambiamenti di frequenza, vengono classificati in due categorie a seconda che si basino sulla soluzione dei cosiddetti problemi diretti o inversi. Si anticipa fin da adesso che nel seguito di questa tesi verranno implementati dei metodi inversi basati anche sui cambiamenti di frequenza (oltre che delle forme modali) per la localizzazione e quantificazione del danneggiamento, di questa specifica applicazione si tratterà nei capitoli successivi.

#### **1.4.1.1. Problema diretto.**

Il problema diretto [3], che di solito ricade nella categoria del Livello 1 di identificazione del danno, consiste nel calcolare i cambiamenti di frequenza partendo dalla conoscenza di un danno noto. Tipicamente, il danneggiamento è modellato matematicamente, quindi le frequenze, misurate sperimentalmente, sono comparate con le frequenze, previste nel modello, per ottenere il danno.

Una procedura per la determinazione del danneggiamento, attraverso la soluzione del problema diretto, spesso applicata ai materiali compositi è la seguente: si considera un insieme di possibili localizzazioni di danno e si costruisce un termine di errore che mette in relazione i valori di frequenza misurati (per ogni modo considerato) con quelli previsti da un modello basato su una riduzione della rigidità locale nei punti considerati. Per ogni potenziale localizzazione del danneggiamento si considera un certo numero di coppie di modi, e laddove si ha l'errore più basso si può ritenere localizzato il danno. Tale formulazione richiede che venga effettuata una scansione su tutto il modello e non tiene conto di possibili localizzazioni multiple del danneggiamento.

Esistono tuttavia altre applicazioni del problema diretto, basate sul confronto delle frequenze di risonanza, che sono state largamente applicate per la determinazione del danneggiamento nelle piattaforme petrolifere ed altre basate sull'impiego di modelli che simulano i possibili stati di danneggiamento.

#### **1.4.1.2. Problema inverso.**

Il problema inverso [3], che riguarda tipicamente il livello 2, o il livello 3, di identificazione del danneggiamento, consiste nel calcolare i parametri di danno, per esempio lunghezza delle fessure e/o loro ubicazione, a partire dai cambiamenti di frequenza.

Una procedura di localizzazione del danno basata sulla soluzione del problema inverso è la seguente:

1. Identificazione di misure dinamiche che esprimono il danneggiamento a livello globale.
2. Modellazione del danneggiamento a livello locale.
3. Scelta della correlazione tra le misure globali ed i parametri locali di danneggiamento
4. Calcolo dei parametri locali del danneggiamento attraverso la soluzione del problema inverso.

Alcuni metodi, per l'identificazione del danneggiamento, basati sulla soluzione del problema inverso, mettono in relazione i cambiamenti nelle frequenze di risonanza con i cambiamenti nella rigidezza dei vari elementi strutturali utilizzando la relazione di sensitività. La relazione tra:

- $\{z\}$  = vettore<sup>1</sup> dei cambiamenti nei quadrati delle frequenze;
- $\{\alpha\}$  = vettore dei termini di riduzione di rigidezza ;
- $\{\beta\}$  = vettore dei termini di riduzione della massa,

$\{\beta\}$  è data da:

$$\{z\} = [F] \cdot \{\alpha\} - [G] \cdot \{\beta\} \quad (1.1)$$

dove :

- $[F]$  = matrice di sensitività dei cambiamenti di frequenza nei confronti dei cambiamenti di rigidezza
- $[G]$  = matrice di sensitività dei cambiamenti di frequenza rispetto alle masse del sistema.

Le cui espressioni per il modo i-esimo e per l'elemento j-esimo sono le seguenti:

$$F_{ij} = \frac{\{\varphi_d\}_i^T [K_E]_j \{\varphi_d\}_i}{k_i}; \quad G_{ij} = \frac{\{\varphi_d\}_i^T [M_E]_j \{\varphi_d\}_i}{m_i}; \quad (1.2)$$

dove:

- $[K_E]_j$  è la matrice di rigidezza dell'elemento "j" ;
- $[M_E]_j$  è la matrice delle masse dell'elemento "j";

Il danneggiamento è definito come una riduzione della rigidezza di uno degli elementi che compongono la struttura ed è rappresentato dal parametro  $\alpha_j$ . La riduzione di rigidezza può essere localizzata risolvendo il seguente problema inverso:

$$\{\alpha\} = [F]^+ [\{z\} + [G] \cdot \{\beta\}] \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> Nel seguito si rappresenteranno le matrici in caratteri grassetto maiuscolo ed i vettori in caratteri grassetto minuscolo.

dove si sottintende che  $\{z\}$  e  $\{\beta\}$  possano essere misurati o assunti.

Nella relazione precedente:

- $[F]^+$  = matrice di sensitività pseudo-inversa.

L'uso dell'operatore pseudo-inverso assicura che l'equazione sopra scritta sia valida anche quando  $[F]$  non è una matrice quadrata, cosa che succede, per esempio, quando il numero dei modi misurati non è uguale al numero degli elementi strutturali.

Un'analisi simile può essere condotta, considerando gli effetti dei cambiamenti del fattore di smorzamento modale, sulle variazioni osservate delle frequenze di risonanza. A tal proposito si può scrivere la seguente relazione:

$$\{z\} = [F] \cdot \{\alpha\} - [G] \cdot \{\beta\} - [D] \cdot \{\gamma\} \quad (1.4)$$

dove:

- $[D]$ : è la matrice di sensitività dello smorzamento che mette in relazione i cambiamenti nelle frequenze di risonanza con i cambiamenti del fattore di smorzamento dei vari elementi;
- $\{\gamma\}$ : è il vettore delle variazioni del fattore di smorzamento dei vari elementi;

In questo caso i cambiamenti nella rigidezza possono essere ricavati tramite la soluzione del seguente problema inverso:

$$\{\alpha\} = [F]^+ \left[ \{z\} + [G] \cdot \{\beta\} + [D] \cdot \{\gamma\} \right] \quad (1.5)$$

E' stato dimostrato che, i metodi inversi basati sulla sensitività, presentano alcune difficoltà quando il numero dei modi è molto più basso del numero dei parametri di danneggiamento. Tali difficoltà appaiono perché il sistema è in tal caso fortemente indeterminato, per cui non ci sono abbastanza equazioni indipendenti che consentono di trovare tutti i parametri di riduzione della rigidezza. In questo caso la soluzione pseudoinversa risulterà condizionata.

Altri metodi inversi sono basati sulla sensitività dei cambiamenti delle frequenze modali. In queste implementazioni si calcola una funzione di errore per l' i-esimo modo e per il j-esimo elemento strutturale. La funzione di errore è la seguente:

$$e_{ij} = \frac{z_i}{\sum_{m=1}^M z_m} - \frac{F_{ij}}{\sum_{m=1}^M F_{mj}} \quad (1.6)$$

dove si assume che un solo elemento sia danneggiato e dove:

- $\{z\}$  = vettore delle variazioni normalizzate delle frequenze
- $[F]$  = matrice di sensitività dei cambiamenti di frequenza.

Il danno sarà ubicato in corrispondenza dei minimi della funzione di errore. Questo metodo produce risultati più accurati, rispetto a quello visto in precedenza, nel caso in cui il numero degli elementi sia maggiore del numero di modi misurati.

Si può, inoltre, prendere a riferimento il rapporto fra i cambiamenti delle frequenze naturali dei vari modi [4].

Assumendo che la massa non cambi (non è quindi sede del danneggiamento) e che si possano trascurare i termini del secondo ordine, i cambiamenti nell'*i-esima* frequenza naturale, prodotti da un qualche danneggiamento, possono essere messi in relazione con i cambiamenti di rigidità globale nel seguente modo:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\{\varphi_i\}^T [\Delta\mathbf{K}] \{\varphi_i\}}{\{\varphi_i\}^T [\mathbf{M}] \{\varphi_i\}} \quad (1.7)$$

dove:

- $\Delta\omega_i^2$  = cambiamento di frequenza nell'*i-esimo* modo;
- $\Delta\mathbf{K}$  = cambiamento della matrice di rigidità globale;
- $\{\varphi_i\}$  = vettore della forma modale relativa al modo *i* esimo.

Decomponendo la matrice di rigidità globale  $[\mathbf{K}]$  nelle matrici di rigidità dei singoli elementi  $[\mathbf{k}]_n$ , e definendo:

- $\{\varepsilon_n(\varphi)\}$  = vettore di deformazione della forma modale relativa al modo *i-esimo* per il generico elemento, definito a partire dalle forme modali;

il cambiamento di frequenza dell'*i* esimo modo può essere scritto come:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\sum_N \{\varepsilon_n(\varphi)\}^T_i [\Delta\mathbf{k}_n] \{\varepsilon_n\varphi_i\}}{\{\varphi_i\}^T [\mathbf{M}] \{\varphi_i\}} \quad (1.8)$$

Notando che i termini della matrice di rigidità dell'elemento non sono tutti affetti dallo stesso danneggiamento, il cambiamento nelle rigidità dei singoli elementi è espresso come:

$$[\Delta\mathbf{k}_n] = [\alpha_n] \cdot [\mathbf{k}_n] \quad (1.9)$$

dove  $[\alpha_n]$  è la matrice dei cambiamenti riferiti ai componenti della matrice di rigidità dell'elemento. Se il danneggiamento è limitato ad un solo componente della matrice di rigidità dell'elemento, allora il cambiamento nella rigidità di quel componente sarà dato dallo scalare :

$$\alpha_n \text{ tale che } [\Delta\mathbf{k}_n] = \alpha_n \cdot [\mathbf{k}_n]. \quad (1.10)$$

E' da notare che, con ciò non si vuole affermare che il danneggiamento possa essere modellato come una perdita di rigidità uniforme nell'elemento, ma piuttosto che l'influenza dei cambiamenti nelle frequenze naturali è principalmente una funzione di uno solo dei parametri di rigidità dell'elemento. Per questa ragione, a condizione che l'influenza del parametro di rigidità sia adeguatamente scalata, il cambiamento nella frequenza naturale, dovuto al danneggiamento del singolo elemento, può essere adeguatamente espresso dalla seguente equazione:

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\alpha_n \{\varepsilon_N(\varphi)\}_i^T [\Delta k_n] \{\varepsilon_N \varphi_i\}}{\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\}} \quad (1.11)$$

Se si considera il rapporto fra i cambiamenti in due frequenze naturali  $\Delta\omega_i$  e  $\Delta\omega_j$  la dipendenza dal parametro  $\alpha_n$ , che indica la gravità del danno può essere eliminata e gli effetti del danneggiamento si riducono ad una funzione della ubicazione del danno espressa come:

$$\frac{\Delta\omega_i^2}{\Delta\omega_j^2} = \frac{\frac{\{\varepsilon_N(\varphi_i)\}^T [\Delta k_n] \{\varepsilon_N \varphi_i\}}{\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\}}}{\frac{\{\varepsilon_N(\varphi_j)\}^T [\Delta k_n] \{\varepsilon_N \varphi_j\}}{\{\varphi_j\}^T [M] \{\varphi_j\}}} \quad (1.12)$$

Tale equazione mostra l'influenza caratteristica di ciascun elemento sulla frequenza naturale della struttura e mostra che questa influenza può essere calcolata a partire dalle proprietà modali della struttura stessa prima del danneggiamento. A partire da cambiamenti nei rapporti di frequenza misurati attraverso i metodi di correlazione, si risale alla ubicazione del danno. Alcuni metodi inversi [5], presuppongono che il danneggiamento sia limitato a cambiamenti nella rigidità. In particolare, conoscendo le forme modali e le frequenze, della struttura non danneggiata, e le frequenze della struttura dopo il danneggiamento si può scrivere un'espressione basata sulle proprietà di ortogonalità della struttura danneggiata e non danneggiata. L'equazione di sensitività per i cambiamenti di rigidità ottenuta per ciascun modo è:

$$\{\varphi_i + \delta\varphi_i\}^T [\delta K] \{\varphi_i + \delta\varphi_i\} + 2\{\delta\varphi_i\}^T [\delta K] \{\varphi_i\} + \{\delta\varphi_i\}^T [\delta K] \{\delta\varphi_i\} = (\omega_i^d)^2 - (\omega_i^u)^2 \quad (1.13)$$

se si assume che i cambiamenti nelle forme modali siano trascurabili, l'equazione di sensitività si riduce a:

$$\{\varphi_i\}^T [\delta K] \{\varphi_i\} = (\omega_i^d)^2 - (\omega_i^u)^2 \quad (1.14)$$

Questa carrellata di metodi inversi per la determinazione del danneggiamento, basati sui cambiamenti delle frequenze, non è certo esaustiva, perché esistono molti altri metodi basati su questo approccio.

#### 1.4.2. Metodi basati sui cambiamenti delle forme modali.

Le forme modali, in genere, sono maggiormente influenzate, rispetto alle frequenze, dal danneggiamento locale per cui offrono possibilità decisamente migliori di identificare e localizzare il danno. Il procedimento inverso di localizzazione del danno, visto nel paragrafo precedente può essere esteso anche ai metodi basati sulla variazione delle forme modali.

I cambiamenti nelle forme modali e nelle loro derivate rispetto al parametro di spostamento possono essere computati attraverso le seguenti espressioni [6]:

$$\{\varphi^*\}_i = \frac{\{\varphi^d\}_i}{\omega_i^d} - \frac{\{\varphi^u\}_i}{\omega_i^u} \quad (1.15)$$



$$\{\Phi^*\}_i = \frac{\{\Phi^d\}_i}{\omega^d_i} - \frac{\{\Phi^u\}_i}{\omega^u_i} \quad (1.16)$$

Dove al solito si è indicato con:

- $\{\Phi\}_i$  = il vettore dell'*i-esima* forma modale;
- $\{\omega\}_i$  = la frequenza relativa all' *i-esima* forma modale;

e con gli apici “u” e “d” rispettivamente lo stato non danneggiato e quello danneggiato.

I cambiamenti in questi parametri sono simulati attraverso una riduzione della rigidità in ciascun elemento strutturale e, al fine di quantificare e localizzare il danneggiamento, le variazioni previste vengono comparate, secondo vari metodi di correlazione con i cambiamenti misurati.

Alcuni metodi, basati sui cambiamenti delle forme modali [7], operano una discretizzazione della struttura cercando di determinare la riduzione di rigidità in ciascun elemento strutturale. In tal caso si opera uno sviluppo in serie di *Taylor* arrestato al primo ordine dei parametri modali in parametri elementari. Una volta localizzato il danneggiamento, la sua entità è determinata attraverso una formulazione sul cambiamento dell'energia di deformazione provocato dalla presenza della fessura. Anche in questo caso si utilizza il metodo di *Newton-Rapson* per la soluzione del sistema di equazioni che fornisce i parametri del danneggiamento.

E' stato inoltre proposto in letteratura la determinazione di un indice di danno globale [8], calcolato a partire dai rapporti pesati, fra le frequenze naturali della struttura danneggiata e non. I pesi usati esprimono la sensitività relativa di ciascun modo al danneggiamento. Quando si manifesta il danneggiamento, viene calcolato un indice di integrità locale per determinare l'area dove è localizzato il danno. Tale indice viene calcolato a partire da quello globale attraverso ulteriori pesi che tengono conto del quadrato del rapporto fra l'ampiezza dei modi della struttura danneggiata e non danneggiata.

Nei vari metodi di determinazione del danneggiamento, basati sui cambiamenti delle forme modali, il livello di correlazione fra i modi della struttura, danneggiata e non, è di solito determinato attraverso i seguenti criteri: M.A.C. (*Modal Assurance Criterion*), Co.M.A.C. (*Coordinate Modal Assurance Criterion*), *Node Line* M.A.C. ed altri basati sul M.A.C., dei quali si parlerà più approfonditamente nei prossimi capitoli, e che saranno applicati a vari casi di studio nei paragrafi di questa tesi relative alla sperimentazione.

### 1.4.3. Metodi basati sui cambiamenti della curvatura e dell'energia di deformazione delle forme modali.

Un'alternativa all'utilizzo delle forme modali per ottenere informazioni spaziali circa i cambiamenti nella risposta vibrazionale, è quella di usare forme modali derivate, come la curvatura. Per le travi, le piastre, i gusci, si può scrivere la seguente relazione diretta tra curvatura e tensioni di curvatura:

$$\varepsilon = \frac{y}{R} = \chi \cdot y \quad (1.17)$$

dove:

$\varepsilon$  = deformazione;  $R$  = raggio di curvatura;  $\chi = \frac{1}{R}$  = curvatura;

E' stato dimostrato [9] che i cambiamenti nella curvatura delle forme modali possono essere buoni indicatori di danneggiamento per i modelli FEM di strutture composte da travi. I valori della curvatura possono essere calcolati, a partire dai parametri di spostamento delle forme modali, attraverso il seguente criterio approssimato:

$$\varphi''_{q,i} = \frac{\varphi_{q,i-1} - 2 \cdot \varphi_{q,i} + \varphi_{q,i+1}}{h^2} \quad (1.18)$$

con riferimento al modo *i-esimo* relativo al parametro di spostamento *q-esimo* e dove *h* è la lunghezza di ognuno dei due elementi compresi fra i parametri (*q-1*) e (*q+1*).

Altre applicazioni [10] si basano sul decremento dell'energia di deformazione tra due gradi di libertà (DOF) della struttura. Tale decremento è definito attraverso la curvatura della forma modale misurata. Per le strutture composte da travi con comportamento elastico lineare, si definisce il parametro

$\beta_i$  = indice di danneggiamento dell'*i-esimo* elemento definito come:

$$\beta_i = \frac{\left( \sum_{j=1}^n \mu_{ji}^d \right)}{\left( \sum_{j=1}^n \mu_{ji}^u \right)} \quad (1.19)$$

dove i termini  $\mu_{ji}$  assumono il seguente significato:

- $\mu_{ji}$  = aliquota di energia di deformazione misurata sperimentalmente per il modo *j* tra gli estremi *a* e *b* dell'elemento *i*.

Per il modello di trave alla Eulero-Bernoulli le aliquote di energia di deformazione possono essere espresse nel modo seguente:

$$\mu_{ji}^u = \frac{\int_a^b \{ [\varphi^u(x)] \cdot j'' \}^2 dx + \int_b^1 \{ [\varphi^u(x)] \cdot j'' \}^2 dx}{\int_0^1 \{ [\varphi^u(x)] \cdot j'' \}^2 dx} \quad (1.20)$$

$$\mu_{ji}^d = \frac{\int_a^b \{ [\varphi^d(x)] \cdot j'' \}^2 dx + \int_b^1 \{ [\varphi^d(x)] \cdot j'' \}^2 dx}{\int_0^1 \{ [\varphi^d(x)] \cdot j'' \}^2 dx} \quad (1.21)$$

L'elemento con il valore di  $\beta_i$  più grande sarà quello probabilmente danneggiato. Nelle probabili zone danneggiate, la severità del danno sarà valutata attraverso il parametro:

- $\alpha_i$  = cambiamento nella rigidezza flessionale definito come:

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^n g_{ij}^u}{\sum_{j=1}^n g_{ij}^d - 1} \quad (1.22)$$

dove:

$$g_{ji}^u = \frac{\int_a^b \{[\varphi^u(x)] \cdot j''\}^2 dx}{\int_0^1 \{[\varphi^u(x)] \cdot j''\}^2 dx} \quad (1.23)$$

$$g_{ji}^d = \frac{\int_a^b \{[\varphi^d(x)] \cdot j''\}^2 dx}{\int_0^1 \{[\varphi^d(x)] \cdot j''\}^2 dx} \quad (1.24)$$

I valori più grandi  $\alpha_i$  saranno attinti nei punti ove il danneggiamento sarà più severo.

E' stato inoltre introdotto un parametro basato sui cambiamenti nella deformazione delle forme modali e nella loro frequenza [11]. Tale parametro può essere formulato nel seguente modo:

$$\{\Delta\varphi^*\}_i = \{\varphi^d\}_i \frac{(\omega^u_i)}{(\omega^d_i)} - \{\varphi^u\}_i \quad (1.25)$$

dove  $\{\varphi\}_i$  rappresenta la deformazione dell'*i-esimo* modo. Questo parametro è più sensibile al danneggiamento strutturale rispetto a tutti gli parametri equivalenti computati a partire dagli spostamenti.

#### 1.4.4. Metodi basati sulla flessibilità misurata dinamicamente.

Un'altra classe di metodi di identificazione del danno usa la misurazione dinamica della matrice di flessibilità per stimare i cambiamenti nel comportamento statico della struttura. Dato che la matrice di flessibilità è definita come l'inverso della matrice di rigidità, essa mette in relazione le forze staticamente applicate con il relativo spostamento strutturale, per cui si può scrivere:

$$\{u\} = [G] \{F\} \quad (1.26)$$

dove:

- $[G]$  = matrice di flessibilità.

Ogni colonna della matrice di flessibilità rappresenta il modello di spostamento della struttura, associato ad una forza unitaria, applicata secondo il corrispondente parametro di spostamento. La matrice di flessibilità misurata può essere valutata attraverso misure normalizzate rispetto alla massa, delle forme modali e delle frequenze:

$$[G] \cong [\Phi] [\Lambda]^{-1} [\Phi]^T \quad (1.27)$$

ma la sua scrittura attraverso questo metodo è approssimata a causa del fatto che generalmente vengono misurati solo i primi modi della struttura (tipicamente di quelli a frequenze più basse). La scrittura della matrice di flessibilità completa richiederebbe la misurazione di tutte le forme di modali e delle relative frequenze.

Tipicamente, il danneggiamento, è determinato comparando la matrice di flessibilità, determinata usando i modi della struttura danneggiata, con la matrice di flessibilità scritta usando i modi della struttura non danneggiata o la matrice di flessibilità di un modello F.E.M. A causa della relazione di proporzionalità inversa con il quadrato delle frequenze modali, la matrice di flessibilità misurata è molto sensibile al cambiamento nei modi della struttura aventi frequenze più basse. I metodi basati sulla flessibilità misurata dinamicamente si distinguono in:

- a) Metodi basati sulla comparazione dei cambiamenti di flessibilità;
- b) Metodo del controllo dell'unità;
- c) Metodi basati sull'errore nella matrice di rigidezza;
- d) Metodi basati sulla flessibilità residuale;
- e) Metodi basati sui cambiamenti misurati nella matrice di rigidezza.

#### 1.4.4.1. Comparazione dei cambiamenti di flessibilità.

La flessibilità misurata può essere utilizzata come un "indice di condizione" per indicare l'integrità relativa di alcune strutture ed in particolare dei ponti [12]. Applicando questo approccio possono essere determinate informazioni sul danneggiamento della struttura comparando la flessibilità prevista con le deformate statiche indotte attraverso prove di carico. In alcune applicazioni, misurata la flessibilità della struttura ed esaminato il profilo della deformata trasversale, è stato osservato che le anomalie nel profilo deformato potevano essere buoni indicatori del danneggiamento. Le indicazioni delle misure di flessibilità, che già danno informazioni di massima, possono essere usate come input in alcuni metodi per la determinazione del danneggiamento più accurati.

#### 1.4.4.2. Metodo del controllo dell'unità.

Il metodo di controllo dell'unità è basato sulla relazione pseudoinversa fra la matrice di flessibilità misurata dinamicamente e la matrice di rigidezza della struttura [14-15]. E' definita una matrice di errore:

$$[E] = [G^d][K^u] - [I] \quad (1.28)$$

dove al solito:

- $[G^d]$  = matrice di flessibilità della struttura danneggiata;
- $[K^u]$  = matrice di rigidezza della struttura non danneggiata;
- $[I]$  = matrice identità;

che misura il grado in corrispondenza del quale è soddisfatta questa relazione pseudoinversa. La relazione utilizzata è pseudo inversa piuttosto che inversa quando la matrice di flessibilità misurata dinamicamente non ha un rango sufficiente. Il metodo di controllo di unità è stato proposto per localizzare errori di modellazione. Il controllo avviene sulla matrice  $[E]$ , i cui termini più grandi sono indice di errore e quindi danno indicazioni sulla eventuale presenza di danneggiamento.

### 1.4.4.3. Metodo della matrice di errore di rigidità.

Il metodo della matrice di errore di rigidità è basato sul calcolo di una matrice di errore che è una funzione della matrice di flessibilità e della matrice di rigidità della struttura non danneggiata. La matrice di errore di rigidità è definita come [16]:

$$[E] = [E^u] [\Delta G] [K^u]^T \quad (1.29)$$

dove

$$[\Delta G] = [G^d] - [G^u] \quad (1.30)$$

Per l'identificazione del danno, la matrice di rigidità offre maggiori informazioni rispetto alla matrice delle masse, per cui generalmente si usa più estesamente nel metodo che usa la matrice di errore. L'esito del metodo dipende dal tipo di matrice di riduzione utilizzata e dal numero di modi impiegati per assemblare la matrice di flessibilità. Si è visto che la "Guyan-reduction", e le tecniche di riduzione indiretta, e danno risultati accettabili, a differenza delle tecniche di riduzione per eliminazione [17].

### 1.4.4.4. Effetti della flessibilità residuale.

La matrice della flessibilità residuale  $[G_r]$  rappresenta il contributo alla matrice di flessibilità dei modi fuori dall'ampiezza di banda misurati. La matrice di flessibilità esatta può essere riferita ai modi misurati e alla flessibilità residua nel seguente modo [18-19]:

$$[G] \cong [\Phi] [\Lambda]^{-1} [\Phi]^T + [G_r] \quad (1.31)$$

Esistono delle tecniche per valutare la parte non misurata della matrice di flessibilità queste non aggiungono informazioni nuove alle flessibilità residua ma ne completano la reciprocità cosa che può essere utilizzata nel calcolo della matrice di flessibilità misurata. Si dimostra che comprendendo la flessibilità residuale nel calcolo della matrice di flessibilità misurata si produce una più stima accurata della matrice di flessibilità stessa [20-21].

### 1.4.4.5. Cambiamenti nella matrice di rigidità misurata.

Una variante all'utilizzo della flessibilità misurata dinamicamente è l'uso della matrice di rigidità misurata dinamicamente e definita come la matrice pseudo inversa della matrice di flessibilità. Similmente, si potrebbero impiegare anche la matrice delle masse e dello smorzamento misurate dinamicamente. Si può pervenire alla localizzazione del danneggiamento attraverso una comparazione fra questi parametri matriciali [22]. E' possibile infatti utilizzare le matrici delle masse e delle rigidità misurate per risolvere il problema di "connettività inversa" che valuta i cambiamenti di impedenza tra due parametri cinematici per valutare il livello di danneggiamento.

## 1.5. Metodi basati sull'aggiornamento delle matrici.

Un'altra classe di metodi di identificazione del danneggiamento è basata sull'analisi delle modifiche nelle matrici, delle masse, delle rigidità, e dei coefficienti di smorzamento del modello strutturale, per riprodurre il più fedelmente possibile la risposta, statica o dinamica, misurata a partire dai dati sperimentali. Questi metodi risolvono, attraverso le matrici

aggiornate, (variazioni del modello attuale che producono le matrici aggiornate), il modello nominale, e costituiscono un problema di ottimizzazione condizionata, basato sulle equazioni del moto. La correlazione tra le matrici aggiornate, e le rispettive matrici originali, fornisce delle indicazioni sul danneggiamento che possono essere utilizzate per quantificarne l'estensione e la localizzazione. Questi metodi usano generalmente un set di equazioni comuni di base, e i passi nell'algoritmo risolutivo sono i seguenti:

1. Minimizzazione della funzione obiettivo;
2. Posizione delle condizioni del problema;
3. Schema numerico utilizzato per l'implementazione dell'ottimizzazione.

### 1.5.1. Funzione obiettivo e condizioni.

Ci sono molte e differenti equazioni, basate su modelli fisici, che sono usate sia come funzioni obiettivo che come restrizioni nel problema di aggiornamento delle matrici, procedendo sull'algoritmo di aggiornamento. Le equazioni del moto della struttura sono la base per il "modal force error equation".

Sia dato un modello FEM ad  $n$  gradi di libertà e si abbia la seguente equazione del moto:

$$[M^u] \{\ddot{x}\} + [C^u] \{\dot{x}\} + [K^u] \{x\} = \{f(t)\} \quad (1.32)$$

l'equazione agli autovalori per l'equazione precedente è:

$$(\lambda_i^u)^2 [M^u] + (\lambda_i^u) [C^u] + [K^u] \{\phi^u\}_i = \{0\} \quad (1.33)$$

dove  $(\lambda_i^u)$  e  $\{\phi^u\}_i$  sono rispettivamente gli autovalori e gli autovettori del modo  $i$ -esimo misurati, nella struttura non danneggiata. Si assume che questa equazione sia soddisfatta per tutti i modi misurati. Si considerino ora gli autovalori ed autovettori, corrispondenti nella struttura danneggiata,  $(\lambda_i^d)$  e  $\{\phi^d\}_i$  [23].

Sostituendo queste quantità nella equazione agli autovalori scritta sopra si avrà

$$(\lambda_i^d)^2 [M^u] + (\lambda_i^d) [C^u] + [K^u] \{\phi^d\}_i = \{E\}_i \quad (1.34)$$

Dove  $\{E\}_i$  è appunto il "modal force error" (errore di forza modale o forza residuale) per l' $i$ -esimo modo della struttura danneggiata. Questo vettore rappresenta la forzante armonica che dovrebbe essere applicata alla struttura non danneggiata, contraddistinta dalle matrici:

$[M^u]$ ;  $[C^u]$ ;  $[K^u]$  alla frequenza  $(\lambda_i^d)$ , affinché la struttura possa rispondere la forma modale  $\{\phi^d\}_i$ . Ci sono molti metodi che sono usati per calcolare le matrici del modello analitico della struttura danneggiata:  $[M^d]$ ;  $[C^d]$ ;  $[K^d]$  che soddisfano la risultante l'equazione del moto:

$$(\lambda_i^d)^2 [M^d] + (\lambda_i^d) [C^d] + [K^d] \{\phi^d\}_i = 0 \quad (1.35)$$

dove le matrici del modello danneggiato sono definite come le matrici del modello non danneggiato a meno di una perturbazione. Avremo quindi:

$$[M^d] = [M^u] - [\Delta M]; \quad (1.36)$$

$$[C^d] = [C^u] - [\Delta C]; \quad (1.37)$$

$$[K^d] = [K^u] - [\Delta K]; \quad (1.38)$$

e sostituendo queste espressioni nell'equazione del moto si ha:

$$(\lambda_i^d)^2 [M^u - \Delta M] + (\lambda_i^d) [C^u - \Delta C] + [K^u - \Delta K] \cdot \{\varphi^d\}_i = 0 \quad (1.39)$$

ed eliminando i termini che rappresentano la perturbazione dal primo membro avremo:

$$(\lambda_i^d)^2 [M^u] + (\lambda_i^d) [C^u] + [K^u] \{\varphi^d\}_i = (\lambda_i^d)^2 [\Delta M] + (\lambda_i^d) [\Delta C] + [\Delta K] \{\varphi^d\}_i \quad (1.40)$$

Al primo membro compaiono quantità note, prima definite come “*modal force error*”. Si può quindi riscrivere l'equazione in funzione dei termini di variazione delle matrici:

$$(\lambda_i^d)^2 [\Delta M] + (\lambda_i^d) [\Delta C] + [\Delta K] \{\varphi^d\}_i = \{E\}_i \quad (1.41)$$

L'errore di forza modale è usato sia come funzione obiettivo che come condizione, come è possibile capire dai metodi illustrati nel seguito. Il mantenimento della proprietà di simmetria della matrice è usata come una condizione. Tale condizione può essere scritta per tutte le matrici essendo queste simmetriche. Si avrà dunque:

$$[\Delta M] = [\Delta M]^T \quad (1.42)$$

$$[\Delta C] = [\Delta C]^T \quad (1.43)$$

$$[\Delta K] = [\Delta K]^T \quad (1.44)$$

Allo stesso modo, il mantenimento delle proprietà di dispersione della matrice (i termini zero/non-zero che caratterizzano la matrice), si usa come condizione. Tale condizione può essere scritta come

$$\text{sparse}([M^u]) = \text{sparse}([M^d]) \quad (1.45)$$

$$\text{sparse}([C^u]) = \text{sparse}([C^d]) \quad (1.46)$$

$$\text{sparse}([K^u]) = \text{sparse}([K^d]) \quad (1.47)$$

Anche la conservazione delle proprietà di positività è usata come una costrizione. Quindi per ogni matrice si può scrivere:

$$\{x\}^t [\Delta M] \{x\} \geq 0 \quad (1.48)$$

$$\{x\}^t [\Delta C] \{x\} \geq 0 \quad (1.49)$$

$$\{x\}^t [\Delta K] \{x\} \geq 0 \quad (1.50)$$

dove il termine  $\{x\}$  è un vettore arbitrario.

### 1.5.2. Metodi ottimali per l'aggiornamento delle matrici.

I metodi che usano una forma chiusa, ovvero rappresentano una soluzione diretta per il calcolo delle matrici del modello danneggiato, o delle matrici di perturbazione, sono comunemente detti metodi ottimali di aggiornamento della matrice. Il problema, generalmente formulato come un moltiplicatore di Lagrange, o come un problema di ottimizzazione basato su delle restrizioni, può essere scritto come [24, 25]:

$$\min_{\Delta M, \Delta C, \Delta K} \{ J(\Delta M, \Delta C, \Delta K) + \lambda R(\Delta M, \Delta C, \Delta K) \} \quad (1.51)$$

dove  $J$  è la funzione obiettivo,  $R$  la funzione di condizione, e  $\lambda$  è il moltiplicatore di Lagrange o costante di penalità [26, 27].

Una formulazione comune del problema dell'aggiornamento ottimale, consiste nel considerarlo un problema di ottimizzazione, della norma di Frobenius, dei parametri globali delle matrici di perturbazione, ove si consideri nullo il termine che rappresenta l'errore di forza modale, e si sfruttino le proprietà di simmetria delle matrici [28, 29].

Inoltre, è stata presentata una tecnica di aggiornamento ottimale che formula un sistema iperdeterminato per un insieme di parametri di danneggiamento che rappresentano la riduzione della rigidezza assiale in ciascun elemento. Per l' $i$ -esimo elemento la rigidezza assiale può essere scritta come [30]:

$$(1 - d_i) \cdot (k_a)_i \quad (1.52)$$

dove  $(k_a)_i$  è la rigidezza assiale di un elemento della struttura non danneggiata. Il valore di  $d_i$  rappresenta la riduzione di rigidezza nello stesso elemento.

Un'altra tecnica [31] ottimale di aggiornamento della matrice, applicata specialmente alle strutture reticolari, si basa sul calcolo dei parametri di masse e rigidezza naturali degli elementi attraverso la misurazione di frequenze e forme modali. Questo metodo minimizza la norma dell'errore di forza modale (come definito sopra). In tal modo, se sono disponibili sufficienti informazioni sulle caratteristiche modali, le proprietà degli elementi possono essere calcolate utilizzando le frequenze e le forme modali misurate e due matrici che rappresentano l'orientazione degli elementi nello spazio e la connessione degli elementi reticolari.

Un altro tipo di approccio al problema dell'aggiornamento ottimale della matrice [32] comporta la minimizzazione del rango della matrice delle perturbazioni, piuttosto che la norma di tale matrice. Questo approccio è motivato dall'osservazione che il danneggiamento tenderà ad essere concentrato in alcuni elementi strutturali, piuttosto che distribuito in un grande numero di questi. Quindi il rango della matrice delle perturbazioni tenderà ad essere piccolo. La soluzione per la matrice delle perturbazioni è basata sulla teoria che esiste una unica soluzione di rango minimo per il sistema indeterminato. Si abbia:



$$[A] \{X\} = \{Y\} \quad \text{con} \quad [A]^T = [A] \quad (1.53)$$

allora

$$[A] = \{Y\}[H]\{Y\}^T \quad \text{con} \quad [H] = (\{Y\}^T \{X\})^{-1} \quad (1.54)$$

Vi è inoltre la teoria M.R.P.T. (*Minimum Rank Perturbation Theory*) [32] che è costituita da un algoritmo di base che definisce l'errore di forza modale  $\{E\}_i$  ed il vettore di danneggiamento  $\{d\}_i$  per l'*i-esimo* modo, così l'equazione di perturbazione dell'errore può essere scritta come:

$$\{d\}_i = [Z^d]_i \{\varphi^d\}_i \quad (1.55)$$

dove

$$[Z^d]_i = (\lambda_i^d)^2 [\Delta M] + (\lambda_i^d) [\Delta C] + [\Delta K] \quad (1.56)$$

Osservando che il *j-esimo* elemento di  $\{d\}_i$  sarà 0 quando la *j-esima* riga della matrice della perturbazione sarà 0, un termine diverso da 0 in  $\{d\}_i$  sarà interpretato come una indicazione di localizzazione del danneggiamento. I cambiamenti nelle matrici delle perturbazioni non sono l'unica fonte della presenza di termini diversi da 0 in  $\{d\}_i$ , come si può notare riscrivendo l'equazione precedente per il *q-esimo* parametro di spostamento nel modo seguente:

$$d_{iq} = z_{iq}^d \varphi_{iq}^d = |z_{iq}^d| |\varphi_{iq}^d| \cos \theta_{iq} \quad (1.57)$$

La deviazione dall'angolo di 90° si dimostra un migliore indicatore della localizzazione del danneggiamento, rispetto agli ingressi diversi da 0 in  $\{d\}_i$ , particolarmente quando la norma di  $[Z^d]_i$  ha differente ordine di grandezza. La soluzione del problema è :

$$[\Delta K] = \{d\}_i [H] \{d\}_i^T \quad (1.58)$$

dove

$$[H] = (\{d\}_i^T \{\varphi^d\}_i)^{-1} \quad (1.59)$$

La matrice di errore risultante ha lo stesso rango del numero di modi usati per calcolare l'errore di forza modale.

### 1.5.3. Metodi di aggiornamento basati sulla sensitività.

Un'altra classe di metodi per l'aggiornamento delle matrici, si basa sulla soluzione dello sviluppo in serie di *Taylor* del primo ordine che minimizza una funzione di errore della matrice di perturbazione. La teoria di base consiste nella determinazione di un vettore di parametri modificati [33]:

$$\{p\}^{(n+1)} = \{p\}^{(n)} + \{\delta p\}^{(n+1)} \quad (1.60)$$

dove il vettore dei parametri di perturbazione  $\{\delta p\}^{(n+1)}$  è calcolato attraverso il metodo di *Newton - Rapson* che minimizza la seguente funzione di errore:

$$J(\{p\}^{(n)} + \{\delta p\}^{(n+1)}) \cong J(\{p\}^{(n)}) + \left[ \frac{\partial j}{\partial p}(\{p\}^{(n)}) \right] \cdot \{\delta p\}^{(n+1)} = 0 \quad (1.61)$$

dove  $J(\{p\})$  è la funzione di errore che deve essere minimizzata. Tipicamente la funzione di errore è proprio l'errore di forza modale definito nella equazione 1.34. La principale differenza fra i sistemi di aggiornamento basati sulla sensitività, consiste nel metodo usato per valutare la matrice di sensitività. Fondamentalmente possono essere utilizzati nella differenziazione, sia dei valori analitici che sperimentali. Per la sensitività sperimentale le relazioni di ortogonalità:

$$[\varphi]^T [M] [\varphi] = [I] \quad (1.62)$$

$$[\varphi]^T [K] [\varphi] = [\Lambda] \quad (1.63)$$

possono essere utilizzate per calcolare le derivate dei seguenti parametri modali:  $\frac{\partial \omega^2}{\partial p}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial p}$ .

I metodi basati sulla sensitività analitica, richiedono la valutazione delle derivate  $\frac{\partial M}{\partial p}$  e  $\frac{\partial K}{\partial p}$ , che risultano meno sensibili alle perturbazioni nei dati [34].

Una metodologia mista basata sull'aggiornamento delle matrici di sensitività, prende in conto le variazioni di massa e rigidezza del sistema, le variazioni delle frequenze, delle forme modali e della posizione del centro di massa. Il metodo usa la seguente matrice di sensitività ibrida, con elementi sia sperimentali che analitici [35]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega^2}{\partial K} & \frac{\partial \omega^2}{\partial M} \\ \frac{\partial \phi}{\partial K} & \frac{\partial \phi}{\partial M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial p} \\ \frac{\partial M}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

dove la sensitività dei parametri modali è calcolata a partire dai dati sperimentali, e la matrice di sensitività è calcolata a partire dal modello analitico.

## 1.6. Metodi basati sulle Reti Neurali.

Il calcolo basato sulle reti neurali artificiali (A.N.N.S.: *Artificial Neural Network Sistem*) [37] è un sistema di determinazione del danno strutturale reso promettente dalla sua forte capacità di riconoscimento, classificazione del modello, interpretazione dei dati, capacità di approssimazione di funzioni. A.N.N.S. esibisce anche tolleranza considerevole ai "rumori di fondo", e capacità di elaborare dati in parte incompleti o difettosi. Questa caratteristica è particolarmente utile per la determinazione del danno nelle grandi strutture di ingegneria civile dove i dati misurati in situ sono generalmente incompleti e affetti da "rumori".

Nell'approccio A.N.N.S., i dati richiesti per modellare la relazione inversa sono ottenuti semplicemente come soluzione del problema diretto. Scambiando i ruoli di input e output in una fase di addestramento della rete, viene creata una mappatura funzionale della relazione inversa, che può essere utilizzata per scopi diagnostici. Una volta addestrata la rete, le sue capacità di auto-organizzazione e di apprendimento, consentono di eliminare esplicitamente

l'utilizzo della relazione di causa-effetto tra il tipo di danno ed il modello di risposta, e di identificare, per ogni scenario successivo (analizzato dalla rete), simultaneamente e in un unico passo (sistema *one-stage*) l'ubicazione del danno e la sua gravità [38].

Per quanto riguarda l'accuratezza nell'identificazione dell'estensione del danno, lo schema *one-stage* richiede che la rete sia addestrata con differenti livelli di danneggiamento per ogni possibile ubicazione dello stesso. Riconoscendo la migliore abilità di A.N.N.S. nell'interpolare più che nell'estrapolare i dati, si capisce che l'insieme degli esempi di addestramento, deve comprendere anche i danneggiamenti più grandi che possono occorrere. Di conseguenza, quando si ha a che fare con strutture di una certa grandezza, con molte ubicazioni possibili di danno, la costruzione della rete richiede l'esame di un numero esorbitante di dati e un processo di addestramento molto lungo. Tutto ciò va a scapito dell'efficienza di addestramento e dell'accuratezza della rete neurale.

E' proprio per questo motivo che la ricerca in materia è orientata allo sviluppo di sistemi che evitino processi di addestramento molto lunghi. A tal proposito si cerca di risolvere la questione della localizzazione e quantificazione del danneggiamento, anche attraverso l'uso di più reti, ognuna delle quali addestrata alla soluzione uno specifico sottoproblema (procedimenti gerarchico o sistema *pluri-stages* o *pluri-steps*).

La rete neurale più comunemente usata è la M.L.P (*Multi Layer Perception*) addestrata secondo la *backpropagation* detta comunemente "*backprop neural network*". La "*backprop neural network*" è un sistema di funzioni a cascata dove l'output di un passo, moltiplicato per alcuni pesi, è usato come input per il passo successivo. Una volta scelta un'architettura per la rete, la funzione attuale rappresentata dalla rete neurale, è codificata attraverso pesi e deviazioni. L'algoritmo di addestramento della rete, *backpropagation*, rappresenta un modo di adattare e correggere i pesi e le deviazioni, minimizzando l'errore tra l'output previsto e quello misurato. Generalmente i pesi, e le quantità da rettificare sono più dei dati sperimentali a disposizione, per cui l'insieme dei dati viene percorso più volte dall'algoritmo di addestramento, finché non si soddisfa un criterio di errore tra i dati e la rete neurale. Ciascuna iterazione generata dall'errore viene detta epoca.



## CAPITOLO 2

### MODELLI MATEMATICI NELLA DINAMICA STRUTTURALE

*Nel capitolo sono descritte le caratteristiche matematiche dei modelli, utilizzati per rappresentare il comportamento dinamico di una struttura. Vengono proposti sia i modelli impiegati nel caso di un sistema S.D.O.F (sistema ad un solo grado di libertà), che nel caso M.D.O.F. (sistema a più gradi di libertà).*

## 2.1. Descrizioni della dinamica di una struttura.

Nel caso generale il modello dinamico di una struttura è dato da un sistema a più gradi di libertà. Questo modello rappresenta comunque una approssimazione della situazione effettiva che è quella di una struttura continua e quindi caratterizzata da un numero infinito di gradi di libertà; per un sistema a più gradi di libertà si ha [39-41]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{x}$  è un vettore, ad  $n$  componenti, che comprende i gradi di libertà scelti per la rappresentazione della struttura (dal punto di vista sperimentale possono essere i punti di misura),  $\mathbf{f}(t)$  è il vettore delle forze agenti sulla struttura,  $\mathbf{M}$  è la matrice,  $n \cdot n$ , di massa ed analogamente  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sono le matrici, sempre  $n \cdot n$ , di smorzamento viscoso e di rigidezza. Il modello definito dalla (2.1) è il modello spaziale costituito dalle matrici di massa, smorzamento e di rigidezza, ed è normalmente costruito tramite un procedimento numerico (ad es. con l'impiego del metodo agli elementi finiti) e non è quindi generalmente accessibile tramite l'approccio sperimentale. Dallo studio della vibrazione libera, che si può ottenere numericamente determinando gli autovalori ed autovettori del sistema (2.1) (con  $\mathbf{f}(t)$  nullo), o dalla sperimentazione, si possono ottenere  $n$  pulsazioni naturali,  $\omega_{n_i}$ ,  $n$  coefficienti di smorzamento  $\xi_{n_i}$ , ed  $n$  deformate modali,  $\varphi^{(n)}$ ; queste matrici di autovettori che costituiscono invece il modello modale. Si osserva che da un punto di vista sperimentale esistono forti limitazioni sulla possibilità di ottenere un numero elevato di modi fondamentali di una struttura ed anche sulla possibilità di condurre la misura su di un numero molto elevato di punti.

Dalla determinazione delle funzioni di risposta in frequenza, utili alla risoluzione di problemi di identificazione [42-48], della struttura si determina il modello relativo; questo viene direttamente ricavato dall'approccio sperimentale oramai classico nell'analisi modale e può comunque essere ricavato anche dall'approccio numerico.

In sintesi quindi si possono definire tre diversi modelli per lo studio della dinamica di una struttura:

- spaziale;
- modale;
- delle funzioni di risposta in frequenza;

Essi costituiscono naturalmente dei modi diversi, ma equivalenti, per rappresentare il comportamento dinamico di una struttura e possono essere determinati in via numerica o sperimentale. Anche il confronto tra i risultati numerici e quelli ottenuti dalla sperimentazione può essere condotto sulla base di questi modelli.

## 2.2. Modello ad un solo grado di libertà – SDOF.

Il modello ad un solo grado di libertà (*Single Degree Of Freedom*) non può rappresentare il comportamento di un elemento strutturale, ma le sue caratteristiche sono importanti poiché da esse si sviluppano quelle del modello a più gradi di libertà.

Si consideri il sistema caratterizzato da una massa,  $m$ , ed una molla di rigidezza  $k$  (*modello non smorzato*). L'equazione del moto nel caso di vibrazione libera è:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2)$$

Se si considera l'equazione caratteristica della precedente, ovvero si cercano soluzioni del tipo:

$$x(t) = x \cdot e^{st} \quad (2.3)$$

si ha:

$$(s^2 m + k) = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega_n \quad (2.4)$$

e si ha allora una risposta libera del tipo  $x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = x_0 \cos(\omega_n t) + \dot{x}_0 / \omega_n \sin(\omega_n t)$ . Quindi il “modello modale” consiste in questo caso in un modo di vibrazione la cui pulsazione naturale è data da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.5)$$

e la deformata modale è data da una costante .

Nel caso di vibrazione forzata si considera una funzione di ingresso  $f(t)$  di tipo armonico con pulsazione  $\omega$  scritta<sup>1</sup>:

$$f(t) = f^* \cdot e^{j\omega t} \quad (2.6)$$

Se si pone pure per la soluzione:

$$x(t) = x^* \cdot e^{j\omega t} \quad (2.7)$$

si ha:

$$(-\omega^2 m + k) \cdot x^* \cdot e^{j\omega t} = f^* \cdot e^{j\omega t} \quad (2.8)$$

da cui la funzione di risposta in frequenza:

$$\frac{x^*}{f^*} = \frac{1}{k - \omega^2 m} = H(\omega) \quad (2.9)$$

che può interpretarsi come il rapporto tra spostamento e forza di ingresso di tipo armonico e rappresenta quindi una *flessibilità dinamica* indicata anche come *recettanza* o *ammettenza*; si nota che la funzione di risposta  $H(\omega)$  non dipende in realtà dal tipo di funzione di ingresso e costituisce quindi una caratteristica intrinseca del sistema. Si ottiene quindi il modulo della  $H(\omega)$ :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2}} \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup> Si osserva che se pure la (2.6) è un'espressione in campo complesso, poiché  $\text{Re}(f^* \cdot e^{j\omega t}) = f^* \cdot \cos(\omega t)$  ed il sistema in oggetto è lineare, se si considerasse rispettivamente la parte reale o la parte immaginaria dell'uscita (2.7) si otterrebbe rispettivamente la risposta (in campo reale) a regime permanente all'ingresso  $f^* \cdot \cos(\omega t)$  e all'ingresso  $f^* \cdot \sin(\omega t)$ .

Si considera ora anche la presenza di un *termine smorzante* di tipo viscoso con coefficiente di smorzamento  $c$ .

L'equazione del moto, per la vibrazione libera è :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.11)$$

si pone per la ricerca degli esponenti caratteristici:

$$x(t) = x^* \cdot e^{st} \quad (2.12)$$

e si ha:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.13)$$

da cui

$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm i\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.14)$$

avendo posto

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}; \quad \zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}}; \quad (2.15)$$

si ottiene quindi una soluzione del tipo:

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} = c_1 e^{-\sigma t} e^{j\omega'_n t} + c_2 e^{s_2 t} e^{-j\omega'_n t} \quad (2.16)$$

cioè un modo di vibrazione con una frequenza naturale complessa caratterizzata da una parte immaginaria :

$$\omega'_n = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.17)$$

e da una parte reale

$$\sigma = \omega_n \zeta \quad (2.18)$$

Si osserva come, per effetto del termine smorzante, si ha una pulsazione  $\omega'_n$  che è diversa da quella  $\omega_n$ , del sistema non smorzato anche se, per elementi strutturali civili a più gradi di libertà la differenza in termini numerici è molto limitata in quanto i valori dei coefficienti dimensionali di smorzamento sono molto limitati, tipicamente dell'ordine di qualche unità percentuale.

Nel caso di vibrazione forzata di tipo armonico con pulsazione  $\omega$  si considera ancora:

$$f(t) = f^* \cdot e^{j\omega t} \quad (2.19)$$

e si ha:

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k) \cdot x^* \cdot e^{j\omega t} = f^* \cdot e^{j\omega t} \quad (2.20)$$

Si ottiene così la funzione di risposta in frequenza, flessibilità dinamica, dalla :



$$H(\omega) = \frac{x^*}{f^*} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} \quad (2.21)$$

Si tratta in tal caso di una grandezza complessa, il cui modulo è dato da:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (2.22)$$

e la fase da:

$$\tan H(\omega) = \frac{-\omega c}{(k - \omega^2 m)} \quad (2.23)$$

Un esame del comportamento effettivo delle strutture suggerisce anche un modello diverso per rappresentare le caratteristiche di smorzamento; in particolare la dipendenza dalla frequenza delle caratteristiche strutturali può essere rappresentata con uno smorzamento che varia con la frequenza secondo la:

$$c = \frac{h}{\omega} \quad (2.24)$$

Si tratta del modello di *smorzamento strutturale o di isteresi* che corrisponde all'equazione (scritta in una notazione mista tempo-frequenza):

$$m\ddot{x} + (k + jh)x = f(t) \quad (2.25)$$

Nel caso di risposta forzata si ha la funzione di risposta in frequenza

$$H(\omega) = \frac{x^*}{f^*} = \frac{1}{k - \omega^2 m + jh} \quad (2.26)$$

o anche:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + jh^*} \quad (2.27)$$

dove  $h^* = \frac{h}{k}$  indica il fattore di perdita strutturale. Si ha quindi per il modulo di  $H(\omega)$ :

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + h^2}} \quad (2.28)$$

Le motivazioni legate all'introduzione di questo tipo di smorzamento sono legate al fatto che se si considera l'energia dissipata da una forza di un componente viscoelastico  $f_d = c\dot{x}$  in un ciclo di moto armonico con  $x(t) = \sin(\omega t)$  di periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , si ha:

$$\varepsilon_d = \int_0^T f_d \dot{x} dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\omega^2 \cos^2(\omega t) dt = \pi c\omega \quad (2.29)$$

ovvero si ottiene un'energia dissipata linearmente dipendente dalla frequenza del moto, fatto questo che non ha un'evidenza sperimentale. La caratterizzazione della forza dissipatrice di tipo isteretico come precedentemente introdotta è evidentemente in grado di superare questo errore di modellazione.

### 2.2.1. Funzioni di risposta in frequenza per il modello SDOF.

Si è definita una funzione di risposta in frequenza  $H(\omega)$  come rapporto tra lo spostamento,  $x^*$ , e la forza,  $f^*$ , ma naturalmente è anche possibile scegliere per descrivere il sistema una funzione di risposta in frequenza diversa: ad esempio, con riferimento alla velocità  $v(t) = \dot{x}(t) = v^* e^{j\omega t}$  come grandezza in uscita, si può definire una funzione di risposta in frequenza, indicata con *mobilità*, con la:

$$Y(\omega) = \frac{v^*}{f^*} \quad (2.30)$$

Se si considerano allora le relazioni:

$$x(t) = x^* e^{j\omega t} \rightarrow v(t) = \dot{x}(t) = v^* e^{j\omega t} = j\omega x^* e^{j\omega t} \quad (2.31)$$

si ha allora:

$$Y(\omega) = j\omega \frac{x^*}{f^*} = j\omega H(\omega) \quad (2.32)$$

con le relazioni per il modulo:

$$|Y(\omega)| = \omega |H(\omega)| \quad (2.33)$$

e per la fase:

$$\vartheta_y = \vartheta_h + 90^\circ \quad (2.34)$$

Si può anche considerare in uscita l'accelerazione  $a(t) = \ddot{x}(t) = a^* e^{j\omega t}$  e si definisce così la *FRF* indicata come *acceleranza*:

$$A(\omega) = \frac{a^*}{f^*} = -\omega^2 H(\omega) \quad (2.35)$$

Come si è detto le *FRF* sono funzioni complesse e quindi non se ne può avere una rappresentazione diretta su di un piano cartesiano, i tipi classici di rappresentazione sono:

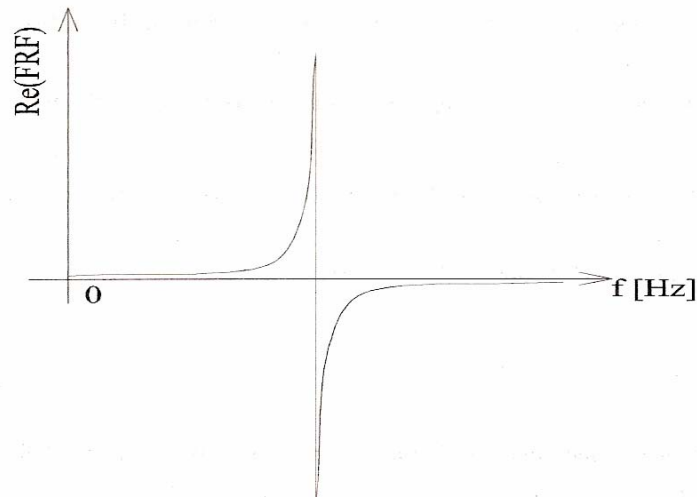
- Modulo (espresso normalmente in decibel, dB) in funzione della pulsazione (in decadi logaritmiche) e fase in funzione della pulsazione (in decadi logaritmiche), così con il *diagramma di Bode*.

- Parte reale in funzione della frequenza (o pulsazione) e parte immaginaria in funzione della frequenza (o pulsazione); con riferimento al caso di smorzamento viscoso si ha:

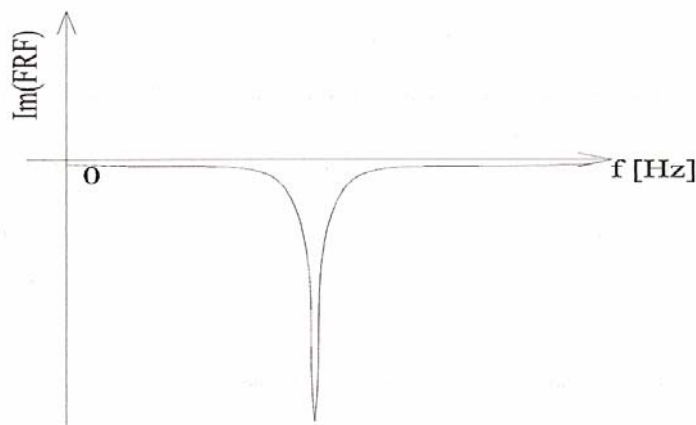
$$\operatorname{Re}[H(\omega)] = \frac{k - \omega^2 m}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}[H(\omega)] = \frac{-\omega c}{(k - \omega^2 m)^2 + \omega^2 c^2} \quad (2.36)$$

con gli andamenti riportati in figg. 2.1 e 2.2.

- Parte reale e parte immaginaria su di un diagramma polare, con la frequenza come parametro, definito *diagramma di Argand* o di *Nyquist*



**Figura 2.1.** Parte reale di una FRF di un sistema ad un grado di libertà



**Figura 2.2.** Parte immaginaria di una FRF di un sistema ad un grado di libertà

Il diagramma di *Argand* è molto usato per la sua particolare efficacia nel presentare in dettaglio la zona della *FRF* nell'intorno della frequenza di risonanza, mentre i punti che sono lontani dalla risonanza sono spostati intorno all'origine del diagramma. In particolare se si considera nel caso della *FRF* relativa alla velocità  $Y(\omega)$  il modulo in funzione della frequenza si vede che, per smorzamento piccolo, si ha un diagramma simmetrico rispetto alla frequenza di risonanza. I diagrammi di *Argand*, sempre relativi alla *FRF* di velocità  $Y(\omega)$  nel caso di

smorzamento viscoso, o alla *FRF* di spostamento  $H(\omega)$  nel caso di smorzamento strutturale risultano delle circonferenze: questa caratteristica è molto utile per il procedimento di “*curve fitting*” che può essere utilizzato per la valutazione dei parametri modali.

### 2.3. Modello a più gradi di libertà – MDOF.

Si passa ora all'estensione delle considerazioni viste nel caso di un modello ad un solo grado di libertà, S.D.O.F. (*Single Degree of Freedom*), al caso, di maggiore interesse pratico, del modello a più gradi di libertà, M.D.O.F. (*Multi Degree of Freedom*).

#### 2.3.1. Caso non smorzato: vibrazione libera, modi e frequenze proprie di vibrazione.

Per il modello a più gradi di libertà le equazioni del moto, nel caso non smorzato, sono:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.37)$$

dove  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  sono le matrici di massa e di rigidezza del sistema di dimensioni  $n \times n$  se  $n$  sono i gradi di libertà che si considerano nella (2.37) ed  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$  sono i vettori degli spostamenti e delle forze applicate sempre ad  $n$  componenti: la matrice di massa è una matrice definita positiva e quella di rigidezza semidefinita positiva in virtù delle ben note proprietà delle energie omonime associabili a tali matrici: in particolare si osserva che per un generico vettore  $\mathbf{u}$  non nullo si ha che:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} > 0 \quad \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} > 0 \quad (2.38)$$

E' possibile associare a tali matrici il problema di autovalori

$$(\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M})\phi^{(n)} = 0 \quad (2.39)$$

in cui, come di consueto, gli autovalori sono calcolati risolvendo l'equazione caratteristica

$$\det(\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.40)$$

e gli autovettori dai corrispondenti problemi omogenei dati dalla (2.39). Se ora si scrive la (2.39) rispetto all'autovalore  $n$ -esimo ed rispetto a quello  $m$ -esimo e si premoltiplicano le relazioni ottenute rispettivamente per  $\phi^{(m)T}$  e  $\phi^{(n)T}$  si ha:

$$\phi^{(m)T} \mathbf{K} \phi^{(n)} = \lambda_n \phi^{(m)T} \mathbf{M} \phi^{(n)} \quad (2.41)$$

$$\phi^{(n)T} \mathbf{K} \phi^{(m)} = \lambda_m \phi^{(n)T} \mathbf{M} \phi^{(m)} \quad (2.42)$$

le quali, sottratte tra loro ed in virtù della simmetria delle due matrici danno:

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m) \phi^{(n)T} \mathbf{M} \phi^{(m)} \quad (2.43)$$

e cioè, se gli autovalori  $\lambda_n$  e  $\lambda_m$  sono distinti allora deve essere:  $\phi^{(n)T} M \phi^{(m)} = 0$ , altrimenti quando sono uguali, il prodotto  $\phi^{(m)T} M \phi^{(m)}$  per la *positività* della matrice darà luogo ad un numero positivo che si indicherà con  $m_n$ . Dunque

$$\phi^{(n)T} M \phi^{(m)} = \delta_{mn} m_n \quad \text{ovvero: } \Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & m_n & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

dove la  $\Phi$  è la matrice avente per colonne gli autovettori  $\phi^{(n)}$ .  
Se ora invece che la (2.39) si considera la equivalente

$$\left( \frac{1}{\lambda_n} K - M \right) \phi^{(n)} = 0 \quad (2.45)$$

e si reitera il ragionamento precedente si ottiene la relazione di ortogonalità

$$\phi^{(n)T} K \phi^{(m)} = \delta_{mn} k_n \quad \text{ovvero: } \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & k_n & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

in cui le rigidezze generalizzate  $K_n$  non potranno che essere positive (o nulle) in virtù della semi-positività di  $\mathbf{K}$ .

Si osserva inoltre, dalla (2.39) premoltiplicata  $\phi^{(n)T}$  che:

$$\lambda_n = \frac{\phi^{(n)T} K \phi^{(n)}}{\phi^{(n)T} M \phi^{(n)}} = \omega_n^2 > 0 \quad (2.47)$$

e cioè che l'autovalore  $\lambda$  è positivo e sarà quindi indicato nel seguito con  $\omega_n^2$ .

Si mostra ora come i vettori  $\phi^{(n)}$  e le costanti  $\omega_n$  appena definite assumano il significato di *modi e frequenze (angolari) proprie di vibrazione*. Se così fosse, per definizione fisica di frequenza e modo proprio di vibrazione, il problema libero

$$M \ddot{x}(t) + K x(t) = 0 \quad (2.48)$$

$$x(0) = \phi^{(m)} \quad \text{e} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.49)$$

dovrebbe fornire la soluzione:

$$x(t) = \phi^{(m)} \cos(\omega_n t) \quad (2.50)$$

Se si utilizza infatti il cambiamento di coordinate  $x = \Phi q$  e si premoltiplica la (2.48) per  $\Phi^T$ , si ottengono una serie di equazioni differenziali ordinarie tutte disaccoppiate la cui ennesima si presenta come

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n = 0 \quad (2.51)$$

la cui soluzione è:

$$q_n(t) = q_{0n} \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{q}_{0n}}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (2.52)$$

Essendo  $x(0) = \Phi q_0$  e  $\dot{x}(0) = \Phi \dot{q}_0$ . Dunque ricostruendo la soluzione originaria ed in base alle condizioni iniziali del problema (2.49) si ha proprio la (2.50). Pertanto, nel seguito si identificheranno le  $\omega_n$  e i  $\phi^{(n)}$  direttamente come frequenze (angolari) e modi propri della struttura in esame (sebbene a rigore essi rappresenterebbero, nell'ambito della discretizzazione agli elementi finiti della struttura a cui si fa riferimento, una discretizzazione dell'originario concetto fisico). La soluzione completa del problema è contenuta nelle matrici degli autovalori, indicata con  $\Omega^2$  che è una matrice diagonale che contiene sulla diagonale principale le pulsazioni naturali al quadrato, e degli autovettori, indicata con  $\Phi$  che contiene, posizionate per colonne, le deformate modali  $\phi^{(n)}$ .

Con procedimenti numerici basati sulla risoluzione della (2.39) è possibile passare dalle matrici spaziali, di massa  $M$  e di rigidezza  $K$ , alle matrici che rappresentano il modello modale, indicate con  $\Omega^2$  e  $\Phi$ . La matrice delle pulsazioni naturali,  $\Omega^2$ , è univocamente determinata mentre la matrice delle deformate modali,  $\Phi$ , non lo è, in quanto le singole deformate  $\phi^{(n)}$  sono definite a meno di una costante come autosoluzioni del problema omogeneo (2.39).

Si possono utilizzare diversi procedimenti di *normalizzazione* delle deformate modali, il più significativo è quello di normalizzazione rispetto alla massa; in questo caso gli autovettori, indicati nella matrice  $\Phi^*$ , sono definiti dalle relazioni:

$$\Phi^{*T} M \Phi^* = I \quad (2.53)$$

$$\Phi^{*T} K \Phi^* = \Omega^2 \quad (2.54)$$

dove  $I$  ed  $\Omega^2$  indicano rispettivamente la matrice diagonale unitaria e la matrice diagonale delle pulsazioni naturali; la relazione esistente tra il generico modo  $k$  normalizzato ed il corrispondente modo non normalizzato è data dalla:

$$\phi^{*(k)} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \phi^{(k)} \quad (2.55)$$

### 2.3.2. Caso non smorzato: risposta forzata.

Si consideri ora, sempre per il modello non smorzato, il caso forzato, in cui si ha un vettore di forze di ingresso caratterizzato da componenti tutte alla stessa pulsazione  $\omega$ , ma con diversa ampiezza e fase definito dalla:

$$f(t) = f^* e^{j\omega t} \quad (2.56)$$

In questo caso si pone la soluzione del sistema 2.37 nella forma:

$$x(t) = x^* e^{j\omega t} \quad (2.57)$$

dove  $\mathbf{f}^*$  e  $\mathbf{x}^*$  sono vettori ad  $n$  componenti di ampiezze complesse. L'equazione del moto 2.37 diviene:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}^* e^{j\omega t} = \mathbf{f}^* e^{j\omega t} \quad (2.58)$$

si può così definire una *matrice di flessibilità dinamica*, che costituisce un modello di risposta nel campo delle funzioni di risposta in frequenza, *FRF*, con la:

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (2.59)$$

L'elemento generico della matrice di flessibilità dinamica può essere definito dalla:

$$H_{ijk}(\omega) = \frac{x_j^*}{f_k^*} \quad (2.60)$$

in cui però  $f_m^* = 0$  per  $m$  diverso da  $k$ . Come risulta evidente dalla (2.59) è possibile calcolare i valori della matrice di flessibilità dinamica,  $\mathbf{H}(\omega)$ , per ogni pulsazione  $\omega$ , se sono note le matrici,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$ , del modello spaziale. Questo procedimento richiede l'inversione di una matrice, in genere di grandi dimensioni, per ogni valore di  $\omega$  ciò presenta diverse limitazioni in quanto diviene computazionalmente costoso se il numero dei gradi di libertà è molto alto. Inoltre si deve calcolare tutta la matrice  $\mathbf{H}(\omega)$  in blocco e non si ottengono informazioni sulle proprietà delle singole *FRF*.

Si può impiegare, e risulta generalmente conveniente, un approccio diverso che consente di calcolare la matrice di flessibilità dinamica  $\mathbf{H}(\omega)$  in funzione del modello modale invece di quello spaziale. Dalla (2.59) si ha:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \quad (2.61)$$

pre-moltiplicando per la matrice trasposta degli autovettori, normalizzati rispetto alla massa, e post-moltiplicando per la matrice degli autovettori normalizzati si ha:

$$\Phi^{*T} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi^* = \Phi^{*T} \mathbf{H}(\omega)^{-1} \Phi^* \quad (2.62)$$

Utilizzando le proprietà di ortogonalità 2.53 e 2.54 la 2.62 diviene:

$$\begin{bmatrix} \dots & & \\ & \omega_{n_k}^2 - \omega^2 & \\ & & \dots \end{bmatrix} = \Phi^{*T} \mathbf{H}(\omega)^{-1} \Phi^* \quad (2.63)$$

da cui invertendo, pre-moltiplicando per la matrice  $\Phi^*$  e post-moltiplicando per la matrice  $\Phi^{*T}$  si ottiene:

$$H(\omega) = \Phi^* \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ & \frac{1}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \Phi^{*T} \quad (2.64)$$

Dalla (2.64) si vede che la matrice di flessibilità dinamica è una matrice simmetrica, infatti risulta dal prodotto di una matrice,  $\Phi^*$ , per una matrice diagonale,  $(\Omega^2 - \omega^2 \mathbf{I})^{-1}$  per la trasposta della matrice iniziale,  $\Phi^{*T}$ , come d'altra parte la matrice  $H(\omega)$  deve essere simmetrica in base al principio di reciprocità (teorema di Betti):

$$H_{jk}(\omega) = \frac{x_j^*}{f_k^*} = H_{kj}(\omega) = \frac{x_k^*}{f_j^*} \quad (2.65)$$

La (2.64) permette di calcolare il singolo elemento della matrice di flessibilità dinamica dalla:

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_j^{(r)} \phi_k^{(r)}}{m_r (\omega_{nr}^2 - \omega^2)} \quad (2.66)$$

dove il simbolo  $\phi_k^{(r)}$  indica la componente  $k$ -esima del modo  $r$ -esimo; il singolo elemento della matrice di flessibilità si può quindi anche scrivere sinteticamente come:

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{A_{jk}^{(r)}}{\omega_{nr}^2 - \omega^2} \quad (2.67)$$

dove con  $A_{jk}^{(r)}$  si indica la costante modale del modo  $r$ -esimo relativa ai gradi di libertà  $j$  e  $k$ .

### 2.3.3. Smorzamento proporzionale.

Si fa ora riferimento ad un caso particolare di smorzamento che presenta il vantaggio di una grande semplicità di analisi: il punto essenziale è che con questo modello di smorzamento i modi fondamentali da considerare sono praticamente uguali a quelli del modello non smorzato, infatti le deformate modali sono identiche e le frequenze naturali sono numericamente molto vicine. Quindi è possibile ricavare le proprietà modali di una struttura rappresentata con uno smorzamento di tipo proporzionale a partire dallo studio del modello non smorzato.

L'equazione generale del moto in presenza di smorzamento risulta:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x} + Kx(t) = f(t) \quad (2.68)$$

Se si pone la matrice di smorzamento come proporzionale rispetto alla matrice di rigidità si ha:

$$C = \beta K \quad (2.69)$$



se si pre-moltiplica la matrice di smorzamento per la matrice, trasposta, degli autovettori del sistema non smorzato e si moltiplica per la matrice degli autovettori del sistema non smorzato si ottiene:

$$\Phi^T C \Phi = \beta \Phi^T K \Phi = \beta \begin{bmatrix} \dots & & \\ & k_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & c_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

dove gli elementi  $c_k$  sono gli smorzamenti dei singoli modi del modello; il fatto che la matrice che si ottiene con questa operazione sia una matrice diagonale dipende dalla condizione di proporzionalità, (2.69), ed indica che le deformate modali del sistema non smorzato possono essere impiegate per il sistema smorzato, con smorzamento proporzionale. Se si considera il sistema (2.68) nel caso di risposta libera, premoltiplicando per la matrice trasposta degli autovettori del sistema non smorzato si ha:

$$\Phi^T M \ddot{x} + \Phi^T C \dot{x} + \Phi^T K x = 0 \quad (2.71)$$

Sostituendo poi alle coordinate fisiche le *coordinate modali*,  $q$  con la posizione:

$$x = \Phi q \quad (2.72)$$

si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dots & & \\ & m_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} \dots & & \\ & c_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} \dots & & \\ & k_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} q = 0 \quad (2.73)$$

in cui  $c_k = \beta k_k$ , e che scritta per il  $k$ -esimo modo diviene:

$$m_k \ddot{q}_k + c_k \dot{q}_k + k_k q_k = 0 \quad (2.74)$$

si tratta dell'equazione di un sistema ad un solo grado di libertà che ha una frequenza naturale complessa con una parte oscillatoria data dalla:

$$\omega'_{nk} = \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (2.75)$$

dove  $\omega_{nk}$  è la pulsazione naturale non smorzata del  $k$ -esimo modo, data dalla  $\omega_{nk}^2 = k_k / m_k$  e  $\zeta_k$  è il coefficiente dimensionale di smorzamento del modo  $\zeta_k$ , dato dalla  $\zeta_k = c_k / 2\sqrt{k_k m_k}$  e con un decadimento esponenziale dato dalla:

$$\sigma_k = \zeta_k \omega_{nk} \quad (2.76)$$

In analogia a quanto visto per il caso in assenza di smorzamento, nel caso di sistema forzato si ottiene per la matrice di flessibilità, o matrice delle funzioni di risposta in frequenza, l'espressione:

$$H(\omega) = [K + j\omega C - \omega^2 M]^{-1} \quad (2.77)$$

e quindi il generico termine della matrice di flessibilità risulta:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_j^{(r)} \phi_k^{(r)}}{k_r - m_r \omega^2 + j \omega c_r} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_j^{(r)*} \phi_k^{(r)*}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j \omega \omega_r \zeta_r} \quad (2.78)$$

con  $\zeta_k = c_r / 2\sqrt{k_r m_r}$ , che è del tutto simile alla analoga espressione (2.66), ottenuta per il caso non smorzato, sebbene in questo caso il termine  $H_{jk}(\omega)$  risulti complesso.

Si è considerato un caso particolare di matrice di smorzamento proporzionale alla matrice di rigidità, ma in realtà una situazione equivalente si ha se la matrice di smorzamento è proporzionale rispetto alla matrice di massa del sistema, secondo la:

$$C = \alpha M \quad (2.79)$$

Più in generale nel caso di smorzamento proporzionale si considera che la matrice di smorzamento possa essere proporzionale rispetto ad una combinazione lineare delle matrici di massa e di rigidità con la posizione:

$$C = \beta K + \alpha M \quad (2.80)$$

da cui:

$$c_k = \beta k_k + \alpha m_k \quad (2.81)$$

ed il sistema smorzato avrà ancora autovalori del tipo (2.75) ed autovettori che sono uguali a quelli del sistema non smorzato corrispondente. Questo modello di smorzamento proporzionale, oltre al vantaggio della semplicità di trattazione, risulta di interesse pratico in quanto i meccanismi fisici di smorzamento sono effettivamente collegati con le caratteristiche di rigidità della struttura, per quanto riguarda lo smorzamento interno del materiale, e con le caratteristiche di massa, per quanto riguarda lo smorzamento di attrito.

Delle considerazioni del tutto analoghe si possono sviluppare per un modello a più gradi di libertà, ma con smorzamento di isteresi, l'equazione generale del moto risulta in tal caso scritta (nella forma mista tempo-frequenza):

$$M\ddot{x} + (K + jH)x = f \quad (2.82)$$

Se si pone la matrice di smorzamento di isteresi  $H$  come proporzionale rispetto alle matrici di massa e di rigidità:

$$H = \beta K + \alpha M \quad (2.83)$$

anche in questo caso gli autovettori del sistema smorzato risultano uguali a quelli del sistema non smorzato e gli autovalori, complessi, risultano con quadrato pari a:

$$s_k^2 = -\omega_{n_k}^2 (1 + j\eta_k) \quad (2.84)$$

Dove  $\omega_{nk}^2 = \frac{k_k}{m_k}$  e per i fattori di perdita  $\eta_k = \beta + \frac{\alpha}{\omega_{nk}^2}$  ; infine, il generico termine della matrice di flessibilità dinamica risulta:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{\sum_{r=1}^n \phi_j^{(r)} \phi_k^{(r)}}{k_r - \omega^2 m_r + j \eta_r k_r} \quad (2.85)$$

### 2.3.4. Smorzamento di isteresi: caso generale.

Il modello che considera lo smorzamento come proporzionale alla distribuzione di massa e di rigidità è un caso particolare, anche se molto importante dal punto di vista pratico; bisogna quindi considerare anche il caso più generale di smorzamento per poter comprendere meglio i dati sperimentali che si ottengono dalle prove sulle strutture che, naturalmente, nel loro comportamento non seguono necessariamente per lo smorzamento il modello di proporzionalità.

Se si fa riferimento al caso generale di smorzamento di isteresi:

$$M\ddot{x} + Kx + jHx = f \quad (2.86)$$

con **H** matrice simmetrica. Nel caso di risposta libera ( $f = 0$ ) in cui la soluzione viene posta del tipo

$$x(t) = \phi e^{\mu t} \quad (2.87)$$

si ha un problema di autosoluzioni rappresentato da due matrici  $\mu^2$  e  $\Phi$  che contengono gli autovalori  $\mu_n$  e gli autovettori  $\phi^{(n)}$ . In questo caso le due matrici sono complesse e le deformate modali sono rappresentate in forma complessa; il *k-esimo* autovalore può scriversi nella forma:

$$\mu_k^2 = -\omega_{nk}^2 (1 + j\eta_k) \quad (2.88)$$

dove  $\omega_{nk}$  è prossima alla pulsazione naturale del sistema non smorzato ed  $\eta_k$  indica il fattore di perdita per il *k-esimo* modo; si osserva che la  $\mu_k$  che appare nella (2.88) è diversa dalla pulsazione naturale del modo non smorzato, anche se numericamente i valori sono molto vicini.

Anche le deformate modali  $\phi^{(k)}$  sono complesse, questo significa che l'ampiezza di ogni grado di libertà del sistema viene caratterizzata con modulo e fase, mentre nel caso non smorzato o con smorzamento proporzionale, si ha sempre una fase che può assumere soltanto i valori di  $0$  o di  $180$  gradi. Nel caso più generale di smorzamento, e quindi con smorzamento non proporzionale, si hanno dei modi complessi in cui la fase varia da un grado di libertà all'altro e può assumere qualsiasi valore. Nel caso di modi complessi si hanno ancora le proprietà di ortogonalità viste nel caso di modi reali:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & m_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\Phi^T (\mathbf{K} + j\mathbf{H}) \Phi = \begin{bmatrix} \dots & & \\ & k_k & \\ & & \dots \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

la massa e la rigidezza generalizzate,  $m_k$ ,  $k_k$  sono naturalmente complesse e dipendono dal tipo di normalizzazione che si è scelta per le deformate modali, mentre gli autovalori (v. (2.88)) sono correlati con le  $m_k$  e  $k_k$  dalla

$$-\mu_k^2 = \frac{k_k}{m_k} \quad (2.91)$$

Nel caso di risposta forzata, per eccitazione  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^* e^{j\omega t}$  e risposta  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* e^{j\omega t}$  l'equazione del moto risulta:

$$(\mathbf{K} + j\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}^* e^{j\omega t} = \mathbf{f}^* e^{j\omega t} \quad (2.92)$$

Dalla 2.92 si ottiene, per la matrice di flessibilità dinamica, l'espressione:

$$\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{K} + j\mathbf{M} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (2.93)$$

Procedendo in analogia a quanto visto nel par. 2.3.2, si può esprimere la matrice di flessibilità dinamica in termini delle matrici del modello modale, invece che delle matrici del modello spaziale, come nella (2.93), e si ottiene:

$$\mathbf{H}(\omega) = \Phi \begin{bmatrix} \dots & & \\ & \frac{1}{-\mu_k^2 - \omega^2} & \\ & & \dots \end{bmatrix} \Phi^T \quad (2.94)$$

e per il singolo termine della matrice si ha per il caso generale di masse generalizzate non unitarie:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_j^{(r)} \phi_k^{(r)}}{m_r (\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j\eta_r \omega_{nr}^2)} \quad (2.95)$$

Nella (2.95), a differenza di quanto visto precedentemente, sia il numeratore che il denominatore risultano complessi, perché sono complessi gli autovettori ed è appunto questa la differenza essenziale rispetto al caso in cui si consideri lo smorzamento come proporzionale alle matrici di massa o di rigidezza.

### 2.3.5. Smorzamento viscoso: caso generale.

L'equazione del moto per un sistema a più gradi di libertà con smorzamento viscoso nel caso di vibrazione libera risulta:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (2.96)$$

con  $C$  matrice simmetrica e positiva. Se si ricerca la soluzione sotto la forma:

$$x(t) = \phi \cdot e^{st} \quad (2.97)$$

la (2.95) diviene:

$$(s^2 M + sC + K)\phi = 0 \quad (2.98)$$

La soluzione della (2.98) è costituita dalla soluzione di un problema di autovalori nella forma

$$(s_k^2 M + s_k C + K)\phi^{(k)} = 0 \quad (2.99)$$

con  $k=1,2,\dots,n$  che è diverso rispetto a quello considerato nel caso di smorzamento di isteresi. Infatti come mostrato dalla (2.99), vi sono  $2n$  autovalori, se  $n$  indica il numero dei gradi di libertà nel sistema (2.96), invece degli  $N$  autovalori considerati nel caso di isteresi; ma questi  $2n$  autovalori sono a coppie complessi coniugati: naturalmente ad ogni autovalore corrisponde un autovettore ed anche gli autovettori sono complessi coniugati a coppie.

La soluzione del sistema (2.98) è quindi data da  $2n$  autovalori e da  $2n$  autovettori complessi coniugati indicati con  $s_k, s_k^*$  e  $\phi^{(k)}, \phi^{(k*)}$ , rispettivamente. Gli autovalori si possono scrivere:

$$s_k = \omega_{n_k} \left( -\zeta_k + j\sqrt{1-\zeta_k^2} \right) \quad (2.100)$$

dove  $\omega_{n_k}$  indica la pulsazione naturale e  $\zeta_{n_k}$  lo smorzamento del modo  $k$ -esimo.

Anche in questo caso vi sono delle proprietà di ortogonalità, ma esse sono diverse da quelle classiche; autovalori ed autovettori soddisfano la (2.99), se si pre-moltiplica questa relazione per  $\phi^{(q)T}$  si ottiene:

$$\phi^{(q)T} (s_k^2 M + s_k C + K) \phi^{(k)} = 0 \quad (2.101)$$

La 2.99 può essere scritta per il  $q$ -esimo modo:

$$(s_q^2 M + s_q C + K) \phi^{(q)} = 0 \quad (2.102)$$

Se si calcola la trasposta della (2.101), ricordando che le matrici di massa,  $M$ , di rigidità,  $K$ , di smorzamento,  $C$ , sono delle matrici simmetriche si ottiene:

$$\phi^{(q)T} (s_q^2 M + s_q C + K) = 0 \quad (2.103)$$

Se si post-moltiplica questa espressione per  $\phi^{(k)}$  e si sottrae la relazione così ottenuta dalla (2.101) si ottiene:

$$\left(s_k^2 - s_q^2\right) \phi^{(q)T} M \phi^{(k)} + \left(s_k - s_q\right) \phi^{(q)T} C \phi^{(k)} = 0 \quad (2.104)$$

Nel caso in cui le due radici  $s_k$  e  $s_q$  siano diverse si ottiene da questa espressione una prima condizione di ortogonalità:

$$\left(s_k + s_q\right) \phi^{(q)T} M \phi^{(k)} + \phi^{(q)T} C \phi^{(k)} = 0 \quad (2.105)$$

Una seconda condizione di ortogonalità si può ottenere dalle (2.99) e (2.102) moltiplicando la prima per  $s_q \phi^{(q)T}$ , la seconda per  $s_k \phi^{(k)T}$  e sottraendo si ottiene:

$$s_k s_q \phi^{(q)T} M \phi^{(k)} + \phi^{(q)T} K \phi^{(k)} = 0 \quad (2.106)$$

Le condizioni (2.105) e (2.106) sono le condizioni di ortogonalità nel caso generale di smorzamento viscoso, quando non si fa uso dell'ipotesi di smorzamento proporzionale; come si vede si tratta di condizioni meno semplici di quelle classiche.

Se si considera ora il caso in cui i modi  $k$  e  $q$  costituiscono una coppia di modi complessi coniugati si ha:

$$s_k = \omega_{nk} \left(-\zeta_k + j\sqrt{1-\zeta_k^2}\right) s_q = \omega_{nk} \left(-\zeta_k - j\sqrt{1-\zeta_k^2}\right) \quad (2.107)$$

ed i corrispondenti autovettori risultano complessi coniugati,  $\phi^{(q)} = \phi^{(k)*}$ ; considerando queste posizioni nella prima condizione di ortogonalità, (2.105), si ottiene:

$$-2\omega_{nk} \zeta_k \phi^{(k)*T} M \phi^{(k)} + \phi^{(k)*T} C \phi^{(k)} = 0 \quad (2.108)$$

da cui si ottiene la prima condizione di ortogonalità:

$$2\omega_{nk} \zeta_k = \frac{\phi^{(k)*T} C \phi^{(k)}}{\phi^{(k)*T} M \phi^{(k)}} = \frac{c_k}{m_k} \quad (2.109)$$

Procedendo in maniera analoga nella seconda condizione di ortogonalità, si ottiene:

$$\omega_{nk}^2 \phi^{(k)*T} M \phi^{(k)} - \phi^{(k)*T} K \phi^{(k)} = 0 \quad (2.110)$$

da cui la seconda condizione di ortogonalità:

$$\omega_{nk}^2 = \frac{\phi^{(k)*T} K \phi^{(k)}}{\phi^{(k)*T} M \phi^{(k)}} \frac{k_k}{m_k} \quad (2.111)$$

Le  $m_k, k_k, c_k$ , che appaiono nelle condizioni (2.109), (2.111) vengono ancora indicate come massa, rigidezza e smorzamento modali anche se il loro significato è diverso da quello corrispondente al caso di smorzamento proporzionale.

## CAPITOLO 3

### **DINAMICA STRUTTURALE SPERIMENTALE ACQUISIZIONE DELLE FRF**

*Nel capitolo si introduce l'Analisi Dinamica Sperimentale, viene descritta la sua fase propriamente sperimentale. Si riportano i criteri di acquisizione dei parametri modali (frequenze, forme modali, coefficienti di smorzamento) a partire dai dati sperimentali acquisiti (FRF: funzioni di risposta in frequenza) e si evidenziano alcune problematiche legate a tale acquisizione.*

### 3.1. Prove sperimentali di analisi dinamica.

Le prove dinamiche sperimentali che possono essere condotte su singoli elementi strutturali, si pongono come obiettivo fondamentale la valutazione della risposta della struttura alle sollecitazioni di lavoro e la possibilità di verificare e, se necessario, di mettere a punto, un modello numerico di previsione del comportamento dinamico della struttura [49-54]. In genere la sperimentazione viene tuttavia condotta con delle sollecitazioni di ingresso che non corrispondono ad alcuna situazione tipica di lavoro.

Anche se lo scopo fondamentale di una sperimentazione dinamica è sempre quello di ricavare un modello numerico della struttura vi sono delle differenze, importanti dal punto di vista sperimentale perché determinano la precisione che viene richiesta alla sperimentazione e, quindi, la “difficoltà” ed in definitiva il “costo”, che sono relative all'impiego che è previsto per il modello stesso e che si può classificare come:

- convalida del modello numerico della struttura: in questo caso si deve ottenere una valutazione, molto precisa, delle frequenze fondamentali ed una descrizione delle deformate modali che sia sufficiente ad identificare il tipo di modo; per quanto riguarda i coefficienti di smorzamento in genere non è possibile un confronto con i valori ottenuti da una previsione numerica ma soltanto con delle stime di massima ottenute mediante analogia di valori noti per strutture con caratteristiche simili;
- ricerca delle cause delle differenze esistenti tra modello numerico e dati sperimentali: si richiede, in più rispetto al caso precedente, una valutazione accurata delle deformate modali ed anche l'acquisizione di un numero più elevato, di modi fondamentali;
- identificazione di un modello numerico da utilizzare anche per tecniche di sottostrutturazione, di modifica strutturale, per l'identificazione delle forze che agiscono sulla struttura o per l'identificazione di danni che si presentino durante la vita operativa: in tutti questi casi si richiede un maggiore livello di precisione nelle misure e la determinazione di un numero ancora più elevato di modi fondamentali.

Nel caso generale il modello dinamico di una struttura è dato da un sistema discreto a più gradi di libertà, esso rappresenta una approssimazione della situazione effettiva che è quella di una struttura continua e quindi caratterizzata da un numero infinito di gradi di libertà; l'equazione del sistema ad  $n$  gradi di libertà, nel caso di smorzamento viscoso, è:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (3.1)$$

dove  $x$  è un vettore, ad  $n$  componenti, che comprende i gradi di libertà scelti per la rappresentazione della struttura (dal punto di vista sperimentale sono i punti di misura),  $f(t)$  è il vettore delle forze agenti sulla struttura,  $M$  è la matrice,  $n \times n$ , di massa ed analogamente  $C$  e  $K$  sono le matrici, sempre  $n \times n$ , di smorzamento viscoso e di rigidezza.

Nel campo della tecnica sperimentale di analisi dinamica si farà essenzialmente riferimento ad una metodologia che riguarda la determinazione delle funzioni di risposta in frequenza, indicate con *FRF* [55], mediante l'eccitazione della struttura in un solo punto e la rilevazione dell'uscita su di un altro punto di misura (è anche possibile una situazione diversa in cui sia l'ingresso che l'uscita possono essere relativi a più punti della struttura); la sperimentazione fornisce direttamente un modello di risposta *in termini delle funzioni di risposta di frequenza*. Dalla valutazione di un numero opportuno di *FRF* è possibile passare al modello modale o a quello spaziale.



Il segnale di ingresso viene applicato attraverso il collegamento della struttura con uno “*shaker*” o più semplicemente con un ingresso impulsivo, in genere ottenuto con un martello dotato di una cella di carico, mentre il trasduttore generalmente impiegato per la grandezza in uscita è un accelerometro che deve essere connesso con la struttura: esso costituisce quindi una “alterazione” della struttura stessa e questa alterazione della struttura deve essere ridotta al minimo. Quindi la massa dell'accelerometro deve essere la più piccola possibile; questa esigenza è compatibile con l'impiego di accelerometri piezoelettrici oppure gli innovativi MEMS che non sono altro che un insieme di dispositivi di varia natura (meccanici, elettrici ed elettronici) integrati in forma altamente miniaturizzata su uno stesso substrato di silicio. Anche nell'applicazione delle forze di eccitazione si ha una alterazione della struttura, in particolare nel caso dell'impiego di “*shaker*”.

### 3.2. Determinazione delle FRF con ingresso di tipo generale.

Si fa ora riferimento al caso più generale in cui il segnale di ingresso e quindi il segnale di risposta non sono armonici semplici.

#### 3.2.1. Ingresso periodico.

In questo caso il segnale di ingresso è di tipo periodico con periodo  $T$  e consideriamo per semplicità un sistema con un singolo ingresso ed una singola uscita (*SISO, Single Input Single Output*); il segnale di ingresso si può esprimere con uno sviluppo in serie di Fourier, infatti una funzione periodica di periodo  $T$  si può sviluppare nella serie con una espressione<sup>1</sup>:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k^* e^{j\omega_k t} \quad (3.2)$$

$$\text{con } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Il segnale di risposta  $x(t)$  si può valutare considerando il significato stesso delle *FRF* e quindi utilizzando la *FRF* calcolata in corrispondenza delle frequenze che sono presenti nel segnale di ingresso,  $f(t)$ , come indicato nella (3.4):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k^* e^{j\omega_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(\omega_k) f_k^* e^{j\omega_k t} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup> La (3.2) è la forma complessa (esponenziale) della serie di Fourier: i coefficienti  $f_k^*$  sono forniti dall'espressione:

$$f_k^* = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_k t} dt \quad (3.3)$$

Esprimendo l'esponenziale complesso con la formula di Eulero, si perviene all'espressione della serie di Fourier monolatera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k (\cos \omega_k t) + b_k (\sin \omega_k t)] \quad (3.4)$$

Naturalmente il segnale di risposta contiene soltanto le frequenze che sono comprese nel segnale di ingresso: quindi il segnale di risposta  $x(t)$  è periodico, con lo stesso periodo  $T$  del segnale di ingresso, ma ha una forma diversa perché la FRF ha valori diversi a secondo della frequenza.

Per determinare la FRF nel caso di ingresso periodico è quindi necessario calcolare gli sviluppi in serie di Fourier dei segnali di ingresso e di uscita: si ottengono così le componenti delle funzioni di ingresso e di uscita per gli stessi valori discreti di frequenza che sono multipli interi di  $\frac{2\pi}{T}$ . Da queste componenti si ricavano le FRF in corrispondenza delle sole

frequenze discrete che sono multiple di  $\frac{2\pi}{T}$  e si ottiene:

$$H(\omega_k) = \frac{X_k^*}{f_k^*} \quad (3.6)$$

dalla (3.6) si possono ricavare le FRF in corrispondenza dei valori di frequenza che corrispondono ai multipli del periodo del segnale di ingresso. Tale procedimento può naturalmente essere esteso per sistemi a input ed output multiplo (*MIMO, Multiple Input Multiple Output*), nel caso cioè si abbiano più punti di misura. In tale caso la (3.6) si generalizza per il termine generico della matrice delle FRF

$$H(\omega_k) = \frac{X_{ki}^*}{f_{kj}^*} \quad (3.7)$$

in cui l'ingresso periodico deve applicarsi nel punto  $j$ -imo e deve essere uguale a zero in tutti gli altri punti.

### 3.2.2. Ingresso impulsivo.

Consideriamo ancora un sistema ad ingresso ed uscita singoli, *SISO*. Nel caso in cui il segnale di ingresso sia di tipo generico (al limite di tipo impulsivo) si può ritenere che venga rispettata la condizione di Dirichelet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3.8)$$

ed è quindi possibile definire e calcolare la trasformata di Fourier di tale segnale definita come: (si indicano le grandezze Fourier-trasformate con il soprasegno  $\sim$ ):

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.9)$$

in corrispondenza di ogni pulsazione  $\omega$  si può scrivere per il segnale di risposta all'ingresso la:

$$\tilde{x}(\omega) = H(\omega)\tilde{f}(\omega) \quad (3.10)$$

dove  $H(\omega)$  indica la *FRF*; si può quindi ricavare il segnale di risposta  $x(t)$  dalla trasformata inversa di *Fourier* della relazione (3.10):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.11)$$

Quindi si possono ottenere le *FRF* a partire dalle misure ottenute da prove di analisi dinamica con eccitazione di tipo impulsivo: si tratta infatti di calcolare le trasformate di *Fourier* dei segnali di ingresso e di uscita ed ottenere le *FRF* come rapporto di queste due funzioni:

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} \quad (3.12)$$

Per sistemi a più ingressi e più uscite si avrà ancora

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\tilde{x}_i(\omega)}{\tilde{f}_j(\omega)} \quad (3.13)$$

in cui il vettore trasformata di *Fourier* dell'ingresso  $\tilde{f}(\omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) è non nullo nel solo punto di misura  $j$ -esimo. Da un punto di vista numerico si procede al calcolo delle trasformate di *Fourier* dei segnali di ingresso e di risposta con la valutazione delle trasformate discrete di *Fourier*, con un processo numerico che viene indicato con *FFT*, *Fast Fourier Transform*; questo procedimento numerico implica che il segnale venga forzatamente trattato come un segnale periodico.

Il caso dell'eccitazione impulsiva si può trattare in maniera diversa valutando la risposta di un sistema ad un impulso unitario ( $f(t) = \delta(t)$ ), metodo di *Duhamel*. Se si indica con  $h(t - \tau)$  la funzione di risposta impulsiva nel tempo e si considera una generica funzione di ingresso  $f(t)$  è possibile esprimerla attraverso una combinazione lineare di impulsi  $f(\tau) (d\tau)$ . La risposta del sistema è data dalla:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

dove  $h(t - \tau) = 0$  per  $t < \tau$ . La trasformata di *Fourier* di un impulso unitario nell'origine dei tempi  $\delta(t)$  risulta:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.15)$$

ponendo la (3.15) nella (3.11) si ha:

$$x(t)_\delta = h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.16)$$

come si vede dalla (3.16) la risposta impulsiva  $h(t)$  e la *FRF*  $H(\omega)$  sono una coppia di trasformate di *Fourier*; questo significa che la risposta impulsiva del sistema,  $h(t)$ , si ottiene

dalla anti-trasformata di Fourier della FRF, cioè dalla  $H(\omega)$ . Da questa corrispondenza tra risposta impulsiva e FRF si vede come risulta possibile esprimere la funzione di risposta impulsiva con uno sviluppo in serie su base modale, così come avviene per la FRF; infatti dalla:

$$\sum_r H_{ij}^r(\omega) = \sum_r \frac{\phi_i^{(r)} \cdot \phi_j^{(r)}}{-m_r \omega^2 + k_r + j\omega c_r} \quad (3.17)$$

si ha:

$$h_{ij}(t) = \sum_r h_{ji}^r(t) \quad (3.18)$$

### 3.2.3. Ingresso random.

In questo caso, che è molto importante per le possibilità che offre nella sperimentazione, il segnale di ingresso e quindi quello di uscita sono di tipo random: non viene rispettata la condizione di Dirichlet e quindi non è possibile applicare la definizione della trasformata di Fourier per i segnali di ingresso ed uscita.

Un segnale random è definito con un approccio statistico in quanto il singolo segnale, a differenza di quanto avviene in campo deterministico, non è significativo. Il carattere random, nell'analisi modale, si riferisce al fatto che una serie di esperimenti, pur condotti in maniera apparentemente uguale ed in uguali circostanze, porta a risultati diversi. Quindi il risultato di una singola prova non è sufficiente a rappresentare la misura, ma si richiede una descrizione statistica dei risultati.

Si devono impiegare dei metodi diversi per la descrizione dei segnali: ciò può essere fatto nel dominio del tempo attraverso la *funzione di correlazione* e nel dominio della frequenza con l'impiego della *funzione di densità spettrale, PSD (Power Spectral Density)*.

Un segnale random si definisce stazionario se le sue proprietà statistiche, in particolare la media, non cambiano nel tempo. La media di un segnale random *ergodico*, cioè con medie temporali uguali alle medie calcolate sull'insieme dei campioni, e quindi tale che le sue proprietà possono essere valutate da una sola registrazione di durata sufficientemente grande, viene definita da:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.19)$$

Il valore quadratico medio del segnale random viene definito da:

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (3.20)$$

Nel caso di segnali random questo valore viene anche indicato come varianza e da una indicazione dell'entità della variazione del segnale  $x(t)$ .

Una grandezza a questa collegata è la radice quadrata della varianza, radice quadrata del valore quadratico medio  $x_{rms}$  (*root mean square*):

$$x_{rms} = \sqrt{\bar{x}^2} \quad (3.21)$$

Un altro indice importante nel campo delle variabili random è la misura della variazione nel tempo del segnale che permette di valutare l'entità del campione statistico del segnale che si deve raccogliere. La funzione di auto correlazione indicata con  $R_{xx}(\tau)$  è definita dalla:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (3.22)$$

essa da, appunto, una indicazione sulla velocità di variazione del segnale  $x(t)$  e risulta funzione soltanto di  $\tau$ , differenza temporale, nel caso di segnali random stazionari.

La funzione di correlazione tra i segnali  $f(t)$  e  $g(t)$  (o di autocorrelazione se riferita allo stesso segnale), ha il significato fisico di valor medio del prodotto della funzione  $f(t)$  per una funzione  $g(t)$  traslata nel tempo:  $f(t) \cdot g(t+\tau)$ ; si tratta sempre di una funzione del tempo che risponde però alle condizioni richieste per definire la sua trasformata di Fourier; ad esempio nel caso di auto correlazione per il segnale  $f(t)$  si ha:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t)f(t+\tau)] \quad (3.23)$$

in cui il simbolo  $E[...]$  sta ad indicare valore atteso della grandezza tra parentesi: nell'ipotesi che il segnale sia stazionario da un punto di vista statistico (cioè che tutte le caratteristiche di probabilità siano indipendenti da traslazioni temporali) e sia inoltre *ergodico* e cioè che le medie temporali siano uguali alle medie calcolate sull'insieme dei campioni, la (3.23) può esprimersi pure:

$$R_{ff}(\tau) = E[f(t)f(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt \quad (3.24)$$

e dunque ogni funzione stocastica  $f(t)$  è completamente rappresentativa del processo random. La trasformata di Fourier della funzione di auto correlazione indicata dalla (3.23) definisce una funzione di auto-densità spettrale:

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.25)$$

attraverso questa funzione di densità spettrale si ottiene una descrizione nel dominio della frequenza della funzione del tempo  $f(t)$  che per la sua caratteristica di segnale random non permette di applicare direttamente sulla funzione stessa la definizione classica in termini di trasformata di Fourier.

Le definizioni riportate nelle (3.23), (3.25) si estendono naturalmente al caso di due funzioni  $x(t)$ ,  $f(t)$  per le quali si definisce una funzione di correlazione o di cross-correlazione:

$$R_{xf}(\tau) = E[f(t)f(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt \quad (3.26)$$

e di conseguenza si definisce una funzione di densità spettrale o di cross-densità spettrale:

$$S_{xf}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.27)$$

Si osserva che le funzioni di correlazione definite dalle (3.23), (3.26) sono delle funzioni reali ed anche le funzioni di auto-densità spettrale sono funzioni reali mentre le funzioni di cross-densità spettrale sono, in generale, funzioni complesse ma tali che sia:

$$S_{xf}(\omega) = S_{fx}^*(\omega) \quad (3.28)$$

dove con \* si indica il complesso coniugato.

In questo modo si sono definite, attraverso operazioni di correlazione e di trasformate di Fourier sulle funzioni di correlazione, le funzioni che permettono di trattare i segnali random. Si ha poi una relazione che collega le funzioni di auto-densità spettrale dei segnali di ingresso ed uscita con la FRF del sistema :

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (3.29)$$

Questa relazione da sola non è sufficiente per la valutazione della FRF del sistema in quanto fornisce soltanto delle informazioni sul modulo della  $H(\omega)$ , si devono impiegare quindi delle ulteriori relazioni che fanno intervenire anche le funzioni di cross-densità spettrale. Come si è detto, le funzioni di cross-densità spettrale sono complesse e permettono quindi di ricavare le  $H(\omega)$  in forma complessa:

$$S_{fx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (3.30)$$

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xf}(\omega) \quad (3.31)$$

Le relazioni (3.30), (3.31) permettono di ricavare le FRF del sistema a partire da misure sperimentali condotte con un segnale di ingresso di tipo random; da queste due relazioni si ottengono due stime possibili per la funzione  $H(\omega)$  ed inoltre dal confronto di queste due stime diverse si può valutare anche la qualità dei dati sperimentali ottenuti

### 3.3. Impiego di ingressi diversi.

Le prove sperimentali di analisi modale si possono eseguire con diversi tipi di segnali di ingresso; essi presentano alcuni vantaggi ed alcune limitazioni che vengono discusse nei sottoparagrafi seguenti.

#### 3.3.1. Ingresso sinusoidale con variazione discreta di frequenza.

In questo caso il segnale di ingresso è di tipo armonico semplice con ampiezza e frequenza fissate e si misura la *FRF* punto per punto per ogni valore di frequenza che si considera.

Quindi per ottenere una singola *FRF* del sistema si deve variare la frequenza del segnale di ingresso in modo discreto, naturalmente la misura richiede che si raggiungano condizioni di stazionarietà nel passaggio da una frequenza all'altra e ciò può richiedere dei tempi lunghi per

la misura. In pratica questo tempo diviene effettivamente critico nell'intorno di una frequenza di risonanza quando il coefficiente di smorzamento modale è molto basso.

Un vantaggio offerto dall'impiego di questo tipo di ingresso sta nella possibilità di “spaziare” in frequenza nella misura e nella maniera che vengono ritenute più opportune: così si possono raccogliere pochi punti di misura in frequenza per le frequenze che sono lontane dai punti di risonanza del sistema e concentrare la massima parte dei punti di misura in frequenza nell'intorno dei punti di risonanza, ottenendo così i dati più significativi per la successiva valutazione dei parametri modali.

Nella misura con questo tipo di ingresso si tratta di procedere in due fasi:

- una prima esplorazione viene condotta con un intervallo grande di frequenza ed ha lo scopo di identificare i punti di risonanza;
- la seconda fase viene invece condotta nell'intorno dei picchi di risonanza con incrementi di frequenza molto piccoli allo scopo di raccogliere i dati più significativi relativi ai singoli modi.

### 3.3.2. Ingresso sinusoidale con variazione continua di frequenza.

E' un caso simile al precedente, il segnale di ingresso è ancora di tipo armonico puro, ma la variazione di frequenza del segnale è di tipo continuo, naturalmente si deve verificare sempre che questa variazione di frequenza sia sufficientemente lenta in modo da mantenere le condizioni di stazionarietà nella misura.

Infatti una velocità di variazione di frequenza troppo elevata porta a distorsioni molto rilevanti nella valutazione delle FRF, la velocità di variazione ammissibile è condizionata dai valori del coefficiente di smorzamento modale apposite norme fissano i valori massimi della velocità di variazione in frequenza.

Con questo tipo di ingresso si ottiene uno “spazzamento” continuo in frequenza da un valore iniziale ad un finale di frequenza fissato.

### 3.3.3. Ingresso periodico.

Nel caso di segnale di ingresso di tipo periodico si ha un insieme discreto di frequenze contenuto nel segnale stesso, dalla valutazione delle trasformate di Fourier dei segnali di ingresso ed uscita, che sono periodici, si ottiene la *FRF* del sistema dalle relazioni (3.6) e (3.7). Per ottenere i segnali di ingresso di tipo periodico si possono usare segnali deterministici, come ad esempio onde quadre, o segnali di tipo pseudo-random. Un vantaggio importante che viene offerto da questo tipo di ingresso, rispetto al caso precedente di ingresso armonico semplice, è dato proprio dalla sua caratteristica di periodicità nel campo di misura che consente di ottenere da una singola misura le informazioni relative ad un campo, scelto dall'operatore, di frequenze, con un incremento di frequenza fissato.

### 3.3.4. Ingresso random.

Nel caso di ingresso di tipo random si hanno, come si è visto, tre diverse relazioni che consentono di valutare la *FRF* del sistema:

$$S_{xx}(\omega) = \|H(\omega)\|^2 S_{ff}(\omega) \quad (3.32)$$

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (3.33)$$

$$S_{xx}(\omega) = H(\omega)S_{xf}(\omega) \quad (3.34)$$

Dove  $H(\omega)$  indica la *FRF* del sistema e le funzioni  $S(\omega)$  indicano le funzioni di densità spettrale, *PSD*, precedentemente definite.

Lo strumento di misura base nell'analisi modale è in grado di calcolare le diverse funzioni che appaiono nelle (3.32), (3.33), (3.34) in forma approssimata con diversi procedimenti numerici. In tutti i casi le funzioni di densità spettrale non possono essere valutate esattamente se si dispone, come è ovviamente inevitabile nella misura, di un blocco di dati di durata temporale finita.

Nel caso di segnale di ingresso random si possono valutare le *FRF* con diverse stime; infatti se si indica con  $H^1(\omega)$  la *FRF* ottenuta dalla (3.33) si ha:

$$H^1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (3.35)$$

e se si indica invece con  $H^2(\omega)$  la *FRF* ottenuta dalla (3.34) si ha:

$$H^2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (3.36)$$

naturalmente le funzioni  $H^1(\omega), H^2(\omega)$ , che sono calcolate a partire da diversi dati sperimentali avranno dei valori diversi tra loro e non esattamente eguali come dovrebbero avere dal punto di vista teorico. Quindi per valutare l'affidabilità del processo di misura si definisce una funzione di coerenza, definita dalla:

$$\gamma^2 = \frac{H^1(\omega)}{H^2(\omega)} = \frac{S_{fx}(\omega) \cdot S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega) \cdot S_{xx}(\omega)} \quad (3.37)$$

Si può verificare che questa funzione  $\gamma$  deve avere sempre un valore inferiore od al massimo uguale ad uno e che questa condizione limite di  $\gamma = 1$  corrisponde alle condizioni ideali di misura in cui le funzioni di risposta in frequenza  $H^1(\omega), H^2(\omega)$ , sono uguali.

Naturalmente la presenza del rumore in ingresso ed in uscita disturba la misura, nell'intorno di una frequenza di risonanza l'effetto del rumore è molto importante sul segnale di ingresso e quindi altera maggiormente la funzione di densità spettrale relativa all'ingresso,  $S_{ff}(\omega)$ , mentre nei punti di antirisonanza, in cui il segnale di risposta è ridotto al minimo, il rumore ha un effetto maggiore sul segnale di risposta e quindi danneggia principalmente la funzione di densità spettrale del segnale in uscita  $S_{xx}(\omega)$ .

Quindi nell'intorno dei punti di risonanza è probabile che la funzione  $H^2(\omega)$  dia la stima più affidabile per la misura, mentre al contrario nell'intorno dei punti di antirisonanza è probabile che sia la funzione  $H^1(\omega)$  a fornire la stima migliore.

Si osserva che valori molto bassi per la funzione di coerenza  $\gamma$ , che rendono non accettabile la misura, possono essere causati da un comportamento non lineare della struttura e quindi possono essere considerati come un possibile indice di comportamento in campo non lineare; un'altra causa alla base di valori troppo bassi per la funzione di coerenza è collegata con una



risoluzione di frequenza insufficiente, che dipende dal processo di digitalizzazione e quindi dai punti di misura in frequenza che sono disponibili, ciò avviene in particolare nell'analisi modale di strutture che sono caratterizzate da valori dei coefficienti di smorzamento molto piccoli. Questa seconda osservazione suggerisce una ripetizione della misura con l'impiego di un numero più alto di punti di campionamento in frequenza.

### 3.3.5. Ingresso impulsivo.

In questo caso il segnale di ingresso può essere ottenuto in maniera diversa, ma fondamentalmente con:

- una variazione rapida in frequenza di un segnale sinusoidale, che viene indicata con il termine *chirp*;
- un impulso rettangolare nel tempo;

Nel primo caso, che si ottiene con una eccitazione armonica a frequenza variabile da un valore minimo,  $f_{\min}$ , ad un valore massimo,  $f_{\max}$ , si ha la possibilità di ottenere un controllo molto preciso sia sui limiti delle frequenze contenute nel segnale impulsivo che sulle ampiezze del segnale ed inoltre è possibile ottenere una energia elevata e quindi un rapporto segnale rumore molto alto.

Nel secondo caso il segnale impulsivo viene ottenuto con una eccitazione di durata limitata, ad esempio con l'impiego di un "martello" con una cella di carico che consente di misurare la forza che viene trasmessa alla struttura: il controllo della banda di frequenza del segnale e della sua ampiezza è molto meno diretto e preciso che nel caso del *chirp*, inoltre l'energia disponibile è limitata, ma si ha il vantaggio di impiegare una strumentazione molto semplice.

Da questa eccitazione di tipo impulsivo, si possono calcolare, con l'impiego della *FFT*, le trasformate di Fourier per l'ingresso e l'uscita e ricavare le FRF dalle (3.12) e (3.13) ed è anche possibile, come generalmente viene fatto effettivamente, utilizzare le relazioni precedentemente definite, (3.30), (3.31) nel caso di ingresso random e quindi passare attraverso il calcolo delle funzioni di correlazione e delle funzioni di densità spettrale.

Le prove di analisi modale basate sull'impiego dell'ingresso di tipo impulsivo presentano dei vantaggi sia per quanto riguarda la semplicità e la versatilità della strumentazione che per quanto riguarda la tecnica di misura, ma presentano anche diverse limitazioni in particolare per quanto riguarda la precisione, in genere inferiore a quella ottenibile con altri tipi di ingresso, dei dati misurati e la difficoltà di impiego su strutture di grandi dimensioni.

### 3.3.6. Il sistema di eccitazione.

Il sistema di eccitazione può avere strutture diverse ma fondamentalmente si tratta di uno *shaker* (di tipo elettromagnetico o elettroidraulico) o di un martello con cella di carico.

Nel caso di impiego dello shaker elettromagnetico il segnale di eccitazione può essere di tipo random, sinusoidale con variazione continua in frequenza e di molti altri tipi. Lo shaker elettromagnetico è costituito da una bobina posta intorno ad un albero in un campo magnetico: applicando una corrente alternata si applica una forza all'albero dello shaker che a sua volta trasferisce la forza alla struttura. Naturalmente questo sistema di eccitazione deve essere collegato alla struttura in prova e si ha quindi un effetto di inserzione che può essere rilevante a secondo delle masse in gioco. Questo effetto viene ridotto collegando lo shaker con la struttura attraverso uno *stinger*, che è costituito da un'asta sottile e corta (spesso

costruita di acciaio o nylon): questa asta isola lo shaker dalla struttura, riduce l'effetto di massa aggiunta e permette di controllare la direzione di applicazione della forza.

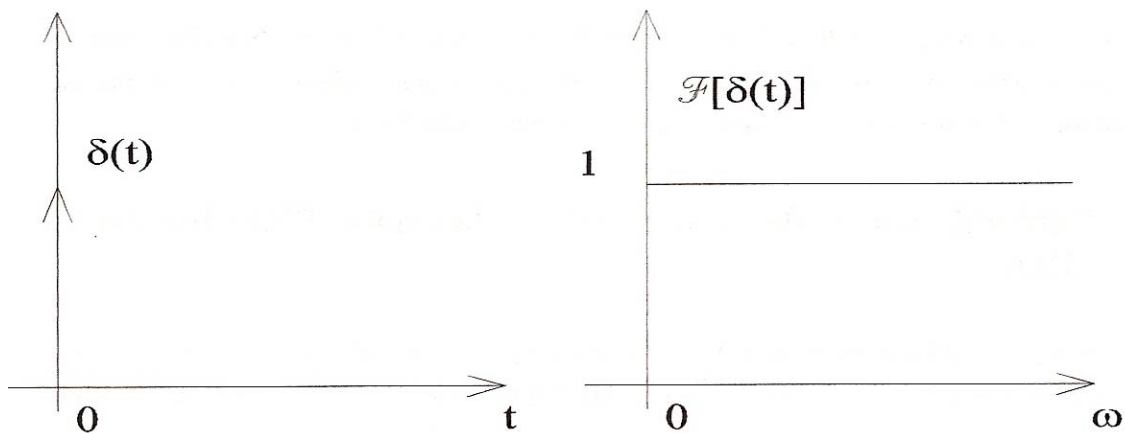


Figura 3.1. Ingresso impulsivo nel tempo e sua trasformata di Fourier.

L'impiego del martello con cella di carico consente di evitare i problemi di massa aggiunta e consente una sperimentazione molto più rapida. Si tratta di un martello con un trasduttore di forza sulla sezione di impatto: viene usato per dare alla struttura una eccitazione impulsiva a larga banda di frequenza utile che è tanto più grande quanto più è limitata la durata temporale dell'impulso<sup>2</sup>. In fig. 3.1 sono indicati l'andamento nel tempo e l'andamento in frequenza di un impulso tipico. Il valore di picco della forza dipende dalla massa del martello e dalla velocità di urto: la cella di carico posta sulla testa di impatto permette di misurare la forza d'urto. La durata dell'impulso, il suo contenuto in frequenza e quindi la frequenza massima di eccitazione, dipendono dalla massa e dalla rigidità del martello e della struttura in prova. La frequenza massima di eccitazione diminuisce all'aumentare della massa del martello ed aumenta all'aumentare della rigidità della punta di impatto del martello. Anche se la semplicità di impiego del martello è evidente, può essere impossibile dare ad una struttura, in particolare se di grandi dimensioni, l'energia sufficiente per l'eccitazione ed anche la direzione di applicazione della forza può essere incerta.

### 3.4. Determinazione dei parametri modali dalle FRF: ipotesi di SDOF.

La determinazione dei parametri modali, che sono le frequenze naturali, i coefficienti di smorzamento modale e le deformate modali, a partire dai dati sperimentali, che sono le *FRF*, richiede una scelta di base tra un approccio semplice, basato sull'idea che sia possibile isolare

<sup>2</sup> Questa affermazione può essere facilmente provata considerando un quasi impulso  $\delta_b$  costituito da un impulso rettangolare centrato nell'origine dei tempi con "base"  $b$  e altezza  $1/b$  in modo cioè che venga rispettata la condizione che anch'esso abbia integrale pari ad uno. La sua trasformata di Fourier è pari a :

$$F(\delta_b) = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{b} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega b} [e^{-j\omega b/2} - e^{j\omega b/2}] = \frac{2}{\omega b} \sin\left(\omega \frac{b}{2}\right) \quad (3.38)$$

La precedente mostra che l'impulso non ideale nel tempo ha uno spettro che è una funzione tipo  $\sin\left(\frac{x}{x}\right)$  tendenzialmente costante nell'origine e che tende ad attenuarsi sino ad annullarsi in  $\omega = \frac{2\pi}{b}$  che quindi definisce la banda passante.

nell'intorno della frequenza di risonanza il singolo modo e considerare quindi una ricostruzione modale fondata sul modello ad un solo grado di libertà (SDOF) ed un approccio più generale, a cui è certamente necessario ricorrere nel caso di modi accoppiati, basato su di una ricostruzione modale con un modello a più gradi di libertà (MDOF). In altri termini, se si considera l'espressione di un generico termine della matrice delle *FRF* in funzione dei parametri modali e nell'ipotesi di smorzamento viscoso

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{N_{\text{modi}}} \frac{\phi_i^{*(r)} \phi_j^{*(r)}}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j2\omega\omega_r\zeta_r} \quad (3.39)$$

si può ritenere, in un intorno di  $\omega$  prossimo alla risonanza *p-esima*, che partecipi di fatto la sola frazione *p-esima* della (3.39) (ipotesi S.D.O.F.) oppure si debba considerare l'influenza di tutti gli altri contributi.

L'ipotesi di poter lavorare su di un modello ad un solo grado di libertà richiede che i modi presenti nel campo di frequenza che viene presentato nelle *FRF* siano ben separati in frequenza e non siano fortemente smorzati, perché in questo caso si crea un accoppiamento anche tra modi che sono relativamente lontani in frequenza. Tuttavia anche la presenza di coefficienti di smorzamento modale molto bassi porta a dei problemi per la determinazione dei parametri modali, perché in questo caso si hanno pochi punti significativi nell'intorno della frequenza di risonanza, mentre per una buona ricostruzione dei parametri modali sarebbe utile la presenza di un numero elevato di punti di misura rilevanti nell'intorno di ogni frequenza di risonanza.

L'approccio basato sul modello ad un solo grado di libertà è comunque utile almeno per ottenere una prima stima dei parametri modali che si possono poi valutare con maggiore precisione con metodi più sofisticati. Si seguono in tal caso le fasi fondamentali: si individua la frequenza propria di vibrazione corrispondente al punto di massimo locale del diagramma del modulo della *FRF* in funzione della frequenza che viene considerata come la frequenza naturale del modo,  $f_n$ ; si osserva che tale valore si ritrova in ogni elemento della *FRF* ed inoltre può essere individuato anche tramite i punti di attraversamento dell'asse delle frequenze della parte reale delle *FRF* oppure tramite i punti in cui la parte immaginaria ha minimi o massimi relativi propri.

Per quel che concerne la stima dello smorzamento modale si considerino le seguenti considerazioni: se, come supposto per ipotesi consideriamo il singolo grado di libertà modale, la potenza media  $P_m$  dissipata dalla forza viscosa in un ciclo di moto armonico semplice indotto da una forzante  $f(t) = F_0 \sin(\omega t)$  sarebbe<sup>3</sup>:

$$P_m(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T c \dot{x}^2 dt = \frac{1}{2} c_c \omega^2 \frac{F_0^2}{k^2} \frac{\zeta_n}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_n^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.42)$$

<sup>3</sup> In tal caso per il significato stesso di *FRF* sarebbe:

$$x(t) = F_0 |H(\omega)| \sin(\omega t + \psi); \quad \dot{x}(t) = F_0 \omega |H(\omega)| \cos(\omega t + \psi) \quad \text{con} \quad H(\omega) = 1/k \left[ 1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2j(\omega/\omega_n)\zeta_n \right] \quad (3.40)$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 4\zeta_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\}} \quad (3.41)$$

nella quale ogni grandezza dinamica ha significato modale e  $c = \zeta_n c_c$ . Tale potenza media è *massima*, come si può provare cercando la  $\omega$  per cui  $\frac{\partial P_m(\omega)}{\partial \omega} = 0$ , quando  $\omega = \omega_n$  in cui si ha:

$$P_{m \max} = \frac{1}{8} c_c \omega_n^2 \frac{F_0^2}{\zeta_n k^2} \quad (3.43)$$

Se si cercano i valori di  $\omega$  per cui  $P_m$  sia la “metà” (da cui la dizione di punti di *mezza potenza*) del suo valore massimo basterà imporre che la  $P_m(\omega)$  data dalla (3.42) sia uguale a  $\frac{P_{m \max}}{2}$ . Così procedendo si ottiene:

$$\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 - 4\zeta_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = 0 \rightarrow \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \pm 2\zeta_n \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) - 1 = 0 \quad (3.44)$$

Ora, le quattro radici della precedente sarebbero, in corrispondenza alle due diverse scelte per il segno,

$$\left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)_{1,2} = -\zeta_n \pm \sqrt{\zeta_n^2 + 1} \quad \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)_{3,4} = +\zeta_n \pm \sqrt{\zeta_n^2 + 1} \quad (3.45)$$

Tuttavia, dovendo fornire ciascuna equazione di secondo grado una radice positiva ed una negativa per la natura dei suoi coefficienti (che presentano comunque una variazione ed una permanenza di segno), non potrà che eliminarsi per ciascun gruppo di soluzioni la radice (reale) più piccola rimanendo allora:

$$\left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)_{2,4} = \mp \zeta_n + \sqrt{\zeta_n^2 + 1} \quad (3.46)$$

Se si rinominano allora queste due radici con  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , si ottiene facilmente per differenza<sup>4</sup>

$$\zeta_n = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \quad (3.48)$$

che rappresenta una stima dello smorzamento viscoso sulla base delle frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$ : resta ora da dire come valutare  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  in base alla conoscenza della  $H(\omega)$ . Si presentano nel seguito due strade possibili: una basata sulla conoscenza del modulo di

<sup>4</sup> Si osservi che:

$$\omega_n^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (3.47)$$

$H(\omega)$  e l'altra sulla conoscenza della sua parte reale. Indicando con  $|H|_{\text{mp}}^2$  il valore assunto dal modulo della FRF in corrispondenza delle due radici, si ha, considerando la (3.41) e la prima della (3.44),

$$|H|_{\text{mp}}^2 = \frac{1}{k^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}} \bigg|_{\omega=\omega_1, \omega_2} = \frac{1}{k^2 8\zeta_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \bigg|_{\omega=\omega_1, \omega_2} \quad (3.49)$$

Infine osservando che, dalla (3.41),  $|H|_{\text{max}}^2 = |H(\omega)|_{\omega=\omega_n}^2 = \frac{1}{4} k^2 \zeta_n^2$  si ha considerando la (3.46):

$$|H|_{\text{mp}}^2 = \frac{1}{k^2 8\zeta_n^2 \left( 1 + 2\zeta_n^2 \mp 2\zeta_n \sqrt{\zeta_n^2 + 1} \right)} \cong \frac{H_{\text{max}}^2}{2} \quad (3.50)$$

in cui si sono trascurati al denominatore i termini di smorzamento di ordine superiore al secondo. Per cui, partire dal valore massimo del modulo della *FRF* in funzione della frequenza,  $H_{\text{max}}$ , si valutano i punti a mezza potenza, di frequenza  $f_1$  ed  $f_2$ , corrispondenti ai valori  $H_{\text{max}}/\sqrt{2}$  a sinistra e a destra del valore di picco; noti i punti a mezza potenza si può valutare il coefficiente di smorzamento modale utilizzando la (3.48) con le relazioni<sup>5</sup>:

$$\zeta_n = \frac{\eta_n}{2} \cong \frac{D_f}{2f_n} \quad (3.52)$$

dove  $D_f$  indica *la larghezza di banda a mezza potenza*:

$$D_f = f_2 - f_1 \quad (3.53)$$

e dove con  $\eta_n$  si indica il fattore di perdita che è legato al coefficiente di smorzamento dalla  $\eta_n = 2\zeta_n$ .

I punti di mezza potenza possono essere determinati pure dalla stima dei punti di massimo e minimo relativi propri della parte reale di  $H(\omega)$ . Infatti, la parte reale è data da:

---

<sup>5</sup> Se non si considerassero le approssimazioni fatte nel considerare i contributi di smorzamento di ordine più elevato, si sarebbe ottenuto:

$$\zeta_n = \frac{(f_1 + f_2) \cdot (f_2 - f_1)}{4f_n^2} \quad (3.51)$$

$$\operatorname{Re}[H(\omega)] = \frac{(\omega_n^2 + \omega^2)}{m[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_n^2 \omega_n^2 \omega^2]} \quad (3.54)$$

Quindi imponendo:

$$0 = \frac{d \operatorname{Re} H(\omega)}{d\omega} \quad (3.55)$$

si ottiene l'equazione

$$0 = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 - 4\zeta_n^2 \omega_n^2 \omega^2 \quad (3.56)$$

che è identica alla (3.44) (il che dimostra che le radici trovate sono effettivamente punti di mezza potenza) e che ha soluzioni  $\omega_1$  ed  $\omega_2$ .

$$\omega_1^2 = \omega_n^2(1 - 2\zeta_n) \text{ per } \omega^2 < \omega_n^2 \quad (3.57)$$

$$\omega_2^2 = \omega_n^2(1 + 2\zeta_n) \text{ per } \omega^2 > \omega_n^2 \quad (3.58)$$

Facendo la differenza tra le precedenti si ottiene quindi:

$$\zeta_n = \frac{(\omega_2 + \omega_1) + (\omega_2 - \omega_1)}{4\omega_n^2} \quad (3.59)$$

la quale, seguendo l'approssimazione  $\omega_n = \omega_1 + \omega_2 / 2$  fornisce ancora la stima data dalla (3.48).

Si aggiunge infine che se invece della  $H(\omega)$  (*recettanza*) si disponesse della funzione di risposta in termini di accelerazione  $H_a(\omega)$  (*inertanza*) come è nella consuetudine delle misure basate sull'uso di accelerometri, si avrebbe, ad esempio nel caso dell'approccio con parte reale:

$$\operatorname{Re}[H_a(\omega)] = \frac{\omega^2(\omega_n^2 + \omega^2)}{(m\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_n^2 \omega_n^2 \omega^2} \quad (3.60)$$

i cui punti di stazionarietà risulterebbero in tal caso

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_n^2}{1 + 2\zeta_n} = \omega_n^2 [1 - 2\zeta_n + O(\zeta_n^2)] \quad (3.61)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_n^2}{1 - 2\zeta_n} = \omega_n^2 [1 + 2\zeta_n + O(\zeta_n^2)] \quad (3.62)$$

che mostra che, a parte le solite approssimazioni sull'ordine dello smorzamento, si ottengono le stesse radici fornite dalle (3.57) e (3.58) sulla base dei punti di stazionarietà della parte reale della recettanza.

Per quanto riguarda la stima della  $r$ -esima deformata modale negli  $N_{modi}$  punti di misura sperimentali nell'ambito delle stesse ipotesi di SDOF, si consideri nota dalle misure una riga di *FRF*, ad esempio la prima

$$H_{11}(\omega) \quad H_{12}(\omega) \quad H_{13}(\omega) \quad \dots H_{1N_{\text{modi}}}(\omega) \quad (3.63)$$

Dalla (3.39), supponendo noti per il suddetto modo  $\omega_{nr}$  e  $\zeta_r$ , si ha per  $\omega = \omega_{nr}$

$$H_{11}(\omega_{nr}) \cong \frac{\phi_i^{*(r)} \phi_i^{*(r)}}{j2\omega_{nr}^2 \zeta_r} \rightarrow \phi_i^{*(r)} \cong -\frac{2\zeta_r \omega_{nr}^2}{\phi_i^{*(r)}} H_{111}(\omega_{nr}) \quad (3.64)$$

nella quale si è utilizzato il fatto che in corrispondenza della risonanza la parte reale delle *FRF* è nulla. Si possono allora scrivere, applicando analogo ragionamento sugli elementi della medesima riga della matrice delle *FRF*,

$$H_{12}(\omega_{nr}) \cong \frac{\phi_i^{*(r)} \phi_2^{*(r)}}{j2\omega_{nr}^2 \zeta_r} \rightarrow \phi_2^{*(r)} \cong -\frac{2\zeta_r \omega_{nr}^2}{\phi_i^{*(r)}} H_{112}(\omega_{nr}) \quad (3.65)$$

$$H_{1N_{\text{modi}}}(\omega_{nr}) \cong \frac{\phi_i^{*(r)} \phi_{N_{\text{modi}}}^{*(r)}}{j2\omega_{nr}^2 \zeta_r} \rightarrow \phi_{N_{\text{modi}}}^{*(r)} \cong -\frac{2\zeta_r \omega_{nr}^2}{\phi_i^{*(r)}} H_{11N_{\text{modi}}}(\omega_{nr}) \quad (3.66)$$

Pertanto, si ottiene per le componenti dell'*r-esimo* modo, ponendo  $c_r = -2\zeta_r \omega_{nr}^2 / \phi_i^{*(r)}$

$$\begin{Bmatrix} \phi_i^{*(r)} \\ \phi_2^{*(r)} \\ \dots \\ \phi_{N_{\text{Modi}}}^{*(r)} \end{Bmatrix} = c_r \begin{Bmatrix} H_{111}(\omega_{nr}) \\ H_{112}(\omega_{nr}) \\ \dots \\ H_{11N_{\text{Modi}}}(\omega_{nr}) \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

la quale mostra come, a parte un fattore  $c_r$ , inessenziale ai fini della sua stessa definizione, le parti immaginarie relative ad una riga della matrice delle *FRF* valutate in corrispondenza della frequenza di risonanza forniscono una stima della deformata modale del modo corrispondente alla risonanza medesima. Si aggiunge inoltre che si possono dedurre le medesime conclusioni se si considerassero *FRF* con in uscita accelerazioni, cioè se, in luogo della (3.39), si considerasse la

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{N_{\text{modi}}} \frac{-\omega^2 \phi_i^{*(r)} \phi_j^{*(r)}}{-\omega^2 + \omega_r^2 + j2\omega\omega_r \zeta_r} \quad (3.68)$$

Ripercorrendo difatti quanto mostrato in precedenza si perverrebbe naturalmente ad un risultato analogo dato dalla (3.67) con la sola differenza che si sarebbe definita come costante la  $c_r = -2\zeta_r / \phi_i^{*r}$ .

Naturalmente questo approccio presenta molte limitazioni: è evidente dalla (3.51) che la stima del residuo e del fattore di smorzamento modale dipendono dalla valutazione del valore di picco del modulo della *FRF* che è stata misurata: in particolare si hanno difficoltà nel caso di modi poco smorzati a causa del numero molto limitato di punti che si hanno a disposizione all'interno della larghezza di banda a mezza potenza.

Anche l'ipotesi di base per la quale si considerano come separati i modi presenti nella banda

di frequenza scelta per il segnale non è corretta perché esiste sempre una certa influenza, sensibile almeno per i modi più vicini, sul comportamento alla risonanza del generico modo di tutti i modi fondamentali.

Diverse tecniche sono state proposte per la ricostruzione dei parametri modali, esse sono generalmente disponibili su tutti i software specialistici nel campo dell'analisi modale, e consentono, quando è ritenuto necessario, di utilizzare per la ricostruzione dei parametri modali un modello a più modi.

Si osserva che si possono ottenere delle valutazioni migliori dei parametri modali dall'esame separato della parte reale e della parte immaginaria della *FRF* nell'intorno della risonanza: ad esempio le frequenze corrispondenti ai punti di massimo della parte reale permettono di valutare la larghezza di banda a mezza potenza e la frequenza di risonanza con maggiore facilità anche se rimangono i problemi legati alla risoluzione in frequenza ed al numero limitato di punti disponibili nella larghezza di banda a mezza potenza. Dal valore di picco della parte immaginaria in funzione della frequenza è possibile ottenere una stima migliore della ampiezza della deformata modale.

Come sempre la valutazione delle frequenze di risonanza dei vari modi presenti nella banda di frequenza misurata è più semplice e precisa mentre maggiori problemi sono legati alla determinazione delle deformate modali, che richiedono un numero elevato di punti di misura e/o presentano delle incertezze maggiori e dei coefficienti di smorzamento modale che, in generale, tendono ad essere sovrastimati. Si può valutare una imprecisione di qualche per mille per la misura delle frequenze di risonanza mentre imprecisioni molto più grandi si hanno per la valutazione dei coefficienti di smorzamento.

### 3.5. Funzioni dell'analizzatore e problemi di analisi del segnale.

Lo strumento base nel campo dell'analisi modale è l'analizzatore di spettro, nella configurazione più semplice, che si riferisce ad un sistema *SISO* (*Single Input Single Output*) ma che può essere a più canali sia per il segnale di ingresso che per quello di uscita, quando si riferisce ad un sistema *MIMO* (*Multi Input Multi Output*). Questo strumento è in grado di calcolare diverse caratteristiche dei segnali di ingresso e di uscita a partire dal calcolo della trasformata discreta di Fourier, *FFT*, da questa è possibile calcolare le trasformate di Fourier e le funzioni di densità spettrale che, come si è detto, sono generalmente impiegate per la valutazione delle *FRF*.

Il segnale di ingresso viene discretizzato con un convertitore analogico digitale, A/D, e poi registrato come una successione di  $N$  valori intervallati da un tempo di campionamento,  $T_s$ , per un tempo totale di osservazione, indicato con  $T$  dove  $T = NT_s$ .

Se si accetta l'ipotesi, insita nell'uso della trasformata di Fourier discreta, che il segnale osservato nel tempo  $T$  sia periodico proprio con periodo  $T$  si può calcolarne la trasformata discreta di Fourier ed ottenere così una stima della trasformata di Fourier stessa.

Vi sono delle relazioni che legano tra loro la durata,  $T$ , del tempo di osservazione del segnale, la pulsazione di campionamento, indicata con  $\omega_s$ , il numero dei dati nel tempo che vengono considerati nella misura, indicato con  $N$ , il campo di pulsazione che si considera per lo spettro del segnale, determinato da  $\omega_{\max}$  e la risoluzione in pulsazione usata nell'analisi del segnale indicata con  $\Delta\omega$ ; in particolare si ha:

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi f_s}{2} = \frac{2\pi N}{2T} = \frac{\pi N}{T} \quad (3.69)$$



$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\pi 2.56}{2\pi T} = \frac{1.28}{T} \quad (3.70)$$

nelle quali si sono utilizzate la tesi del teorema del campionamento  $\omega_s = 2\omega_{\max}$  per evitare il fenomeno *dell'aliasing*, l'espressione della risoluzione (o passo) in frequenza  $\Delta\omega = \omega_{\max}/N_R^*$  in cui  $N_R^*$  è il numero di righe spettrali e cioè i campioni in frequenza della trasformata forniti dall'algoritmo *FFT* i quali sono normalmente in numero pari a  $N_R^* = N/2.56$ .

Il numero dei dati nel tempo che è opportuno acquisire nella misura, indicato con  $N$ , viene fissato, in genere con la possibilità di scelte diverse a seconda delle caratteristiche dell'analizzatore: questo numero si riferisce quasi sempre a potenze di due e valori tipici sono 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768 e quindi il campo di frequenza  $\omega_{\max}$ , e la risoluzione in pulsazione,  $\Delta\omega$ , ed in frequenza,  $\Delta f$ , sono legati alla durata della misura. Le possibilità offerte dai processori moderni, consentono ormai di lavorare con  $N$  molto elevati e di ottenere, quindi, delle risoluzioni in frequenza molto piccole.

Si osserva, dalla (3.70), che in tutti i casi per ottenere dei valori molto piccoli per la risoluzione in frequenza bisogna lavorare con tempi di osservazione del segnale molto lunghi; se si dispone di un numero molto alto di punti di misura,  $N$ , si ha il vantaggio di acquisire delle misure su di un campo di frequenza molto ampio, ma il tempo di osservazione necessario per ottenere la risoluzione in frequenza fissata è condizionato soltanto dalla (3.70) e quindi dal tempo di osservazione  $T$ .

La necessità di impiegare un tempo di osservazione lungo per ottenere una buona risoluzione in frequenza può diventare un punto critico nella sperimentazione in particolare nel caso di strutture, come quelle tipiche nel campo delle grandi strutture spaziali, che sono caratterizzate da frequenze proprie molto basse. In questo caso infatti la risoluzione in frequenza necessaria per la misura diviene molto piccola ed il tempo di osservazione che ne consegue diventa praticamente impossibile; il problema è reso ancora più difficile nel caso in cui i valori dei coefficienti di smorzamento modale siano molto bassi, a causa del problema del troncamento del segnale che è ancora rilevante all'interno del tempo di osservazione.

Diversi aspetti dell'analisi digitale danno luogo a problemi che sono collegati alle approssimazioni insite nel procedimento di discretizzazione ed alla necessità pratica di osservare il segnale per un tempo di acquisizione finito e molto limitato.

Le problematiche relative sono legate ai problemi generali della trattazione dei segnali che vanno molto oltre al campo specifico dell'analisi modale; questi problemi sono di grande importanza pratica e la loro conoscenza può essere necessaria per giungere all'acquisizione e all'impiego di dati sperimentali che siano veramente affidabili. Nel seguito si riportano, in forma molto semplificata, alcune di tali problematiche.

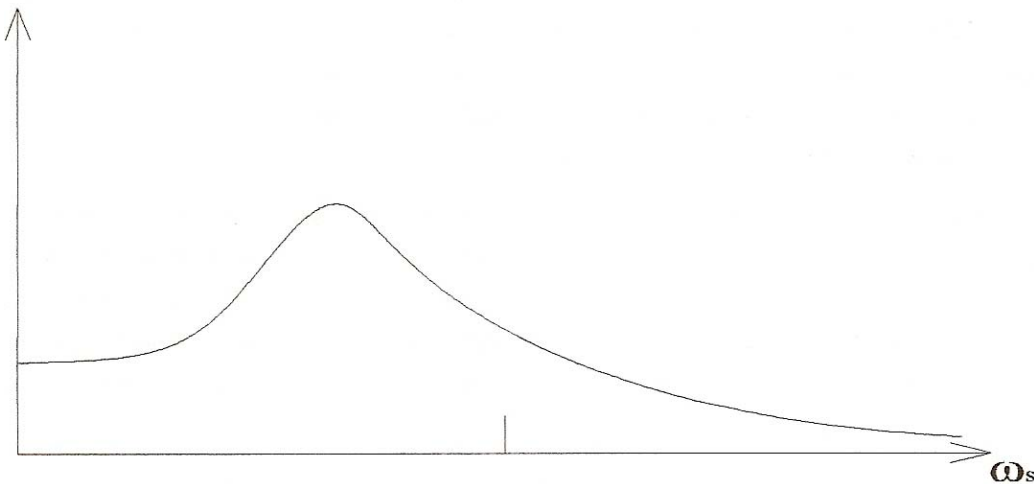
### 3.5.1. Aliasing.

È un fenomeno che è legato al processo di discretizzazione del segnale continuo  $x(t)$ : se la frequenza usata per il campionamento del segnale  $\omega_s$  è fissata pari a:

$$\omega_s = 2\omega_{\max} \quad (3.71)$$

ma è troppo bassa rispetto alla composizione effettiva in frequenza del segnale si ha un effetto di distorsione che è dovuto alla presenza significativa di frequenze del segnale che sono al di

fuori della banda passante prevista dalla scelta della frequenza di campionamento; questo porta all'introduzione di componenti "false" a bassa frequenza che derivano in realtà dalle componenti ad alta frequenza fuori banda che vengono "riflesse" all'interno della banda passante, come indicato nelle figg. 3.2 e 3.3.



**Figura 3.2.** Modulo dello spettro teorico di un segnale e sua frequenza di campionamento fissata  $\omega_s$

Infatti la frequenza di campionamento, scelta in base alla banda passante desiderata, non è in grado di ricostruire correttamente i segnali con  $\omega > \omega_{\max}$  che vengono erroneamente interpretati come segnali a frequenza  $\omega^* < \omega_{\max}$ . La distorsione nello spettro del segnale si può spiegare con il fatto che le componenti del segnale che sono state "tagliate", cioè che si trovano a frequenze superiori alla metà della frequenza di campionamento vengono ad essere riflesse, da cui il nome "aliasing", nella banda passante scelta per il segnale, compresa tra 0 ed  $\omega_s/2$ .

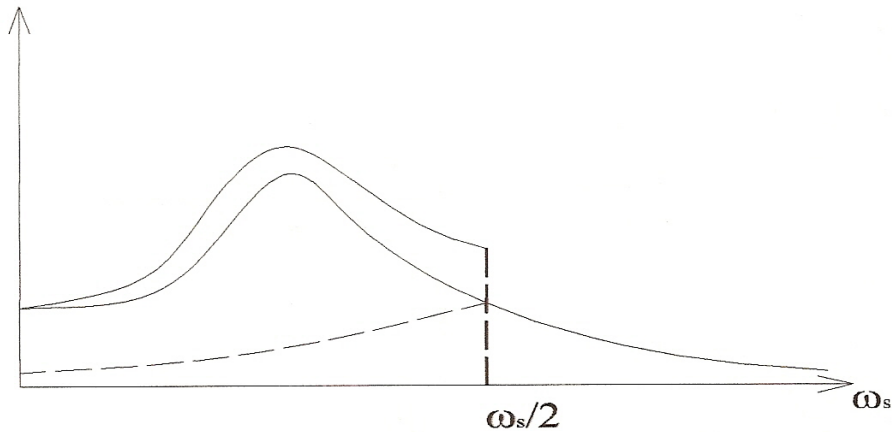
Nella fig. 3.2 viene indicato lo spettro "vero" del segnale ed in fig. 3.3 lo spettro distorto, ottenuto dalla somma delle componenti "vere" e "riflesse".

La soluzione a questo problema sta nell'impiego di filtri "passo basso" che hanno il compito di "tagliare" e quindi di eliminare le frequenze presenti nel segnale al di sopra del campo di frequenze che è stato indicato con la scelta della banda passante. In generale l'impiego di filtri "anti aliasing" viene disposto automaticamente con la scelta stessa della banda passante nell'analizzatore in quanto la presenza di questi filtri è assolutamente necessaria per ottenere dei dati sperimentali che siano effettivamente utilizzabili nell'analisi modale: questo problema è quindi in genere "trasparente" per l'operatore che non deve compiere nessuna operazione per eliminare tale effetto.

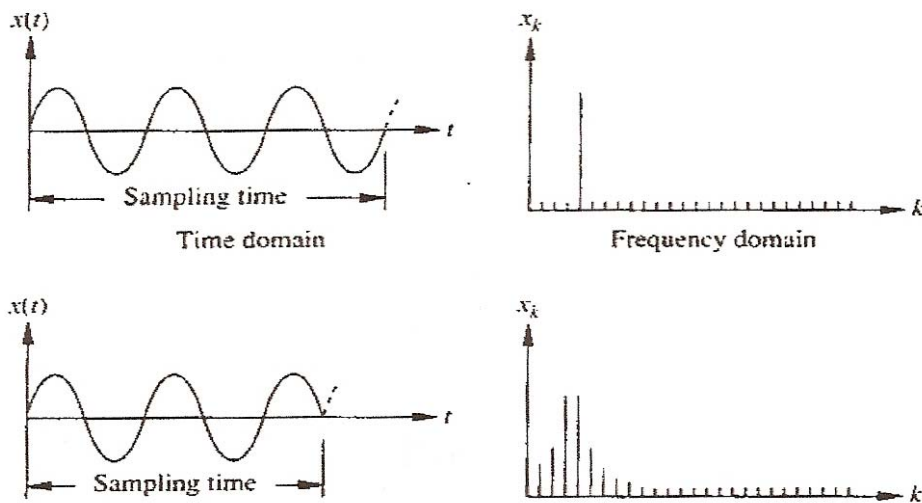
### 3.5.2. Leakage (dispersione) e windowing.

E' un fenomeno che è legato alla durata limitata del tempo di osservazione del segnale ed al fatto che il segnale, per la valutazione numerica delle *FRF* con il calcolo delle *FFT* viene considerato come periodico con un periodo pari al tempo di osservazione  $T$ . Se si considera un segnale armonico semplice e se la durata del tempo di osservazione è tale da corrispondere esattamente con il periodo del segnale o con un multiplo intero di periodi, si ottiene lo spettro effettivo, che nell'esempio riportato in fig. 3.4 e costituito da una sola riga alla frequenza,  $f_1$ , del segnale armonico semplice. Se invece il tempo di osservazione non corrisponde al periodo

del segnale, come avviene in generale, si ha una discontinuità nel segnale che viene reso periodico, ma non ha valore nullo alla fine del periodo e si ha una distorsione nello spettro. Esso si presenta con più righe, invece della sola riga a frequenza  $f_1$ , del segnale armonico semplice, che rappresenta lo spettro "vero" e con una "diffusione" di energia su altre righe nello spettro che è provocata dalla "discontinuità" nel tempo dovuta al processo numerico di periodizzazione forzata.



**Figura 3.3.** Modulo dello spettro teorico di un segnale e quello dello spettro effettivo valutato campionando il segnale con frequenza  $\omega_s$ .



**Figura 3.4.** Segnali con relativi spettri discreti: effetto della dispersione.

Con questo procedimento si modifica il segnale di interesse con l'impiego di un altro segnale del tempo prima di eseguire la trasformata di Fourier in modo da ridurre i problemi di "leakage": si tratta in sostanza di portare a zero il segnale all'interno del tempo di osservazione in modo da eliminare la discontinuità nel tempo che si crea per effetto della periodizzazione.

Se si indica con  $w(t)$  la funzione del tempo che costituisce la finestra il segnale che viene analizzato è dato dal prodotto del segnale allo studio,  $x(t)$ , e della finestra temporale  $w(t)$ :

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t) \quad (3.72)$$

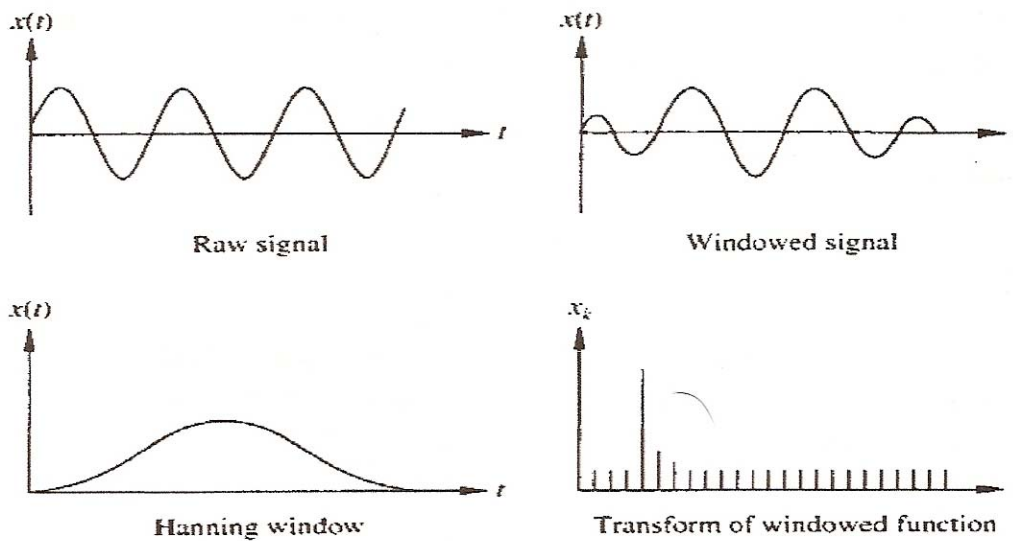


Figura 3.5. Effetto di diverse finestre su un segnale armonico nel dominio del tempo e della frequenza.

ovvero, nel dominio della frequenza

$$\tilde{x}_w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\sigma) \tilde{x}(\omega - \sigma) d\sigma \quad (3.73)$$

In un analizzatore sono sempre disponibili delle funzioni diverse per le “finestre” temporali, che possono essere di tipo rettangolare, esponenziale, di Hanning: esse vengono scelte a seconda del tipo del segnale di ingresso, in alcuni sistemi di misura è anche possibile definire a scelta dell'operatore delle funzioni del tempo da usare come “finestre” per scopi particolari. In fig. 3.5 sono riportate alcune funzioni classiche. Le quattro finestre più comunemente impiegate sono definite a partire dalla funzione:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= a_0 - a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) - a_3 \cos(3\omega_0 t) + a_4 \cos(4\omega_0 t) \\ \omega(t) &= 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (3.74)$$

Si ottiene così (fig. 3.5)

- finestra rettangolare:  $a_0 = 1; \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0;$
- finestra di Hanning:  $a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = a_3 = a_4 = 0;$
- finestra di Kaiser-Bessel:  $a_0 = 1; \quad a_1 = 1.298; \quad a_2 = 0.244; \quad a_3 = 0.003; \quad a_4 = 0;$
- finestra Flap top:  $a_0 = 1; \quad a_1 = 1.933; \quad a_2 = 1.286; \quad a_3 = 0.388; \quad a_4 = 0.32;$

dove  $w_0$  indica la pulsazione fondamentale ed i coefficienti  $a_k$  sono scelti in modo che le aree determinate dalle diverse finestre sono uguali.

E' ovvio che la finestra rettangolare “pesa” in maniera uguale tutti i dati, mentre le altre finestre oltre a riportare a zero i valori iniziale e finale danno anche una importanza maggiore ai punti che sono al centro della finestra di osservazione o ai valori iniziali nel caso della finestra esponenziale.

Per quanto riguarda l'impiego delle diverse finestre a seconda del segnale si hanno:

- Segnali periodici: particolarmente adatta la finestra di Hanning mentre quella di

Kaiser-Bessel è adatta per selettività in frequenza e quella Flat-Top per una buona determinazione in ampiezza.

- Segnali impulsivi: particolarmente adatta la finestra rettangolare, insieme a quella esponenziale; in alcuni casi può essere usata quella di Hanning;
- Segnali random: viene usata principalmente la finestra di Hanning ed in qualche caso quella di Kaiser-Bessel.

### 3.5.3. Zoom.

Come si è visto esiste un problema legato alla risoluzione in frequenza, nell'analizzatore si può lavorare con un certo numero di righe in frequenza, tipicamente 400, 800, 1600, 3200, 6400, 12800 a seconda del numero di dati che si possono acquisire nella misura e la risoluzione in frequenza è legata al valore massimo della frequenza:

$$\Delta f = \frac{f_{\max}}{N_R} = \frac{f_s}{2N_R} = \frac{1}{2T_s N_R} = \frac{N}{2TN_R} = \frac{2.56}{2T} = \frac{1.28}{T} \quad (3.75)$$

dove  $N_R$  indica il numero di righe in frequenza e  $T$  il tempo di osservazione; quindi una volta fissato  $N_R$  la risoluzione in frequenza  $\Delta f$  si riduce all'aumentare della frequenza massima che si considera per il segnale, cioè all'aumentare della banda di frequenza. Il numero di righe in frequenza è legato al numero di dati acquisiti dalla relazione:  $N_R = \frac{N}{256}$ , come già detto una risoluzione molto elevata in frequenza richiede un tempo di osservazione molto lungo.

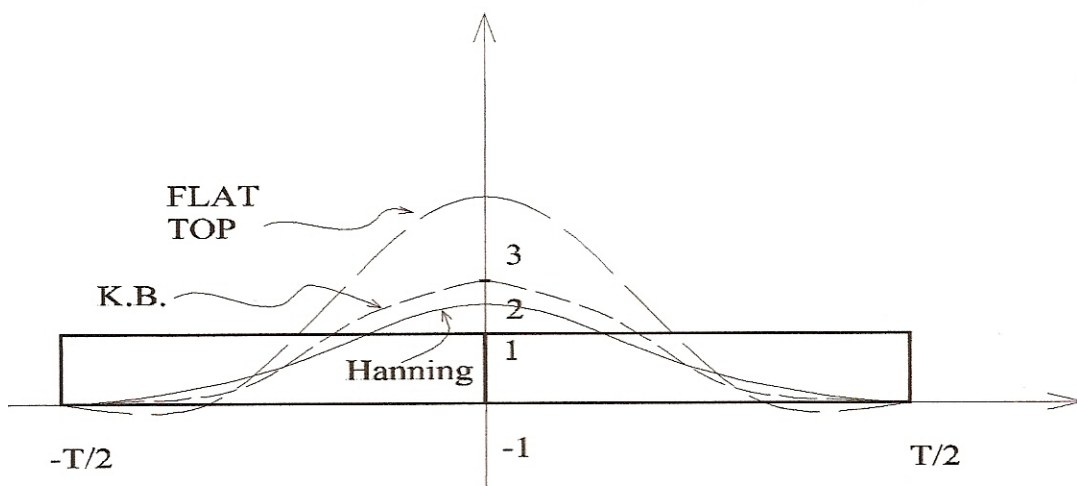


Figura 3.6. Finestre rettangolare, Hanning, Kaiser-Bessel e Flat-Top.

Con lo “zoom” viene offerta la possibilità di traslare la misura nell'intorno della frequenza di interesse in modo da utilizzare le righe rese disponibili dall' algoritmo trasformata di Fourier veloce che fornisce comunque i dati dalla frequenza nulla alla frequenza di interesse ed ottenere così una risoluzione molto elevata. Ad esempio se il segnale è armonico semplice del tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (3.76)$$

e viene moltiplicato per una funzione:

$$x^*(t) = \cos(\omega_1 t) \quad (3.77)$$

si ottiene:

$$x_z(t) = x(t)x^*(t) = A \sin(\omega t) \cos(\omega_1 t) \quad (3.78)$$

che diviene:

$$x_z(t) = \frac{A}{2} [\sin(\omega - \omega_1)t] + [\sin(\omega + \omega_1)t] \quad (3.79)$$

se si elimina con un filtraggio il termine a frequenza più alta si ottiene una traslazione del segnale dalla sua pulsazione originaria  $\omega$  verso una frequenza più bassa con la pulsazione  $\omega_1$  che si è scelta con la funzione  $x^*(t)$  e quindi il segnale da “zoommare”, indicato con  $x_z(t)$  risulta traslato sulla pulsazione  $(\omega - \omega_1)$ .

Esistono tecniche diverse per ottenere questo risultato, ma in tutti i casi i tempi necessari per l’osservazione del segnale si allungano in proporzione al fattore di zoom. Si osserva che una risoluzione in frequenza molto piccola è necessaria nel caso di strutture che abbiano coefficienti di smorzamento modale molto bassi, in modo da poter ottenere dei dati significativi da più punti di misura ed anche nel caso in cui siano presenti dei modi strettamente accoppiati, e naturalmente per strutture con modi fondamentali a frequenze molto basse.

### 3.5.4. Procedimenti di media.

L’effetto del rumore sulla misura viene ridotto con l’impiego di un numero, che può essere anche molto elevato, di medie successive per la valutazione di una singola misura; il numero di medie che si sceglie è legato al livello di affidabilità statistica che si vuole ottenere e viene limitato dal tempo disponibile e quindi dal “costo” della misura. Una indicazione per la valutazione del numero di medie necessarie si può avere dalla misura della coerenza  $\gamma^2$ .

Nel caso di impiego di ingresso random viene anche utilizzata una tecnica di sovrapposizione nella valutazione delle medie in cui le  $n$  misure non vengono ottenute con dati completamente diversi e quindi con un tempo di osservazione totale pari ad  $nT$ , se con  $T$  si indica il tempo di osservazione di una singola misura e con  $n$  il numero delle medie, ma in un tempo di molto inferiore ad  $nT$  ricorrendo alla sovrapposizione parziale nel tempo della misura. Questo significa che ogni dato comprende una parte del segnale già utilizzato per la misura precedente riducendo così il tempo totale di misura: il procedimento è naturalmente vantaggioso rispetto alla utilizzazione sequenziale dei dati disponibili, e consente di impiegare un numero di medie molto elevato.

## CAPITOLO 4

### METODI GENERALI DI OTTIMIZZAZIONE

*Nel capitolo sono richiamati alcuni concetti riguardanti il problema dell'ottimizzazione, sia vincolata che non, sono discussi alcuni metodi per la soluzione del problema di ottimizzazione con particolare riferimento agli algoritmi che verranno in seguito utilizzati per determinare il minimo della funzione di errore.*

#### 4.1. Descrizione del problema di ottimizzazione.

Un problema di ottimizzazione [56] consiste nel determinare il valore di un vettore di *variabili di decisione*  $x \in \mathbb{R}^n$  che minimizza una *funzione obiettivo*  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , quando e' vincolato ad appartenere ad un *insieme ammissibile*  $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ; cioè consiste nel problema:

$$\min_{x \in F} f(x) \quad (4.1)$$

Osserviamo subito che un problema di massimo si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, i punti di massimo (ove esistano) del problema

$$\max_{x \in F} f(x) \quad (4.2)$$

coincidono con i punti di minimo del problema:

$$\min_{x \in F} -f(x) \quad (4.3)$$

e risulta

$$\max_{x \in F} f(x) = - \min_{x \in F} (-f(x)) \quad (4.4)$$

In base a tale osservazione ci si può riferire esclusivamente, senza perdita di generalità, a problemi di minimizzazione.

Un punto  $x^* \in F$  si dice punto di minimo globale (assoluto) di  $f$  su  $F$  se risulta:

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in F \quad (4.5)$$

e in tal caso, si dice che  $f(x^*)$  è il minimo globale di  $f$  su  $F$ , ossia

$$f(x^*) = \min_{x \in F} f(x) \quad (4.6)$$

Si dice che  $x^* \in F$  è un punto di minimo globale stretto di  $f$  su  $S$  se risulta:

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in F, x \neq x^* \quad (4.7)$$

E' opportuno mettere in evidenza che assegnati  $F$  ed  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  potrebbero anche non esistere soluzioni ottime.

Una prima possibilità è che l'insieme ammissibile  $F$  sia vuoto; in tal caso non esistono *punti ammissibili* e di conseguenza non esistono soluzioni ottime.

Se  $F$  non è vuoto, possono verificarsi, nel caso generale, le situazioni seguenti:

- La funzione obiettivo è illimitata inferiormente su  $F$  ossia:

$$\inf_{x \in F} f(x) = -\infty \quad (4.8)$$



ed in tal caso non esiste un valore minimo di  $f$  su  $F$ ;

- La funzione obiettivo è limitata inferiormente su  $F$  ossia:

$$\inf_{x \in F} f(x) > -\infty \quad (4.9)$$

ma tuttavia non esistono punti di minimo globale di  $f$  su  $F$ ;

- Esistono punti di minimo globale di  $f$  su  $F$ , in tal caso la funzione obiettivo è necessariamente limitata inferiormente su  $F$  e si ha:

$$\inf_{x \in F} f(x) = \min_{x \in F} f(x) \quad (4.10)$$

Solo nell'ultimo caso, ovviamente, ci si può porre il problema della ricerca di una soluzione ottima.

Risolvere un problema di ottimizzazione può quindi significare, in pratica:

- stabilire se l'insieme ammissibile è non vuoto, oppure concludere che non esistono soluzioni ammissibili;
- stabilire se esistono soluzioni ottime, oppure dimostrare che il problema non ammette soluzioni ottime;
- determinare (eventualmente in modo approssimato) una soluzione ottima.

Dal punto di vista applicativo è possibile individuare una vasta gamma di problematiche, appartenenti a campi d'indagine anche molto diversi tra loro, più o meno interessate da problemi di ottimizzazione. Per esempio l'ottimizzazione strutturale consente di definire i valori da assegnare a tutte le variabili di progetto affinché si progetti un elemento strutturale resistente allo stato di sollecitazione imposto ed al contempo con il minor peso o costo ricercato. Lo stesso calcolo del moltiplicatore di collasso di una struttura è un problema di ottimizzazione vincolata, con i vincoli definiti dalle condizioni di equilibrio. Le variabili sulle quali ottimizzare sono diverse, ad ogni problema è possibile associarne alcune, come ad esempio le dimensioni geometriche in una trave di calcestruzzo, la forma di una sezione in una trave di acciaio, la geometria di una travatura reticolare o come nel caso in esame, che non appartiene alla categoria dell'ottimizzazione strutturale, dei parametri meccanici potenzialmente sedi di danneggiamento che minimizzano la funzione di errore generata con un qualsiasi metodo di correlazione.

## 4.2. Ottimizzazione vincolata e non vincolata.

Le variabili di base che governano il problema di ottimizzazione sono:

- la funzione obiettivo  $f(x)$ , che in generale può essere minimizzata o massimizzata;
- il suo insieme di definizione  $F$ ;

Le variabili  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  possono rappresentare:

- una tipologia strutturale;
- le proprietà fisiche o meccaniche della struttura;
- la dimensione degli elementi strutturali;
- altro (p.e. nel nostro caso dei parametri meccanici da cui dipende la funzione di errore);

All'interno dei problemi di ottimizzazione due casi sono di particolare interesse [56]:

1. Problemi di ottimizzazione non vincolata se:  $F \equiv R^n$ , cosicché il problema (4.1) diviene:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad (4.11)$$

Più in generale il problema (4.1) è non vincolato se  $F$  è un insieme aperto in  $R^n$ . Le condizioni di ottimalità non cambiano se  $F$  è un aperto, quindi assumeremo  $F \equiv R^n$ .

2. Problemi di ottimizzazione vincolata se:  $F \subset R^n$ , ossia se l'insieme ammissibile è descritto da vincoli di disuguaglianza e/o vincoli di uguaglianza sulle variabili di decisione:

$$F = \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m\} \quad (4.12)$$

in questo caso il problema 4.1 diviene:

$$\left[ \begin{array}{l} \min_{x \in R^n} f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots m \end{array} \right] \quad (4.13)$$

con  $g : R^n \rightarrow R^p$  ed  $h : R^n \rightarrow R^m$

Questa suddivisione rappresenta la distinzione principale di tutti i problemi di ottimizzazione [57-65].

Un problema di ottimizzazione vincolata, si dice *lineare*, nel caso in cui tutte le funzioni:  $f_i$ ,  $g_i$ , ( $i = 1 \dots p$ ),  $h_i$  ( $i = 1 \dots m$ ), sono combinazione lineare delle variabili di decisione, cioè sono funzioni della forma:

$$v(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots c_n x_n \quad (4.14)$$

ove  $c_i$   $i = 1 \dots n$  sono coefficienti. Un problema di ottimizzazione lineare, è necessariamente vincolato, poiché, altrimenti si tratterebbe sempre di un problema illimitato.

La (4.1) è un problema di ottimizzazione non lineare se almeno una tra le funzioni  $f$ ,  $g_i$  ( $i = 1 \dots p$ ),  $h_i$  ( $i = 1 \dots m$ ), del problema vincolato o non vincolato, risulta essere non lineare, rispetto ad almeno una delle componenti del vettore delle variabili di decisione  $x$

Per il problema vincolato, si assume usualmente che il numero  $m$  di vincoli di uguaglianza siano maggiori del numero  $n$  di variabili di decisione, cioè si assume  $m \geq n$ . Altrimenti, dovendo le  $n$  variabili soddisfare  $m$  equazioni, l'insieme ammissibile potrebbe risultare vuoto, a meno che alcuni vincoli non siano tra di loro dipendenti, e quindi ridondanti. Una limitazione analoga, non vale invece per i vincoli di disuguaglianza.

A volte, tra i vincoli di disuguaglianza, si mettono in esplicita evidenza i vincoli semplici sulle variabili, vincoli che esprimono limitazioni sul valore minimo  $m_i$  e massimo  $M_i$  che una variabile  $x_i$  può assumere. In questo caso, il problema vincolato diviene:

$$\left[ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \dots p \\ h_j(x) = 0 \quad j = 1 \dots m \\ m_i \leq x_i \leq M_i \end{array} \right] \quad (4.15)$$

In generale in problemi di ottimizzazione non lineare, la ricerca di soluzioni globali, può risultare difficile, e può avere interesse anche la ricerca di soluzioni di tipo “locale”. Per poter definire il concetto di “*punto di minimo locale*” occorre introdurre il concetto di *intorno sferico aperto S* di un punto. In particolare dato  $x^*$ , un intorno sferico aperto di  $S$  di centro  $x^*$  e raggio  $\rho > 0$  è definito come:

$$S(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \rho\} \quad (4.16)$$

Allora un punto  $x^* \in F$  si dice punto di minimo locale (o relativo) di  $f$  su  $F$  se esiste un intorno  $S(x^*, \rho)$  di  $x^*$  tale che:

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in F \cap S(x^*, \rho) \quad (4.17)$$

ed in tal caso, si dice che  $f(x^*)$  è un minimo locale di  $f$  su  $F$ .

Un punto  $x^* \in S$  è un punto di minimo locale stretto di  $f$  su  $F$  se esiste un intorno  $S(x^*, \rho)$  di  $x^*$  tale che:

$$f(x^*) < f(x) \text{ per ogni } x \in F \cap S(x^*, \rho) \quad x \neq x^* \quad (4.18)$$

E' immediato rendersi conto del fatto che un punto di *minimo globale* è anche un punto di *minimo locale*.

Il problema di ottimizzazione può essere ancora, a seconda della dimensione, multidimensionale o monodimensionale. I metodi di risoluzione del problema multidimensionale sono validi anche per il problema monodimensionale, non vale la relazione inversa, a meno di trasformare il problema da multi a monodimensionale. Dove è possibile, questa riduzione viene realizzata intenzionalmente, in quanto risulta più semplice risolvere un problema multidimensionale se lo si rende monodimensionale. Di alcuni metodi di risoluzione si tratterà nelle pagine seguenti.

### 4.3. Condizioni di ottimalità.

Una soluzione locale  $x^*$  di un problema di ottimizzazione deve soddisfare una condizione necessaria di ottimalità (*C.N.O.*). Ad esempio, per il problema non vincolato

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \quad (4.19)$$

la *C.N.O.* consiste nel fatto che la derivata della funzione  $f$  si deve annullare in

$$x^* : \frac{df(x^*)}{dx} = 0; \quad (4.20)$$

I punti che soddisfano una *C.N.O.* per un problema non sono necessariamente soluzioni del problema stesso: ad esempio i punti che annullano la derivata di  $f$  nella (4.20) possono essere punti di massimo, anziché di minimo. Comunque, la definizione di *C.N.O.* è di fondamentale importanza nell'ottimizzazione, poiché detto  $\Omega$  l'insieme dei punti che soddisfa la *C.N.O.*, e risultando evidentemente  $\Omega \subseteq F$ , ci si può limitare a cercare la soluzione nell'insieme  $\Omega$  anziché in tutto  $F$ , che di solito è molto più grande di  $\Omega$ . Per un punto ammissibile generico  $x \in F$ , la *C.N.O.* fornisce un “*certificato di ottimalità*”, nel senso che se  $x \notin \Omega$ ,  $x$  non può essere soluzione del problema, mentre può esserlo (ma può anche non esserlo) se  $x \in \Omega$ .

Se poi un punto  $x^*$  soddisfa una condizione sufficiente di ottimalità (*C.S.O.*) per un problema di ottimizzazione, si può affermare che  $x^*$  è una soluzione locale del problema stesso. Ad esempio, per il problema (4.19), una condizione sufficiente di ottimalità è che in  $x^*$  si annulli la derivata prima e sia positiva la derivata seconda:  $\frac{df(x^*)}{dx} = 0$ ;  $\frac{d^2f(x^*)}{dx^2} > 0$ . Si fa notare però che un punto  $x^*$  che è soluzione di un problema di ottimizzazione può non soddisfare la *C.S.O.* per il problema stesso: ad esempio, il problema

$$\min_{x \in F} f(x) = x^4 \quad (4.21)$$

ha come soluzione  $x^* = 0$ , anche se la derivata seconda di  $x^4$  in  $x^* = 0$  si annulla, anziché essere positiva. Pertanto, se per un problema di ottimizzazione si è trovato un punto di  $\Omega$  che non soddisfa la relativa *C.S.O.*, non si può escludere che il punto trovato sia soluzione del problema.

#### 4.4. Generalità sugli algoritmi di ottimizzazione.

Definito l'insieme delle soluzioni ammissibili, bisogna ricercare al suo interno la soluzione che soddisfa il problema di minimo. Nel fare ciò si incontrano difficoltà che nascono sia dalla forma della funzione obiettivo che dalla presenza delle restrizioni.

I problemi di ottimizzazione che si presentano nella pratica sono di solito così complessi che non è possibile determinarne una soluzione per via analitica. La complessità è determinata innanzi tutto dal numero di variabili e di vincoli, che definiscono la dimensione del problema; e poi dalla eventuale presenza di funzioni non lineari tra le funzioni  $f$ ;  $g_j$ ;  $h_j$ . La soluzione analitica è possibile solo nel caso di poche variabili e di funzioni estremamente semplici.

Nella pratica, per risolvere un problema di ottimizzazione occorre fare ricorso ad un algoritmo iterativo, cioè ad un programma di calcolo che, data una approssimazione corrente  $x^k$  della soluzione, determina, con una appropriata sequenza di operazioni, una nuova approssimazione  $x^{k+1}$ . A partire da una approssimazione iniziale  $x_0$  si determina così una successione  $\{x^k\}$ .

Occorre però a questo punto mettere in evidenza una limitazione intrinseca degli algoritmi di ottimizzazione, che consiste nel fatto che, per come sono costruiti, sono in grado di determinare solo punti che, per un dato problema, ne soddisfano le condizioni necessarie di ottimalità: cioè solo punti dell'insieme  $\Omega$  introdotto nel paragrafo precedente. Se si denota

con  $\chi$  l'insieme delle soluzioni locali del problema, risulta evidentemente  $\chi \subseteq \Omega \subseteq F$ . Le prestazioni di un algoritmo vanno perciò valutate in relazione alla sua capacità di determinare punti di  $\Omega$  che, in questo contesto, viene detto *insieme bersaglio*, piuttosto che in relazione alla capacità di determinare punti di  $\chi$ .

Per *convergenza* dell'algoritmo si intende appunto la sua capacità di centrare, con la successione  $\{x^k\}$  che genera, l'insieme bersaglio  $\Omega$ . L'algoritmo si dice *convergente* se fornisce un punto di  $\Omega$  dopo un numero finito di iterazioni, o almeno, al limite, per  $k \rightarrow \infty$ . Nel primo caso si parla di convergenza *finita*, nel secondo di convergenza *asintotica*. La convergenza finita si consegue solo per problemi particolari e algoritmi specifici per questi; ad esempio, l'algoritmo del semplice per l'ottimizzazione lineare ha convergenza finita. Gli algoritmi per l'ottimizzazione non lineare hanno in generale convergenza asintotica. Ovviamente, per un algoritmo con convergenza asintotica, non sarà possibile in pratica eseguire un numero infinito di iterazioni, e occorrerà quindi prevedere un *criterio d'arresto* e cioè una regola che interrompa l'esecuzione dell'algoritmo dopo un numero finito di iterazioni. Il criterio d'arresto di solito si basa sul riconoscere di avere trovato, se non proprio un punto di  $\Omega$ , almeno una sua buona approssimazione. Ad esempio, per il problema non vincolato, sappiamo che  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\omega) = 0\}$  quindi dato un  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, si può pensare di arrestare l'algoritmo al primo valore di  $k$  per cui risulti  $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon$ .

Un'altra caratterizzazione della convergenza di un algoritmo si ha in relazione alla scelta di  $x_0$ . Per alcuni algoritmi, la convergenza ad un punto  $\omega \in \Omega$  si consegue qualunque sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  in questo caso si dice che l'algoritmo ha convergenza globale. Per altri algoritmi, la convergenza ad un punto  $\omega \in \Omega$  è assicurata solo se  $x_0 \in S$ , essendo  $S$  un intorno sferico aperto di  $\omega$ ; in questo caso si dice che l'algoritmo ha convergenza locale. Notiamo che quando si parla di convergenza globale (locale) di un algoritmo, non si intende convergenza ad una soluzione globale (locale) del problema.

Per molti dei problemi di ottimizzazione esistono diversi algoritmi di risoluzione ben noti. Tuttavia, la maggior parte di essi, sebbene teoricamente corretti, prevedono dei tempi di calcolo assolutamente non praticabili anche solo per problemi di non elevata complessità.

Nel paragrafo successivo si cercherà di descrivere le diverse metodologie di ottimizzazione, del problema, vincolato e non vincolato, lineare e non lineare, analizzando con maggior dettaglio solo quelle che saranno utilizzate nel prossimo capitolo per la minimizzazione della funzione di errore.

#### 4.5. Risoluzione dei problemi di ottimizzazione non vincolata.

Consideriamo il problema di ottimizzazione non vincolata: in (4.1), in cui si suppone valida la seguente ipotesi:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.22)$$

funzione continuamente differenziabile ed esiste un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tale che l'insieme di livello  $L_{x_0}$  sia compatto.

E' noto che, sotto questa ipotesi, la (4.1) ammette un punto di minimo globale  $x^* \in L_{x_0}$  e che ogni punto di minimo locale di  $f$  in  $L_{x_0}$  è un *punto stazionario* di  $f$ , ossia un punto in cui si annulla il gradiente.

Gli algoritmi che si prenderanno in considerazione consentono, in generale, soltanto la determinazione di punti stazionari di  $f$ , ossia di punti dell'insieme bersaglio  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \nabla f(\omega) = 0\}$ . In generale si riesce a garantire che, se  $x^0$  non è già un punto stazionario, vengano comunque ottenuti punti stazionari in cui la funzione obiettivo assume un valore inferiore al valore assunto nel punto iniziale  $x^0$  e ciò consente di ottenere soluzioni soddisfacenti in molte applicazioni.

Se poi la funzione obiettivo è convessa, la determinazione di un punto stazionario risolve completamente il problema, poiché, come è noto, ogni punto stazionario di una funzione convessa è un punto di minimo globale.

Gli algoritmi che ci proponiamo di studiare possono essere descritti per mezzo dello schema concettuale seguente:

1. Si fissa un punto iniziale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e si pone  $k=0$ ;
2. Se  $x^k \in \Omega$  il ciclo si conclude;
3. Si determina un vettore  $d^k \in \mathbb{R}^n$ , chiamato direzione di ricerca;
4. Si determina uno scalare  $\alpha^k \in \mathbb{R}$  chiamato passo;
5. Si produce un nuovo punto  $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \cdot d^k$ . Si pone  $k=k+1$  e si ritorna al passo 2.

Dal punto di vista geometrico, l'algoritmo si può descrivere come una successione di spostamenti (definiti dagli scalari  $\alpha^k$ ) lungo le direzioni di ricerca  $d^k$  effettuati a partire da  $x_0$ . Commentando brevemente lo schema considerato si può dire che:

**1. Scelta del punto iniziale.**

Il punto iniziale dell'algoritmo è un dato del problema e deve essere fornito in relazione alla particolare funzione che si intende minimizzare. Il punto  $x_0$  dovrebbe essere scelto come la migliore stima disponibile della soluzione ottima, eventualmente facendo riferimento a un modello semplificato della funzione obiettivo. Nella maggior parte dei casi, tuttavia, non esistono criteri generali per effettuare una buona scelta di  $x_0$  e quindi siamo interessati a definire algoritmi le cui proprietà di convergenza siano indipendenti dalla scelta del punto iniziale (algoritmo *globalmente* convergente). Nella soluzione di problemi applicativi può essere conveniente ripetere la ricerca a partire da punti iniziali differenti, ad esempio generati casualmente, e scegliere poi il punto stazionario migliore tra quelli così determinati.

**2. Criterio di arresto:**

La verifica effettuata al Passo 2 sull'appartenenza di  $x^k$  all'insieme  $\Omega$  equivale a controllare se  $\nabla f(x^k) = 0$ . In pratica, per l'utilizzo su calcolatore con precisione finita, occorre precisare un *criterio di arresto*. Una prima possibilità consiste nell'arrestare l'algoritmo quando

$$\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1 \tag{4.23}$$

in cui  $\varepsilon_1$  è un valore sufficientemente piccolo. Dal punto di vista numerico tale criterio può non essere del tutto soddisfacente perché non fa riferimento né alla precisione del mezzo di calcolo, né alla scala con cui è calcolato  $\nabla f$ . Nei codici di calcolo occorrerà quindi definire criteri più significativi, quindi accanto alla (4.23) si aggiungono

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &< \varepsilon_2 \\ \|f(x^{k+1}) - f(x^k)\| &< \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

in realtà poiché sia  $f$  che  $x$  possono assumere valori grandi, è preferibile utilizzare la seguente modifica:

$$\begin{aligned} \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{\max\{\|x^k\|, 1\}} &< \varepsilon_2 \\ \frac{\|f(x^{k+1}) - f(x^k)\|}{\max\{|f(x^k)|, 1\}} &< \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tali condizioni sono conosciute come *criterio di Himmelblau*. Valori tipici per  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono  $10^{-3}; 10^{-5}$ ;

### 3. Scelta della direzione.

I criteri seguiti nella scelta della direzione di ricerca  $d^k$  individuano il particolare metodo di ottimizzazione utilizzato. Tra i metodi esistenti, una delle distinzioni più significative è quella che fa riferimento alle informazioni disponibili sulla funzione da ottimizzare ai fini del calcolo di  $d^k$ . In particolare, possiamo distinguere:

- metodi che utilizzano soltanto le derivate prime (*metodo del gradiente, metodi delle direzioni coniugate, metodi Quasi-Newton*);
- metodi che utilizzano la conoscenza delle derivate prime e delle derivate seconde (*Metodo di Newton e relative modifiche*);
- metodi senza derivate, che si basano esclusivamente sulla valutazione della funzione obiettivo lungo direzioni di ricerca prefissate (come, ad esempio, gli assi coordinati) o definite in base ai valori della funzione obiettivo nei punti precedenti. Nel seguito considereremo prevalentemente metodi che verranno utilizzati per gli scopi di questa tesi.

### 4. Calcolo del passo.

Il calcolo dello scalare  $\alpha^k$  costituisce la cosiddetta *ricerca uni-dimensionale* o *ricerca di linea* (*line search*) e viene effettuato valutando la funzione obiettivo (ed eventualmente le derivate prime) lungo la direzione  $d^k$ . Nel caso in cui la direzione di ricerca sia una direzione di discesa, e in particolare che soddisfi la condizione  $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$ , potremo limitarci a considerare valori di  $\alpha > 0$ .

Nell'ambito della ricerca del minimo, si possono avere delle complicazioni nel caso in cui esistano dei minimi relativi. In questi casi la ricerca del minimo assoluto rallenta.

#### 4.5.1. Metodi di ottimizzazione non vincolata monodimensionale.

Molti problemi matematici possono essere espressi da una sola variabile, altri invece necessitano di più variabili. In un problema di ottimizzazione multidimensionale, spesso, ci si vuole ricondurre a risolvere più problemi monodimensionali, sui quali possono essere

applicati criteri concettualmente diversi. I metodi principali sono il metodo a scansione che è molto semplice da implementare, e altri criteri che sono in certo qual modo ottimizzati, tra questi i più classici sono il metodo della Golden Section e il metodo di Fibonacci

#### 4.5.1.1 Metodo Golden Section

Se si considera una funzione unimodale di una variabile nell'intervallo  $[a,b]$  e se si valuta la funzione  $f$  solo nel punto intermedio dell'intervallo, non si riesce a restringere il dominio, a priori non si sa dove questo sia localizzato il minimo. E' necessario valutare la funzione in più punti intermedi come nella figura seguente

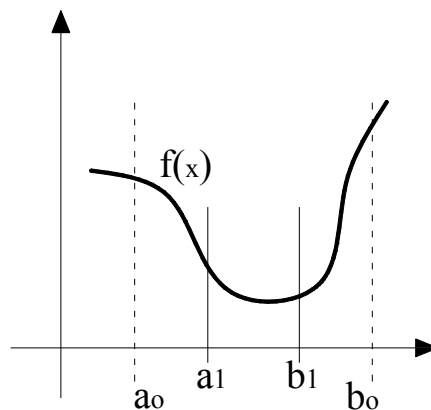


Figura 4.1. Dominio di ricerca

Se si scelgono due punti equidistanti dal centro,  $a_1$  ed  $b_1$ , è possibile, dopo aver valutato la funzione in tali posizioni, restringere l'intervallo di ricerca. In questo modo si ottiene:

$$a_1 - a_0 = b_0 - b_1 = \rho(b_0 - a_0) \quad (4.26)$$

Se il  $f(a_1) \leq f(b_1)$  allora il minimo si deve trovare nel nuovo range  $[a_0, b_1]$

Se il  $f(a_1) > f(b_1)$  allora il minimo si deve trovare nel nuovo range  $[a_1, b_0]$

Nel passo successivo, l'intervallo presenta una lunghezza più piccola del precedente

$$(1 - \rho) \cdot (b_0 - a_0) \quad \rho < \frac{1}{2} \quad (4.27)$$

L'obiettivo è quello di minimizzare il numero di valutazioni della funzione e contemporaneamente ridurre l'intervallo di incertezza.

Se si suppone, per esempio, che la funzione obiettivo in  $a_1$  sia minore di quella in  $b_1$ , allora in nuovo intervallo, per quanto detto precedentemente sarà  $[a_0, b_1]$ , in questo intervallo si conosce già il valore della funzione obiettivo in  $a_1$ . Se si fa coincidere la posizione di  $a_1$  con quella di  $b_2$ , in questo modo sarà necessario valutare una sola volta la funzione obiettivo, e precisamente nel punto  $a_2$ , rimasto scoperto.

Se immaginiamo che l'originale range sia  $[a_0, b_0]$  e che questo sia unitario, per avere una sola valutazione di  $f$  è necessario scegliere  $\rho$  tale che

$$\rho(b_1 - a_0) = b_1 - a_2 \quad (4.28)$$



e sapendo che

$$b_1 - a_0 = 1 - \rho \quad (4.29)$$

$$b_2 - b_1 = 1 - 2\rho \quad (4.30)$$

Dopo qualche operazione si ottiene

$$\rho = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.382 \quad (4.31)$$

Per il valore così determinato si dimostra che è valida la seguente equazione

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1 - \rho}{1} \quad (4.32)$$

In pratica nel metodo della Golden Section i rapporti degli intervalli mantengono sempre la stessa legge

$$\frac{b_1 - a_0}{b_0 - a_0} = \frac{a_1 - a_0}{b_1 - b_0} \quad (4.33)$$

L'uso della regola Golden Section riduce ad ogni passo e in maniera costante il range di incertezza, la funzione deve essere valutata solo in solo punto. L'intervallo di incertezza, come si è visto, si riduce del coefficiente  $\rho$ , al generico passo N si otterrà:

$$b_N - a_N = (b_0 - a_0) \cdot (1 - \rho)^N \quad (4.34)$$

Resta quindi da stabilire quale sia il momento opportuno di arresto, ad esempio si può utilizzare un intervallo di confidenza.

#### 4.5.1.2 Metodo di Fibonacci.

Il metodo del Golden Section usa lo stesso valore di  $\rho$  ad ogni passo. Se si suppone di utilizzare, un valore di  $\rho$  variabile, al generico passo k di iterazione la riduzione dell'intervallo avrà il valore  $\rho_k$ , mentre si indicherà il valore del passo successivo con  $\rho_{k+1}$ . Come nel Golden Section l'obiettivo è di selezionare i successivi valori di  $\rho_k$ , compresi  $0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}$  è tale che venga richiesta una sola valutazione della funzione obiettivo per ogni passo.

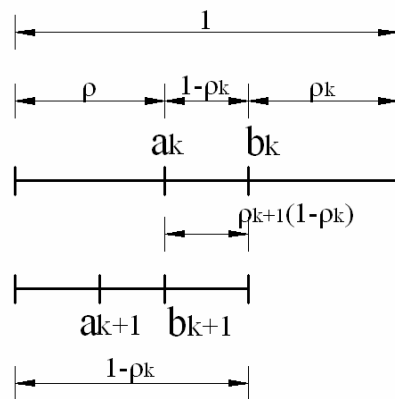


Figura 4.2. Riduzione del dominio di ricerca

$$\rho_{k+1}(1 - \rho_k) = (1 - 2\rho_k) \quad (4.35)$$

dopo qualche operazione si ottiene

$$\rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \quad (4.36)$$

Ci sono molte sequenze che soddisfano l'equazione precedente e quella che  $0 < \rho_k < 1/2$ , ad esempio la sequenza

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad (4.37)$$

le soddisfa entrambe, tale valore rappresenta il valore della Golden Section.

Se si prende una successione, che soddisfa le equazioni precedenti, allora all'n-esima iterazione il range sarà ridotto a

$$b_N - a_N = (b_0 - a_0) \cdot (1 - \rho_1) \cdot (1 - \rho_2) \cdot \dots \cdot (1 - \rho_N) \quad (4.38)$$

E a seconda della sequenza dei  $\rho_k$  si otterranno varie riduzioni. Nasce l'esigenza di trovare quella successione tale da minimizzare più rapidamente il range. Si tratta di un problema di minimizzazione che formalmente può essere scritto

$$\begin{aligned} \min \quad & b_N - a_N = (b_0 - a_0) \cdot (1 - \rho_1) \cdot (1 - \rho_2) \cdot \dots \cdot (1 - \rho_N) \\ & \rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1 - \rho_k} \quad k = 1..N-1 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Se si introduce la sequenza di Fibonacci,

$$\begin{aligned} F_{-1} &= 0 \\ F_0 &= 1 \\ F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

e se si utilizza questa serie allora alla n-esima iterazione si avrà che

$$\rho_N = 1 - \frac{F_1}{F_2} \quad (4.41)$$

Mentre

$$\rho_k = 1 - \frac{F_{N-k+1}}{F_{N-k+2}} \quad (4.42)$$

Il metodo di Fibonacci utilizza i valori ottimali per ottenere il miglior decremento del range. Esiste un'anomalia nel metodo, in quanto, l'iterazione finale del metodo di ricerca ha il seguente problema

$$\rho_N = \frac{1}{2} \quad (4.43)$$

Nell'ultima iterazione i due punti coincidono nella metà dell'intervallo, in generale si genera un numero  $\varepsilon$  piccolo da sottrarre a  $\rho_N$

#### 4.5.2 Metodi di ottimizzazione non vincolata multidimensionale.

E' importante notare come nei problemi fisici, difficilmente ci si trova di fronte ad un problema non vincolato, è necessario affrontare tale problematica perché spesso:

- i vincoli non hanno un'influenza sul problema di ottimizzazione e quindi sono superflui,
- molti potenti metodi di ottimizzazione si riconducono a problemi di ottimizzazione non vincolata.

Le condizioni necessarie per determinare un punto di minimo di una funzione  $f(X)$  sono le seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X = X^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.44)$$

il gradiente della funzione si deve annullare, se però la matrice Hessiana è definita positiva nel punto  $X^*$

$$H = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X^*) \right] \quad (4.45)$$

allora tale punto viene garantito come minimo relativo.

Le condizioni nelle (4.44) (4.45) possono essere usate per identificare la posizione del minimo durante un processo computazionale. Spesso, però, le funzioni con cui si ha a che fare non sono differenziabili e dunque non è possibile applicare le espressioni precedenti.

Esistono diversi metodi per risolvere un problema di minimizzazione non vincolata. Tali metodi possono essere classificati in due grandi categorie: metodi diretti, e metodi cosiddetti di discesa.

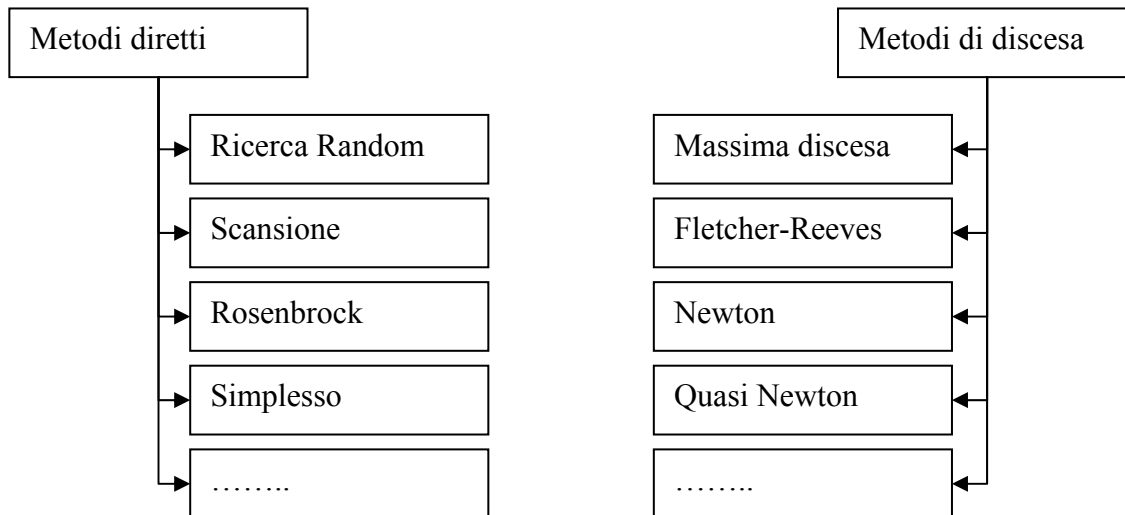


Figura 4.3. Schema riassuntivo metodi di ottimizzazione

I primi non richiedono il calcolo della derivata della funzione, per gli altri invece è richiesta, dunque sono esplicite le richieste dei vari metodi. I primi richiedono solo che esista la funzione obiettivo ma non richiedono la sua derivabilità, vengo detti “nongradient methods”. Questi metodi sono spesso utilizzati in problemi semplici e con un numero di variabili ridotto, esistono alcuni casi, però, per i quali non si conosce la funzione obiettivo e nemmeno la sua forma, in essi l’uso del metodo di scansione o il metodo di ricerca random e senz’altro utile. I metodi di discesa richiedono, oltre all’esistenza della funzione, la derivabilità prima della funzione e in alcuni casi anche la seconda, nel primo caso sono chiamati first-order method nel secondo invece si usa il termine second-order method. Le richieste sono pagate dall’efficienza, infatti questi metodi sono spesso più efficienti di quelli diretti.

La convergenza degli algoritmi possiedono diverse velocità di convergenza. In generale, un metodo di ottimizzazione ha la seguente struttura di ricerca:

I criteri di arresto sono diversi, ad esempio nel metodo a scansione, che consiste nella valutazione della funzione in tutti i punti di una maglia generata a priori, si devono semplicemente confrontare i valori e la ricerca termina solo quando tutti i punti sono stati esaminati, per altri, invece, è conveniente fissare una tolleranza e definire un criterio di arresto.

Tra i vari metodi si esamineranno quelli che sono stati usati nel corso della seguente dissertazione.

#### 4.5.2.1 Metodo del gradiente

Il metodo del gradiente (o metodo della discesa più ripida) è uno dei primi metodi proposti per la minimizzazione non vincolata. Esso è applicabile in tutti quei casi in cui si ha una generica funzione:

$$f(x), \text{ con } x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \tag{4.46}$$

per la quale esistono le derivate  $\partial f(x)/\partial x_i$  in ogni punto, e si basa sull’uso della direzione di ricerca  $d_k = -\nabla f(x^k)$ , ossia della direzione opposta a quella del gradiente, o detto antigradiente di  $f$  in  $(x^k)$ .

Osserviamo che in questo caso risulta  $\nabla f(x^k)^T d^k = -\|\nabla f(x^k)\|^2$  e quindi se  $\nabla f(x^k) \neq 0$ , la direzione dell'antigradiente è sempre di discesa. L'interesse della direzione  $-\nabla f(x^k)$  risiede proprio nel fatto che, se il gradiente è continuo, come si è ipotizzato, essa costituisce una direzione di discesa continua rispetto a  $x$ , che si annulla se e solo se  $x$  è un punto stazionario. Questa proprietà assicura che con una scelta opportuna del passo  $\alpha_k$  sia possibile stabilire facilmente un risultato di convergenza globale. Il metodo del gradiente costituisce quindi il modello più significativo di algoritmo globalmente convergente. La condizione di derivabilità rende possibile ricavare il gradiente di  $f(x)$  in un qualsiasi punto. Questa diventa una ipotesi molto importante, infatti, ad ogni passo, come si vedrà, bisogna calcolare il gradiente o analiticamente oppure numericamente, con un grande onere di tempo macchina. I passi da effettuare nell'uso del metodo del gradiente sono i seguenti:

1. Scelta del punto iniziale  $x_0 \in R^n$  e si pone  $k=0$ ;
2. Determinazione di un vettore  $d_k \in R^n$ , chiamato direzione di ricerca;
3. Determinazione di uno scalare  $\alpha_k \in R$  chiamato passo;
4. Produzione di un nuovo punto  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \cdot d_k$

Il primo passo è sicuramente il più semplice, essendo il problema di ottimizzazione non vincolato, ogni punto è un punto ammissibile, per contro esso è anche il più delicato perché quanto più ci si allontana dal punto di minimo esatto tanto più passi dovrà effettuare la macchina. Non solo, se si parte da un punto di minimo relativo il procedimento non è capace di procedere perché non riesce a distinguere un punto di minimo relativo da quello assoluto. Nel secondo passo si calcolerà il vettore spostamento assumendolo pari a:

$$d_k = \pm \nabla f = \pm \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (4.47)$$

Il vettore così determinato produrrà la direzione di massima pendenza positiva, ovviamente se si ricerca il minimo della funzione obiettivo la direzione di spostamento sarà opposta al gradiente, se viceversa si ricerca il massimo della funzione obiettivo il vettore spostamento sarà proprio il gradiente. Determinata la direzione di ricerca si determina il passo  $\alpha_k$  della strategia iterativa, il passo può essere definito, assumendo che la massima variazione delle variabili sia pari alla variazione tecnologica ammissibile di ogni variabile. Infine si calcola il nuovo punto  $x_{k+1}$  e conseguentemente  $f(x_{k+1})$  e si valuta la differenza:

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) = \delta f \quad (4.48)$$

Se la differenza  $\delta f$  risulta positiva e siamo alla ricerca di un minimo, si deve ancora iterare con il nuovo vettore di partenza  $x_{k+1}$ ; se viceversa  $\delta f$  risulta negativa si conclude che il minimo è rappresentato dal vettore  $x_k$ .

Una variante al metodo è quella di considerare due ottimizzazioni accoppiate, una globale e l'altra locale. In pratica si procede nell'ottimizzare la funzione di una sola variabile ottenuta dalla proiezione della funzione obiettivo lungo il gradiente. Il punto che minimizza la funzione a singola variabile diventa il nuovo punto di partenza per la successiva iterazione.

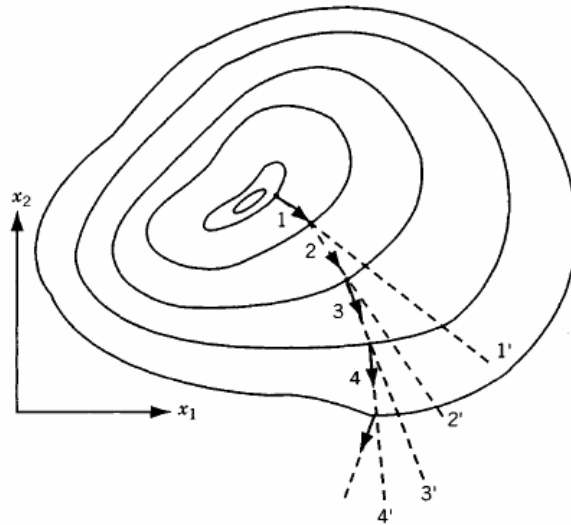


Figura 4.4. Esempio di passi discendenti per funzione a due variabili.

#### 4.5.2.2 Metodo di Newton

Il metodo della massima discesa usa solamente la derivata prima (il gradiente) nella selezione della direzione di ricerca. Questa strategia non è sempre la più efficiente. Se viceversa vengono usate le altre derivate, il processo iterativo può essere più performante del metodo del gradiente. Il metodo di Newton (chiamato Newton-Rapson) usa le derivate prime e seconde, in generale il processo iterativo risulta essere migliore. L'idea è la seguente, si costruisce un'approssimazione quadratica della funzione obiettivo utilizzando le derivate prime e seconde, successivamente si minimizza la nuova funzione. Il punto che minimizza la funzione viene utilizzato nel passo successivo e così via in tutta la procedura iterativa. Ovviamente, se la funzione obiettivo è quadratica, la sua approssimazione sarà esatta, tale metodo determina il minimo nel primo passo. Se viceversa la funzione non è quadratica, la funzione approssimata, determina una stima del minimo.

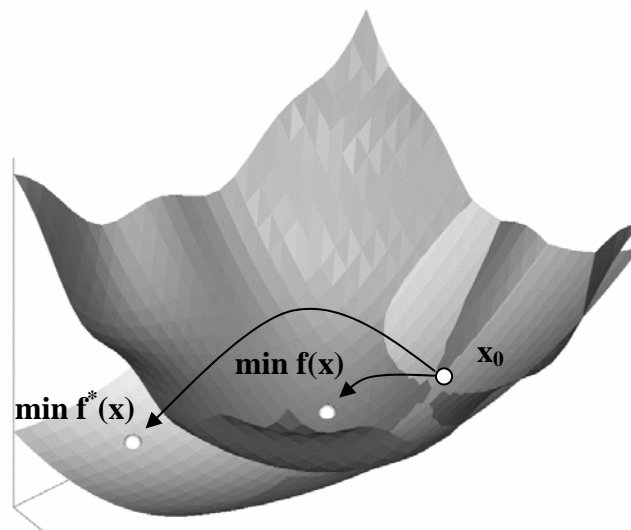


Figura 4.5. Approssimazione quadratica funzione obiettivo

Si può ottenere un'approssimazione quadratica se la funzione presenta continuità nella derivata prima e seconda. Usando l'approssimazione di Taylor applicata alla funzione.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f^*(x) \approx f(x^{(k)}) + (x - x^{(k)})^T g^{(k)} + \frac{1}{2} (x - x^{(k)})^T F(x^{(k)}) (x - x^{(k)}) \quad (4.49)$$

in cui

$$g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$$

$$F(x^{(k)}) = H(f(x^{(k)})) \quad (4.50)$$

dalla (4.49) è possibile risalire alla seguente espressione

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F(x^{(k)})^{-1} \cdot g^{(k)} \quad (4.51)$$

questa espressione diventa la base del processo iterativo.

Anche in questo caso, come nel metodo del gradiente, si preferisce lavorare in maniera diversa, si esplora l'intera direzione che congiunge il punto  $x^{(k)}$  con la possibile soluzione  $x^{(k+1)}$ . L'espressione (4.51) si modifica nella seguente

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^k \cdot F(x^{(k)})^{-1} \cdot g^{(k)} \quad (4.52)$$

Si tratta di determinare lo scalare che minimizza la funzione proiettata sulla linea di ricerca data dal metodo di Newton. Questo tipo di modifica si effettua in quei casi quando la funzione obiettivo ha una forma molto distante da quella quadratica, in questo si consente al processo iterativo di valutare la funzione in più punti ed eventualmente di determinare un minimo diverso da quello nella (4.51) (Newton classico).

Esistono criteri misti nei quali si preferisce utilizzare, nel processo di ottimizzazione, la seguente espressione:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \cdot M_k \cdot \nabla f(x_k) \quad (4.52)$$

Lo scalare  $\alpha_k$  è il passo, e  $M_k$  definita nel seguente modo:

- $M^{(k)} = I$  Metodo del Gradiente;
- $M^{(k)} = F(x^{(k)})^{-1}$  Metodo di Newton;
- $M^{(k)} = [\eta^{(k)} I + \beta^{(k)} F(x^{(k)})^{-1}]$  Metodo misto.

### 4.5.2.3 Metodo quasi-Newton

Il metodo di Newton, rappresenta un processo iterativo molto efficiente. Il generico processo di ottimizzazione generato con tale metodo ha convergenza quadratica. Però, è da sottolineare come, per un generico problema di ottimizzazione applicato ad una funzione non lineare la convergenza può anche non essere garantita, infatti la convergenza dipende da molti aspetti e principalmente dal punto iniziale scelto. Il metodo di Newton modificato supera questo tipo di problema.

Altra difficoltà del metodo di Newton è quella che è necessario determinare la matrice  $F(x^{(k)})$  e successivamente la sua inversa.

L'idea del metodo cosiddetto quasi-Newton o metrica variabile, è quella di approssimare la matrice hessiana con la sua stima

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} - \alpha^k \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{g}^{(k)} \\ \mathbf{H}_k &\approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

La stima varia da passo a passo

$$\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_k \quad (4.54)$$

In letteratura esistono vari criteri tra i quali:

- *DAVIDN FLETCHER*
- *POWELL O FLETCHER-POWELL* (DFP)
- *BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARD-SHANNO* (BFGS)

Si procede secondo lo schema seguente:

- si fissano inizialmente le seguenti quantità:  $x_0, H_0$  e si avrà:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{H}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (\alpha_k \text{ line search}) \quad (4.55)$$

- posti :

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \text{ ed } \mathbf{y}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (4.56)$$

- si avrà allora :

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{y}_k (\mathbf{y}_k)^T}{(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{s}_k (\mathbf{s}_k)^T \mathbf{H}_k}{(\mathbf{s}_k)^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k} \quad (BFGS) \quad (4.57)$$

La matrice  $H_0$  viene posta pari alla matrice identità, cosicché, al primo ciclo il criterio della metrica variabile coincide con quello del gradiente.

## 4.6 Algoritmi genetici.

Gli algoritmi genetici (d'ora in poi G.A.: *Genetic Algorithms*) [66] sono metodi adattativi che possono essere usati per risolvere problemi di ricerca e ottimizzazione, essi sono basati sui processi genetici degli organismi biologici regolati dai principi di Darwin (Darwin, 1859). Imitando questi processi, i G.A. sono in grado di evolvere soluzioni per problemi del mondo reale, se codificati opportunamente.

I principi di base dei G.A. sono stati definiti per la prima volta da Holland: l'analogia con quello che accade in natura è espressa dalla capacità del singolo individuo di riuscire a competere per la propria sopravvivenza.



In natura gli individui migliori hanno la possibilità di riprodursi incrociandosi con altri individui della popolazione: questo genera nuovi individui discendenti che condividono alcune caratteristiche di ciascun genitore. Gli individui meno adatti hanno meno probabilità di riprodursi e quindi si estinguono, mentre gli individui migliori, accoppiandosi danno origine a una nuova intera popolazione.

La nuova generazione contiene una proporzione più alta delle caratteristiche possedute dagli individui “buoni” della precedente generazione: in questo modo, dopo molte generazioni, le “buone” caratteristiche vengono propagate a tutta la popolazione, essendo combinate e scambiate con altre “buone” caratteristiche. Allo stesso modo operano i G.A.

Data, infatti, una popolazione di possibili soluzioni di un certo problema, l'idea di base dei G.A. è quella di selezionare le soluzioni migliori e di ricombinarle in qualche modo fra loro in maniera tale che esse evolvano verso un punto di ottimo.

A ogni individuo è associato un punteggio di adattamento “*fitness score*” a seconda di quanto sia buona la soluzione al problema. Gli individui migliori hanno la possibilità di riprodursi incrociandosi con altri individui della popolazione. Questo produce nuovi individui discendenti che condividono alcune caratteristiche di ciascun genitore. Gli individui meno adattati hanno meno probabilità di riprodursi e quindi si estinguono.

L'evoluzione è realizzata usando un insieme di operatori genetici, che manipolano il codice genetico. La maggior parte degli algoritmi genetici includono operatori che selezionano gli individui per la riproduzione, producono nuovi individui basandosi su quelli selezionati, e determinano la composizione della popolazione per la generazione seguente. Il *Crossover* e la Mutazione sono due di questi operatori. I G.A. non garantiscono di trovare una soluzione ottima per un problema, ma generalmente trovano una soluzione sufficientemente buona e in tempi sufficientemente rapidi. Dove esistono tecniche specializzate per risolvere particolari problemi queste hanno spesso prestazioni migliori dei G.A. sia in termini di accuratezza che di velocità. Il terreno migliore dei G.A. è rappresentato, dunque, dalle aree dove non esistono tecniche specializzate. Dove esistono tecniche che funzionano bene, si possono avere miglioramenti “ibridizzandole” con i G.A.

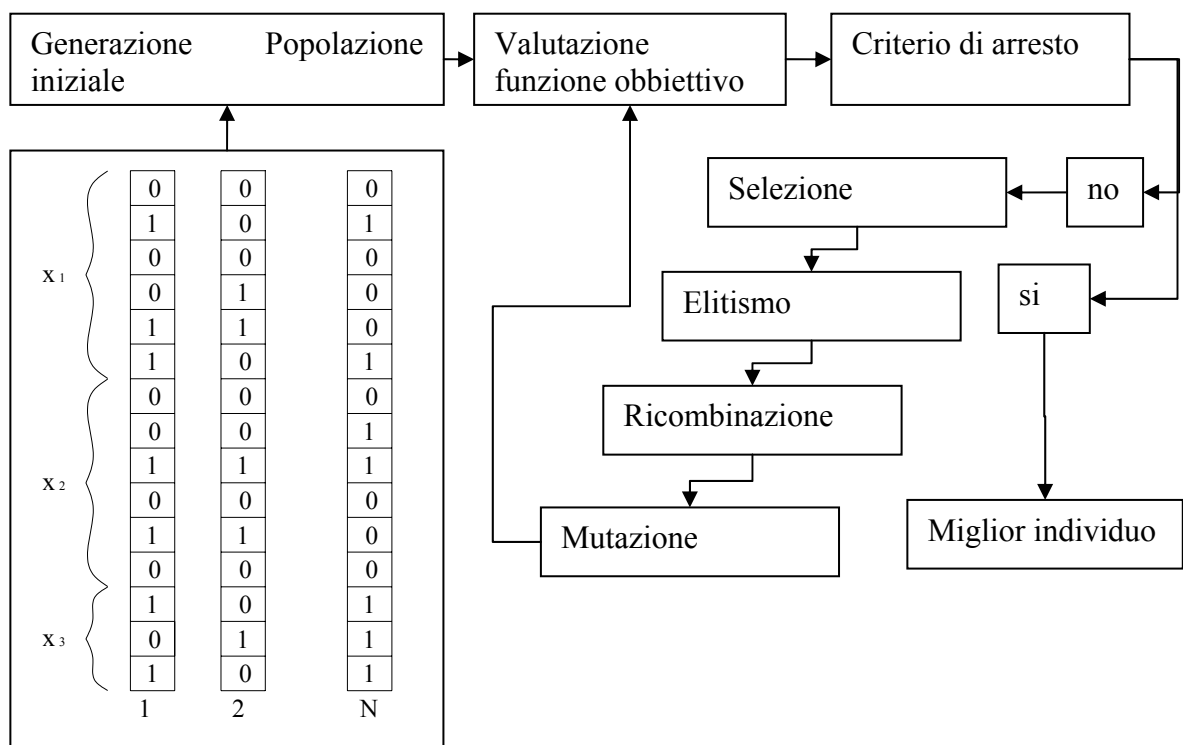


Figura 4.6. Flow.chart. Schematizzazione di un algoritmo genetico standard.

#### 4.6.1 Funzione Fitness.

L'idea che sta alla base dei G.A. è quindi quella di selezionare le soluzioni migliori e di ricombinarle in qualche modo fra loro in maniera tale che esse evolvano verso un punto di ottimo. Nel linguaggio degli G.A. la funzione da massimizzare prende il nome di fitness. Non esiste un termine italiano che riesca a rendere la varietà di significati espressi da quello inglese: a seconda del contesto può significare “adattamento”, “adattabilità”, “successo biologico”, “idoneità”, “competitività”. Si preferisce quindi usare il termine inglese ormai largamente diffuso.

Si supponga che la funzione di fitness dipenda da  $n$  variabili:  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  che di solito possono prendere valori all'interno di determinati intervalli numerici ( $x_1, x_2, \dots, x_n$  appartengono a  $X_n$ ). Un set di  $n$  valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , con le caratteristiche sopra indicate, sarà allora una possibile soluzione. Come qualsiasi genere di informazione essa può essere codificata ed espressa biunivocamente in codice binario. Una soluzione potrà quindi essere rappresentata mediante una successione (detta stringa) di 0 e 1, ad es. 100110101001110. Questo sistema di rappresentazione è particolarmente indicato quando si tratterà di “ricombinare” fra loro le diverse soluzioni, anche se non è l'unico. Un insieme di soluzioni forma una popolazione. Una popolazione di  $m$  individui sarà quindi un insieme di  $m$  stringhe binarie a ciascuna delle quali è associato un valore di fitness.

Continuando con l'analogia genetica, la specifica sequenza di 0 e 1 che costituiscono un individuo (soluzione) è detta cromosoma. Una volta individuato il problema, una possibile soluzione viene rappresentata come un insieme di coefficienti detti “geni”, i quali sono uniti insieme per formare una stringa di valori, il “cromosoma”, che costituisce un individuo della popolazione. L'insieme dei parametri rappresentati da un particolare cromosoma è chiamato “genotipo”. Il genotipo contiene le informazioni richieste per formare un organismo che viene chiamato “fenotipo”.

In natura gli individui si riproducono combinando in questo modo i propri patrimoni genetici, cioè i loro cromosomi: i nuovi individui generati avranno pertanto un patrimonio genetico derivato in parte dal padre e in parte dalla madre. La selezione naturale fa sì che riescano a sopravvivere e quindi a riprodursi solo gli individui più forti, “più adatti”, cioè quelli con la fitness più elevata; la fitness media della popolazione tenderà quindi ad aumentare con le generazioni, portando così la specie ad evolversi nel tempo.

Dato un particolare cromosoma, la funzione fitness restituisce un singolo valore numerico “fitness”, che si suppone sia proporzionale alla utilità o abilità dell'individuo che il cromosoma rappresenta. La stima di funzioni approssimate è una tecnica che può qualche volta essere usata se la funzione fitness è troppo complessa o lenta da valutare. Se può essere creata una funzione più veloce che approssimativamente dà il valore della funzione fitness “vera”, il G.A. può trovare, in un dato tempo di CPU, un cromosoma migliore di quello che avrebbe trovato usando la vera funzione fitness.

#### 4.6.2. Funzionamento del metodo.

Il funzionamento degli algoritmi genetici si basa su quattro procedimenti principali:

##### 1. Selezione:

La selezione naturale favorisce, attraverso la riproduzione degli individui migliori (cioè quelli con un migliore valore di *fitness*), quelle particolari combinazioni genetiche che danno vita ad un organismo più efficiente.

## 2. Crossover:

Il *Crossover* è il procedimento mediante il quale viene eseguita una ricombinazione genetica tra due individui, in questo modo ciascuno dei figli erediterà alcuni geni da entrambi i genitori.

## 3. Mutazione:

Attraverso la mutazione viene alterato in modo casuale (seguendo una distribuzione di probabilità uniforme) ogni gene. L'utilizzo di tale metodo aumenta la probabilità di esplorare un numero maggiore di configurazioni.

## 4. Elitismo:

Quando si crea una nuova popolazione con *crossover* e mutazione, si ha un'alta probabilità di perdere il miglior cromosoma della popolazione precedente. L'elitismo è un metodo che copia il miglior cromosoma della popolazione precedente nella nuova. Questo può far crescere rapidamente le *performance* del GA perché evita la perdita della migliore soluzione trovata.

I G.A. possono essere classificati in base alla natura dei coefficienti che compongono le stringhe in:

- **Binari:** i coefficienti che formano il cromosoma sono codificati in modo binario.
- **Reali:** i coefficienti che formano il cromosoma non sono codificati.

### 4.6.2.1. Selezione.

La selezione dei genitori ha il compito di allocare opportunità riproduttive a ciascun individuo. In principio gli individui migliori sono copiati dalla popolazione iniziale in una "area di accoppiamento" (*mating pool*), dove gli individui migliori hanno molta probabilità di essere copiati più volte, mentre i peggiori potrebbero non essere copiati affatto. Dopo di ciò, coppie di individui vengono tirati fuori dall'area e fatti accoppiare. Questo viene ripetuto finché l'area rimane vuota, la sua dimensione è pari a quella della popolazione. Il comportamento di un G.A. dipende molto da come gli individui vengono scelti per andare nel *mating pool*.

Esistono diversi metodi, quello più usato è chiamato "*Roulette wheel Selection*". Gli individui sono selezionati in base al loro fitness: i migliori individui hanno maggiore probabilità di essere selezionati, si può immaginare una roulette dove vengono piazzati tutti i cromosomi, ognuno dei quali occupa uno spazio proporzionale alla sua fitness. Poi "si lancia la pallina" e si seleziona il cromosoma.

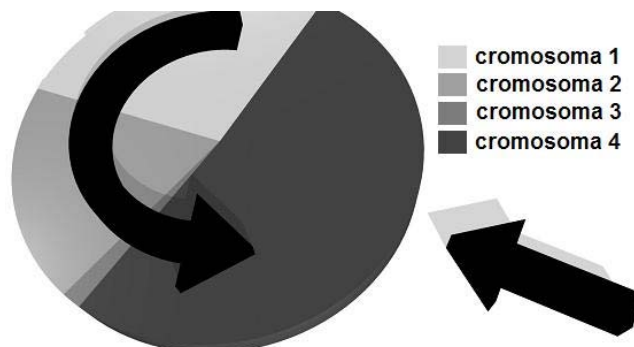
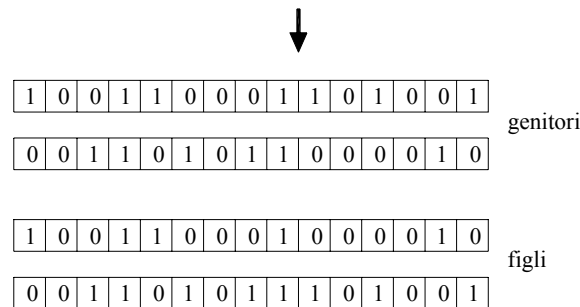


Figura 4.7. Schematizzazione dell'algoritmo di selezione.

Una volta selezionati due individui i loro cromosomi vengono mischiati usando due tecniche, quella del *crossover* (CO) e quella della mutazione.

**4.6.2.2. Crossover.**

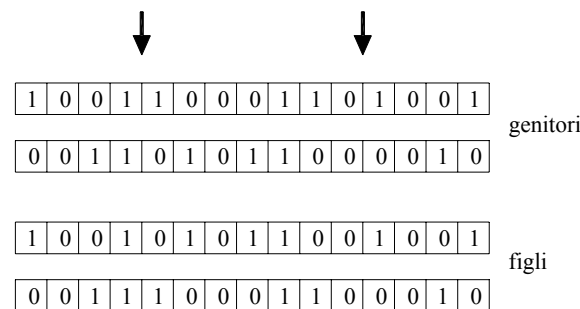
La più semplice tecnica di *crossover* è quella detta *one point*: dati due individui, le stringhe dei loro due cromosomi sono tagliate in qualche posizione scelta a caso, per produrre due segmenti “testa” (head) e due segmenti “coda” (tail). I segmenti coda sono poi scambiati per produrre due nuovi cromosomi di lunghezza completa. Ciascuno dei figli eredita alcuni geni da ogni genitore.



**Figura 4.8.** Schematizzazione del funzionamento del *Crossover*.

La probabilità che si verifichi il *crossover* è in genere abbastanza alta, ma può essere minore di 1. Quando non si verifica i figli saranno la copia esatta dei genitori.

Un'altra tecnica molto utilizzata è quella del *two points crossover*: in questo caso gli individui non sono rappresentati come stringhe lineari ma come cerchi, per cui si può sostituire una porzione di circolo di un individuo con quella di un altro selezionando due punti di *crossover*. Se le porzioni da sostituire sono più di due, ad esempio  $n$ , si dovranno determinare  $2n$  punti di taglio (tale tecnica è quindi detta *multi point* vedi fig. 4.9).



**Figura 4.9.** Schematizzazione del funzionamento del *two points crossover*.

Una terza tecnica ampiamente implementata è quella del *crossover* uniforme: per ogni coppia di genitori si genera una stringa binaria della stessa lunghezza chiamata maschera. Il figlio viene generato copiando il bit del padre o quello della madre a seconda che nella corrispondente posizione nella maschera vi sia uno 0 od un 1.

1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	genitori
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	maschera
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	figli
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	figli
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	figli

**Figura 4.10.** Schematizzazione del funzionamento del *crossover* uniforme.

Queste tre sono le tecniche più utilizzate, ma molte altre ne sono state suggerite e il dibattito sul quale sia la migliore è aperto. Con ogni probabilità non ne esiste una in senso assoluto, ma la più adatta è diversa a seconda del tipo di problema da risolvere.

#### 4.6.2.3. Mutazione.

La mutazione consiste invece nel cambiare ciascun bit di una stringa con una certa probabilità, tipicamente molto bassa. Così come in natura, questo fenomeno aggiunge un “rumore” o una certa casualità all'intera procedura, assicurando al contempo che partendo da una popolazione generata casualmente non vi siano punti dello spazio delle soluzioni che abbiano probabilità nulla di essere esplorati.

La mutazione è applicata a ogni figlio singolarmente dopo il *crossover*. Viene alterato a caso ogni gene con una data probabilità. Gli operatori base sono chiamati “*Binary Mutation*” e “*Real Valued Mutation*” rispettivamente. Il primo operatore, che può essere usato nel caso di una codifica genetica binaria, scambia il gene  $1$  in  $0$  o viceversa. Per quanto riguarda il secondo operatore il problema è dato dalla scelta del *range* di mutazione. Lo *step* ottimo dipende ovviamente dal problema che si affronta. In alcuni casi è consigliabile uno *step* di mutazione basso, in altri è preferibile uno più grande.

La teoria tradizionale ritiene che il *crossover* sia più importante della mutazione per quanto riguarda la rapidità nell'esplorare lo spazio di ricerca. La mutazione porta “casualità” nella ricerca ed assicura che nessun punto nello spazio abbia probabilità nulla di essere esaminato, inoltre previene la deriva genetica ovvero il convergere dei membri della popolazione verso qualche punto dello spazio di ricerca. Questo è dovuto al fatto che un gene predominante si può propagare a tutta la popolazione. Una volta che un gene converge in questa maniera il *crossover* non può introdurre nuovi valori. Da questo si evince che mentre la popolazione si avvicina alla convergenza la mutazione diventa più produttiva del *crossover*. Dopo che i figli sono stati prodotti attraverso la selezione, il *crossover* e la mutazione degli individui della vecchia generazione, bisogna calcolare il loro fitness e reinserirli nella popolazione. A questo punto si hanno due possibilità

- **Global reinsertion:**

Esistono differenti schemi:

- la vecchia popolazione viene sostituita integralmente (*pure reinsertion*).
- vengono prodotti figli in numero inferiore ai genitori che vengono rimpiazzati in maniera uniforme e casuale (*uniform reinsertion*).
- vengono rimpiazzati i genitori peggiori (*elitist reinsertion*).
- viene generata una prole maggiore di quella richiesta e vengono reinseriti solo i migliori individui della prole (*fitness-based reinsertion*).

- **Local reinsertion**

Nella local selection gli individui vengono selezionati da un insieme limitato e contiguo. La reinserzione avviene esattamente nello stesso insieme, in questo modo viene preservata la località dell'informazione. Per la selezione di un genitore da rimpiazzare e per quella di un figlio da inserire viene seguito uno di questi schemi:

- Tutti i figli vengono inseriti nell'insieme e gli individui vengono rimpiazzati in modo casuale.
- Tutti i figli vengono inseriti nell'insieme e gli individui peggiori vengono rimpiazzati.
- I figli migliori vanno a sostituire gli individui peggiori nell'insieme.
- I figli migliori prendono il posto dei genitori nell'insieme.
- I figli migliori vanno a sostituire individui scelti a caso nell'insieme.
- I genitori vengono rimpiazzati dai figli migliori.

#### **4.6.3. Alcune problematiche.**

All'inizio di un'esecuzione, i valori per ciascun gene dei diversi membri della popolazione sono casualmente distribuiti. Conseguentemente, c'è una grande propagazione di fitness individuali. Come l'algoritmo progredisce particolari valori per ogni gene cominciano a predominare. Mentre la popolazione converge, il range del fitness si riduce. La variazione nel range del fitness spesso porta a problemi di convergenza prematura o fine lenta.

Se il GA è correttamente implementato, la popolazione evolverà in molte generazioni in modo che il fitness del miglior individuo e la media in ogni generazione cresca verso l'ottimo globale. La convergenza è la progressione verso la crescente uniformità. Un gene converge quando il 95% della popolazione condivide lo stesso valore. La popolazione converge quando tutti i geni convergono.

Un classico problema con i GA è che i geni provenienti da pochi individui con una fitness comparabilmente alto (ma non ottimale) possono rapidamente dominare la popolazione, causando la convergenza a un massimo locale. Una volta che la popolazione converge, l'abilità del GA di continuare la ricerca per una soluzione migliore è effettivamente eliminata: il *crossover* di individui quasi identici può portare ben pochi miglioramenti. Solo la mutazione rimane per poter esplorare nuove zone, e questo semplicemente porta a una ricerca lenta e casuale. Per far lavorare bene il GA su una popolazione finita, dobbiamo modificare la maniera con cui vengono scelti gli individui per la riproduzione.

Dopo molte generazioni, la popolazione sarà convergente, ma non avrà localizzato precisamente il massimo locale. Il fitness medio sarà alto, ma ci sarà poca differenza tra la media e il miglior individuo. Le stesse tecniche usate per combattere la convergenza prematura combattono anche questo problema.

#### **4.6.4. Campi di applicazione.**

Il fatto che gli Algoritmi Genetici siano per loro natura molto flessibili e allo stesso tempo robusti ha permesso il loro utilizzo in campi diversi: uno dei principali è naturalmente quello dell'ottimizzazione di funzioni numeriche complicate. In questo caso la fitness è ben definita perché è proprio la funzione stessa, e in molti casi i G.A. si sono dimostrati più efficaci di altre tecniche come ad esempio quella del gradiente, perché la continua rimescolanza dei geni mediante cross over e mutazione impedisce che ci si fermi su un massimo (o minimo) locale. I campi di applicazione che oggi vedono un massiccio impiego dei G.A. sono:

- **Image processing:** in questo caso il problema è quello di allineare immagini (a raggi X, da satellite ecc.) di una stessa zona prese in tempi diversi, e a tal scopo i G.A. trovano un sistema di equazioni per far corrispondere ai punti della prima quelli della seconda in modo da poterli integrare in un'unica immagine. Un'altra applicazione di questo tipo è la creazione di identikit di persone sospette a partire dalla descrizione di un testimone: vengono generate all'inizio delle facce casuali, e quelle più somiglianti vengono ricombinate fra loro fino ad ottenere una descrizione il più possibile coincidente. In questo caso la funzione di fitness non è così ben definita come in precedenza perché naturalmente non ne esiste una forma "analitica", ma è il testimone stesso che seleziona i tratti somatici più somiglianti ( forma del naso, colore degli occhi e così via) e scarta gli altri , cioè fa sì che i geni migliori sopravvivano e compaiano nelle generazioni future.
- **Ottimizzazione combinatoria:** riguarda problemi in cui bisogna trovare la disposizione sequenziale ottima di una serie di oggetti.
- **Bin Packing:** sono problemi riguardanti la disposizione ottima di oggetti in uno spazio limitato. Questo aspetto è particolarmente importante nel campo industriale, per l'imballaggio e lo stoccaggio della merce, al fine di minimizzare lo spazio inutilizzato. Correlati a questi vi sono i problemi di allocazione ottima di risorse limitate per la massimizzazione del rendimento o la produzione.
- **Machine learning:** nel campo dell'intelligenza artificiale gli AG sono spesso usati per istruire le macchine in determinati problemi. Il metodo usato è quello dei sistemi classificatori(vedi in descrizione del metodo): la macchina, il cui compito è quello di gestire in maniera ottimale un determinato sistema, riceve una serie di istruzioni del tipo *if...then*, li testa sul sistema in esame e a seconda delle performance misurate (che rappresentano pertanto la fitness dell'insieme di regole adottato), decide se tale sistema è appropriato o meno. Un tipico esempio è la gestione di processi chimici complessi, in cui vengono monitorati costantemente alcuni parametri, che costituiscono i dati di input, dall'analisi dei quali la macchina fornisce delle indicazioni per mantenere il sistema nelle condizioni più efficienti.

#### 4.7. Risoluzione Problemi di ottimizzazione vincolata.

Consideriamo il problema di ottimizzazione non vincolata:

$$\min(\max)f(x) \quad X \in R^n \quad (4.58)$$

in cui la funzione scopo definisce la seguente trasformazione:

$$f : R^n \rightarrow R \quad (4.59)$$

e dove sono inoltre presenti le restrizioni:

$$h_i(x) = 0 \quad i = 1..n_h \quad g_j(x) \leq 0 \quad j = 1..n_g \quad (4.60)$$

Ne consegue che la risoluzione di un problema del genere presenta un grado di difficoltà maggiore del caso non vincolato, ciò consiste nel seguente insieme di operazioni:

- Determinazione dei punti ammissibili.
- Minimizzazione della funzione obiettivo.

Tali operazioni devono essere risolte contemporaneamente, quindi in ognuna di esse occorre determinare il punto migliore per la funzione obiettivo e controllarne l'ammissibilità. I problemi di ottimizzazione vincolati sono a loro volta suddivisi in due diverse categorie:

- Problemi di ottimizzazione vincolati lineari: sia la funzione obiettivo che i vincoli assumono caratteristiche lineari.
- Problemi di ottimizzazione vincolati non lineari: la funzione obiettivo o le restrizioni sono non lineari.

La seconda di queste tipologie è più complessa della prima, infatti nella prima l'insieme delle variabili ammissibili assume forma poliedrica e perciò il minimo si dovrà trovare nei vertici del poliedro, in questa categoria, infine, esistono solo punti di minimo assoluto. Nella seconda il minimo si può trovare in qualsiasi punto all'interno della regione ammissibile ed è possibile che la ricerca diventi più complicata perché possono esistere punti di minimo relativo i quali ostacolano la ricerca del minimo assoluto, come succede per l'ottimizzazione non vincolata. La determinazione di un punto di minimo assoluto passa attraverso la definizione seguente:

$$\forall x \in \Omega \exists \bar{x} | f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (4.61)$$

La determinazione di un punto di minimo relativo invece passa attraverso la seguente definizione:

$$\exists \bar{x} \in \Omega | \forall x \in \varepsilon(\bar{x}) f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (4.62)$$

Le condizioni che definiscono l'esistenza di un minimo relativo sono quelle di Kuhn-Tucker per le quali la funzione obiettivo e le restrizioni devono essere differenziabili. Per definire queste condizioni si utilizza la funzione di Lagrange valida per vincoli di uguaglianza:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_h}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.62)$$

Le condizioni di K-T diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_{n_h}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial x_n} = 0 \\ h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ h_{n_h}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (4.62)$$

Quando al posto delle costrizioni di uguaglianza esistono le disuguaglianze la funzione lagrangiana viene definita dopo avere trasformato i vincoli nel seguente modo:

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1..n_g \Rightarrow h_j = g_j + s_j^2 = 0 \quad (4.63)$$



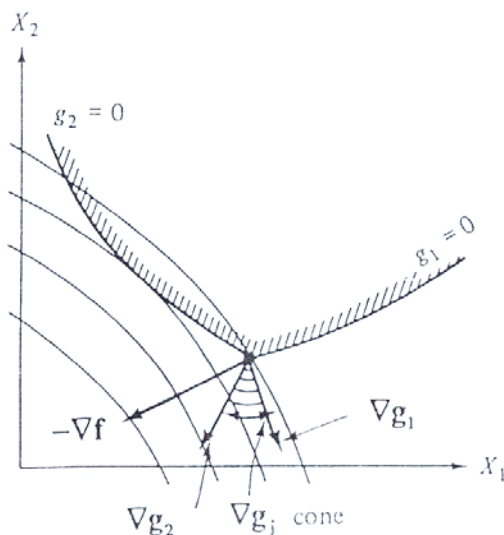
E quindi:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n_g}, s_1, \dots, s_{n_g}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j (g_j + s_j^2) \quad (4.64)$$

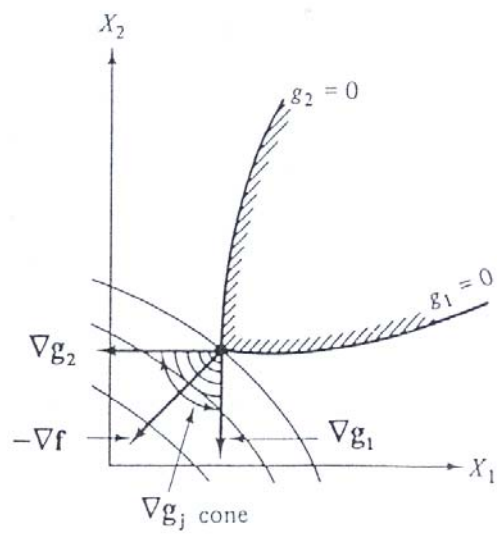
Le condizioni diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_{n_g}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial s_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial s_{n_g}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n_g} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \sum_{i=1}^{n_g} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = 0 \\ g_1 + s_1^2 = 0 \\ \vdots \\ g_{n_g} + s_{n_g}^2 = 0 \\ 2\lambda_1 \cdot s_1 \\ \vdots \\ 2\lambda_{n_g} \cdot s_{n_g} \end{cases} \quad (4.65)$$

Tralasciando il significato matematico di queste equazioni e considerando il senso grafico, il soddisfacimento delle condizioni Kuhn-Tucker è descritto attraverso le figure 4.11, 4.12.



**Figura 4.11.** Condizioni di Kuhn-Tucker non soddisfatte



**Figura 4.12.** Condizioni di Kuhn-Tucker soddisfatte

Nella figura 4.11, le condizioni di Kuhn-Tucker non sono soddisfatte perché il gradiente della funzione obiettivo non è compreso nel cono costruito dai gradienti delle costrizioni, mentre nella figura 4.12, le condizioni di Kuhn-Tucker sono soddisfatte.

I metodi classici per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione vincolati lineari sono:

- Metodo del semplice.
- Metodo duale.

I metodi classici per la risoluzione dei problemi di ottimizzazione vincolati non lineari sono:

- Metodi indiretti in cui il problema viene trasformato in un caso di ottimizzazione non vincolato
  1. Metodo della funzione di penalità interna ed esterna.
  2. Metodo delle funzioni lagrangiane aumentate
- Metodi diretti in cui il problema viene affrontato direttamente.
  1. Metodo delle direzioni ammissibili.
  2. Proiezione della direzione di ricerca.

Riassumendo quanto detto, nel seguente schema avremo:

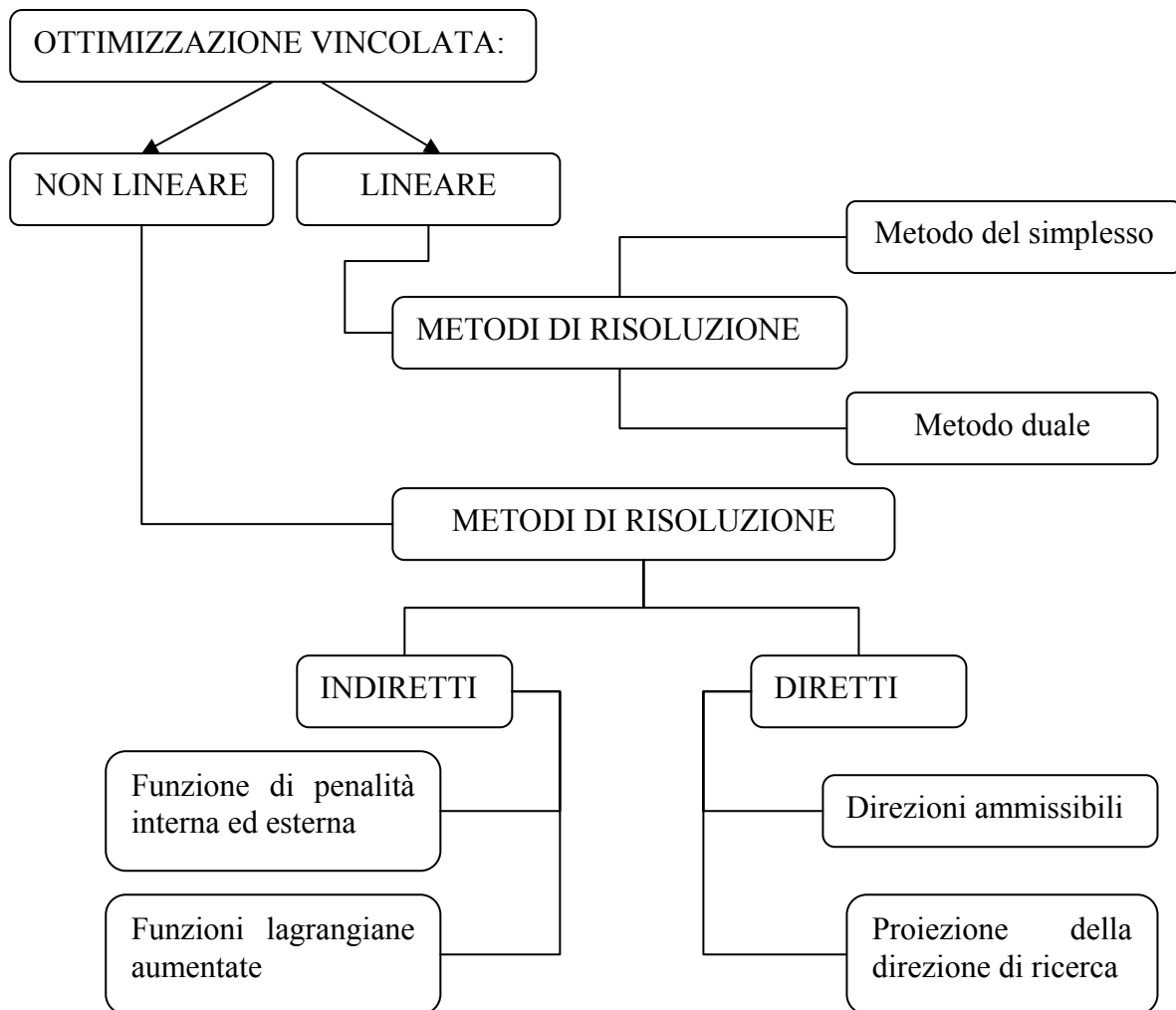


Figura 4.13. Schema riassuntivo metodi di ottimizzazione vincolata

#### 4.7.1. Metodo delle funzioni di penalità.

I metodi di penalità sono definiti metodi di trasformazione, infatti, essi combinano la funzione obiettivo ed i relativi vincoli in modi diversi e tali da poter utilizzare i classici metodi di ottimizzazione non vincolata. Tali metodi non sono stati utilizzati in questa tesi, ma si riportano comunque per completezza.

### 4.7.2. Metodo della funzione di penalità esterna.

Si considera un generico problema di ottimizzazione non lineare in cui:

$$f(x) \rightarrow \min \quad (4.66)$$

con le seguenti restrizioni:

$$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1..n_g \quad (4.67)$$

L'idea dei metodi della funzione di penalità esterna è semplice. Piuttosto che tentare di risolvere il problema vincolato, si aggiunge alla funzione obiettivo un termine di "penalità" quando i vincoli non sono soddisfatti (esternamente), il problema diventa quello di determinare il minimo della seguente funzione:

$$\Psi(x, r) = f(x) + r \cdot \sum_{j=1}^{n_g} \langle g_j \rangle^2 \quad (4.68)$$

In cui:

$$\langle g_j \rangle = \begin{cases} g_j & \text{se } g_j > 0 \\ 0 & \text{se } g_j \leq 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

Il fattore  $r$  chiamato "parametro di penalità" o "fattore di risposta" rappresenta il peso delle funzioni di penalità. Se al posto delle disuguaglianze (4.67) ci fossero stati vincoli di uguaglianza la funzione  $\Psi(x, r)$  diventerebbe:

$$\Psi(x, r) = f(x) + r \cdot \left( \sum_{j=1}^{n_g} \langle g_j \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n_h} \langle h_i \rangle^2 \right) \quad (4.70)$$

In cui:

$$\langle h_i \rangle = \begin{cases} h_i & \text{se } h_i \neq 0 \\ 0 & \text{se } h_i = 0 \end{cases} \quad (4.71)$$

In questa trasformazione è subentrato il parametro di penalità, per la sua determinazione intuitiva si utilizza la seguente figura:

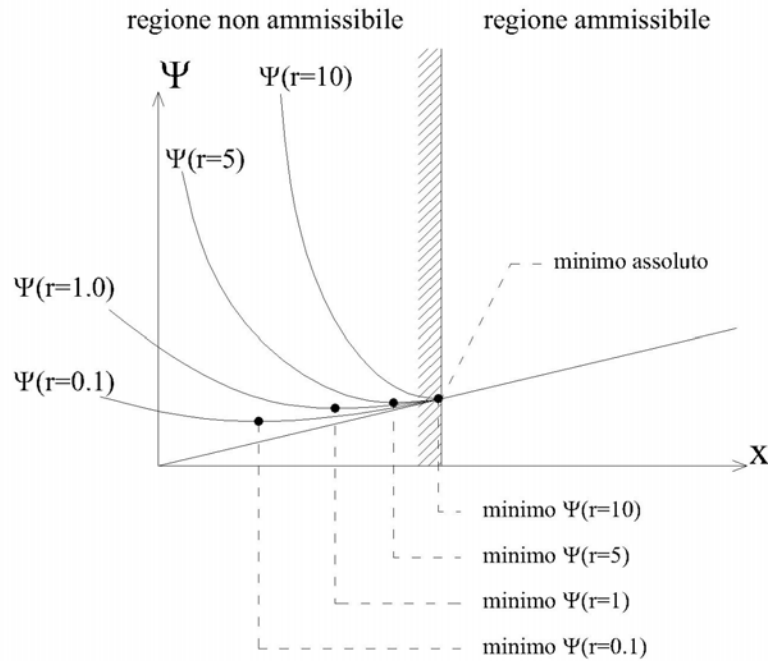


Figura 4.14. Comportamento grafico funzione di penalità esterna.

Nella figura 4.14 si intuisce come il valore idoneo al valore di penalità sia:

$$r \rightarrow \infty \tag{4.72}$$

In realtà per avere un buon risultato e per non incorrere ad un numero di iterazioni elevato si definisce il seguente criterio di iterazione:

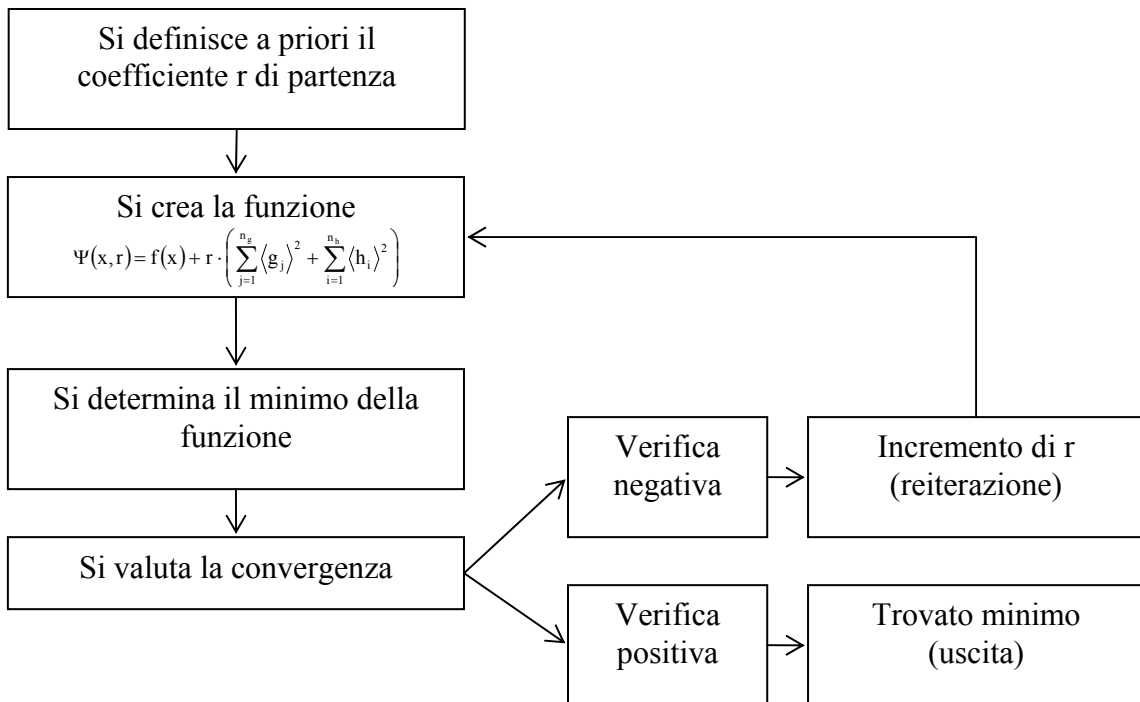


Figura 4.15. Flow-chart descrittivo dei passi da effettuare nel metodo della penalità esterna.

Resta da definire il criterio di convergenza, il quale può essere definito o in termini di funzione obbiettivo:

$$\varepsilon_f = \frac{f_{\min}(r_{i-1}) - f_{\min}(r_i)}{f_{\min}(r_i)} < \text{toll} \quad (4.73)$$

o in termini di variabile:

$$\varepsilon_{x_i} = x^*(r_{i-1}) - x^*(r_i) < \text{toll} \quad (4.74)$$

### 4.7.3. Metodo della funzione di penalità interna.

Si considera un generico problema di ottimizzazione non lineare in cui:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ g_j(x) &\leq 0 \quad j = 1..n_g \end{aligned} \quad (4.75)$$

Anche in questo caso il problema viene trasformato ma questa volta nel seguente modo:

$$\Psi(x, r) = f(x) - r \cdot \sum_{j=1}^{n_g} \frac{1}{g_j} \quad (4.76)$$

Il fattore  $r$  chiamato “parametro di penalità” o “fattore di risposta” rappresenta il peso delle funzioni di penalità. Se al posto delle disuguaglianze (4.76) ci fossero stati vincoli di uguaglianza non si potrebbe usare tale metodo. In questa trasformazione è subentrato il parametro di penalità, per la sua determinazione intuitiva si utilizza la seguente figura:

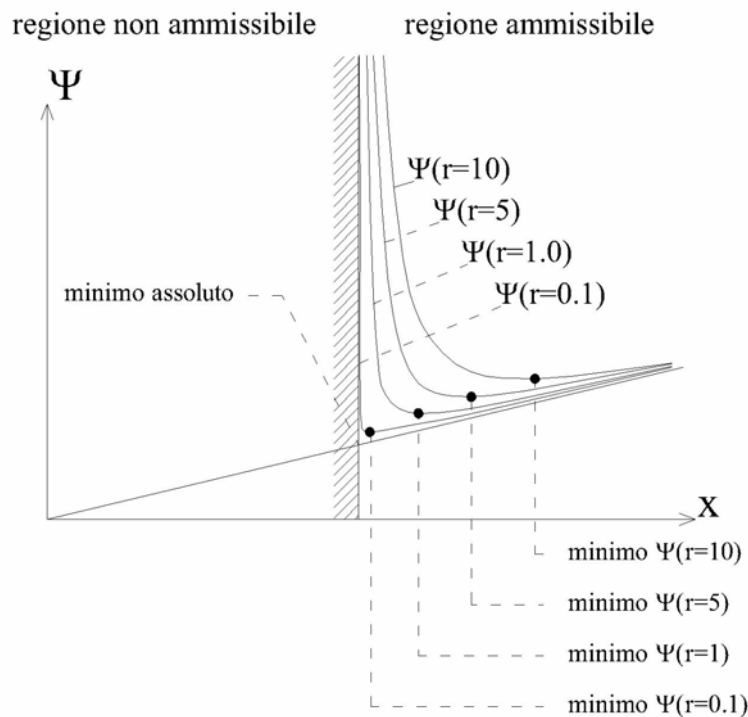


Figura 4.16. Comportamento grafico funzione di penalità interna.

Il valore idoneo di penalità è:

$$r \rightarrow 0 \quad (4.77)$$

In realtà per avere un buon risultato e per non incorrere ad un numero di iterazioni elevato si definisce il seguente criterio di iterazione:

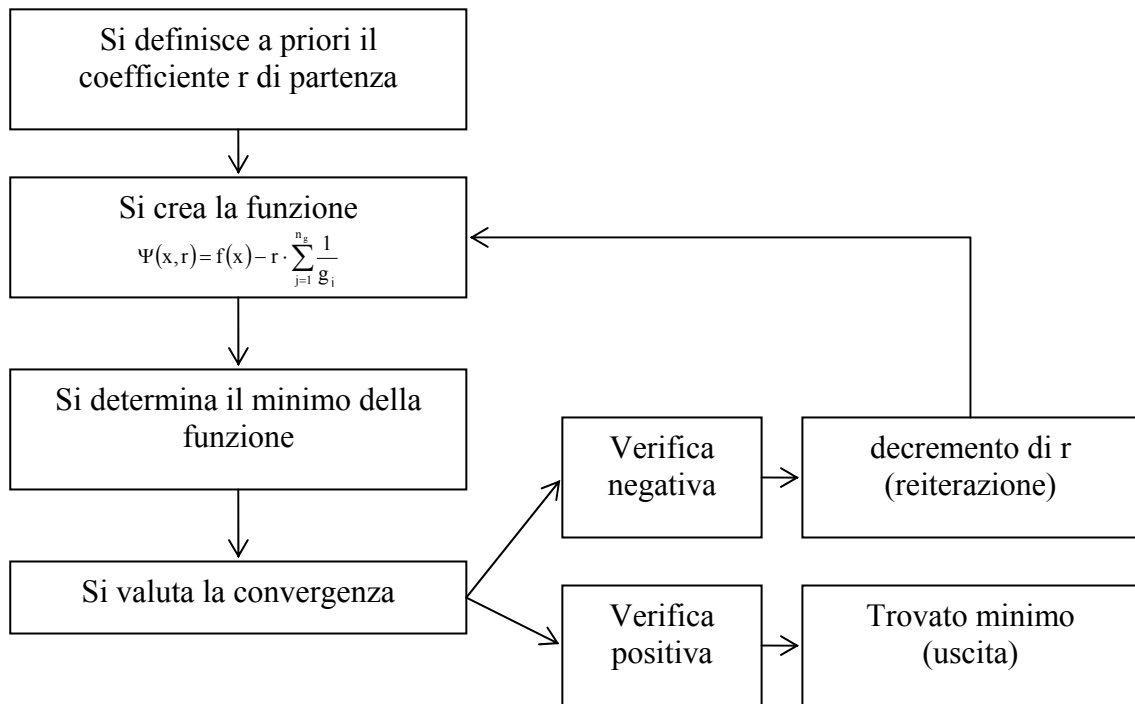


Figura 4.17. Flow-chart descrittivo dei passi da effettuare nel metodo della penalità interna

Resta da definire il criterio di convergenza, il quale può essere definito come per la funzione di penalità esterna, in termini di funzione obiettivo:

$$\varepsilon_f = \frac{f_{\min}(r_{i-1}) - f_{\min}(r_i)}{f_{\min}(r_i)} < \text{toll} \quad (4.78)$$

o in termini di variabile:

$$\varepsilon_{x_i} = x^*(r_{i-1}) - x^*(r_i) < \text{toll} \quad (4.79)$$

## CAPITOLO 5

### IDENTIFICAZIONE SU TRAVI SOGGETTE A DANNO DIFFUSO

*In questo capitolo si risolve il problema dell'identificazione del danneggiamento in una trave continua. A partire dalle misure di frequenza si può determinare lo stato di una trave, definendo il grado, l'estensione e la posizione di un eventuale danneggiamento. Allo scopo viene utilizzato l'approccio inverso basato sulle differenze ottenute tra frequenze reali (pulsazioni), misurate ad esempio in laboratorio, e quelle ottenute mediante FEM. Si utilizzano due differenti tipologie di danneggiamento: danneggiamento discreto e danneggiamento continuo.*

## 5.1 Introduzione

Molte strutture vengono sottoposte ad indagini per verificarne la loro integrità. I metodi distruttivi sono spesso utilizzati, ma per non pregiudicarne l'integrità della struttura sono stati studiati, da molti anni a questa parte, metodi innovativi non distruttivi [67-74]. L'uso della metodologia inversa legata a misure non distruttive è, in questo caso, appropriata. In questo modo si garantisce l'integrità del manufatto ed inoltre con semplici prove di laboratorio, eseguite eventualmente anche in loco, si possono abbassare i costi delle prove e di conseguenza estendere la metodologia a più strutture, le prove più usate per questo tipo di indagine sono quelle dinamiche.

Diversi studi sono stati condotti per determinare lo stato di danneggiamento su una trave [75-83] sottoforma di crack o di diffused damage, alcuni mediante l'uso delle equazioni caratteristiche che governano il problema, altri mediante FEM per determinare il danno.

In questo capitolo la determinazione dei parametri di danneggiamento è eseguita mediante FEM. Tale metodo è molto appropriato per risolvere tutti quei casi in cui non è possibile determinare una soluzione in forma chiusa dei parametri modali (esempio geometrie complesse). L'applicazione del FEM produce una discretizzazione delle variabili di danneggiamento che in partenza sono continue, sarà quindi presentato un metodo alternativo che definisce il danneggiamento in maniera pseudo continua. L'uso del FEM porta con se la semplicità della soluzione e anche gli eventuali errori che nascono dalla trasformazione di un elemento continuo ad un insieme di elementi discreti, anche se piccoli questi tipi di errori possono influire molto sulla stima dei parametri di danno, specialmente quando si minimizza l'errore tra frequenze misurate e quelle ottenute mediante FEM. La minimizzazione viene effettuata con l'uso degli algoritmi genetici e con il metodo a scansione classico. Si studia un caso noto per poi passare a casi trovati in letteratura. Per quello noto viene effettuata un'analisi alla Montecarlo [84] per definire il comportamento del metodo a variazioni nei dati in ingresso (ill-conditioning).

In base ad alcuni riferimenti bibliografici [77], vengono utilizzate, per la soluzione del problema inverso, solo le prime forme modali, per la precisione si utilizzano solamente le informazioni riguardanti le frequenze proprie.

Il problema che verrà rappresentato è simmetrico nella posizione del danneggiamento, questo rappresenta una limitazione, in effetti le informazioni di base per l'identificazione strutturale sono insufficienti. Per risolvere questo problema basterebbe acquisire anche le informazioni sulle forme modali, ma in questo caso, trattandosi di un problema reale, non è stato possibile e quindi si è esaminato il problema nella consapevolezza di questo limite.

La soluzione del problema inverso è ottenuta tramite ottimizzazione della funzione di errore legata alle differenze tra frequenze misurate e teoriche. Per l'ottimizzazione si usano gli algoritmi genetici, che presentano molti limiti ma riescono a determinare buone soluzioni.

## 5.2 Problema diretto generale

La trave esaminata in questa ricerca presenta due zone integre e una zona danneggiata interna, in fig. 5.1 è rappresentata la struttura analizzata:

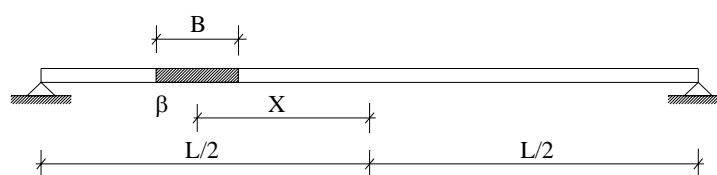


Figura 5.1. Trave danneggiata.



in cui  $\beta$  rappresenta il grado di danneggiamento mentre  $B$  e  $X$  rappresentano rispettivamente la base del danneggiamento e la sua posizione. Con questa schematizzazione vengono determinati i seguenti limiti:

$$\beta = \frac{EJ^U - EJ^D}{EJ^U} \Rightarrow 0 \leq \beta \leq 1 \quad (5.1)$$

$$0 \leq B \leq L \Rightarrow b = \frac{B}{L} \quad 0 \leq b \leq 1; \quad (5.2)$$

$$0 \leq X \leq \left(\frac{L}{2} - \frac{B}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{X}{L/2} \quad 0 \leq x \leq 1 - b; \quad (5.3)$$

Si può notare come  $\beta$  è una variabile indipendente, mentre le altre due  $b, x$  sono legate tra di loro. La trave è successivamente discretizzata e su di essa viene applicato il FEM basato sul modello di Eulero Bernoulli. La metodologia viene sviluppata in due differenti approcci uno discreto e un altro pseudo-continuo. Nel primo approccio il grado di danneggiamento è continuo mentre le altre due variabili sono discrete (discrete damaged) e quindi dipenderanno dalla discretizzazione fatta, nel secondo tutte le variabili sono continue (continuous damaged). Viene quindi analizzato il problema diretto per entrambi i casi

### 5.2.1 Problema diretto discrete damaged.

L'idea principale alla base di questa metodologia consiste nel fatto che un elemento può essere o interamente danneggiato o completamente integro. Esiste una grossa limitazione sulla tipologia di danno, infatti il danno è unico e non possono coesistere più zone danneggiate. Si prende in considerazione il seguente elemento strutturale che possiede 4 parametri cinematici.

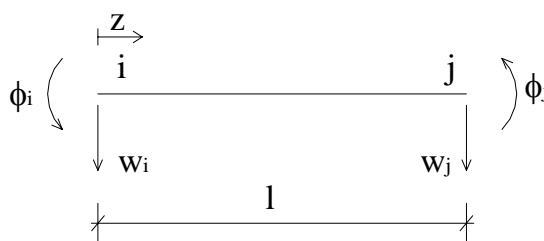


Figura 5.2. Riferimento dei parametri cinematici sul singolo elemento finito.

Le equazioni delle forme di interpolazioni (5.4) sono le stesse, sia nel caso di elementi completamente danneggiati e sia per quelli integri:

Nella costruzione della matrice delle rigidezze locali compare la variabile  $\beta$ , mentre la matrice delle masse rimane la stessa per entrambi i casi.

Si procede poi all'assemblaggio della matrice delle masse e quelle delle rigidezze globali tenendo in considerazione il danneggiamento. Il danneggiamento viene considerato con tre variabili delle quale solo  $\beta$  è continua, mentre le altre due sono discrete, nelle seguenti immagini si possono valutare le possibili combinazioni, che può assumere il tratto danneggiato, in termini di estensione e posizione:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - 3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \\ N_2 = z - 2\frac{z^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ N_3 = 3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \\ N_4 = -\frac{z^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^U &= \int_{z=0}^l EJ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} dz \\ k_{ij}^D &= \int_{z=0}^l \beta EJ \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_j}{\partial z^2} dz \\ m_{ij}^U &= m_{ij}^D = \int_{z=0}^l \rho AN_i N_j dz \end{aligned} \quad (5.5)$$

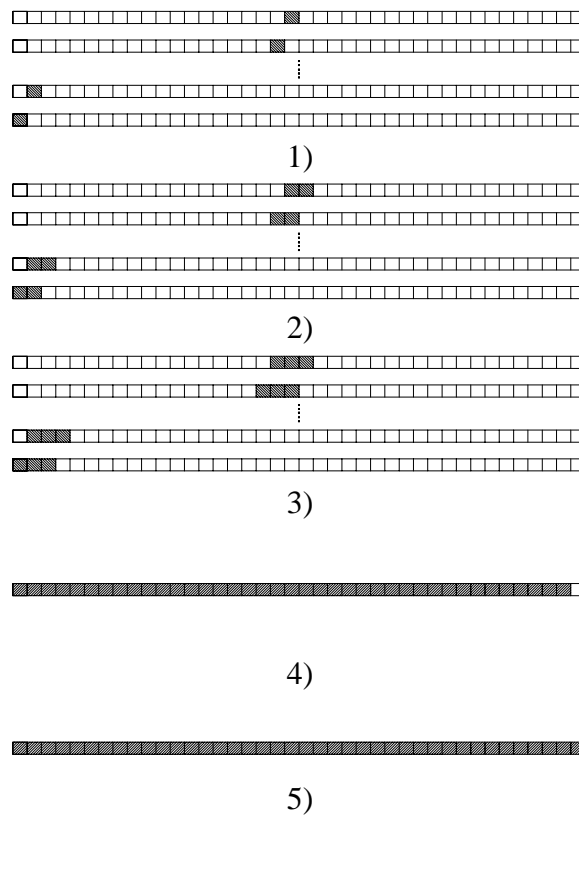


Figura 5.3. Esempi di danneggiamento discreto

la base del danneggiamento può assumere solo alcuni valori che vengono inseriti in un vettore, allo stesso modo, anche la posizione può assumere valori discontinui riassumibili in

un vettore, che dipende oltre che dalla discretizzazione fatta, anche dalla dimensione che assume l'estensione del danno.

In questi casi sapendo che  $n$  è il numero di elementi presenti in una discretizzazione uniforme si ha:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & b = \frac{1}{n}; \quad x = \left( \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right); \\
 2) \quad & b = \frac{2}{n}; \quad x = \left( 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-2}{n} \right); \\
 3) \quad & b = \frac{3}{n}; \quad x = \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-3}{n} \right); \\
 4) \quad & b = \frac{n-1}{n}; \quad x = \frac{1}{n}; \\
 5) \quad & b = 1; \quad x = 0;
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

In pratica:

$$\begin{aligned}
 b &= (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n); \\
 x &= x(b_i);
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Definito il problema si procede all'assemblaggio della matrice delle masse e quella delle rigidezze

$$M\ddot{u} + K^D u = 0
 \tag{5.8}$$

Si tratta adesso di risolvere il seguente problema agli autovalori e quindi di trovare le soluzioni:

$$\omega_1^D(\beta, b, x), \dots, \omega_N^D(\beta, b, x) \quad N = \text{DOF}
 \tag{5.9}$$

In cui  $N$  rappresenta il numero di gradi di libertà dell'intera struttura

### 5.2.2 Problema diretto pseudo continuo.

In questo caso si consente al danneggiamento di interessare un tratto indipendentemente dalla discretizzazione utilizzata

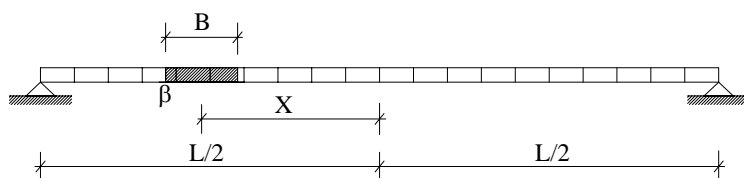


Figura 5.4. Modello pseudo sperimentale di trave discretizzata  $n=20$ .

In un simile approccio vengono considerate tutte le possibili combinazioni che può assumere un elemento finito appartenente ad una trave danneggiata, ed in particolare si possono distinguere 5 casi:

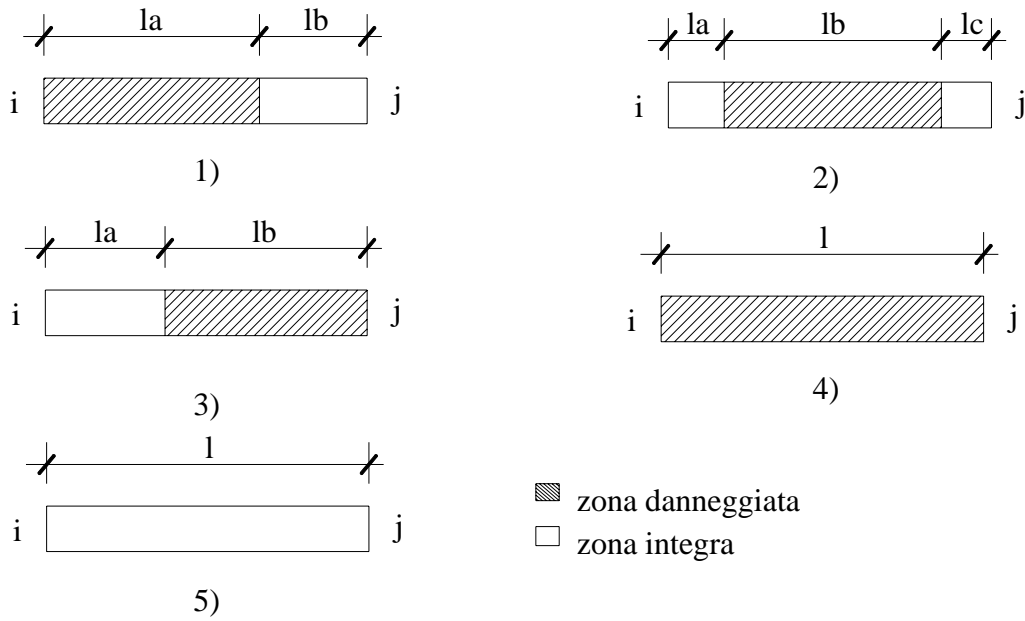


Figura 5.5. Casi di studio nel continuous damage.

Per ognuna delle seguenti tipologie di danno si scrivono le leggi delle hermitiane sui vari tratti:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \begin{cases} w_a = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 & 0 \leq z < l_a \\ w_b = b_1 + b_2z + b_3z^2 + b_4z^3 & 0 \leq z < l_b \end{cases} \Rightarrow 8 \text{ incognite} \\
 2) \quad & \begin{cases} w_a = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 & 0 \leq z < l_a \\ w_b = b_1 + b_2z + b_3z^2 + b_4z^3 & 0 \leq z < l_b \\ w_c = c_1 + c_2z + c_3z^2 + c_4z^3 & 0 \leq z < l_c \end{cases} \Rightarrow 12 \text{ incognite} \\
 3) \quad & \begin{cases} w_a = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 & 0 \leq z < l_a \\ w_b = b_1 + b_2z + b_3z^2 + b_4z^3 & 0 \leq z < l_b \end{cases} \Rightarrow 8 \text{ incognite} \\
 4) \quad & \begin{cases} w_a = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 \end{cases} \Rightarrow 4 \text{ incognite} \\
 5) \quad & \begin{cases} w_a = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 \end{cases} \Rightarrow 4 \text{ incognite}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Per la determinazione delle costanti si impongono, per ogni caso, le relative condizioni al contorno (congruenza ed equilibrio), 2 per ogni punto esterno e 4 per ogni punto interno.

$$\begin{aligned}
 \text{Caso 1)} \quad & \begin{aligned}
 & w_a(z = l_a) = w_b(z = 0); & w_a(z = 0) = w_i; \\
 & w'_a(z = l_a) = w'_b(z = 0); & w'_a(z = 0) = \varphi_i; \\
 & -\beta \cdot EJ \cdot w''_a(z = l_a) = -EJw''_b(z = 0); & w_b(z = l_b) = w_j; \\
 & -\beta \cdot EJ \cdot w'''_a(z = l_a) = -EJw'''_b(z = 0); & w'_b(z = l_b) = \varphi_j;
 \end{aligned}
 \end{aligned}
 \tag{5.11.a}$$

$$\begin{aligned}
 & w_a(z=1a) = w_b(z=0); \\
 & w'_a(z=1a) = w'_b(z=0); \\
 & -EJ \cdot w''_a(z=1a) = -\beta \cdot EJw''_b(z=0); \quad w_a(z=0) = w_i; \\
 \text{Caso 2)} \quad & -EJ \cdot w'''_a(z=1a) = -\beta \cdot EJw'''_b(z=0); \quad w'_a(z=0) = \varphi_i; \\
 & w_b(z=1b) = w_c(z=0); \quad w_c(z=1c) = w_j; \\
 & w'_b(z=1b) = w'_c(z=0); \quad w'_c(z=1c) = \varphi_j; \\
 & -\beta \cdot EJ \cdot w''_b(z=1b) = -\beta \cdot EJw''_c(z=0); \\
 & -\beta \cdot EJ \cdot w'''_b(z=1b) = -\beta \cdot EJw'''_c(z=0);
 \end{aligned} \tag{5.11.b}$$

$$\begin{aligned}
 & w_a(z=1a) = w_b(z=0); \quad w_a(z=0) = w_i; \\
 \text{Caso 3)} \quad & w'_a(z=1a) = w'_b(z=0); \quad w'_a(z=0) = \varphi_i; \\
 & -EJ \cdot w''_a(z=1a) = -\beta \cdot EJw''_b(z=0); \quad w_b(z=1b) = w_j; \\
 & -EJ \cdot w'''_a(z=1a) = -\beta \cdot EJw'''_b(z=0); \quad w'_b(z=1b) = \varphi_j;
 \end{aligned} \tag{5.11.c}$$

$$\begin{aligned}
 & w_a(z=0) = w_i; \\
 \text{Caso 4)} \quad & w'_a(z=0) = \varphi_i; \\
 & w_b(z=1b) = w_j; \\
 & w'_b(z=1b) = \varphi_j;
 \end{aligned} \tag{5.11.d}$$

Si risolvono i singoli sistemi e si determinano le leggi degli spostamenti. Dagli spostamenti, imponendo le equazioni di congruenza agli estremi, si determinano le espressioni delle forme di interpolazione.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= w \mid w_i = 1, \varphi_i = 0, w_j = 0, \varphi_j = 0; \\
 N_2 &= w \mid w_i = 0, \varphi_i = 1, w_j = 0, \varphi_j = 0; \\
 N_3 &= w \mid w_i = 0, \varphi_i = 0, w_j = 1, \varphi_j = 0; \\
 N_4 &= w \mid w_i = 0, \varphi_i = 0, w_j = 0, \varphi_j = 1;
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Le forme sono, in generale, diverse per tutti i casi tranne che negli ultimi due, nei quali le espressioni che si determinano sono uguali a quelle viste per il caso di danneggiamento discreto nell'equazione (5.4). I termini delle matrici delle rigidità e delle masse per i relativi schemi diventano, perciò, i seguenti:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \begin{cases} N_{ia}(z) & 0 \leq z < 1_a \\ N_{ib}(z) & 0 \leq z \leq 1_b \end{cases} \\
 \text{caso 1)} \quad k_{ij}^D &= \int_{z=0}^{1_a} \beta EJ \frac{\partial^2 N_{ia}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{ja}}{\partial z^2} dz + \int_{z=0}^{1_b} EJ \frac{\partial^2 N_{ib}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{jb}}{\partial z^2} dz \\
 m_{ij}^D &= \int_{z=0}^{1_a} \rho AN_{ia} N_{ja} dz + \int_{z=0}^{1_b} \rho AN_{ib} N_{jb} dz \quad i, j = 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{5.13.a}$$

$$N_i = \begin{cases} N_{ia}(z) & 0 \leq z < l_a \\ N_{ib}(z) & 0 \leq z < l_b \\ N_{ic}(z) & 0 \leq z \leq l_c \end{cases}$$

$$\text{caso 2} \quad k_{ij}^D = \int_{z=0}^{l_a} EJ \frac{\partial^2 N_{ia}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{ja}}{\partial z^2} dz + \int_{z=0}^{l_b} \beta EJ \frac{\partial^2 N_{ib}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{jb}}{\partial z^2} dz + \int_{z=0}^{l_c} EJ \frac{\partial^2 N_{ic}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{jc}}{\partial z^2} dz \quad (5.13.b)$$

$$m_{ij}^D = \int_{z=0}^{l_a} \rho AN_{ia} N_{ja} dz + \int_{z=0}^{l_b} \rho AN_{ib} N_{jb} dz + \int_{z=0}^{l_c} \rho AN_{ic} N_{jc} dz \quad i, j = 1, \dots, 4$$

$$N_i = \begin{cases} N_{ia}(z) & 0 \leq z < l_a \\ N_{ib}(z) & 0 \leq z \leq l_b \end{cases}$$

$$\text{Caso 3} \quad k_{ij}^D = \int_{z=0}^{l_a} EJ \frac{\partial^2 N_{ia}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{ja}}{\partial z^2} dz + \int_{z=0}^{l_b} \beta EJ \frac{\partial^2 N_{ib}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{jb}}{\partial z^2} dz \quad (5.13.c)$$

$$m_{ij}^D = \int_{z=0}^{l_a} \rho AN_{ia} N_{ja} dz + \int_{z=0}^{l_b} \rho AN_{ib} N_{jb} dz \quad i, j = 1, \dots, 4$$

$$\text{Caso 4} \quad \begin{aligned} k_{ij}^D &= \beta k_{ij}^U \\ m_{ij}^D &= m_{ij}^U \end{aligned} \quad (5.13.d)$$

Definite le matrici delle masse e quelle delle rigidezze per tutti i singoli elementi, si passa all'assemblaggio delle matrici globali con lo stesso procedimento valido per il caso discreto, dal quale si ottiene il seguente problema agli autovalori

$$M^D \ddot{u} + K^D u = 0 \quad (5.14)$$

i termini della matrice delle masse sono diversi dal caso discreto, ma il tipo di problema rimane lo stesso determinando le seguenti soluzioni:

$$\omega_1^D(\beta, b, x), \dots, \omega_N^D(\beta, b, x) \quad N = \text{DOF} \quad (5.15)$$

### 5.3 Problema inverso

Per la soluzione del problema si considera una funzione che lega l'errore commesso sulle misure reali a quelle determinate per via numerica imponendo uno stato di danneggiamento, la procedura viene spesso definita response quantities procedure [77].

$$\text{err} = \sum_{i=1}^P \left| \frac{\omega_i^C(\beta, b, x) - \omega_i^D}{\omega_i^U} \right| \quad P \leq N \quad (5.16)$$

E' importante dire che una modellazione FEM porta con se inevitabili errori di discretizzazione, quindi anche se si discretizza la trave a passo fitto, non si riuscirebbe ad raggiungere i valori ottenuti dalla soluzione teorica classica per il caso non danneggiato di trave continua appoggiata-appoggiata. Dunque in tutti quei casi in cui è possibile farlo è

buona norma confrontare la modellazione con dati teorici. Nel caso specifico esiste una soluzione in forma chiusa per le frequenze che valgono:

$$\omega^T_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad i = 1, \dots, \infty \quad (5.17)$$

Prima di procedere nel risolvere il problema inverso e minimizzare la funzione (5.16) è opportuno far tendere l'errore dato dalla seguente equazione (5.18) a zero o ad un valore accettabile

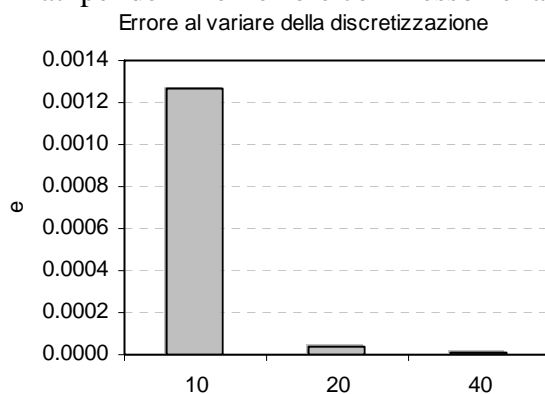
$$e = \sum_{i=1}^P \left| \frac{\omega^T_i - \omega_i^{FEM}}{\omega^T_i} \right| \quad (5.18)$$

Se così non fosse, l'errore commesso per la stima delle pulsazioni proprie potrebbe essere più influente di quello dovuto allo stato di danno, falsando perciò il processo di minimizzazione. La minimizzazione può essere effettuata in diversi modi, però le procedure devono essere adatte alla tipologia di funzione da minimizzare. Per lo studio della stessa si prende a riferimento una trave di note caratteristiche geometriche sulla quale insiste uno stato di danneggiamento noto a priori.

La trave presenta un modulo di Young  $E=21 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ , una sezione  $10 \cdot 10 \text{ mm}$ , una densità  $\rho=7840 \text{ Kg/m}^3$  ed una lunghezza  $L=1000 \text{ mm}$ . In questo caso le prime tre pulsazioni teoriche, per lo stato non danneggiato, sono pari a:

$$\begin{aligned} \omega^T_1 &= 147.455 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \\ \omega^T_2 &= 589.822 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \\ \omega^T_3 &= 1327.099 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \end{aligned} \quad (5.19)$$

Questi valori vengono utilizzati per definire l'errore commesso nella discretizzazione.



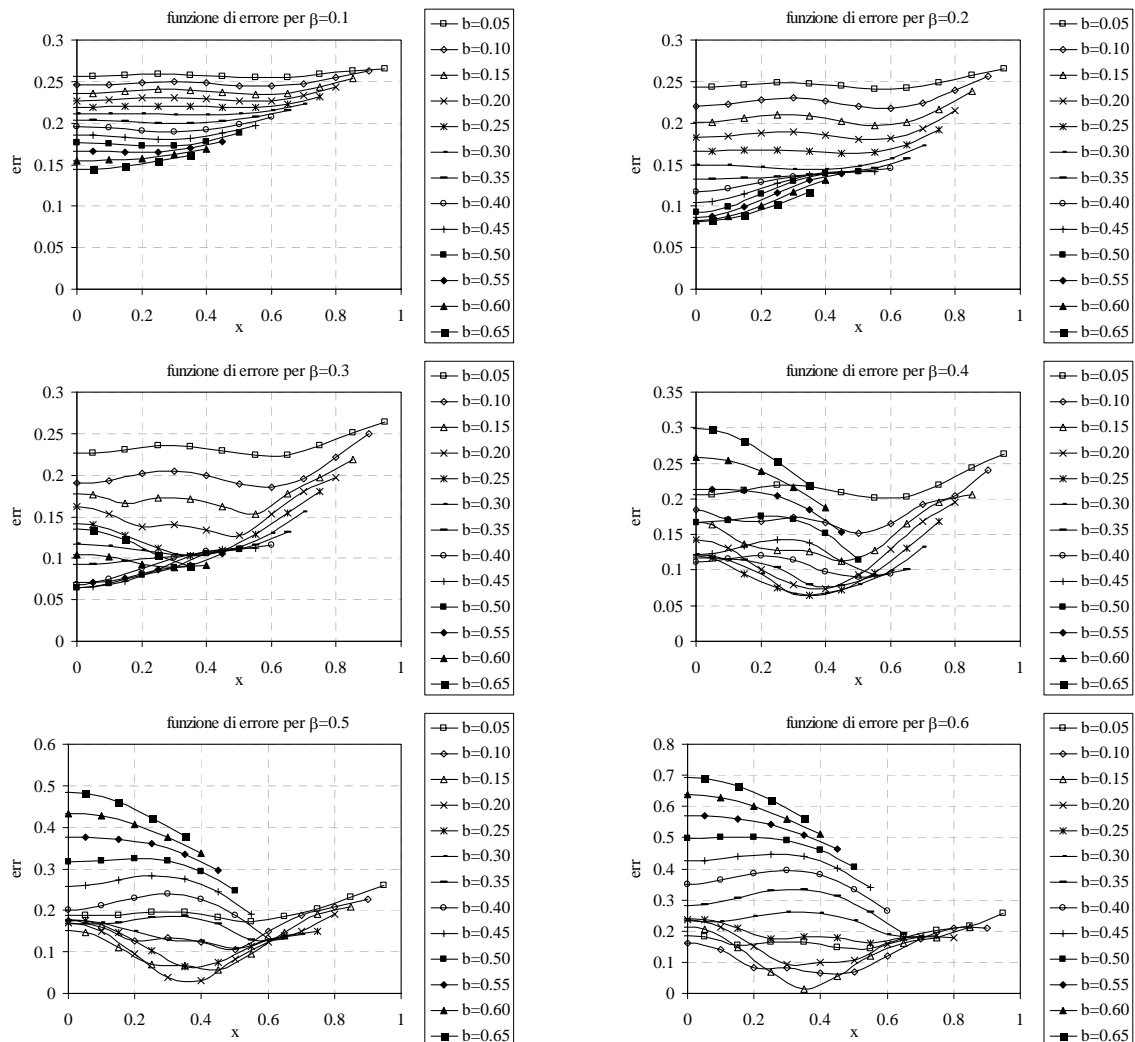
**Figura 5.6.** Errore dovuto alla discretizzazione

Dal quale si nota come una discretizzazione con  $n=20$  sia più che buona, per essa si ottiene un errore di  $4.33 \cdot 10^{-5}$ .

Stabilita la discretizzazione si esamina un caso di danneggiamento noto, in cui  $X=180\text{mm}$ ,  $B=160\text{mm}$  e  $\beta=0.57$ ; per caso si calcolano le pulsazioni proprie per via analitica (questi dati saranno considerati come dati pseudo sperimentali)

$$\begin{aligned}\omega^D_1 &= 129.146 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \\ \omega^D_2 &= 526.853 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \\ \omega^D_3 &= 1279.954 \frac{\text{rad}}{\text{s}};\end{aligned}\tag{5.20}$$

Il processo di minimizzazione dell'errore dovrà portare a definire le variabili di danneggiamento vicine a quelle imposte per il calcolo delle frequenze pseudo sperimentali. Si esamina l'errore per alcuni valori di beta e per tutti i valori di X e B.





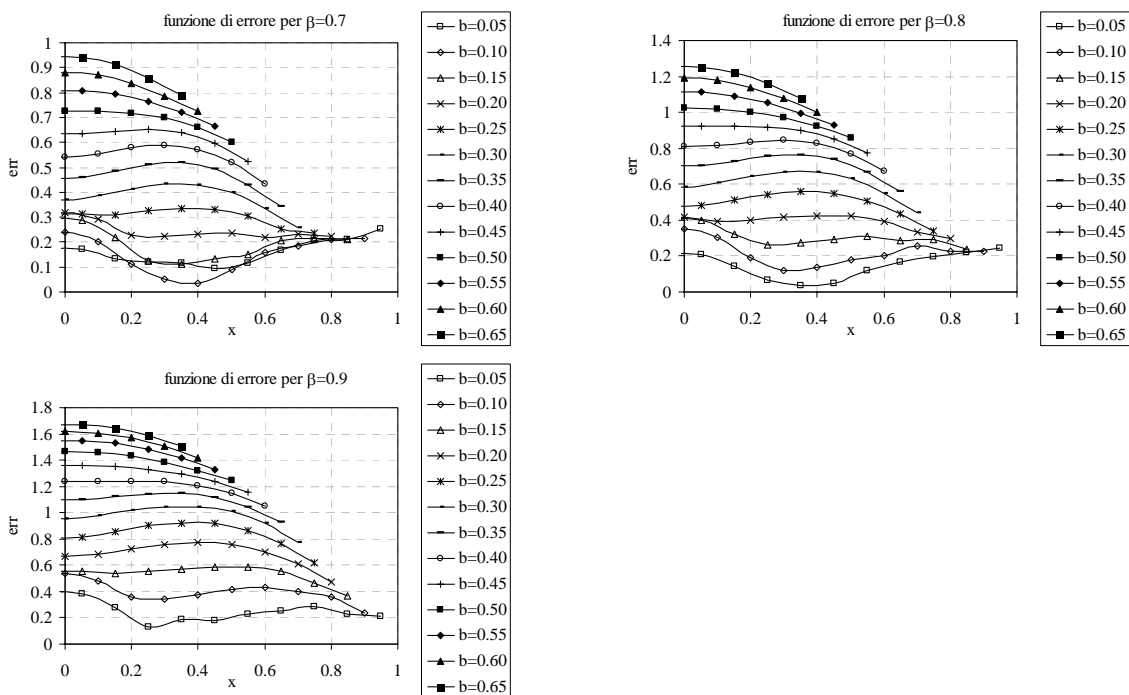
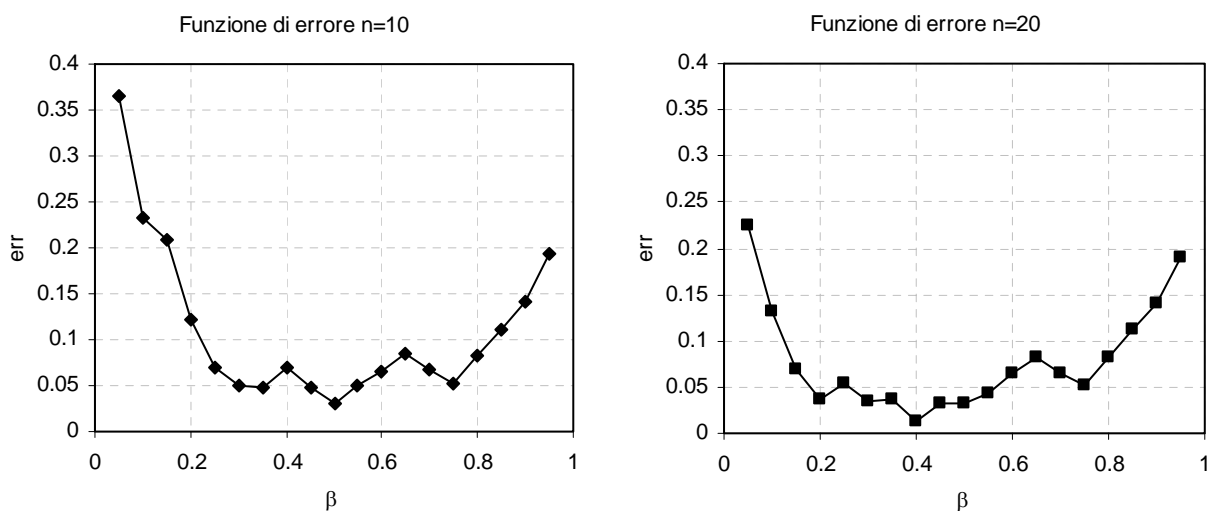


Figura 5.7. Funzione obiettivo al variare di  $\beta$ , b e x.

Ogni grafico possiede un minimo e per ogni minimo vengono definite le variabili geometriche del danno.

$$\bar{\beta}_i = \min \beta_i(B, X) \quad (5.21)$$

Diagrammando l'errore rispetto ai minimi di beta e considerando diverse discretizzazioni si ottiene:



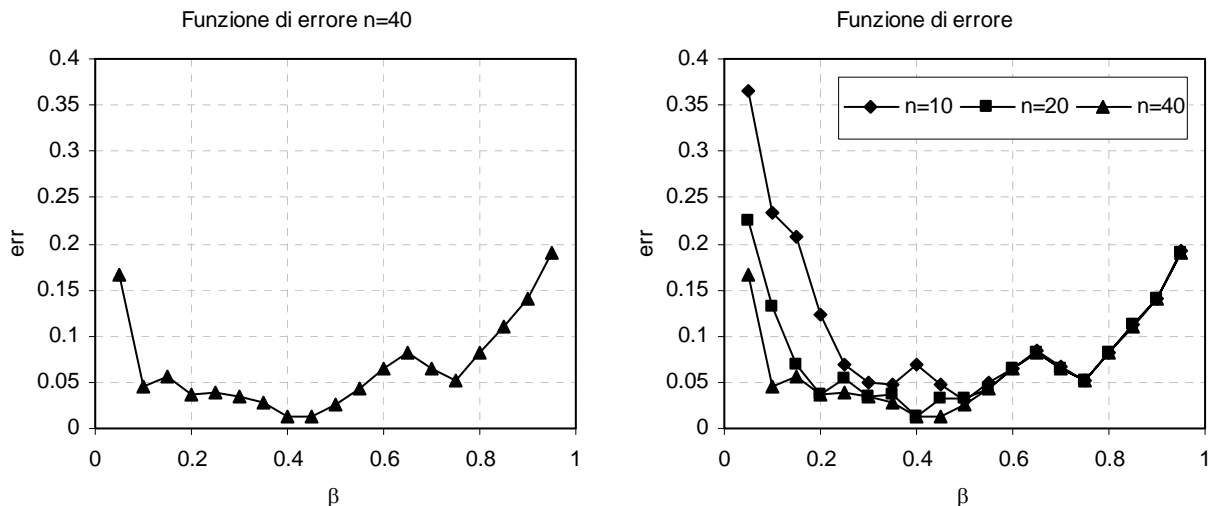


Figura 5.8. Funzione obiettivo al variare del numero di elementi e di beta.

Dalle figure 5.8 si può notare come la discretizzazione più fitta, cioè quella nella quale l'errore iniziale era basso, stia sempre al di sotto delle altre. La soluzione migliore per  $n=20$  è quella di  $\beta=0.60$  e con  $b=0.14$  e  $x=0.35$ , mentre per  $n=40$   $\beta=0.60$  con  $b=0.14$  e  $x=0.35$ , nel caso  $n=10$  la soluzione migliore è  $\beta=0.50$ ,  $b=0.20$  e  $x=0.4$ . Il procedimento appena effettuato è il cosiddetto metodo a scansione su tutte le possibili combinazioni geometriche e su una discretizzazione del grado di danno.

Per avere la certezza di ottenere un errore pari a zero deve necessariamente verificarsi che la discretizzazione della trave si sovrapponga completamente al tratto danneggiato. In questo caso, come si può notare dalla figura 5.9, utilizzando  $n=40$  non si riuscirebbe a far sovrapporre la maglia al tratto danneggiato

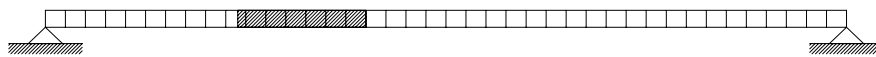


Figura 5.9. Test pseudo sperimentale e discretizzazione della trave con  $n=40$ .

Esiste un elemento che è in parte danneggiato ed in parte no. Il secondo metodo, applicato al caso precedente, potrebbe dare una stima migliore del danno, sul secondo, poi, si potrebbero infittire a piacimento i punti di scansione sulle incognite geometriche.

Il processo di scansione su tutti i punti garantisce una ricerca completa su tutto il dominio. Incrementando la discretizzazione il numero di punti su cui effettuare la scansione cresce rapidamente, per tale motivo si è deciso di risolvere il nuovo problema utilizzando un algoritmo di ottimizzazione. Nel caso in esame sono presenti molti punti di minimo relativo, si è pensato di lavorare con gli algoritmi genetici che vengono utilizzati in molti lavori di damage detection [85 86].

Essi non garantiscono di trovare una soluzione ottima per un problema, ma generalmente trovano una soluzione sufficientemente buona e in tempi rapidi. Per meglio comprendere i passi eseguiti nell'identificazione, per entrambi i casi sono presentati, nella figura 5.10, i flow chart del processo di minimizzazione.

Si è deciso inoltre di confrontare l'algoritmo nei due casi, per il caso discreto, l'algoritmo di ottimizzazione è più macchinoso a differenza di quello continuo, nell'ultimo di deve lavorare contemporaneamente con variabili sia discrete che continue. In questo caso si utilizza una popolazione pari a 19, una probabilità di incrocio  $p_i=0.25$  e una probabilità di mutazione pari a 0.03.

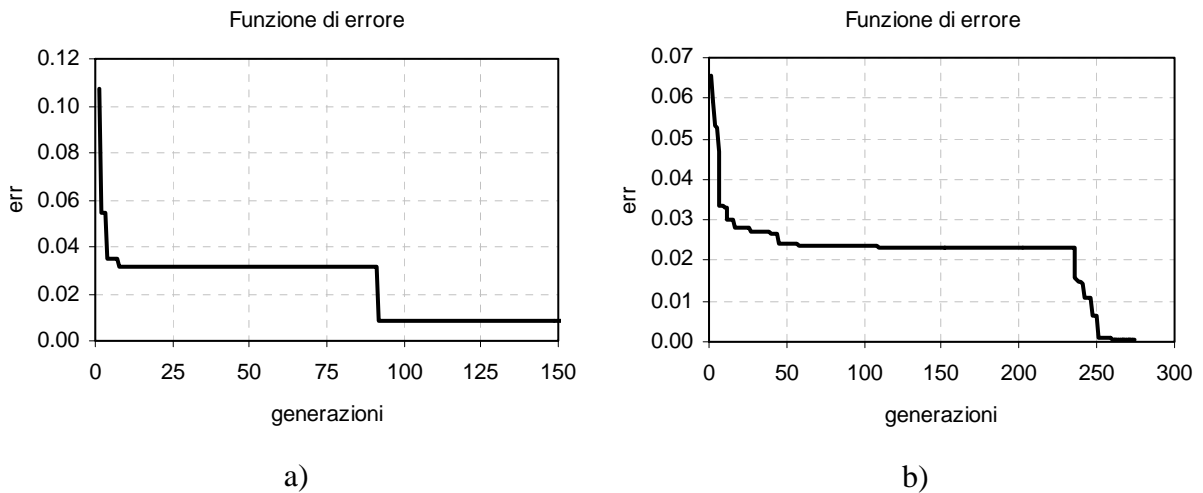
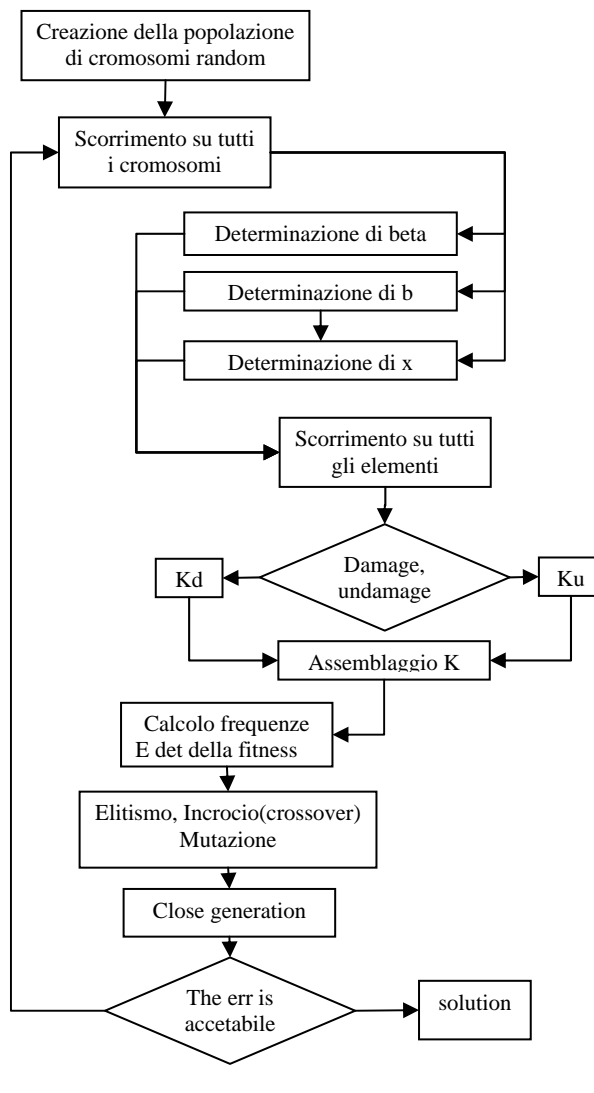
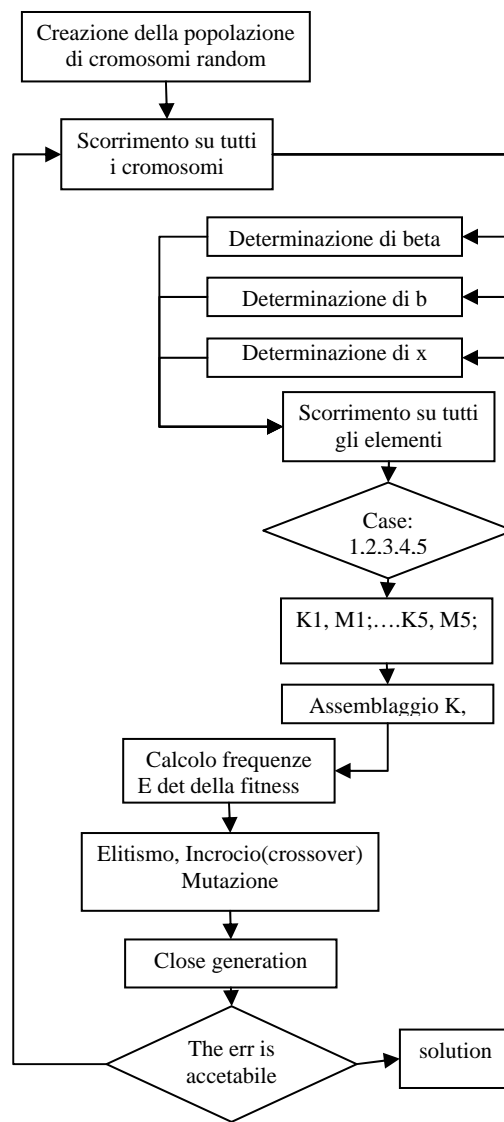


Figura 5.10. Funzione obiettivo al variare del numero di generazioni: a) discrete damaged, b) continuous damaged.

Dai diagrammi precedenti si può come il metodo continuo approssimi meglio la soluzione determinando una soluzione migliore rispetto al caso discreto.



a)



b)

Figura 5.11. Flow-chart: a) discrete damaged, b) continuous damaged.

	$\beta$	b	x	err
Soluzione esatta	0.570	0.160	0.360	--
Metodo discreto	0.584	0.150	0.350	0.0084
Metodo continuo	0.570	0.159	0.362	0.0004

Tabella 5.1. Soluzioni ottenute per il caso pseudo sperimentale

Si è, però, notato che il numero di generazioni necessario per il raggiungimento della soluzione è per il metodo continuo maggiore di quello discreto. Questo valore non è noto a priori, dunque, è necessario stabilire un valore di *err* per il quale una soluzione possa essere definita accettabile. Nei due casi si è preso a riferimento il valore del 1%.

Le frequenze vengono determinate mediante test sperimentali, anch'essi sono affetti da inevitabili errori, è buona norma valutare la soluzione (beta, b, x) variando i dati in ingresso. Si parte facendo variare i dati (5.20) in un range del 2%, prendendo a riferimento il caso visto precedente.

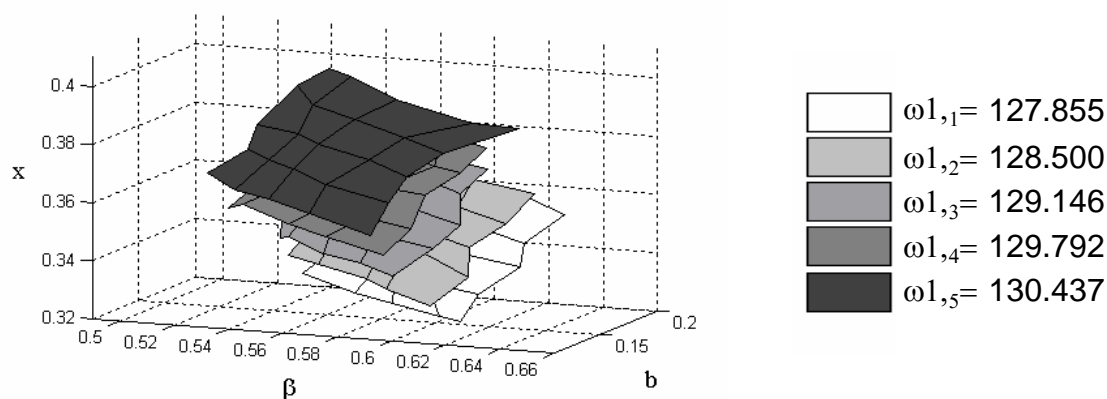


Figura 5.12. Soluzione al variare di  $\omega_1$ .

In figura 5.12 sono diagrammate le soluzioni rispetto al variare del parametro  $\omega_1$  e all'aumentare di questo, la variabile  $x$  cresce dal un valore di circa 0.34 a 0.38, mentre la variabile associata alla base cresce di poco da 0.15 a 0.16 e  $\beta$  passa da 0.57 a 0.55

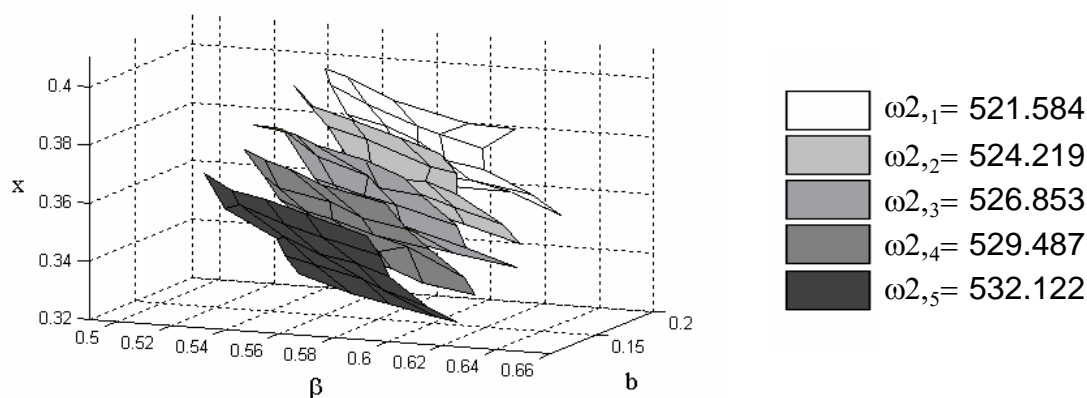


Figura 5.13. Soluzione al variare di  $\omega_2$ .

In figura 5.13 al crescere di  $\omega_2$  la posizione  $x$  decresce da 0.38 a 0.34, la base cresce da 0.15 a 0.17 mentre  $\beta$  decresce passando da 0.59 a 0.56

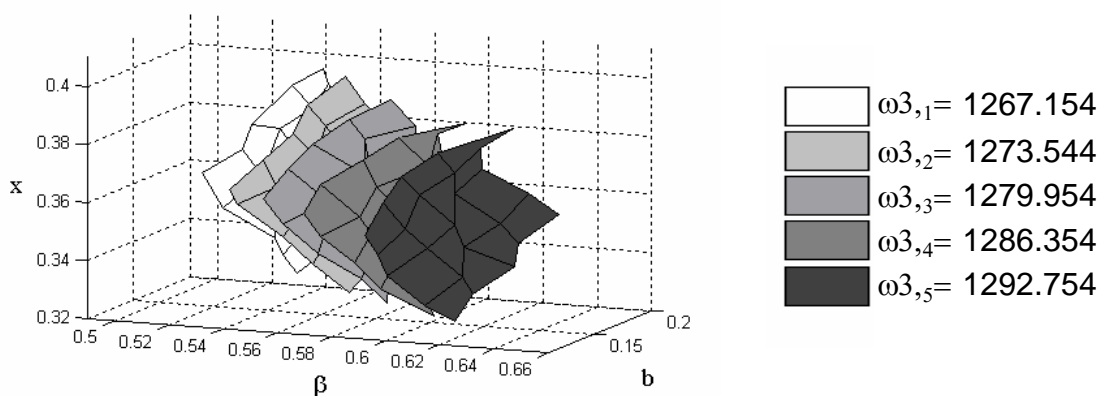


Figura 5.14. Soluzione al variare di  $\omega_3$ .

In fig. 5.14 la variazione di  $\omega_3$  porta alla definizione di superfici poco regolari, in questo caso la  $x$  rimane costante al valore 0.36, la base passa da 0.185 a 0.13 e beta da 0.44 a 0.62.

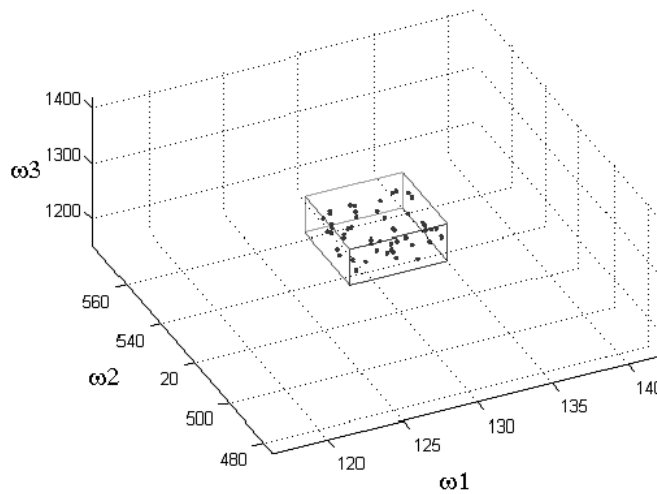
Un ragionamento siffatto serve a definire la sensibilità di un parametro che si vuole determinare rispetto ad una variazione di un dato in ingresso. Però gli input possono variare contemporaneamente in modo random, si è, quindi, proceduto con il simulare 50 valori random di frequenze uniformemente distribuiti rispetto ai valori centrali inseriti in (5.20) e fissando un range di variazione del 5%, centrato rispetto ai valore pseudo sperimentale.

$$\frac{\omega_{i \max} - \omega_i^D}{\omega_i^D} = 2.5\% ; \quad \frac{\omega_i^D - \omega_{i \min}}{\omega_i^D} = 2.5\% \quad (5.22)$$

In tabella vengono rappresentati i valori massimi e minimi dentro i quali vengono generati i valori random.

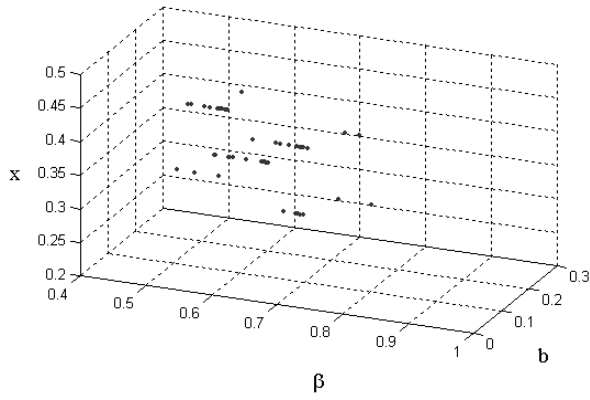
	Omega min	Omega cen	Omega max
1	143.866	147.555	151.244
2	579.076	589.822	604.568
3	1293.922	1327.099	1360.276

**Tabella 5.2.** Dati modello pseudo sperimentale

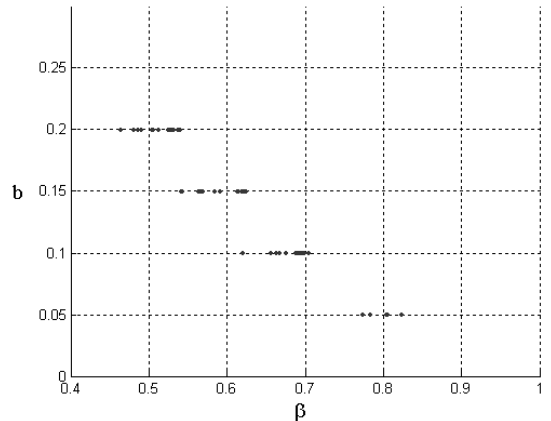


**Figura 5.15.** Dati random di  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

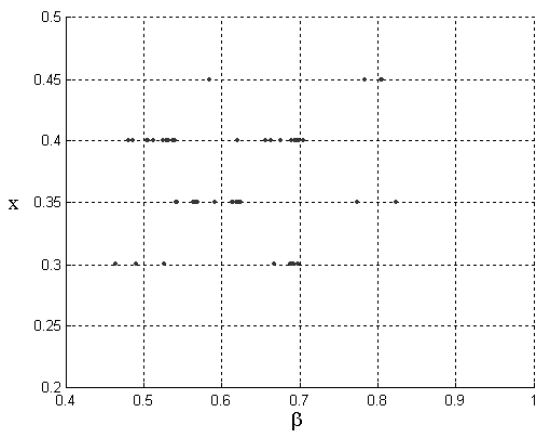
Graficamente è possibile valutare le soluzioni ottenute per entrambi i casi.



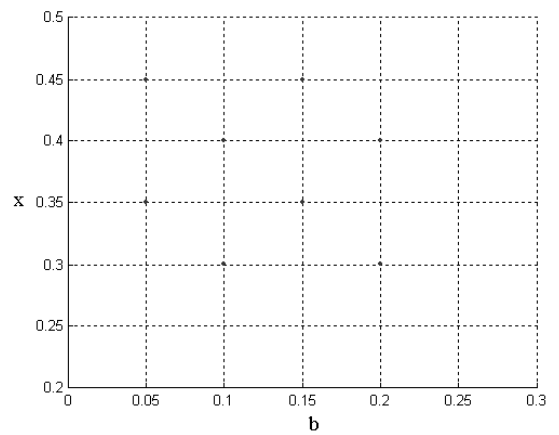
a)



b)

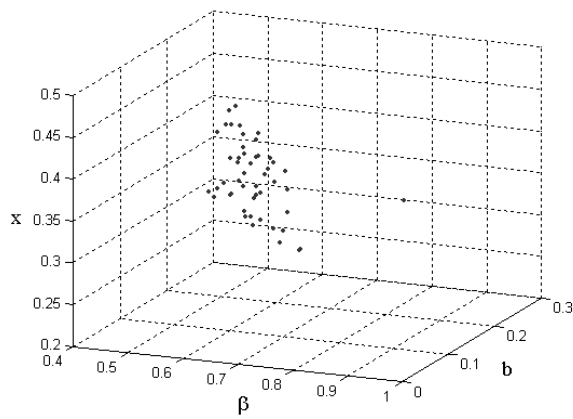


c)

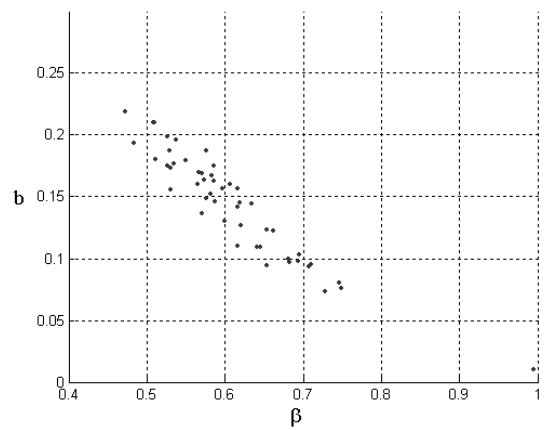


d)

Figura 5.16. Soluzioni nel discrete damaged



a)



b)

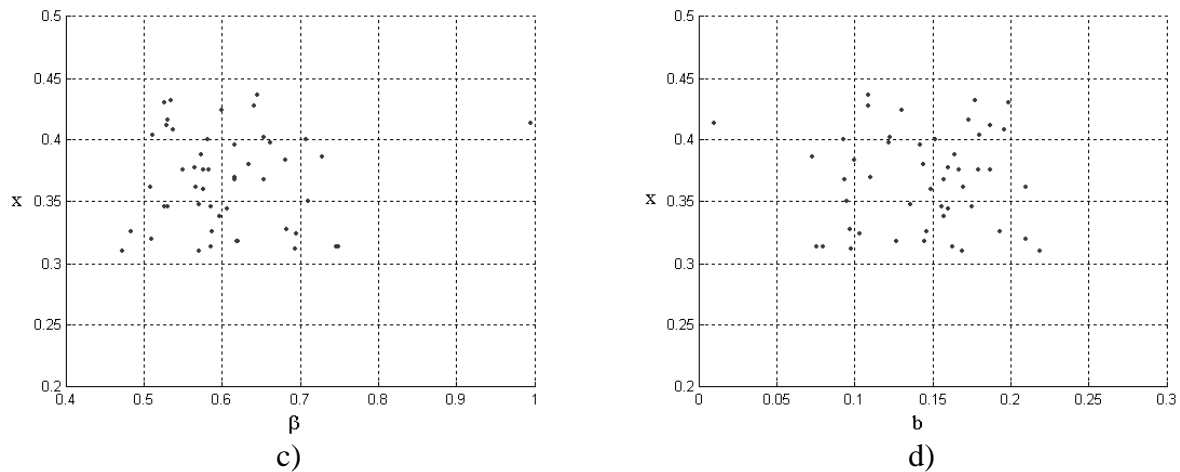


Figura 5.17. Soluzioni nel continuo damaged.

Si può valutare, dalle figure 5.16, 5.17, come il problema in esame sia mal condizionato, le soluzioni nel caso discreto che continuo non sono concentrate in un range, dunque, a piccole variazioni delle misure delle pulsazioni otteniamo grandi variazioni sulle soluzioni. Si può notare come le soluzioni ottenute mediante FEMc abbiano un valore *err* più basso rispetto al caso discreto.

Sono stati utilizzati per un confronto altri dati disponibili in bibliografia [77], che si riferiscono ad una trave appoggiata appoggiata con valori identici a quelli usati nel caso pseudo sperimentale

				Natural frequencies (rad/s)		
				$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
Undamaged				73.728	294.91	1179.6
				variations of natural frequencies (rad/s)		
case number	damage position x	damage extension $\beta$	damage coefficient b	$\Delta\omega_1$	$\Delta\omega_2$	$\Delta\omega_3$
1	0.375	0.050	0.3	1.07	5.075	0.75
2	0.375	0.200	0.3	3.977	16.09	14.44
3	0.1	0.200	0.3	5.341	4.543	30.17

Tabella 5.3. Dati sperimentali utilizzati

Si sono esaminati i vari casi con differenti discretizzazioni ed i risultati sono rappresentati dalle seguenti tabelle e successivi istogrammi.

AG discontinuo n=10				
	err	$\beta$	b	x
caso1	0.00509	0.101	0.20000	0.4
caso2	0.00517	0.289	0.20000	0.4
caso3	0.01010	0.295	0.20000	0

AG continuo n=10				
	err	$\beta$	b	x
caso1	0.00027	0.243	0.067	0.376



caso2	0.00039	0.299	0.201	0.376
caso3	0.00017	0.286	0.213	0.087
AG discontinuo n=20				
	err	$\beta$	b	x
caso1	0.00252	0.316	0.050	0.35
caso2	0.00556	0.287	0.200	0.4
caso3	0.00010	0.299	0.200	0.1
AG continuo n=20				
	err	$\beta$	b	x
caso1	0.00012	0.278	0.055	0.374
caso2	0.00032	0.298	0.201	0.374
caso3	0.00014	0.305	0.194	0.103

Tabella 5.4. Risultati ottenuti al variare del metodo ed al variare della discretizzazione

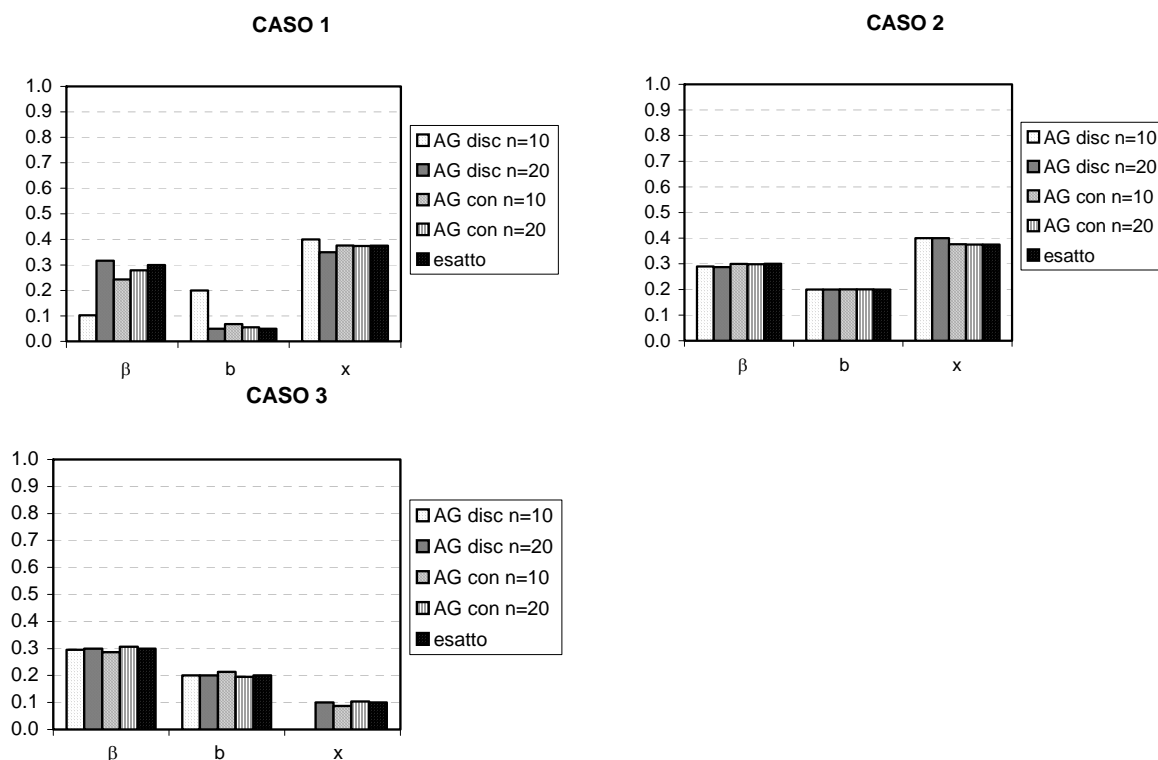


Figure 5.18. Soluzioni al variare della discretizzazione e al metodo utilizzato.

La definizione dei parametri del danneggiamento fornisce anche in questo caso risultati soddisfacenti, si è constatato che con un numero di elementi pari a dieci, il metodo basato sul continuous damage offre risultati brillanti con errori abbastanza bassi, questi si abbassano ulteriormente incrementando la mesh sia nel caso discreto che nel continuo, si è poi visto come gli errori del continuo sono stati sempre inferiori al quelli nel discreto.

## 5.4 Conclusioni

Due modelli di danneggiamento di trave sono stati usati per determinare il danno in una zona mediante FEM e sono il discrete damage e continuous damage. A partire da dati misurati in

laboratorio si riesce a determinare la posizione il grado di danno e la sua grandezza, fornendo risultati più che soddisfacenti.

Si è proceduto a valutare la funzione di errore tra i dati in ingresso e quelli calcolati, e minimizzare la stessa grazie all'uso degli algoritmi genetici, che però non danno una soluzione esatta, ma si è visto che con poche generazioni essi forniscono delle buone soluzioni. Una soluzione buona con il metodo discreto si ottiene, solamente, incrementando la mesh con aggravio in termini computazionali, mentre il metodo continuo ne è indipendente, il continuo offre, poi, buoni risultati senza incrementare la mesh anche quando la base del danno è notevolmente piccola. Il FEM è però un metodo approssimato e prima di procedere alla minimizzazione, è necessario ridurre gli errori interni dovuti alla discretizzazione per non falsare l'analisi.

Il tipo di problema risulta mal condizionato, e a piccole variazioni dei dati in ingresso si hanno grandi variazioni dei dati in uscita, si è visto che le variazioni sono più o meno continue per variazioni piccole dei dati in ingresso, mentre si sono verificati grossi salti per grandi variazioni.

Se si volesse determinare il danno utilizzando questa tecnica sarebbe necessario utilizzare un numero maggiore di informazioni, ad esempio aumentando il numero di pulsazioni da confrontare oppure, in tutti quei casi in cui è consentito farlo, confrontare anche le informazioni riguardanti le forme modali anche se queste sono più difficili da determinare.

## CAPITOLO 6

### IDENTIFICAZIONE DEL DANNO IN TELAI PIANI

*L'obiettivo del presente capitolo è quello di implementare alcuni criteri di confronto delle caratteristiche modali, per risolvere, attraverso il metodo inverso, il problema dell'individuazione e quantificazione del danneggiamento nei telai piani, sulla base dei dati del modello pseudo-sperimentale. Saranno utilizzati diversi criteri di confronto delle caratteristiche modali, applicati ad altrettanti differenti telai piani, il minimo della funzione di errore, sarà determinato attraverso l'utilizzo di procedimenti di ottimizzazione, che sostituiranno il troppo oneroso procedimento di scansione e consentiranno l'analisi di strutture più complesse. I metodi di ottimizzazione utilizzati saranno: metrica variabile, metodo del gradiente, algoritmi genetici.*

## 6.1. Introduzione.

La possibilità di effettuare una identificazione dinamica del danneggiamento in una struttura è subordinata alla condizione che questa possa essere sottoposta alla “analisi modale sperimentale”, dove con tale espressione si intende il processo sperimentale che ha come scopo quello di acquisire dei dati che consentono di determinare una descrizione numerica del comportamento dinamico della struttura. I dati acquisiti vengono poi elaborati a seconda del metodo scelto per l’individuazione del danneggiamento.

L’obiettivo del seguente capitolo è quello di definire, in tutti gli aspetti, il problema dell’identificazione strutturale [87-97] applicata ai telai piani operando un confronto numerico fra i vari metodi di identificazione del danno in un telaio piano, per valutarne efficienza ed applicabilità. Non avendo, però, la possibilità di sottoporre la struttura oggetto di studio ad analisi modale sperimentale, il confronto è stato condotto con l’ausilio di un modello “pseudo-sperimentale”. Per modello pseudo-sperimentale, si intende una struttura caratterizzata dinamicamente attraverso l’analisi modale teorica. A tal proposito, fissata la geometria del modello pseudo-sperimentale è stato implementato un apposito programma di calcolo per determinarne le caratteristiche dinamiche (frequenze e forme modali).

Il processo di analisi inversa rimane lo stesso di quello analizzato nel capitolo precedente, vengono però introdotti nuovi criteri di confronto al fine di identificare una metodologia stabile anche in presenza di eventuali errori.

## 6.2. Analisi modale del modello pseudo-sperimentale.

E’ stato implementato un programma di calcolo per effettuare l’analisi modale di un telaio piano. Il programma è realizzato con il linguaggio *Matlab*. Il programma, letto il file di input, assegna i valori alle relative variabili, per tutti i nodi e gli elementi, calcola le proprietà geometriche di questi (area, momento d’inerzia) ed assembla le matrici, delle masse e delle rigidezze, del singolo elemento strutturale nel sistema di riferimento locale. Definita una matrice di rotazione, questa viene applicata alle matrici di rigidezza dei vari elementi per riportare il tutto nel sistema di riferimento globale.

Calcolate le dimensioni della matrice di rigidezza dell’intera struttura ( $\mathbf{K}_{\text{globale}}$ ), è possibile procedere sia all’assemblaggio di questa che della matrice delle masse della struttura ( $\mathbf{M}_{\text{globale}}$ ). A questo punto è stato possibile effettuare l’analisi modale e calcolare frequenze e forme modali. Il calcolo è stato condotto tramite il metodo delle potenze inverse.

Per verificare la bontà dei risultati ottenuti, si è pensato di confrontarli con i parametri modali (frequenze e forme modali) forniti dall’analisi dinamica, dello stesso modello, condotta con l’ausilio di un programma di calcolo agli elementi finiti, nel caso specifico il *SAP*. Il confronto ha evidenziato una discordanza di risultati, ascrivibile al fatto che il codice di calcolo commerciale utilizzato, effettua l’analisi modale concentrando le masse distribuite di ciascun elemento strutturale nei nodi, a differenza del programma che invece tratta le masse in modo diffuso. Il *SAP* segue questa filosofia di calcolo, perché di solito nei nodi sono assegnate masse aggiuntive dovute ai carichi che sono molto più grandi del contributo delle masse diffuse dei singoli elementi, per cui l’approssimazione che si genera nel risultato finale è praticamente irrilevante. Si deduce che il confronto a questo livello non ha molto significato, per cui si è concluso che il procedimento di verifica si sarebbe dovuto condurre, una volta che il programma avesse tenuto conto del contributo derivante dalle masse di piano applicate nei nodi e della rigidezza di piano.

### 6.2.1. Analisi modale con masse di piano.

Si è passato quindi ad implementare una seconda versione del programma che tenesse conto del contributo delle masse di piano. A questo proposito il file di input è stato modificato, facendo in modo che contenesse anche l'informazione sull'entità della massa di piano. Si è fatto in modo che quest'ultima grandezza nel programma venisse ugualmente ripartita sui nodi di piano. Con queste informazioni è stato possibile riassemblare la matrice delle masse  $\mathbf{M}_{tot}$ , e mantenendo lo stesso procedimento di assemblaggio della  $\mathbf{K}_{tot}$ , della versione precedente è stata nuovamente condotta l'analisi modale. Il problema è ancora continuo per cui per il generico telaio piano, le forme modali saranno infinite. Il programma consente di fissare il numero di forme modali che si vogliono calcolare. La rigidità assiale  $EA$  di tutte le aste è stata sempre assunta diversa dal valore infinito. E' stata implementata una procedura per la rappresentazione grafica delle forme modali della struttura. Di seguito si riportano alcune deformate modali ottenute con il programma:

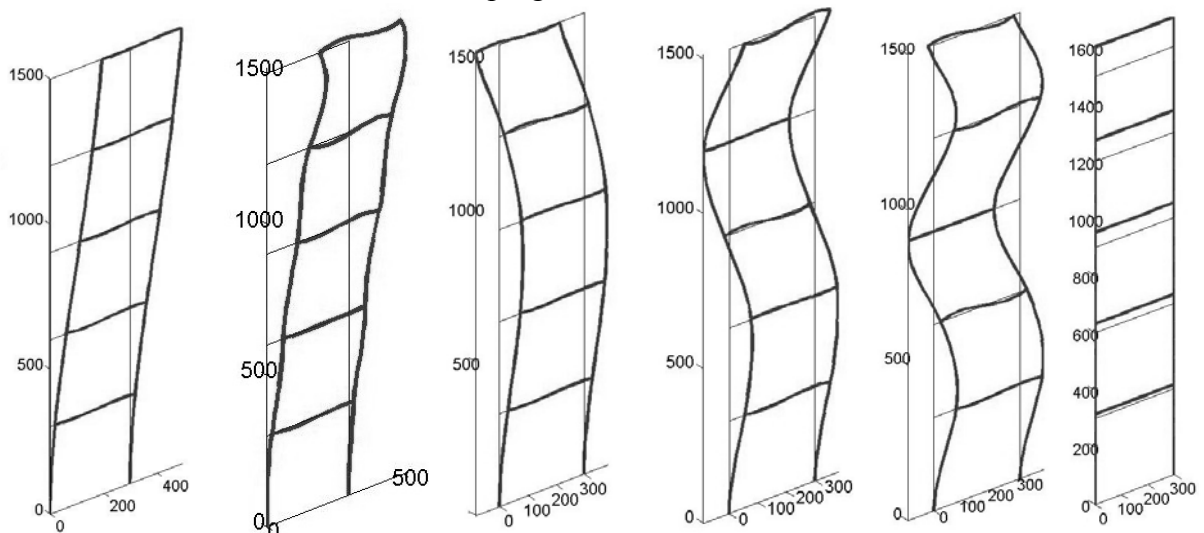


Figura 6.1. Deformate modali telaio ad  $n$  piani.

### 6.2.2. Analisi modale con masse di piano ed impalcato infinitamente rigido, confronto risultati ottenuti.

Lo stesso problema è stato rivisto imponendo che gli impalcati fossero infinitamente rigidi. Tale modifica è stata ottenuta sommando in un unico termine, i contributi di rigidità delle aste nella direzione orizzontale. Il numero di forme modali, ora, dipende dai gradi di libertà del piano e non da quelli del nodo. A questo punto è stato possibile confrontare i risultati ottenuti, con questa ultima versione del programma, con quelli forniti dal programma di calcolo *S.A.P.* Per ridurre al minimo le differenze d'impostazione fra i due programmi, non si è tenuto conto in entrambi del contributo delle masse diffuse.

I risultati ottenuti sono stati confrontati in termini di periodi di vibrazione. A meno dei moti rotazionali, dei quali *S.A.P.* non tiene conto (perché la massa è concentrata nei nodi), gli altri modi traslazionali sono risultati praticamente coincidenti. Di conseguenza l'esito del controllo del programma può ritenersi positivo. Nelle pagine seguenti verranno presentati i risultati ottenuti dall'applicazione dei vari criteri di confronto a applicato ad un telaio a 3 piani.

### 6.3. Verifica dell'ortogonalità dei modi sperimentali.

Si indica con  $\Phi_{sp}$  la matrice dei modi ottenuti dalle prove sperimentali e con  $M_{num}$  la matrice di massa relativa al modello numerico ad elementi finiti e si calcola il prodotto:

$$\Phi_{sp}^T M_{num} \Phi_{sp} = I_{sp} \quad (6.1)$$

dove la matrice  $I_{sp}$  deve essere una matrice unitaria se i modi sperimentali sono normalizzati a massa generalizzata unitaria e se sono ortogonali rispetto alla matrice di massa del modello numerico.

In genere è necessario fare riferimento ad un modello ridotto, in modo che il numero dei gradi di libertà sia compatibile con quello dei modi misurati dalla sperimentazione; se si indica con  $M_R$  la matrice di massa ridotta, cioè la matrice di massa relativa ai gradi di libertà che vengono misurati sperimentalmente, si ha:

$$\Phi_{sp}^T M_R \Phi_{sp} = I_{sp} \quad (6.2)$$

dove la matrice  $I_{sp}$  è idealmente una matrice unitaria; in pratica si tratta di verificare delle condizioni approssimate, ad esempio con i valori:

$$I_{ii} > 0.95 \quad (6.3)$$

$$I_{ij} < 0.05 \quad (6.4)$$

Un altro metodo per il controllo di ortogonalità fa intervenire anche la matrice di rigidità del modello numerico, infatti a partire dalla relazione:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi^{(r)} = 0 \quad (6.5)$$

se si considerano le matrici  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  ed il vettore  $\phi^{(r)}$  partizionati in gradi di libertà principali,  $p$ , e secondari,  $s$ , in cui i gradi di libertà principali corrispondono a quelli di misura si ottiene la relazione:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{sp} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \omega_r^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{sp} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \phi_p^{(r)} \\ \phi_s^{(r)} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (6.6)$$

dalla (6.6) considerata nella sua partizione inferiore si ottiene:

$$\phi_s^{(r)} = -(\mathbf{K}_{ss} - \omega_r^2 \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{sp} - \omega_r^2 \mathbf{M}_{sp}) \phi_p^{(r)} = \mathbf{S}_r \phi_p^{(r)} \quad (6.7)$$

e quindi l'autovettore del modo  $r$ -esimo è dato dalla:

$$\phi^{(r)} = \begin{Bmatrix} \phi_p^{(r)} \\ \phi_s^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{S}_r \end{bmatrix} \phi_p^{(r)} = \mathbf{T}_r \phi_p^{(r)} \quad (6.8)$$

e si ha quindi la condizione relativa al controllo di ortogonalità:

$$\phi^{(r)T} M_{\text{num}} \phi^{(q)} = \delta_{rq} \quad (6.9)$$

con:

$$\delta_{rq} = 1 \quad \text{se } r = q \quad (6.10)$$

$$\delta_{rq} \neq 1 \quad \text{se } r \neq q \quad (6.11)$$

diviene:

$$\phi_p^{(r)T} T_r^T M_{\text{num}} T_q \phi_p^{(r)} = \delta_{rq} \quad (6.12)$$

dove nelle matrici di trasformazione  $T_r$  e  $T_q$  interviene anche la matrice di rigidezza del modello numerico. Naturalmente una volta che si sia eseguito il controllo di ortogonalità dei modi, il che permette di stabilire se la situazione sperimentale è accettabile, è possibile operare per ottenere un miglioramento delle deformate modali.

#### 6.4. Verifica della consistenza dei vettori modali.

Un metodo molto semplice per il confronto degli autovettori sperimentali con quelli numerici è basato sull'idea che se due autovettori descrivono la stessa deformata modale allora devono essere proporzionali tra loro. Questo permette di definire un fattore di proporzionalità, in particolare è stato definito un fattore di scala modale, *MSF (Modal Scale Factor)*, con la relazione<sup>1</sup>:

$$MSF_i = \frac{\left( \phi_{\text{num}}^{(i)T} W \phi_{\text{sp}}^{(i)} \right)}{\left( \phi_{\text{sp}}^{(i)T} W \phi_{\text{sp}}^{(i)} \right)} \quad (6.14)$$

dove  $\phi_{\text{num}}^{(i)}$  indica un modo ottenuto per via numerica,  $\phi_{\text{sp}}^{(i)}$  indica il modo corrispondente ottenuto sperimentalmente e  $W$  indica una matrice definita positiva da utilizzare come peso nella misura del fattore di scala, se non si hanno motivi per differenziare il “peso” delle componenti degli autovettori si può usare la matrice unitaria; in alcuni casi si possono utilizzare come “peso” le matrici di massa o rigidezza.

In modo analogo si può definire un fattore di correlazione indicato con il termine “criterio di correlazione modale”, *M.A.C (Modal Assurance Criterion)*, con la relazione<sup>2</sup>:

<sup>1</sup> Si osserva che se sono dati due vettori paralleli cioè  $u = \alpha v$ , proiettando la precedente relazione sul vettore  $v$ , si può ottenere la costante  $\alpha$  come

$$u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v \quad (6.13)$$

<sup>2</sup> Si osserva ancora che se si indica con  $\beta$  l'angolo compreso tra due vettori  $u$  e  $v$  nello spazio, dalla  $u \cdot v = |u||v| \cos \beta$ , può esprimersi il quadrato del coseno di tale angolo come

$$\cos^2 \beta = \frac{(u \cdot v)^2}{|v|^2 \cdot |u|^2} \quad (6.17)$$

che quindi fornisce un'interpretazione della (6.15).

$$MAC_i = \frac{\left( \phi_{num}^{(i)T} \phi_{sp}^{(i)} \right)^2}{\left( \phi_{num}^{(i)T} \phi_{num}^{(i)} \phi_{sp}^{(i)T} \phi_{sp}^{(i)} \right)} \quad (6.15)$$

questo fattore può assumere valori compresi tra zero ed uno; il valore zero indica che non vi è nessuna relazione di linearità tra il vettore sperimentale e quello numerico, mentre il valore uno indica la perfetta proporzionalità dei due vettori.

Si nota che, oltre i vantaggi della semplicità di valutazione degli indici del tipo *MSF* e *MAC*, per ottenere queste indicazioni non è necessario utilizzare le matrici di massa e di rigidità della struttura ed è anche possibile confrontare solo delle sottocomponenti dei vettori modali. Più in generale si può definire un M.A.C generalizzato in cui si utilizza anche la matrice peso, **W**, e si ha:

$$MAC_i = \frac{\left( \phi_{num}^{(i)T} \mathbf{W} \phi_{sp}^{(i)} \right)^2}{\left( \phi_{num}^{(i)T} \mathbf{W} \phi_{num}^{(i)} \phi_{sp}^{(i)T} \mathbf{W} \phi_{sp}^{(i)} \right)} \quad (6.16)$$

Un' ulteriore espressione del fattore di correlazione ottenuta a partire dal M.A.C. da Lievern ed Ewins (1988) è il cosiddetto Co.M.A.C [87] la cui espressione è la seguente:

$$CO.MAC_i = \frac{\sum_{r=1}^L \left| \phi_{num}^{(i)} \phi_{sp}^{(i)} \right|^2}{\sum_{r=1}^L \left( \phi_{num}^{(i)} \right)^2 \sum_{r=1}^L \left( \phi_{sp}^{(i)} \right)^2} \quad (6.18)$$

## 6.5. Confronto dei modelli.

Il numero di modi fondamentali che si può ottenere dall'analisi sperimentale di una struttura è, in genere, assai limitato e certamente molto più piccolo del numero dei gradi di libertà del modello numerico mentre il numero delle componenti misurate sul singolo modo può essere anche pari al numero dei gradi di libertà o, almeno, con procedimenti illustrati nei paragrafi precedenti, si può riportare al numero dei gradi di libertà del modello numerico o viceversa. Il confronto tra dati sperimentali e corrispondenti dati numerici si può condurre con l'impiego di alcuni indici di errore. Per il confronto sulla base delle frequenze naturali si può impiegare un indice relativo alla singola frequenza:

$$\frac{\left| \omega_{n_{num\ i}} - \omega_{n_{sp\ i}} \right| \times 100}{\omega_{n_{num\ i}}} \quad (6.19)$$

Per il confronto sulle deformate modali si può usare un indice basato sulla definizione precedentemente richiamata del criterio di fiducia modale, *MAC*, dato da:

$$\frac{\left[ \phi_{num}^{(i)T} \phi_{sp}^{(i)} \right]^2}{\left( \phi_{num}^{(i)T} \phi_{num}^{(i)} \right) \left( \phi_{sp}^{(i)T} \phi_{sp}^{(i)} \right)} \quad (6.20)$$



A questo punto l'idea per effettuare il confronto fra i vari metodi di correlazione è la seguente:

- Si implementa un programma che fornisca le caratteristiche dinamiche della struttura al variare di uno o più parametri presi come potenziali sedi del danneggiamento (per esempio il modulo di elasticità delle travi o dei pilastri, rispettivamente  $E_t$  ed  $E_p$ ).
- Si effettua una “scansione” su tutta la struttura, facendo variare detti parametri in un congruo *range*, e secondo un passo stabilito.
- Per ogni valore dei parametri, si determinano le caratteristiche modali della struttura.
- Si fissa un criterio di confronto (M.A.C, CO.M.A.C, criterio del confronto delle frequenze o dell'energia di deformazione, ecc.).
- Si confrontano le caratteristiche modali della struttura teorica, con i dati derivanti dall'analisi modale del modello pseudo-sperimentale al variare dei parametri.
- Il criterio di confronto determina una funzione di errore, che in corrispondenza del minimo fornisce i valori dei parametri che maggiormente approssimano le caratteristiche dinamiche del modello pseudo-sperimentale.
- Si estrapolano i valori dei parametri in corrispondenza del minimo e si valuta in base al confronto fra il loro valore numerico ed un valore di riferimento degli stessi (per esempio  $E = 3 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ ) se questi sono compatibili con l'integrità o con il danneggiamento della struttura.
- Si itera il procedimento per ogni criterio di confronto, che si vuole analizzare, e si confrontano i risultati forniti da ciascuno di questi.

La scelta delle strutture analizzate in questa fase, è stata effettuata in modo tale che i parametri variabili fossero sempre due, in modo tale che la funzione di errore generata fosse sempre visualizzabile geometricamente. Così facendo si è potuto valutare la forma della funzione di errore, l'eventuale presenza di più minimi relativi, il condizionamento della soluzione, e quindi la valutazione relativa dei vari metodi di confronto è risultata più immediata.

In particolare le strutture analizzate secondo il procedimento prima esposto, sono state:

- telaio di 3 piani, in cui sono stati assunti come parametri variabili  $E_2$  ed  $E_3$ , rispettivamente modulo di elasticità di tutte le aste (trave e pilastri) al piano 2 ed al piano 3. Il modulo elastico  $E_1$  del piano 1 è stato invece tenuto fisso.

Si precisa che la procedura implementata, afferisce al livello 3 di identificazione del danno, (anche se nel caso del telaio ad un piano, vi è una limitazione dovuta alla simmetria) e che l'intero procedimento può considerarsi un procedimento inverso di soluzione, basato sull'iterazione di tanti problemi diretti quanti sono i passi di scansione. E' evidente che l'onere computazionale di questo procedimento in generale sarebbe elevato, ma considerate le strutture analizzate in questa fase esso risulta accettabile, anche alla luce degli scopi del capitolo.

E' da precisare che i valori esatti dei parametri incogniti che minimizzano la funzione di errore (p.e.  $E_p$ ,  $E_t$ , nel caso del telaio ad un piano) sono in realtà noti a priori perché assegnati per produrre i dati pseudo-sperimentali, ma ciò nulla toglie alla logica del problema anzi risulta essere un implicito controllo sulla bontà del valore di minimo del criterio di errore utilizzato. (se il criterio è esatto deve fornire, a meno dell'errore macchina e dell'errore derivante dal passo della scansione, gli stessi valori dei parametri incogniti fissati nella creazione del modello pseudo-sperimentale). A tal proposito si rimarca altresì, che anche nel caso di acquisizione sperimentale dei dati dinamici, la creazione del modello pseudo-sperimentale è utile per effettuare il controllo sulla bontà delle quantità dinamiche acquisite.

### 6.5.1 Caso di studio: analisi del telaio a 3 piani.

I metodi di correlazione MAC e COMAC sono stati applicati ad un telaio multipiano pur mantenendo pari a 2 il numero di variabili da cui dipende la funzione di errore. In particolare è stata condotta la scansione su un telaio a tre piani, caratterizzato da una variabile per piano. Fissata una delle tre variabili, è stato possibile effettuare la scansione, visualizzare la funzione di minimo e verificare l'esattezza dei risultati ed il condizionamento. Gli altri criteri, non basati sulle forme modali restano comunque applicabili anche a questo caso. Di seguito si riporta la geometria del telaio analizzato, ed i risultati ottenuti con ciascun criterio di confronto per la valutazione della funzione di errore:

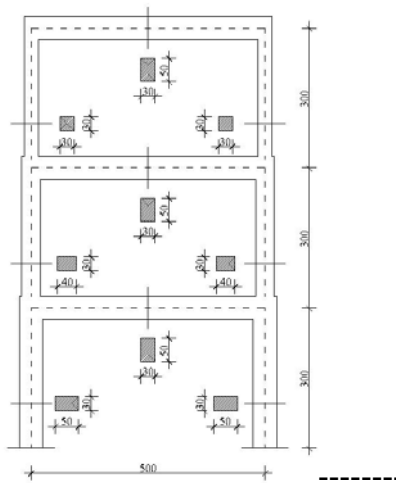


Figura 6.2. Modello pseudo-sperimentale telaio 3 piani.

Caratteristiche meccaniche del modello pseudo sperimentale:

- $E_1$  : modulo elasticità aste piano 1 =  $2,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$  ;
- $E_2$  : modulo elasticità aste piano 2 =  $2,7 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$  ;
- $E_3$  : modulo elasticità aste piano 3° =  $1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$  ;
- $\rho$  : densità di massa per unità di volume =  $2,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^3}$  ;
- $M$  : massa applicata sulle travi =  $2 \cdot 10^3 \text{ Kg}$  ;
- Variabile fissata:  $E_1$  ;

Di seguito (figg 6.3-6.8) si riportano i risultati delle prove condotte sul telaio a 3 piani utilizzando i vari criteri di confronto.

La forma delle funzioni di errore nel caso del MAC e del COMAC sono pressoché simili, mentre cambiano le forme negli altri casi. Tutti i criteri hanno dato risultati soddisfacenti, in primis è possibile notare la presenza di un solo minimo, in più la soluzione non risulta mal condizionata.

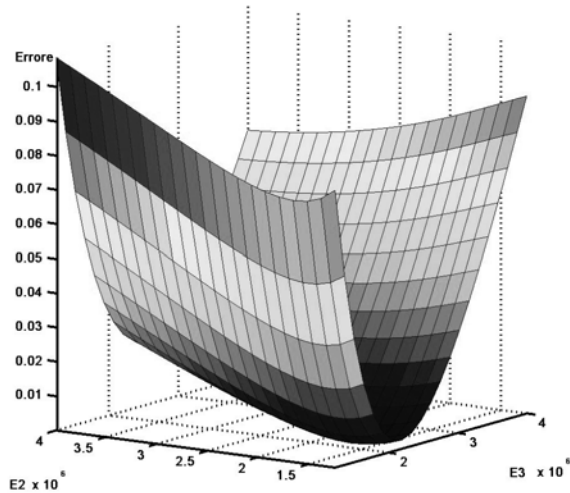


Figura 6.3. Funzione di errore basata sul MAC

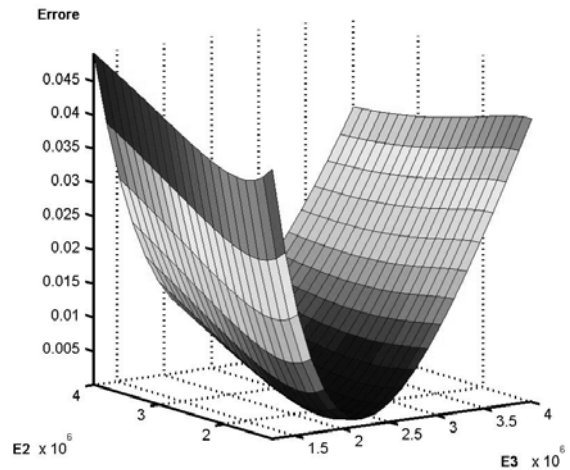


Figura 6.4. Funzione di errore basata sul COMAC

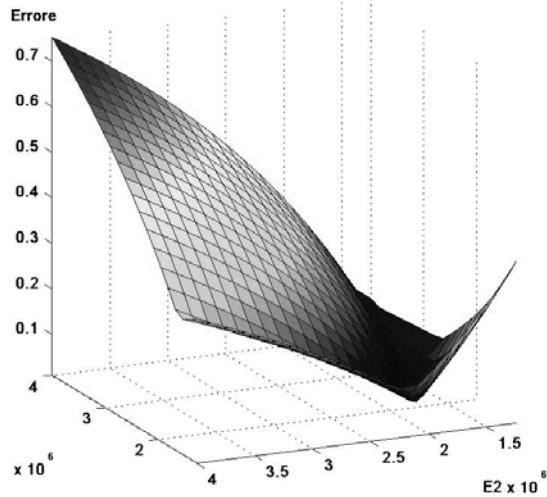


Figura 6.5. Funzione di errore basata valori assoluti frequenze

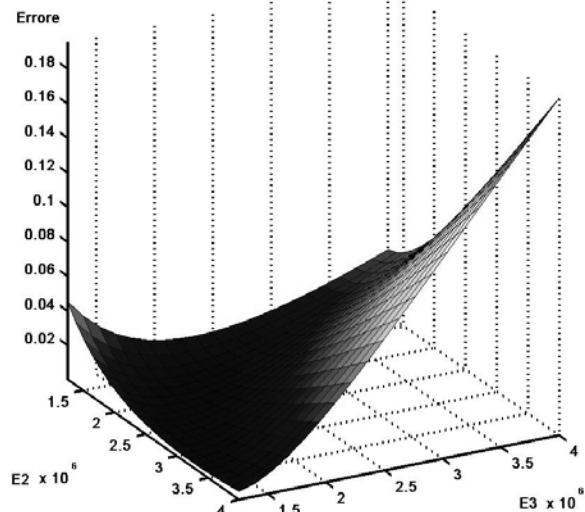


Figura 6.6. Funzione di errore basata sui quadrati delle frequenze

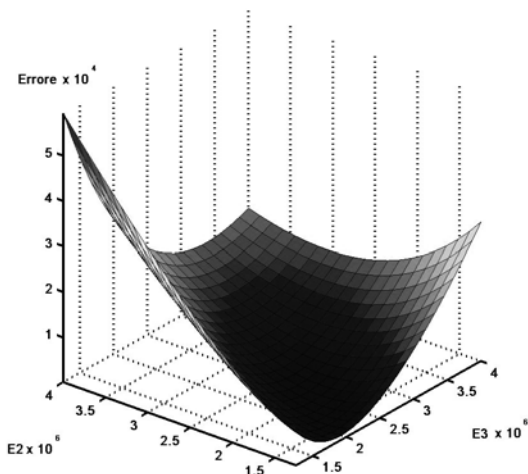


Figura 6.7. Funzione di errore basata sull'energia di deformazione

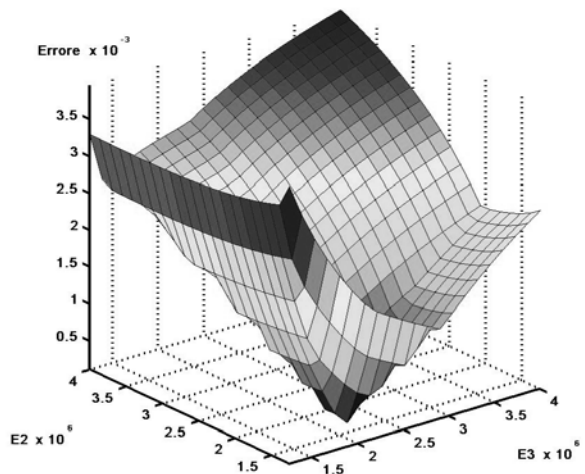


Figura 6.8. Funzione di errore basata sull'ortogonalità autovettori

## 6.6. Criteri adottati nella sperimentazione

A partire dai dati pseudo-sperimentali e attraverso l'implementazione di un metodo inverso, l'entità e l'ubicazione del danneggiamento sono stati determinati nel seguente modo:

1. Si implementa un programma che fornisca le caratteristiche dinamiche della struttura oggetto di studio al variare di uno o più parametri presi come potenziali sedi del danneggiamento, nel caso specifico, il modulo di elasticità delle travi e dei pilastri, (rispettivamente  $E_t$  ed  $E_p$ ) o indistintamente di tutti gli elementi appartenenti ad un piano ( $E_{\text{piano}}$ ). Il valore di partenza dei parametri è fissato in modo random.
2. Si fissa un criterio di confronto (M.A.C, CO.M.A.C, criterio del confronto delle frequenze o dell'energia di deformazione, ecc..) fra le caratteristiche dinamiche del modello pseudo-sperimentale, e quelle ottenute a partire dai parametri random e si determina un certo valore dell'errore.
3. Si sceglie un criterio di ottimizzazione della funzione di errore. In particolare, in questo studio sono stati utilizzati i seguenti criteri: Metrica Variabile, Metodo del Gradiente, Algoritmi Genetici [89-90].
4. Si applica il criterio di ottimizzazione.
5. Il valore dei parametri meccanici che si ha in corrispondenza del minimo assoluto della funzione di errore, è quello che maggiormente si avvicina (al limite è uguale) al valore dei corrispondenti parametri del modello pseudo-sperimentale. Si visualizza tale valore e si stabilisce se, ed in che misura, il parametro indica un potenziale danneggiamento.
6. Giacché ogni parametro è associato ad un elemento, o a tutti gli elementi di un piano, la conoscenza del valore del parametro risolve implicitamente anche il problema dell'ubicazione del danno.

Nel seguito si riportano i risultati delle prove condotte, su alcuni telai piani, in due set di prove caratterizzati nel seguente modo:

- **set di prove A:** a tutti gli elementi di piano (travi e pilastri) sarà associato un valore unico del modulo elastico  $E$ , detto  $E_{\text{piano}}$ , si avrà in tal modo una variabile per piano.
- **set di prove B:** per ogni piano saranno individuati due diversi valori dei moduli elastici, uno per i pilastri ed uno per le travi di piano, rispettivamente  $E_p$  ed  $E_t$ . Si avranno in tal modo due variabili per piano.

Stante l'impossibilità di "eccitare" la struttura secondo tutti i suoi gradi di libertà (che già a priori si considerano finiti) e data la necessità di posizionare i punti di misura in modo ottimale per ottenere dei dati sperimentali significativi per tipi di modi specifici (per esempio un modo di vibrazione locale che interessa solo una parte della struttura) è evidente come assuma un ruolo cruciale la scelta dei gradi di libertà secondo cui "eccitare" la struttura. Nell'ambito di tale problematica un ragionevole criterio di scelta, potrebbe essere quello di considerare come principali quei gradi di libertà in cui le forze di inerzia sono grandi rispetto alle forze elastiche e naturalmente di considerare come secondari quei gradi di libertà in cui avviene il contrario. Tale criterio è per l'appunto alla base della cosiddetta *riduzione di Guyan* (nel seguito R.G.).

La R.G. è un metodo che permette di ridurre i gradi di libertà principali (che sono quelli che devono rimanere dopo il processo di riduzione) in gradi di libertà secondari (che invece non rimangono dopo il processo di riduzione ma vengono espressi in funzione dei gradi di libertà principali). Questa scelta può essere compiuta per via numerica valutando, per l'*i*-esimo grado di libertà, il rapporto  $K_{ii}/M_{ii}$  delle componenti delle matrici di rigidezza e di massa e considerando come principali i gradi di libertà per i quali questo rapporto è più piccolo (infatti ciò indica che le forze di inerzia sono grandi rispetto le forze elastiche).

Con questo processo di riduzione si ottiene un nuovo modello agli elementi finiti con dimensioni che possono essere anche molto ridotte rispetto al modello originale e con caratteristiche dinamiche, almeno per i modi fondamentali e frequenze più basse, molto vicine a quelle del modello di partenza. Questo criterio per la scelta dei gradi di libertà principali

nella riduzione di Guyan può essere seguito anche per la scelta dei punti di misura sperimentali. Quindi a partire dal modello ad elementi finiti di grandi dimensioni si procede in una prima fase ad eliminare tutti i gradi di libertà che presentano delle difficoltà per la misura sperimentale (come ad esempio per i gradi di libertà di rotazione o difficilmente accessibili) e poi in una seconda fase in una scelta, alla Guyan, dei gradi di libertà principali da considerare come punti di misura sperimentali.

Non avendo particolari limitazioni, nei casi esaminati nel seguito, la R.G è stata implementata per ridurre i gradi di libertà del modello numerico solo a quelli traslazionali, che generalmente per i motivi esposti sopra sono quelli più significativi e facilmente misurabili.

### 6.6.1. Set di prove “A”: una variabile per piano.

In questo primo set di prove si è scelto di fissare, nel modello pseudo-sperimentale, un parametro meccanico per piano, ovvero tutte le aste che appartengono ad un piano sono state caratterizzate da un unico valore del modulo elastico  $E_{\text{piano}}$ .

Di seguito si riportano gli schemi geometrici delle strutture analizzate, ovvero 5 telai piani monocampata da 1 a 5 piani, e 2 telai piani bi-campata, di 3 e 5 piani. Sia gli schemi geometrici che le dimensioni degli elementi strutturali, sono state assegnati in modo qualitativo secondo criteri di buon senso.

Per ogni telaio analizzato, è stato creato ed analizzato un modello pseudo-sperimentale, in cui il valore del modulo elastico di piano  $E_{\text{piano}}$  è stato generato in modo random per ogni piano di ciascuna struttura.

La sperimentazione è stata condotta generando una funzione di errore a partire dai seguenti metodi di confronto delle caratteristiche modali (frequenza e vettori delle forme modali):

$$\text{Frequenze: Err} = \sum_{i=1}^L \frac{|\omega_i^d - \omega_i^s|}{\omega_i^s}; \quad (6.21)$$

$$\text{Frequenze: err} = \sum_{i=1}^L \left( \frac{|\omega_i^d - \omega_i^s|}{\omega_i^s} \right)^2 \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Forme modali: M.A.C :} \quad & \text{se } i = j \Rightarrow \text{err} = \sum_{i=1}^L (1 - \text{M.A.C.}(i, j)) \\ & \text{se } i \neq j \Rightarrow \text{err} = \sum_{i=1}^L (0 - \text{M.A.C.}(i, j)) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\text{Forme modali: Co.M.A.C: err} = \sum_{i=1}^L (1 - \text{COMAC}_i) \quad (6.24)$$

$$\text{Ortogonalità dei vettori delle forme modali : err} = \sum_{i=1}^L \left( \{\varphi^d\}_i^T [K]^{-1} [M] \{\varphi^s\}_i \right) \quad (6.25)$$

Oltre a questi metodi basati sulle caratteristiche modali è stato utilizzato, altresì, un criterio di confronto basato sulla valutazione dell'energia di deformazione:

$$\text{err} = \sum_{i=1}^L \left( \frac{1}{2} \{ \varphi^s \}_i^T [\mathbf{K}] \{ \varphi^s \}_i - \frac{1}{2} \{ \varphi^d \}_i^T [\mathbf{K}] \{ \varphi^d \}_i \right) \quad (6.26)$$

Tali criteri sono stati anche combinati e sommati fra di loro, nel tentativo di ottenere, valori del minimo e numero di iterazioni minori possibili. Seguono poi gli istogrammi dei risultati ottenuti dalla sperimentazione.

Fissato inoltre il criterio di confronto delle caratteristiche dinamiche, il minimo della funzione di errore sarà determinato ogni volta attraverso, i già citati metodi di ottimizzazione: Metrica Variabile, Metodo del Gradiente ed Algoritmi Genetici. In tal modo per ogni criterio si avranno tre diversi risultati, per cui oltre a testare l'efficacia del metodo di confronto, si effettuerà un contemporaneo controllo sul metodo di ottimizzazione.

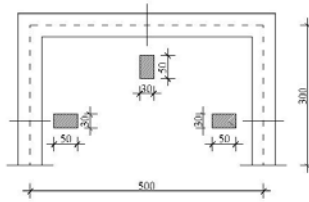


Figura 6.9. Telaio 1

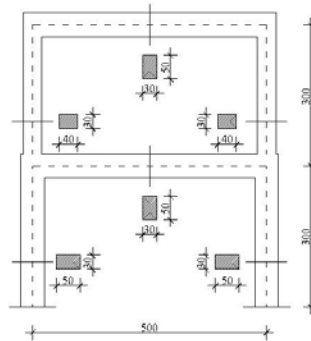


Figura 6.10. Telaio 2

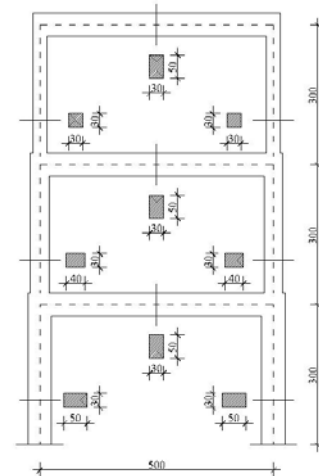


Figura 6.11. Telaio 3

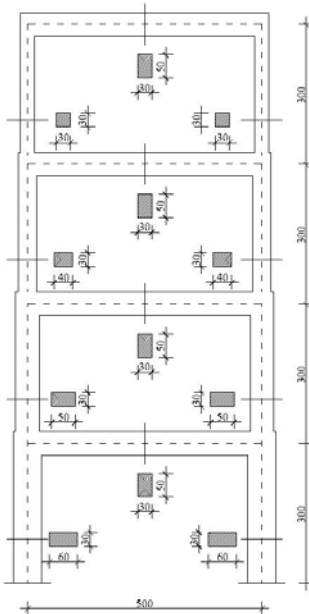


Figura 6.12. Telaio 4

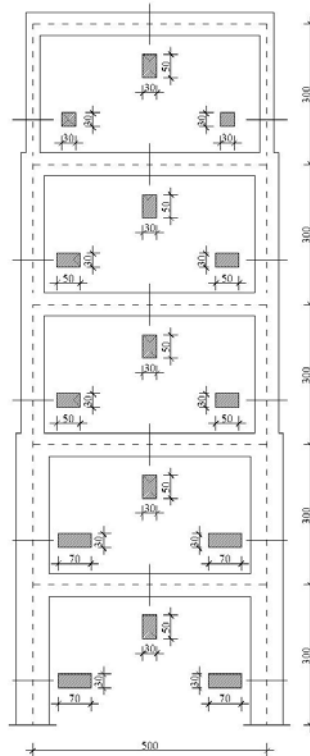


Figura 6.13. Telaio 5

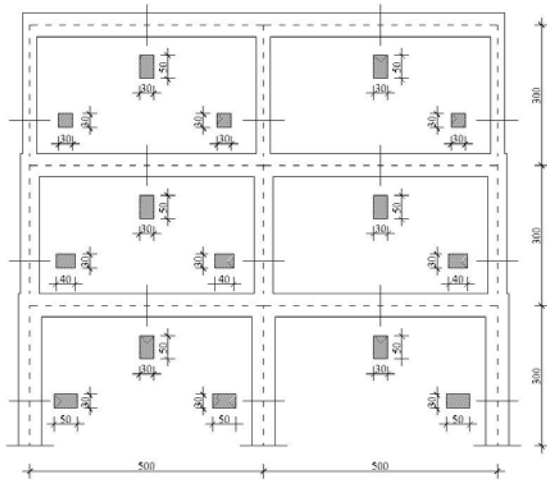


Figura 6.14. Telaio 3.2

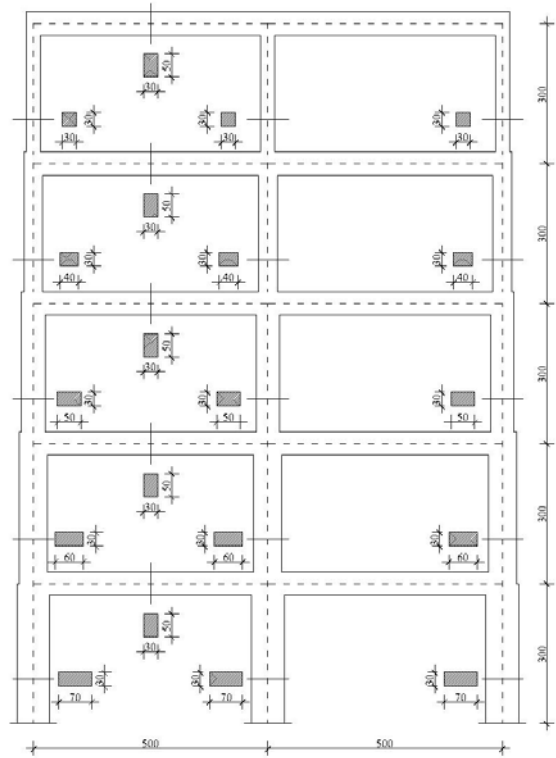


Figura 6.15. Telaio 5.2

6.6.1.1. Istogrammi.

Telaio 1

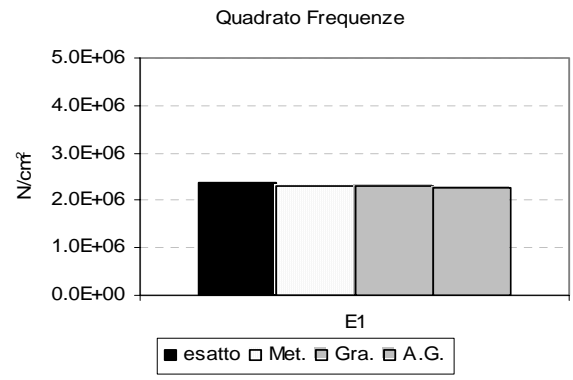
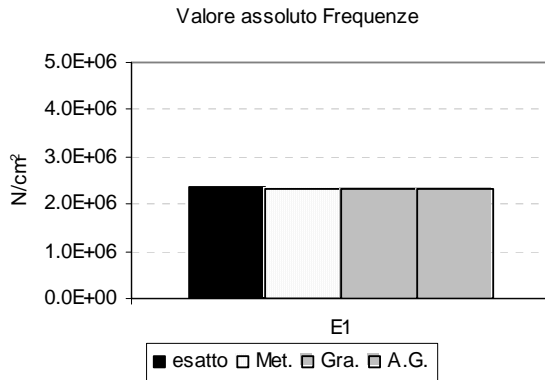
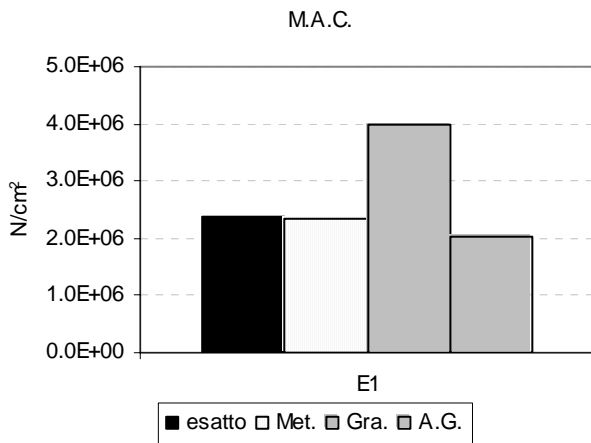
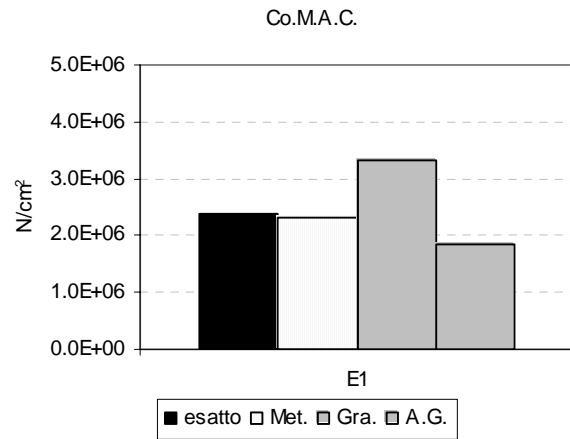


Figura 6.16. Valore assoluto frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

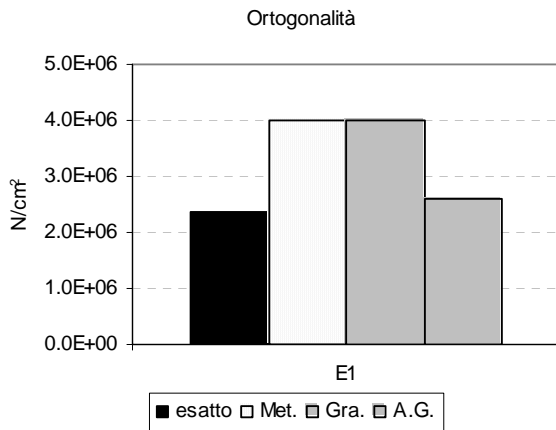
Figura 6.17. Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



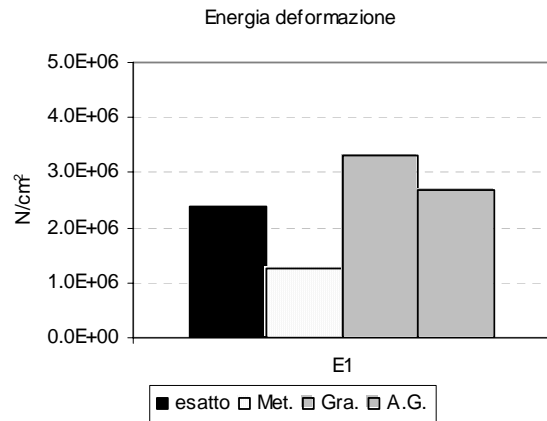
**Figura 6.18.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



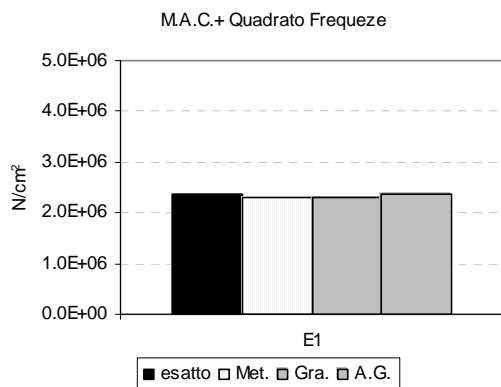
**Figura 6.19.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



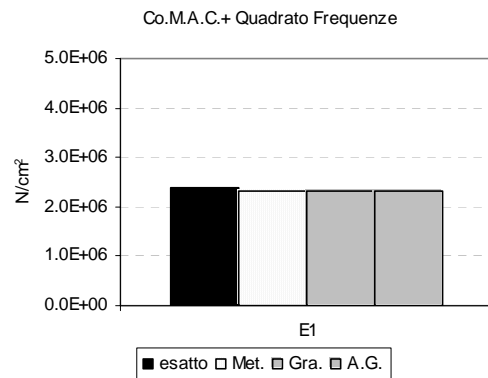
**Figura 6.20.** Ortogonalità autovettori. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.21.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

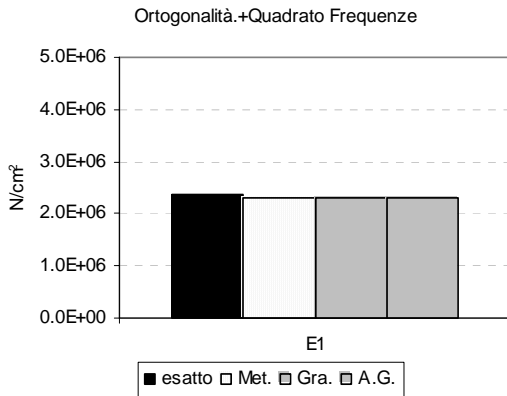


**Figura 6.22.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

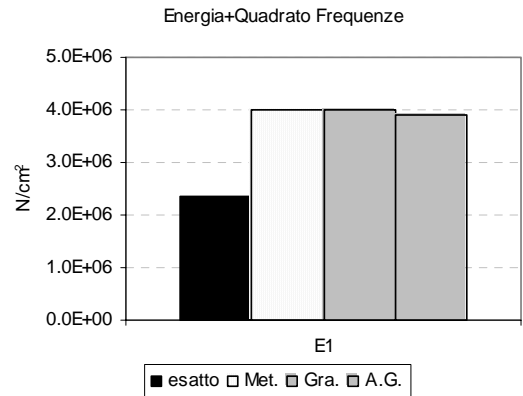


**Figura 6.23.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



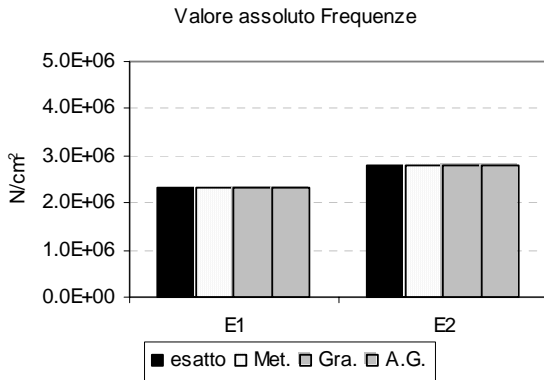


**Figura 6.24.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

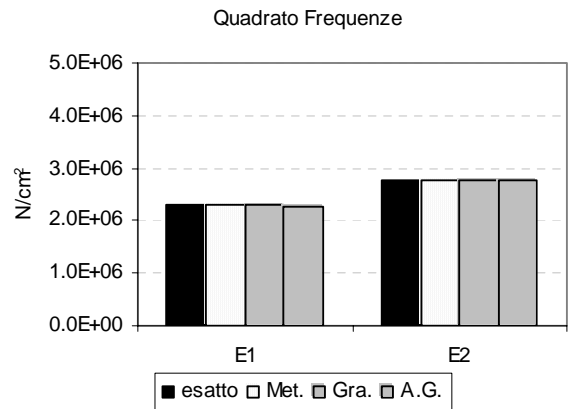


**Figura 6.25.** Energia e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

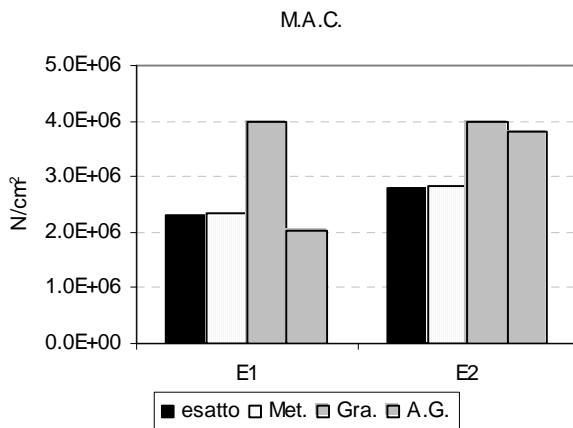
Telaio 2



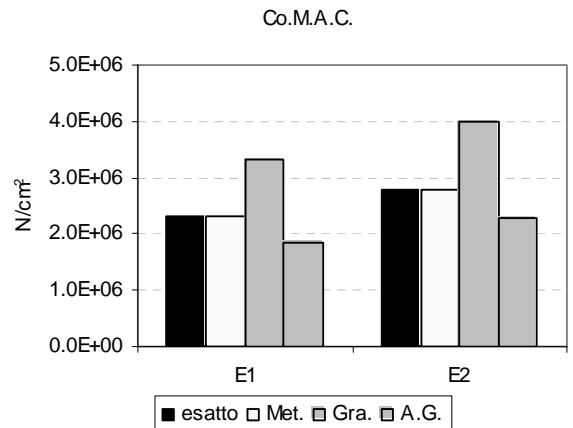
**Figura 6.26.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



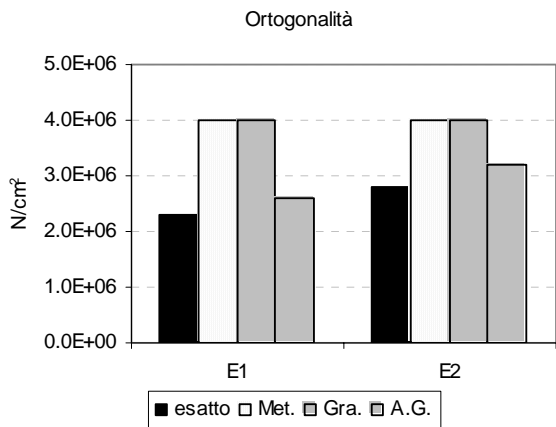
**Figura 6.27.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



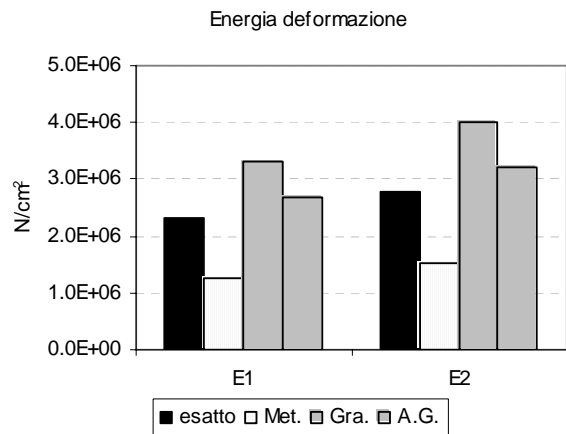
**Figura 6.28.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



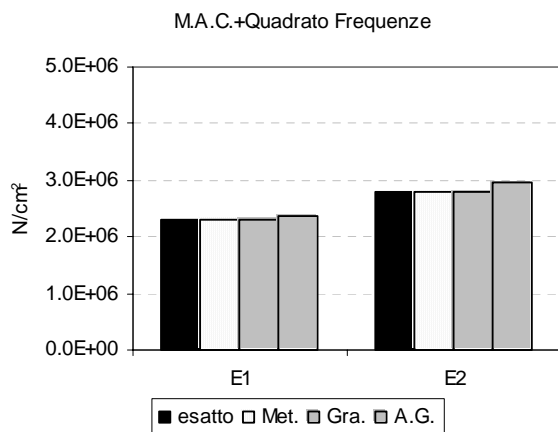
**Figura 6.29.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



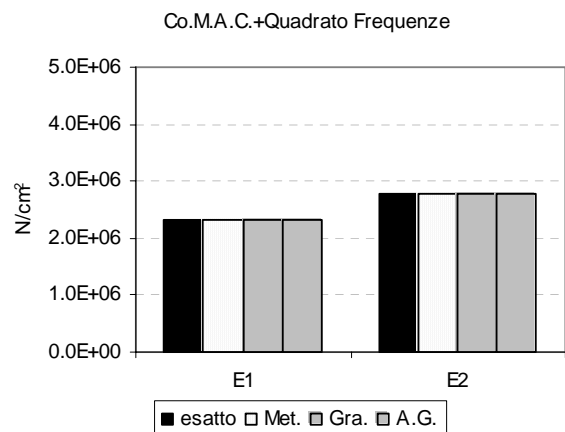
**Figura 6.30.** Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



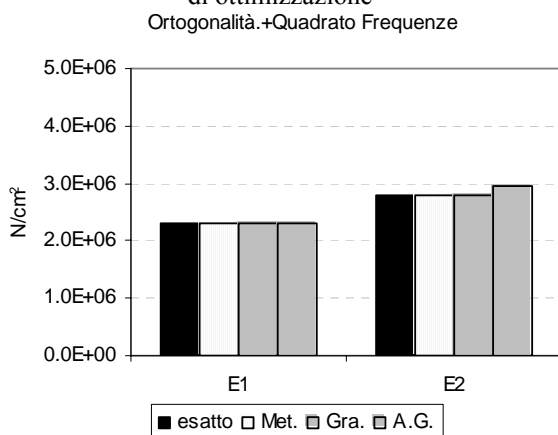
**Figura 6.31.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



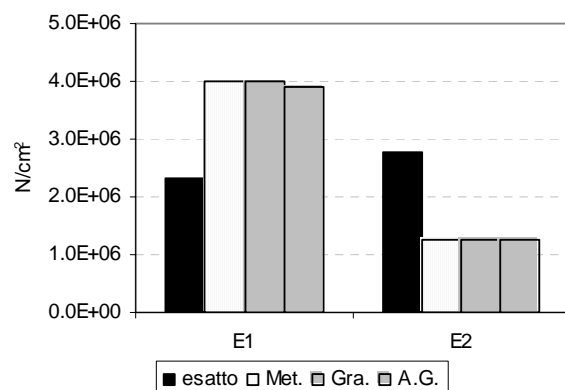
**Figura 6.32.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.32.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.34.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.35.** Energia e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

Telaio 3

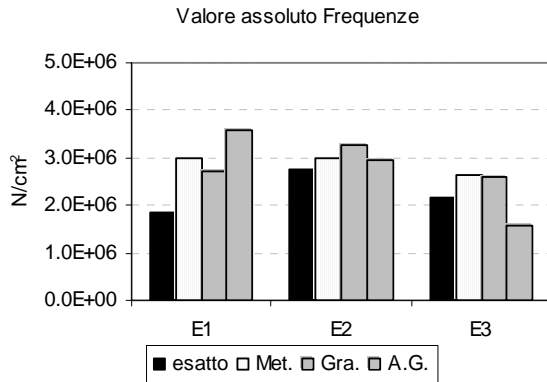


Figura 6.36. Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

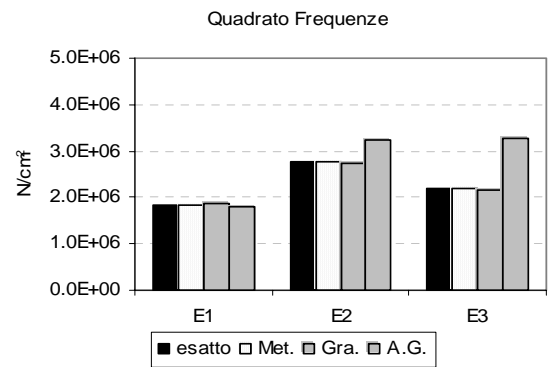


Figura 6.37. Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

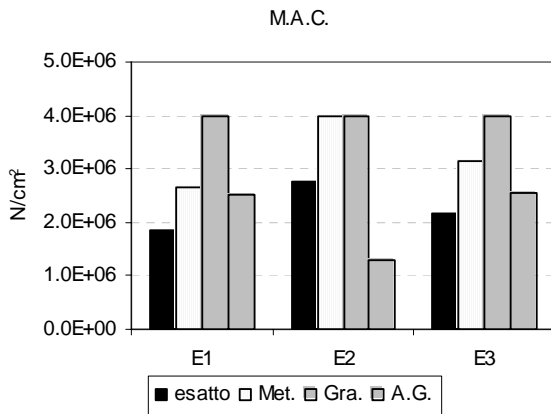


Figura 6.38. MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

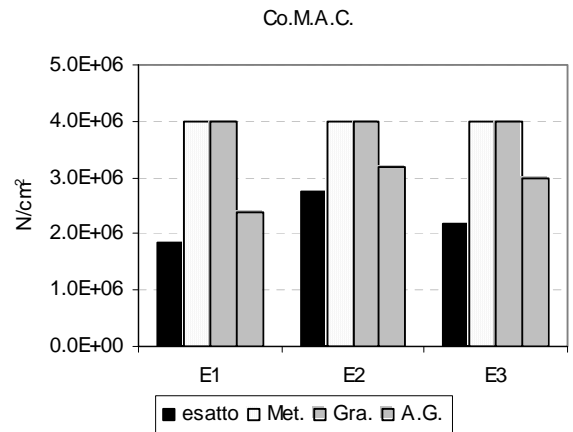


Figura 6.39. COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

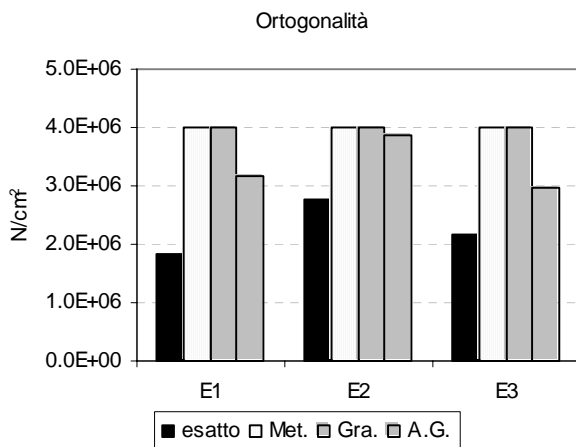


Figura 6.40. Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

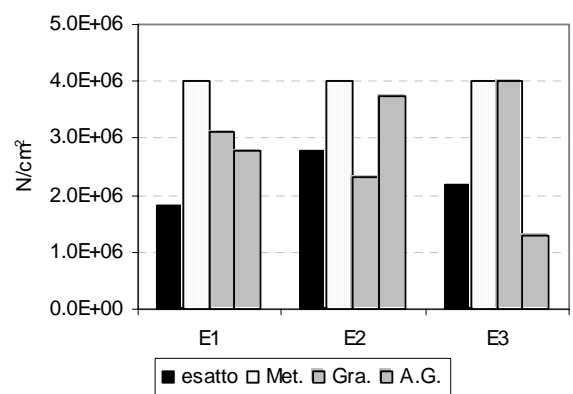


Figura 6.41. Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

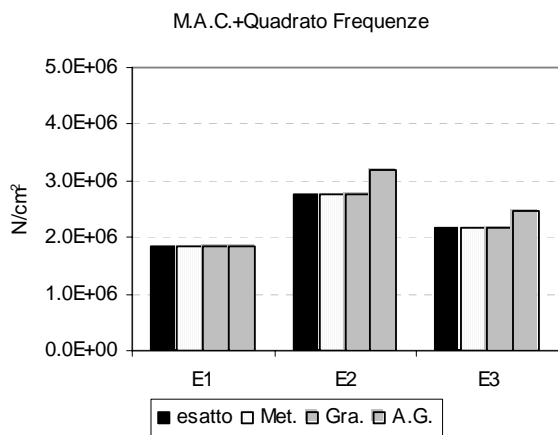


Figura 6.42. MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

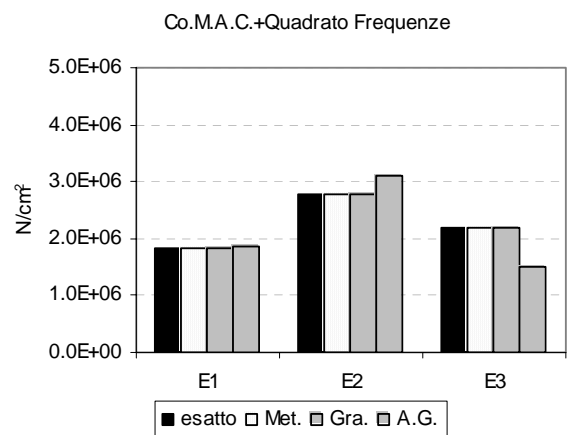


Figura 6.43. COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

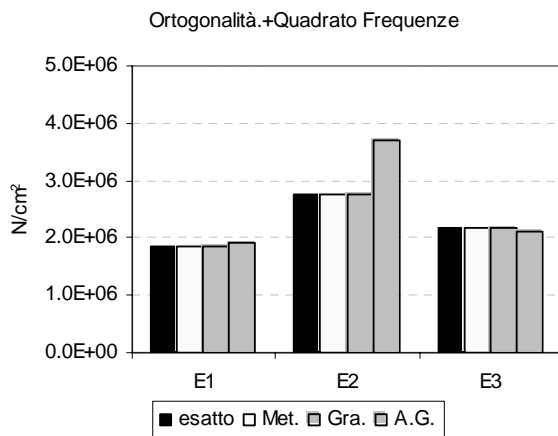


Figura 6.44. Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

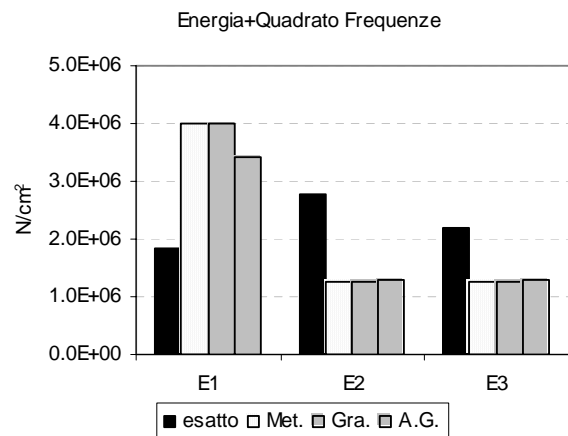


Figura 6.45. Energia e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

Telaio 4

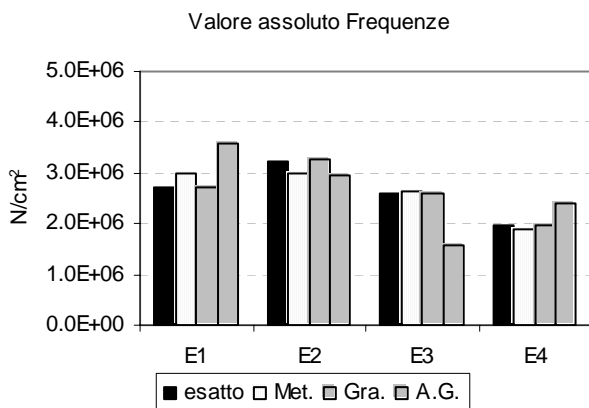


Figura 6.46. Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

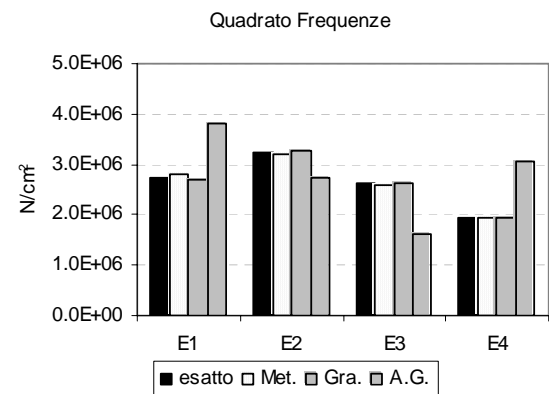
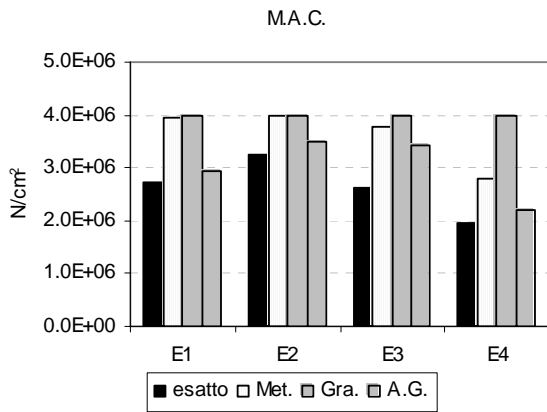
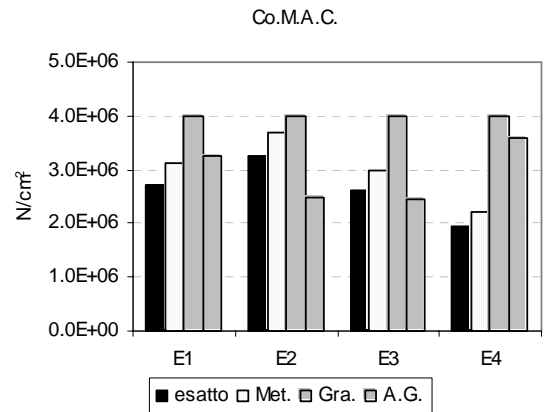


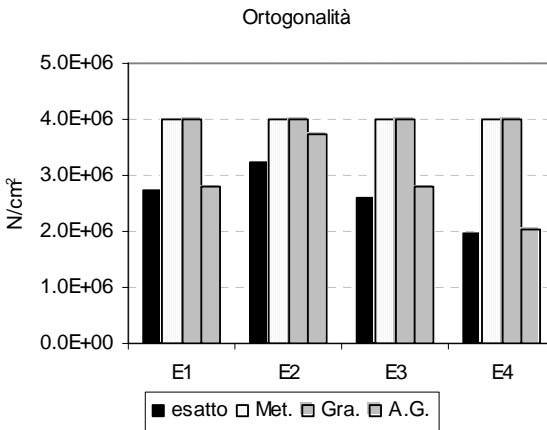
Figura 6.47. Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



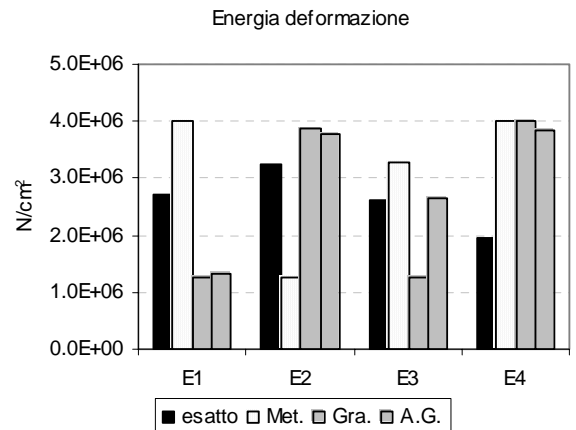
**Figura 6.48.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



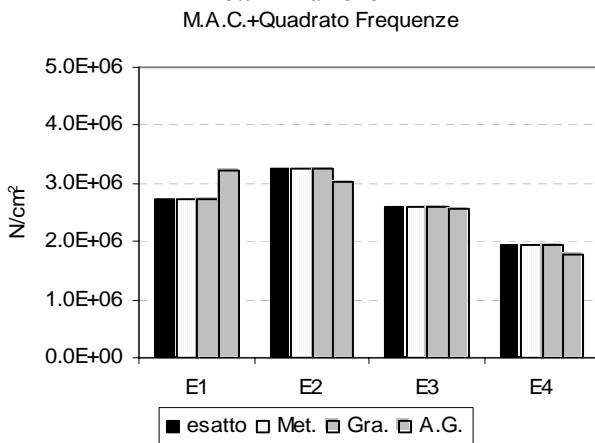
**Figura 6.49.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



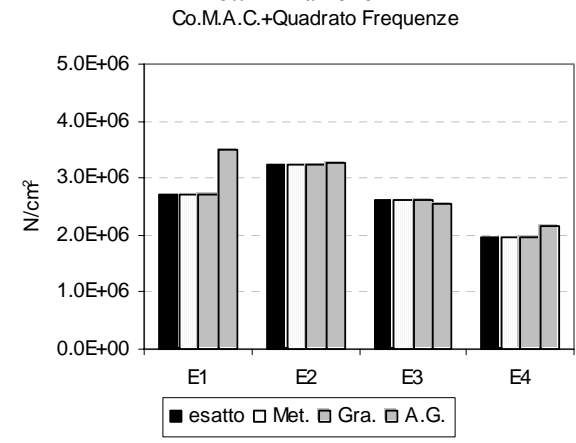
**Figura 6.50.** Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



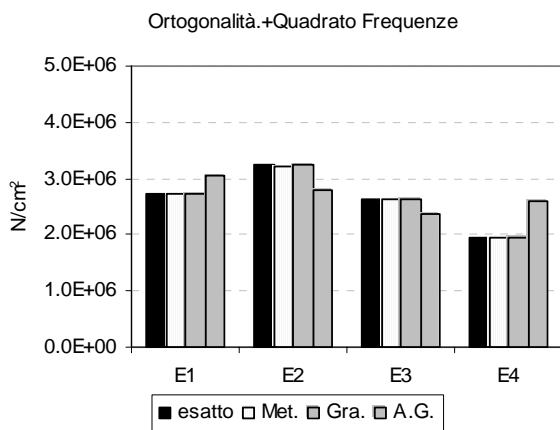
**Figura 6.51.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



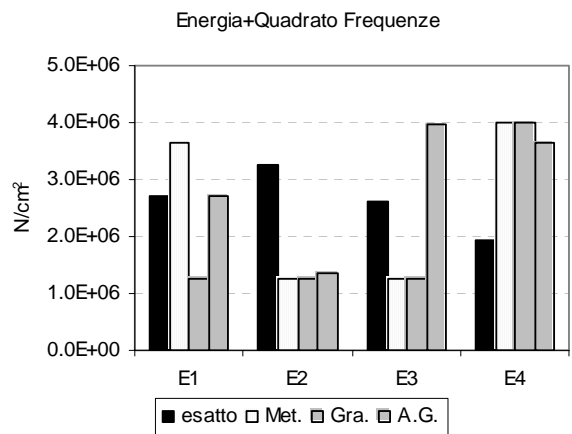
**Figura 6.52.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.53.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

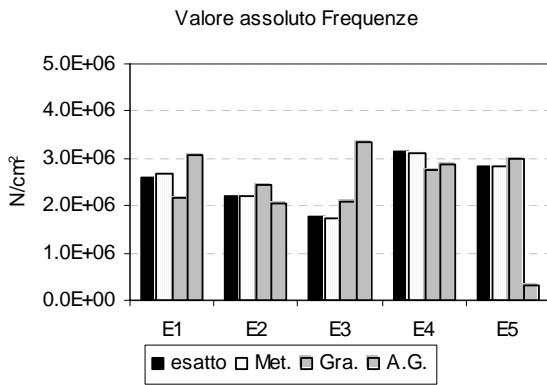


**Figura 6.54.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

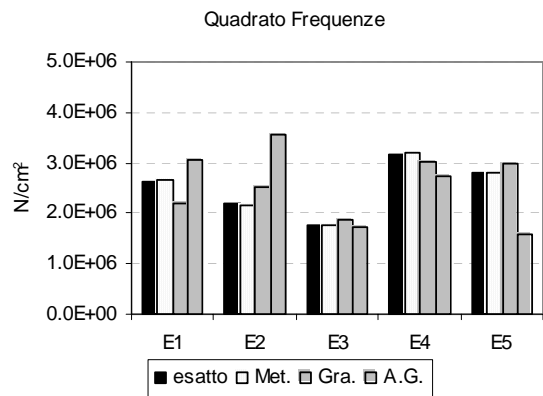


**Figura 6.55.** Energia e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

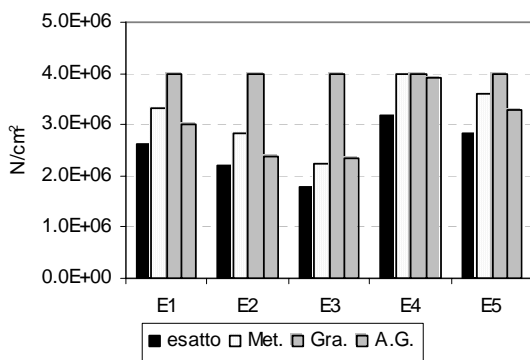
Telaio 5



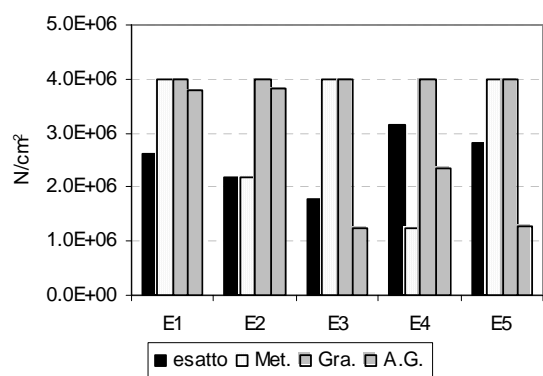
**Figura 6.56.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione M.A.C.



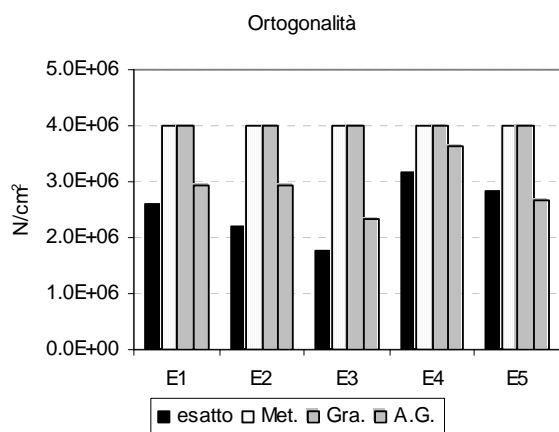
**Figura 6.57.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione Co.M.A.C.



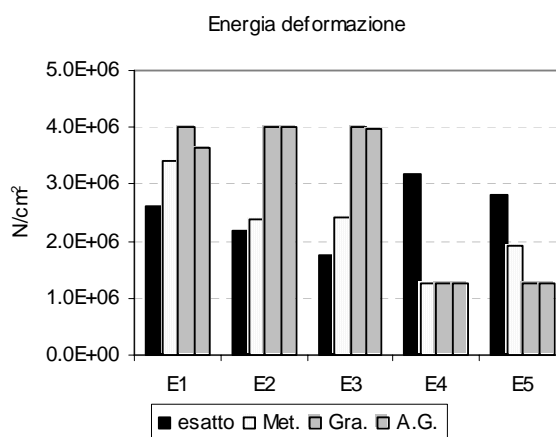
**Figura 6.58.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



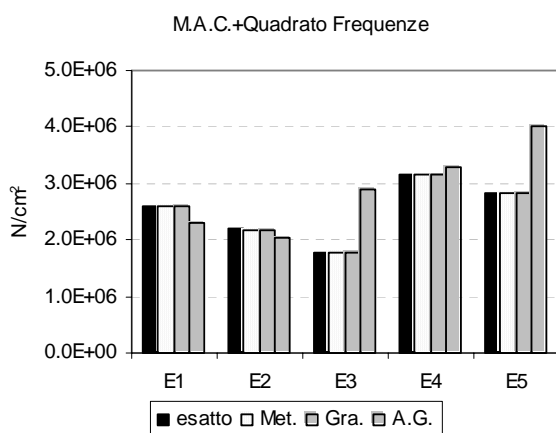
**Figura 6.59.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



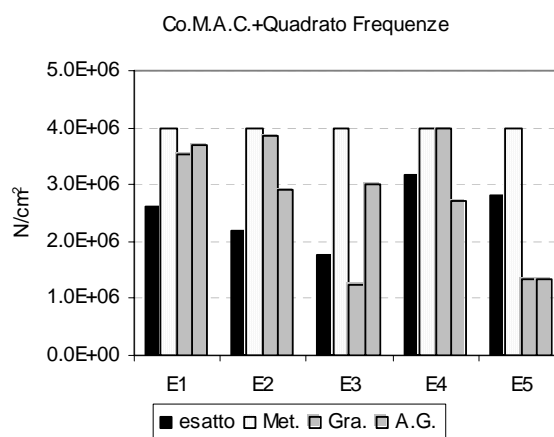
**Figura 6.60.** Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



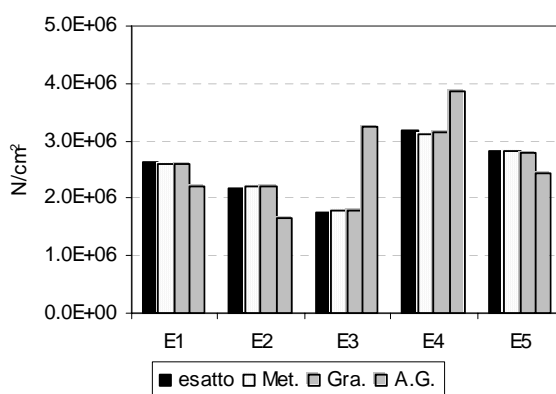
**Figura 6.69.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



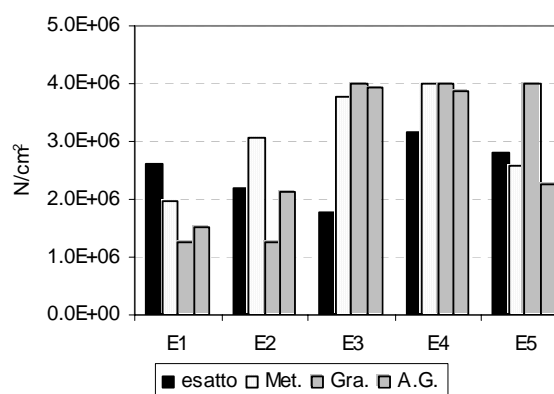
**Figura 6.62.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.63.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

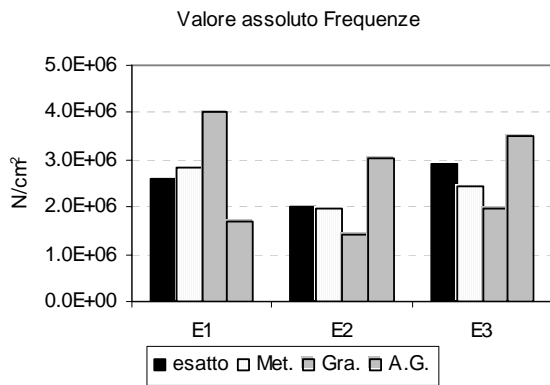


**Figura 6.64.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

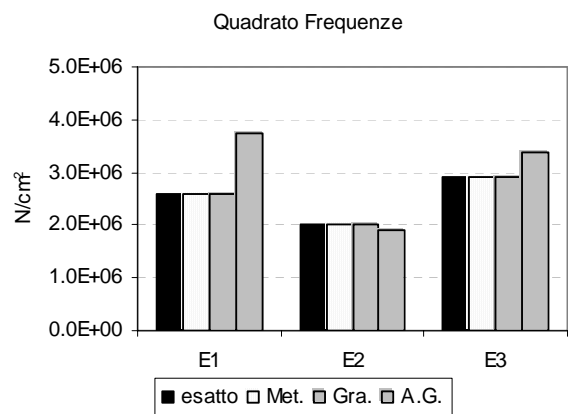


**Figura 6.65.** Energia di deformazione e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

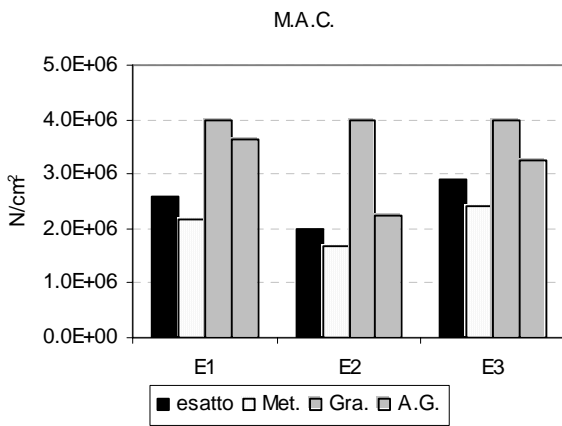
Telaio 3.2



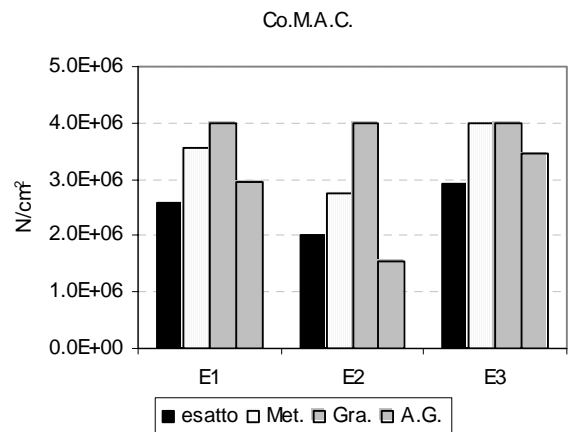
**Figura 6.66.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



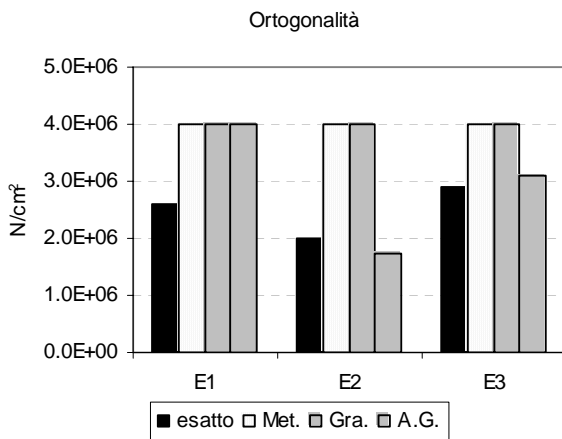
**Figura 6.67.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



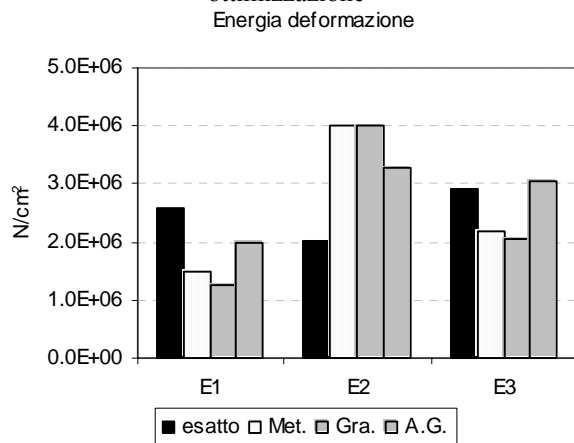
**Figura 6.68.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.69.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

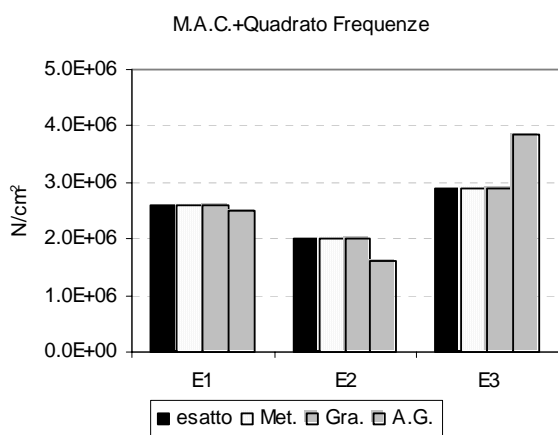


**Figura 6.70.** Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

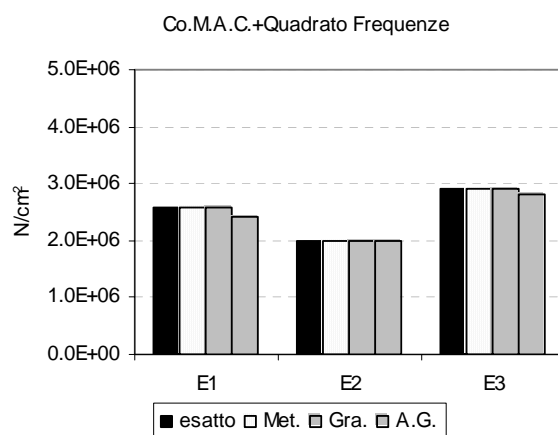


**Figura 6.71.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

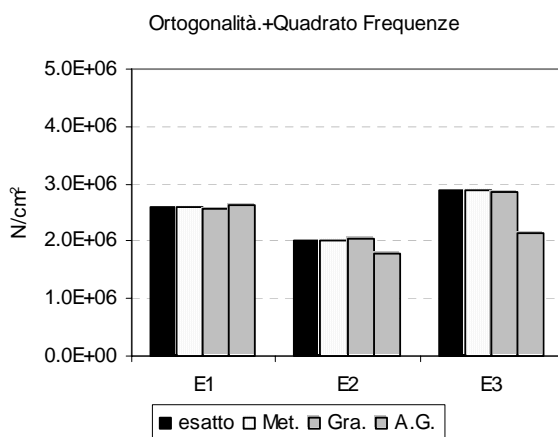




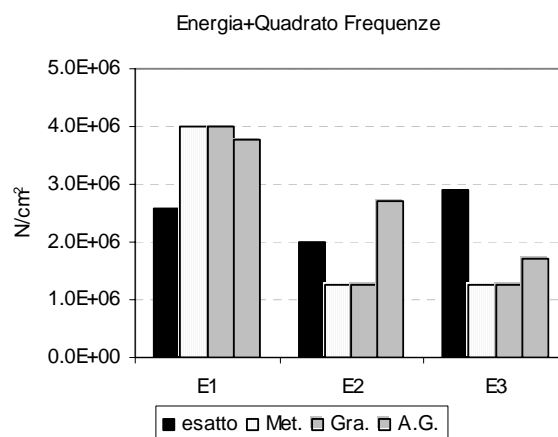
**Figura 6.72.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.73.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

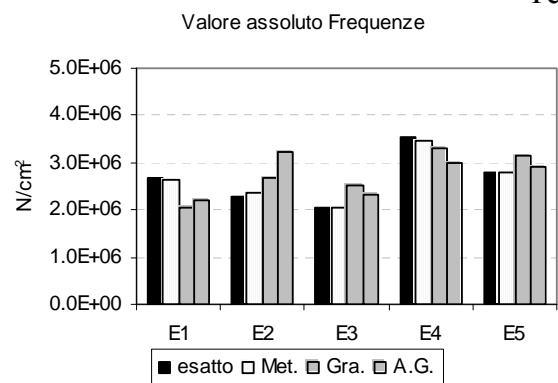


**Figura 6.74.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

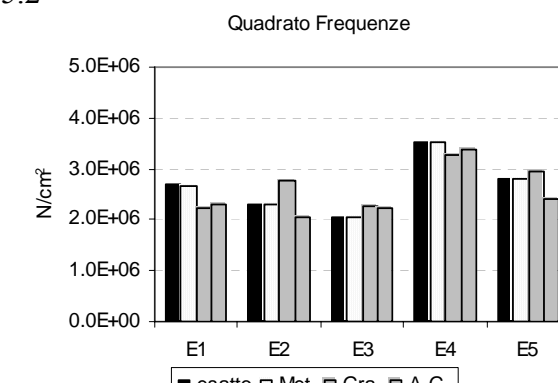


**Figura 6.75.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

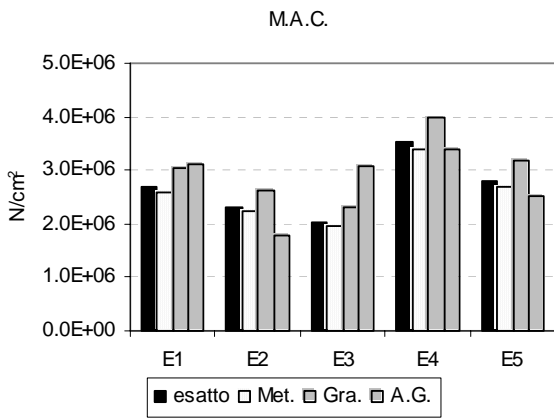
Telaio 5.2



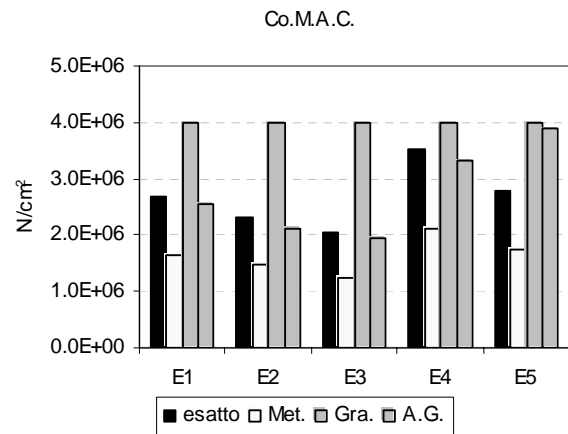
**Figura 6.76.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



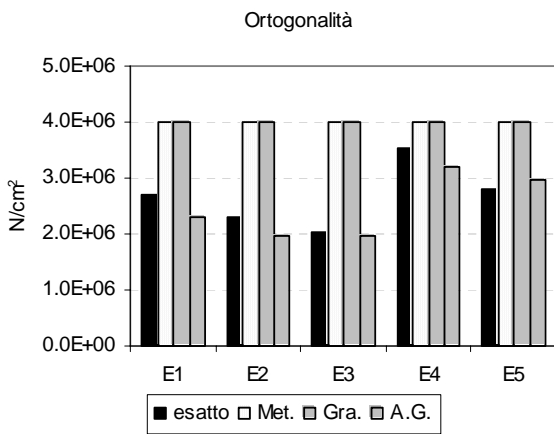
**Figura 6.77.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



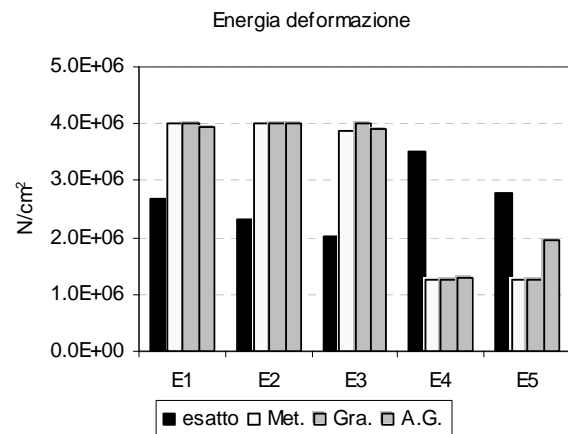
**Figura 6.78.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



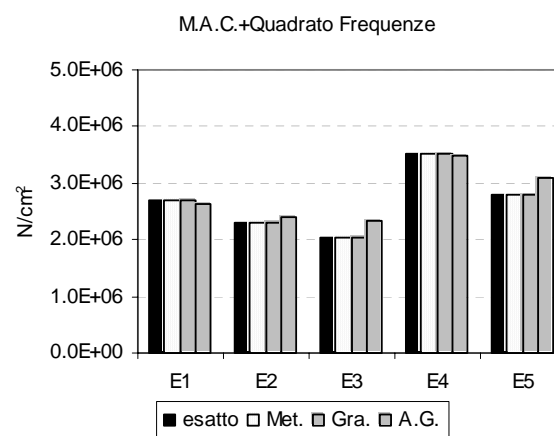
**Figura 6.79.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



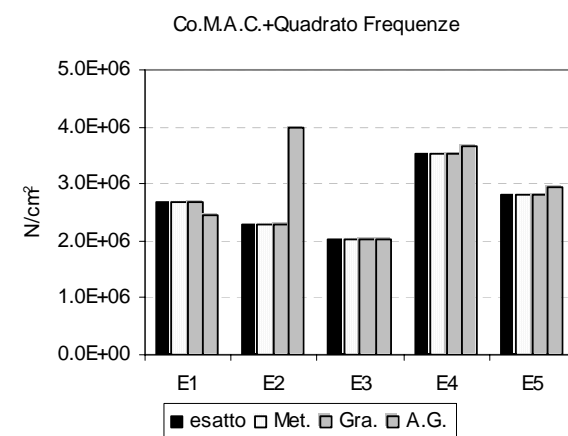
**Figura 6.80.** Ortogonalità. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



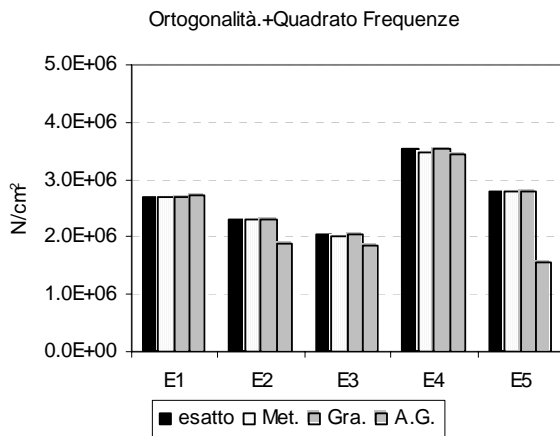
**Figura 6.81.** Energia di deformazione. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



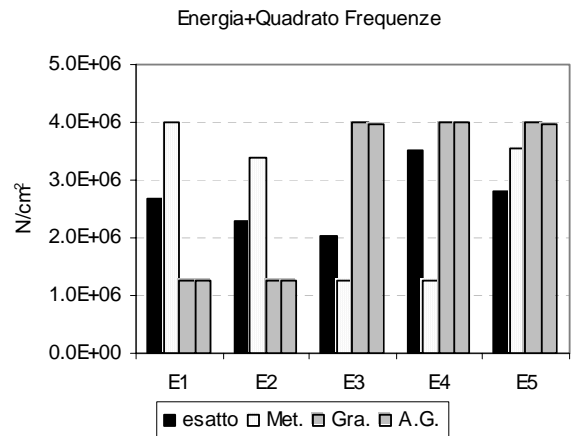
**Figura 6.82.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.83.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.84.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.85.** Energia di deformazione e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

## 6.6.2 Set di prove “B”: 2 variabili per piano.

Nel secondo set di prove si è scelto di fissare, nel modello pseudo-sperimentale, due parametri meccanici per piano:  $E_p$  ed  $E_t$ , rispettivamente modulo elastico dei pilastri di piano e modulo elastico delle travi di piano. Entrambi i moduli elastici sono stati presi come variabile di confronto per l'identificazione del danneggiamento.

Le strutture analizzate, sono le stesse del set di prove “A”, ovvero 5 telai piani monocampata da 1 a 5 piani, e 2 telai piani bi-campata, di 3 e 5 piani, i cui schemi geometrici sono riportati nel par. 8.2. Sono stati mantenuti gli stessi criteri di confronto del set di prove “A” a meno delle seguenti variazioni:

- Eliminazione del criterio di confronto basato unicamente sul controllo dell'ortogonalità degli autovettori modali, (mantenuto solo in accoppiamento ad altri criteri)
- Eliminazione del criterio di confronto basato sull'energia di deformazione sia nell'utilizzo singolo che in accoppiamento ad altri criteri.
- Utilizzo di un nuovo criterio, basato sulla valutazione contemporanea del M.A.C, dell'ortogonalità dei vettori modali e delle frequenze.

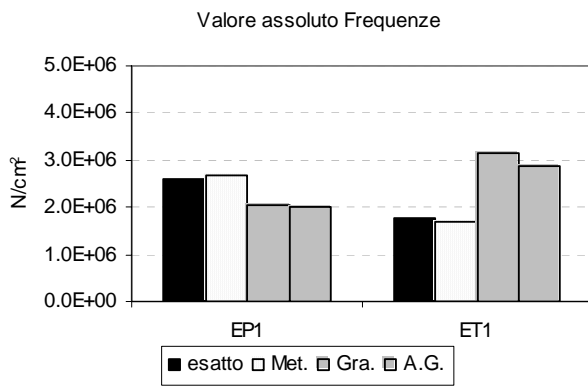
Le prime due scelte sono state dettate dal fatto che, i relativi criteri di confronto, non avevano, in nessun caso, nel set di prove precedenti, fornito risultati quantomeno accettabili, la terza scelta, è stata effettuata per verificare che il criterio fornisse buoni risultati in termini di valore dell'errore e di numero di iterazioni.

Al solito l'ottimizzazione della funzione di errore, è stata perseguita con tutti e tre i metodi fin qui utilizzati ovvero Metrica Variabile, Gradiente e G.A.

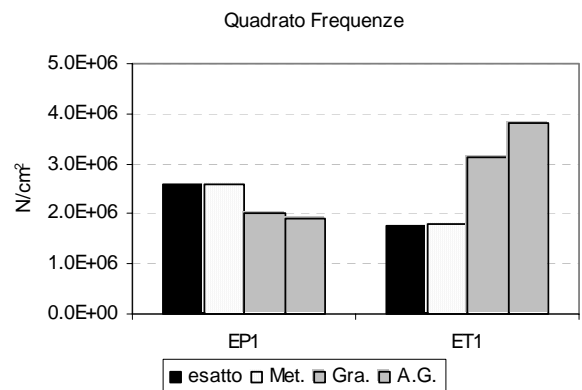
Nel seguito si riportano i risultati delle prove ottenute, in termini di  $E_p$  ed  $E_t$  per ogni piano.

### 6.6.2.1 Istogrammi

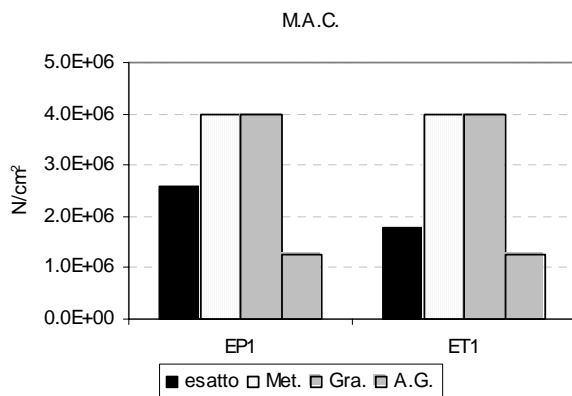
#### Telaio 1



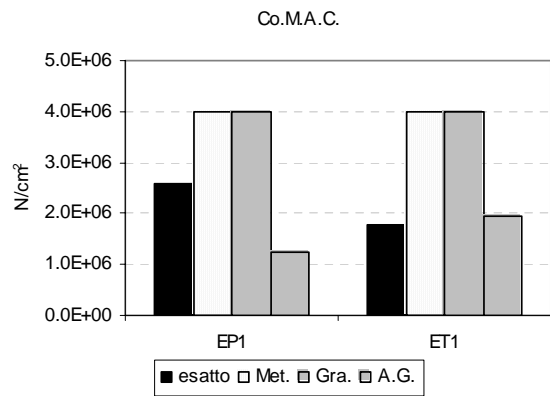
**Figura 6.86.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



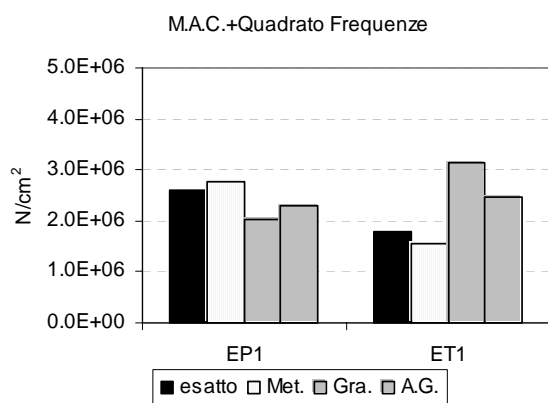
**Figura 6.87.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



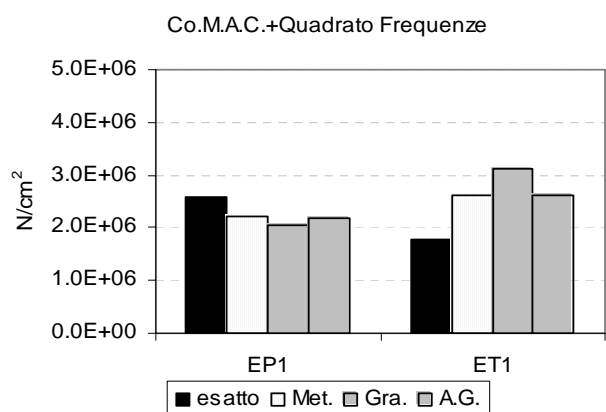
**Figura 6.88.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



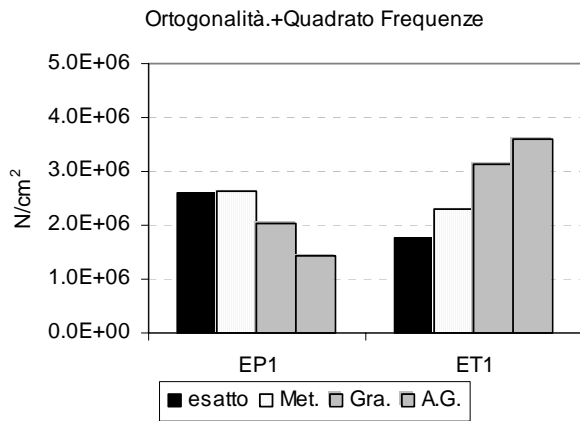
**Figura 6.89.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



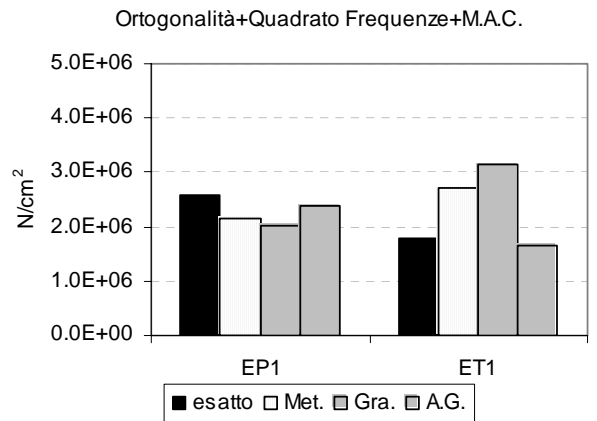
**Figura 6.90.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.91.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

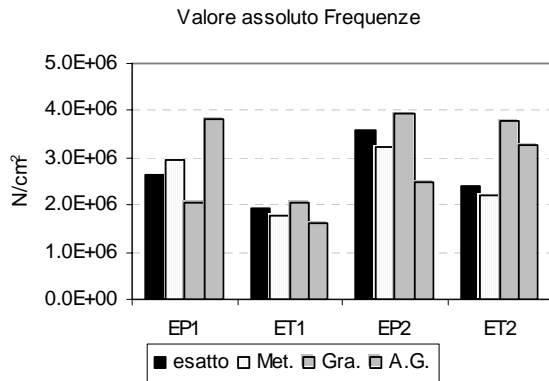


**Figura 6.92.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

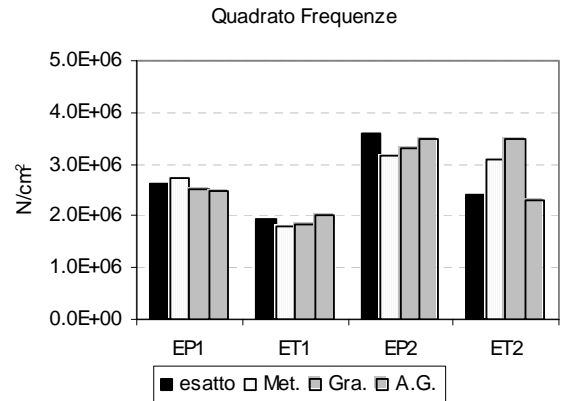


**Figura 6.93.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

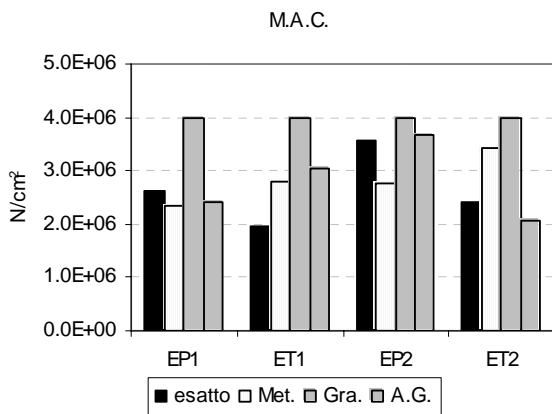
Telaio 2



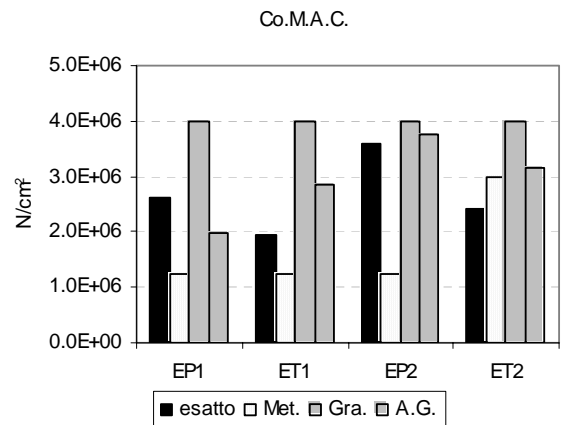
**Figura 6.94.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



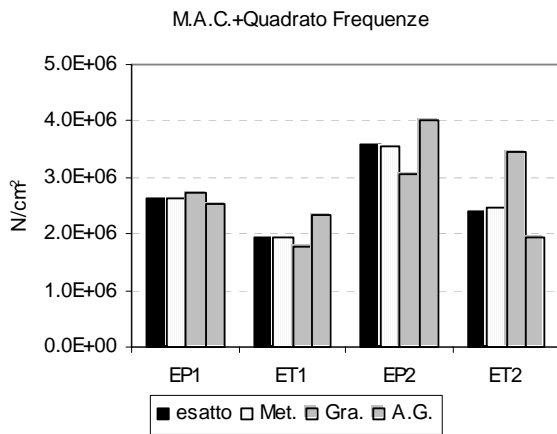
**Figura 6.95.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



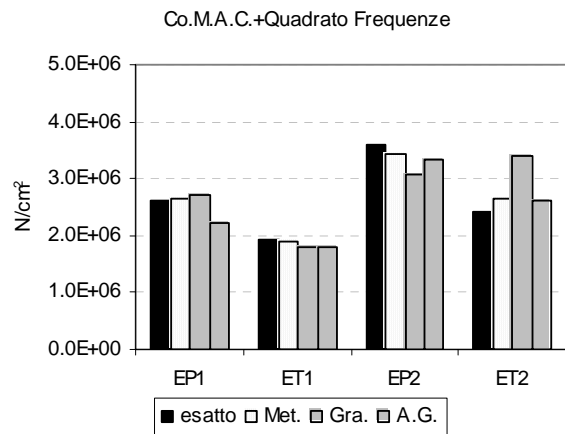
**Figura 6.96.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



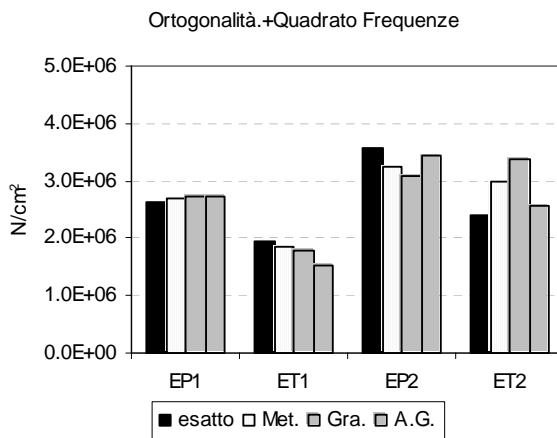
**Figura 6.97.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



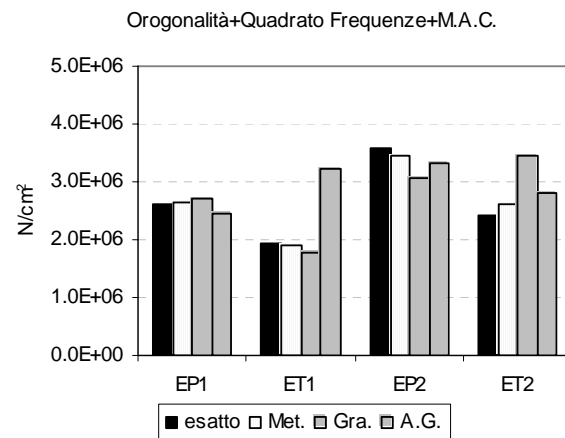
**Figura 6.98.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.99.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

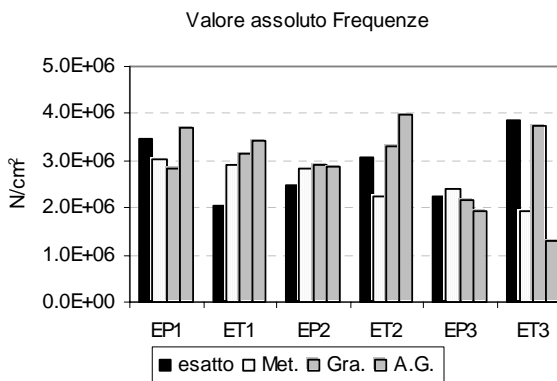


**Figura 6.100.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

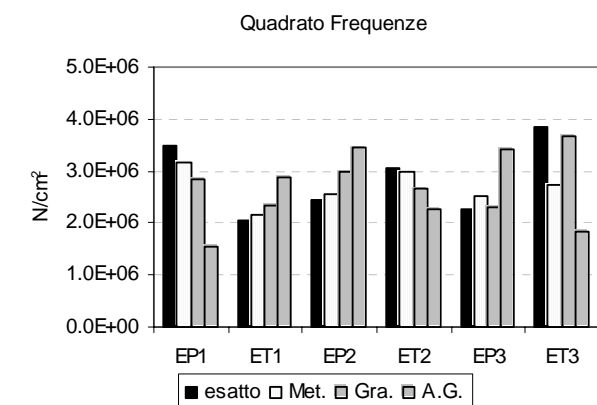


**Figura 6.101.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

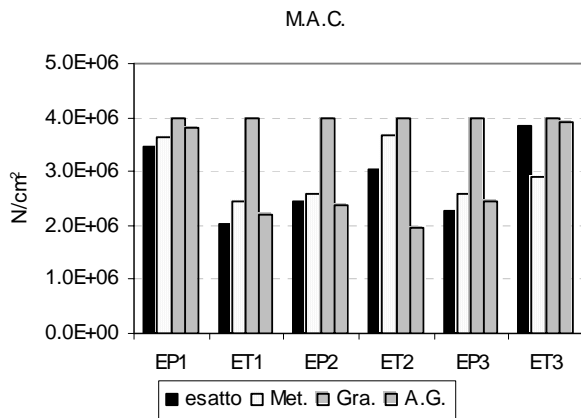
Telaio 3



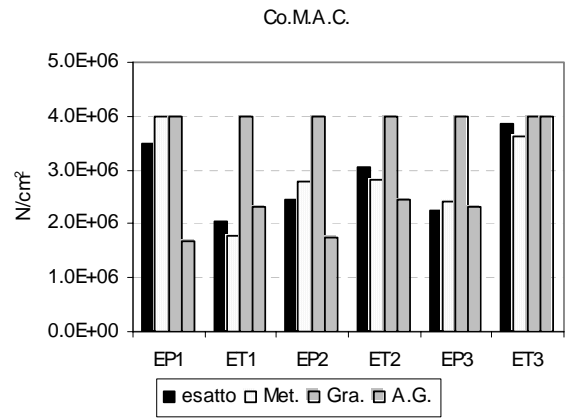
**Figura 6.102.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



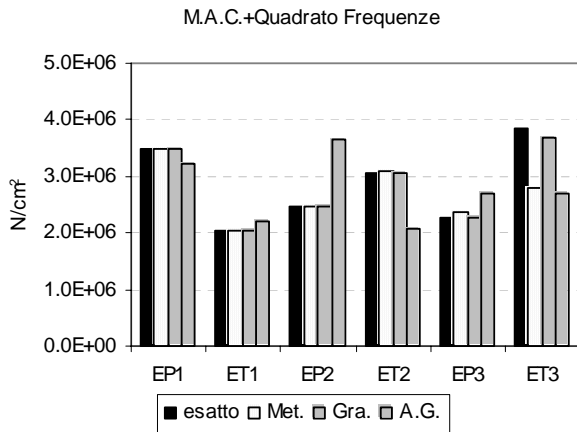
**Figura 6.103.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



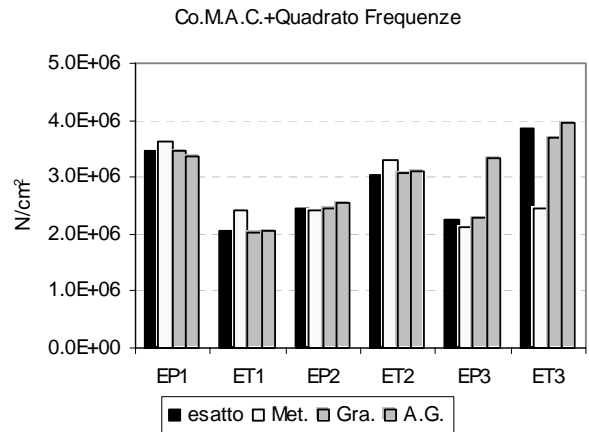
**Figura 6.104.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



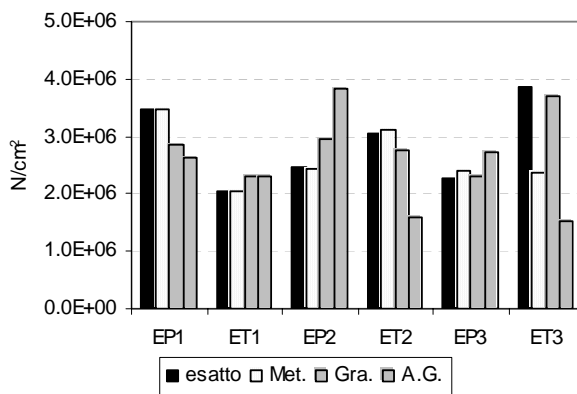
**Figura 6.105.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



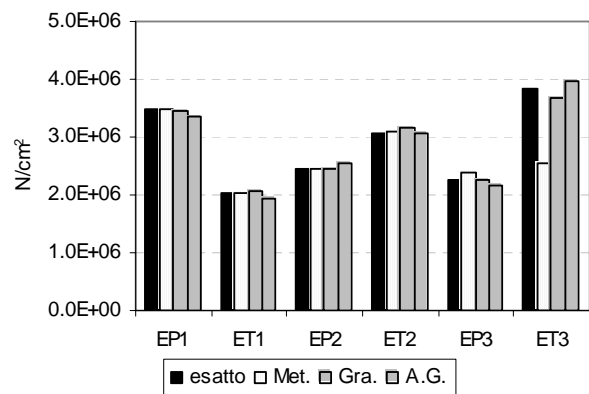
**Figura 6.106.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.107.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

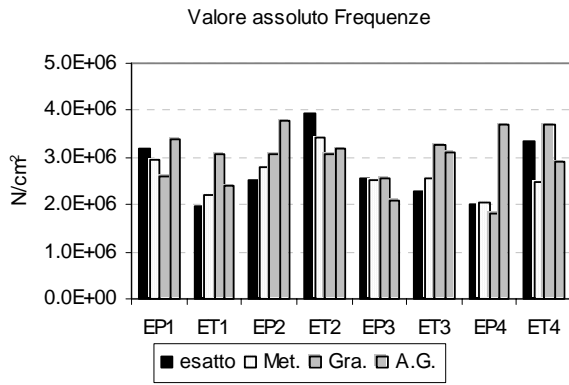


**Figura 6.108.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

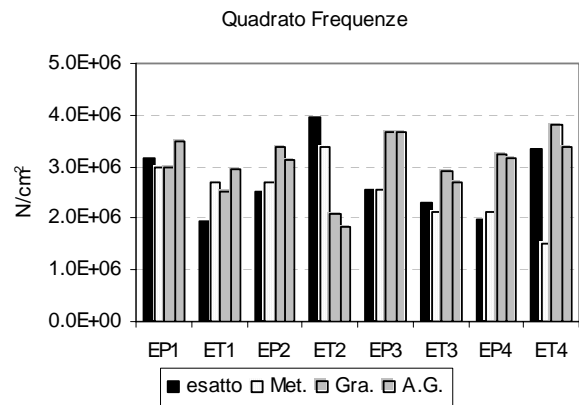


**Figura 6.109.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

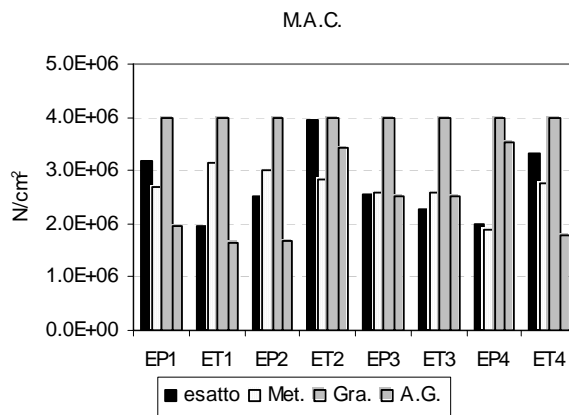
Telaio 4



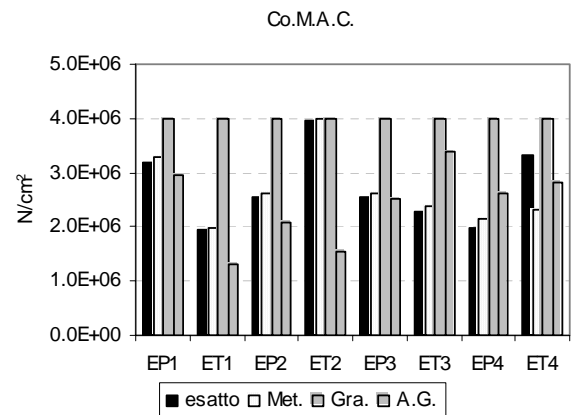
**Figura 6.110.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



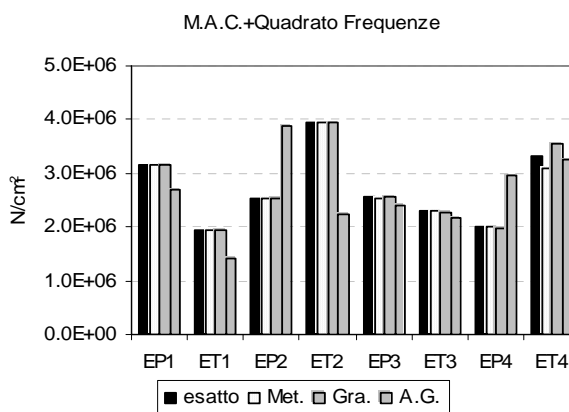
**Figura 6.111.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



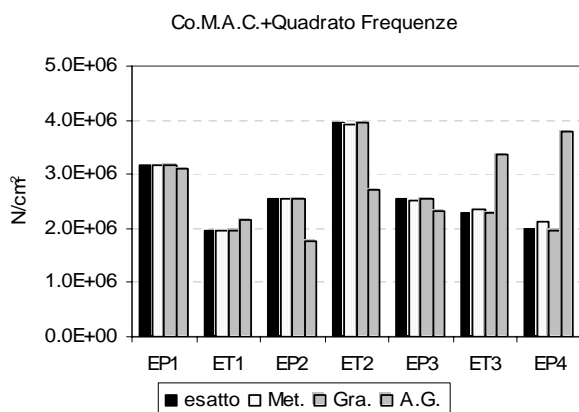
**Figura 6.112.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.113.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

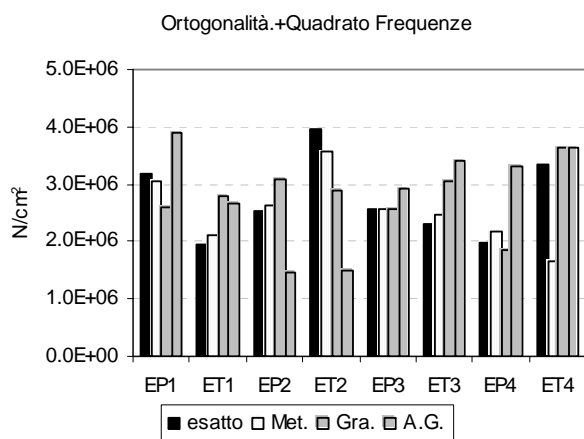


**Figura 6.114.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

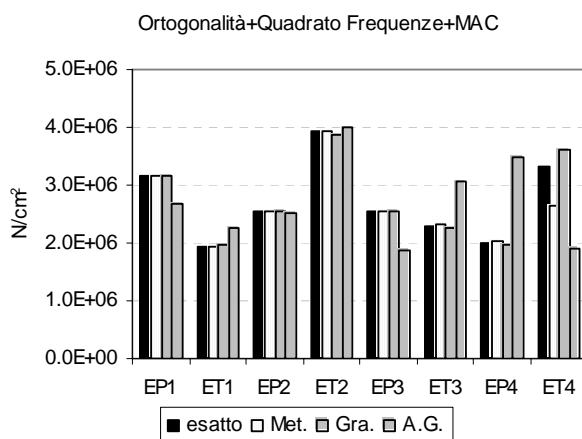


**Figura 6.115.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



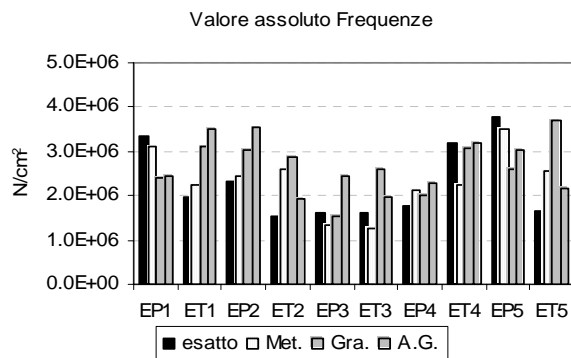


**Figura 6.116.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

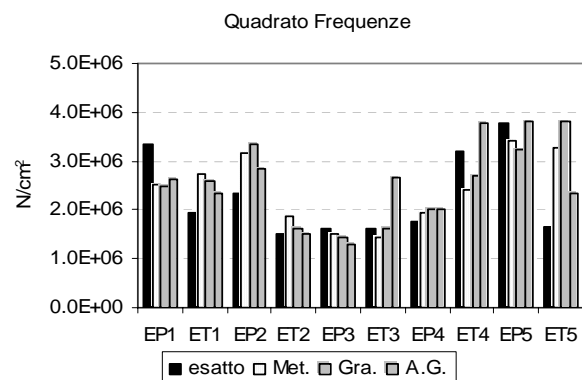


**Figura 6.117.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

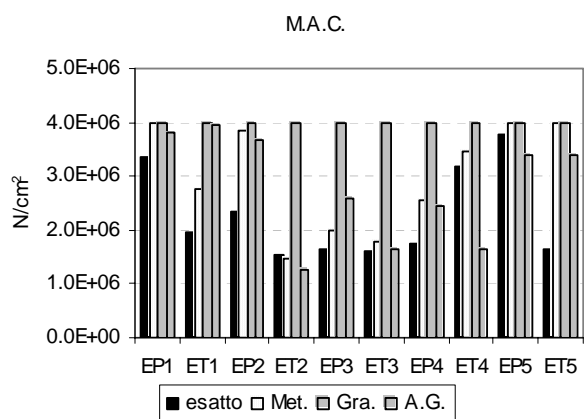
Telaio 5



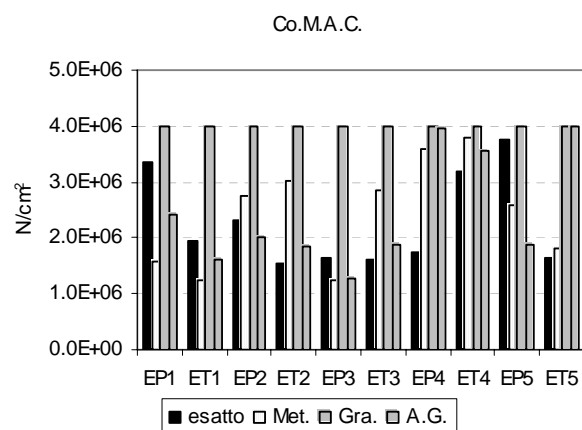
**Figura 6.118.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



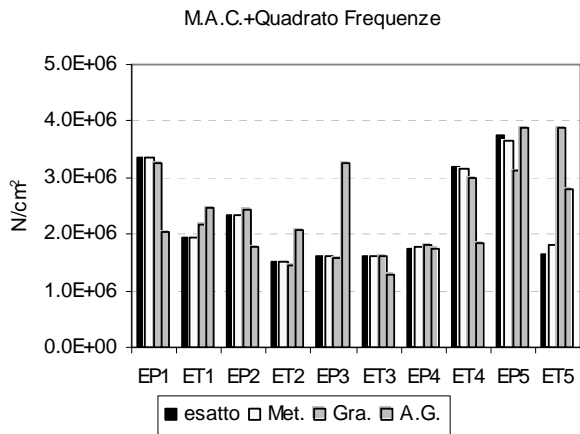
**Figura 6.119.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



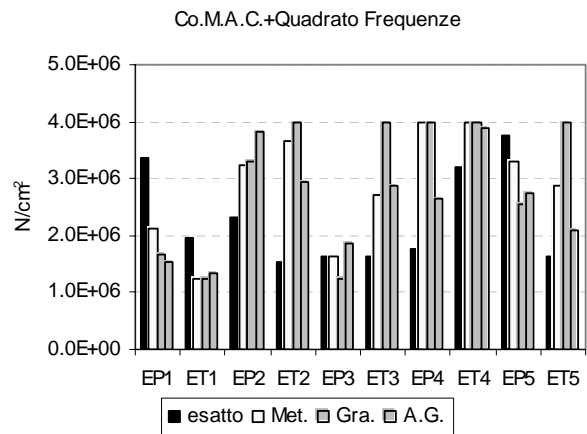
**Figura 6.120.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



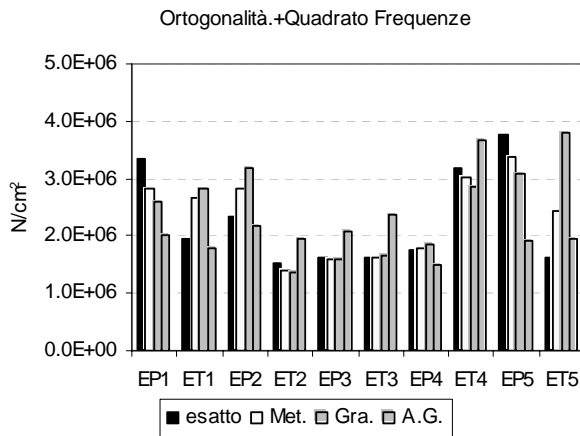
**Figura 6.121.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



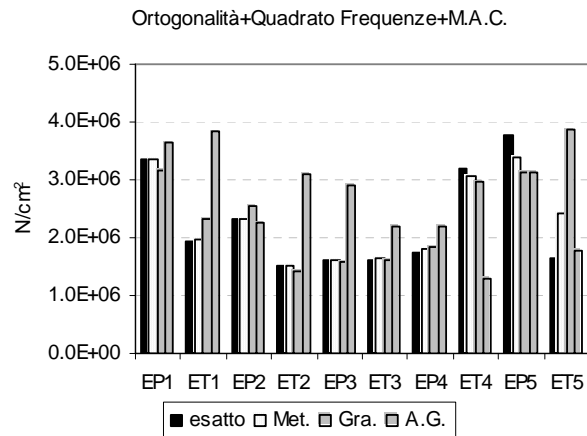
**Figura 6.122.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.123.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

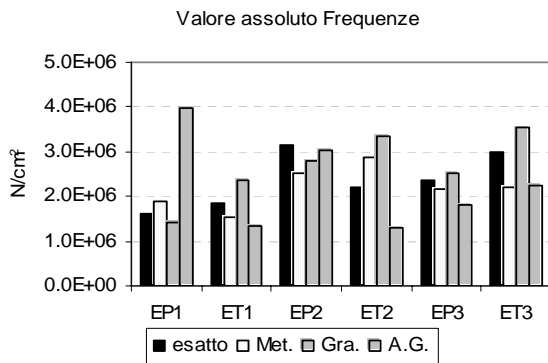


**Figura 6.124.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

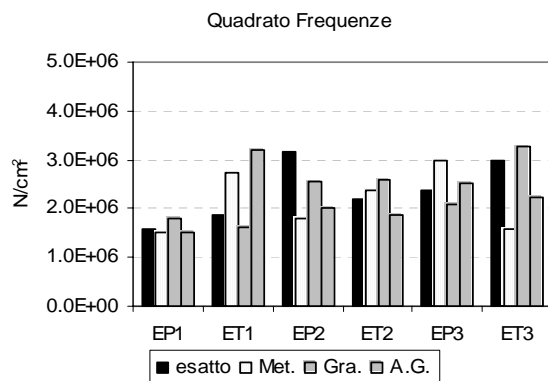


**Figura 6.125.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

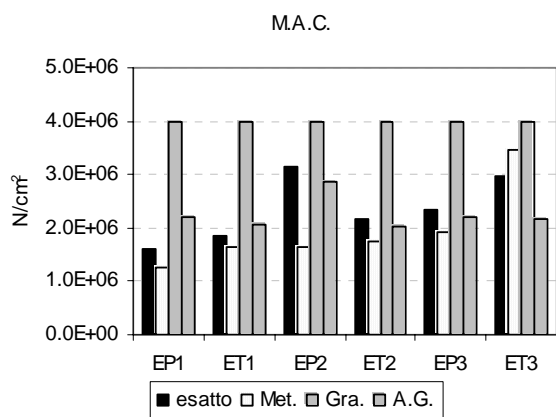
Telaio 3.2



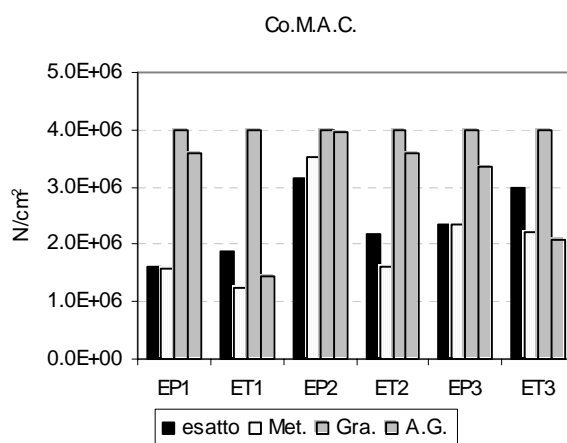
**Figura 6.126.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



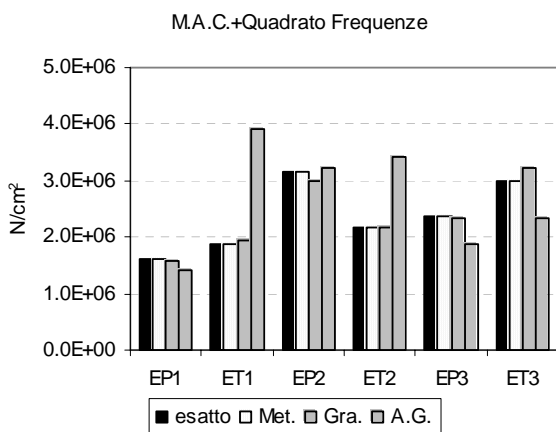
**Figura 6.127.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



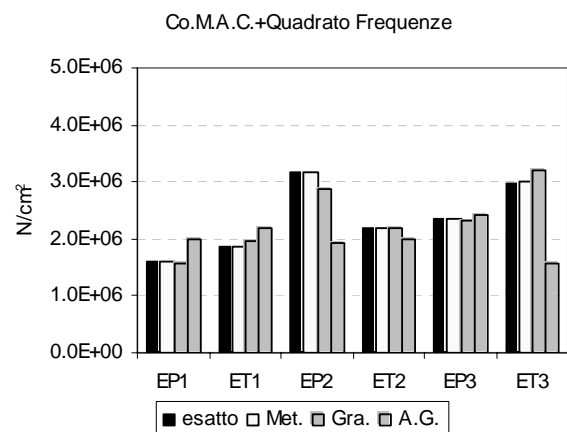
**Figura 6.128.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



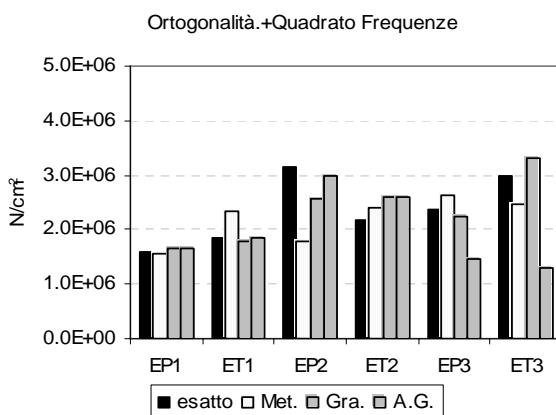
**Figura 6.129.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



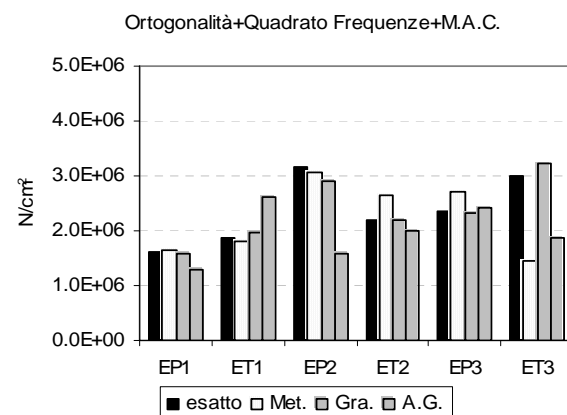
**Figura 6.130.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.131.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

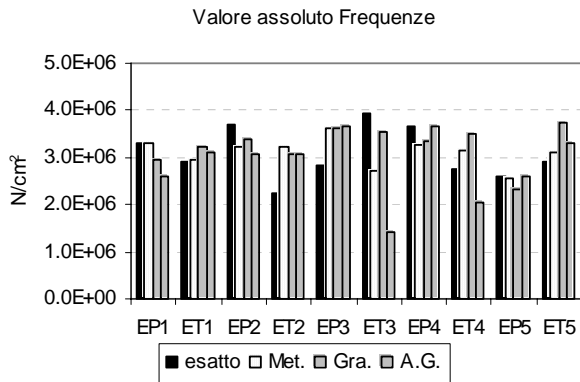


**Figura 6.132.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

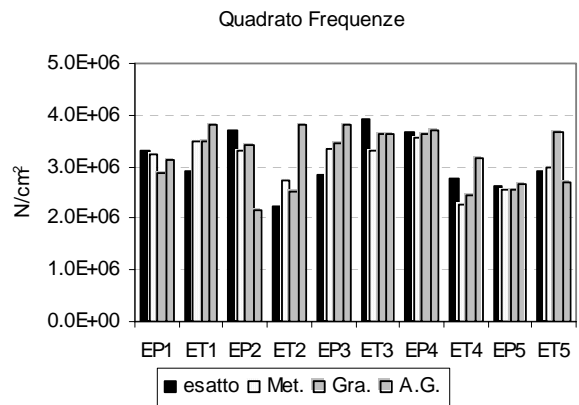


**Figura 6.133.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze e MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

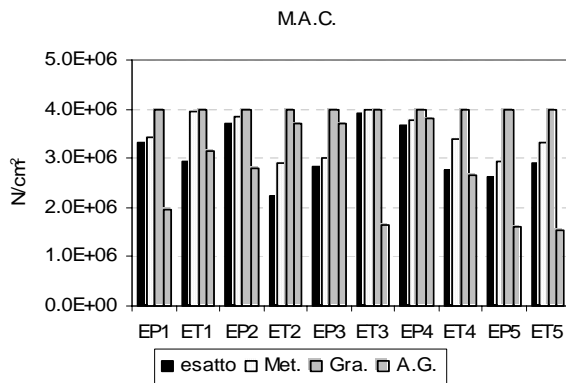
Telaio 5.2



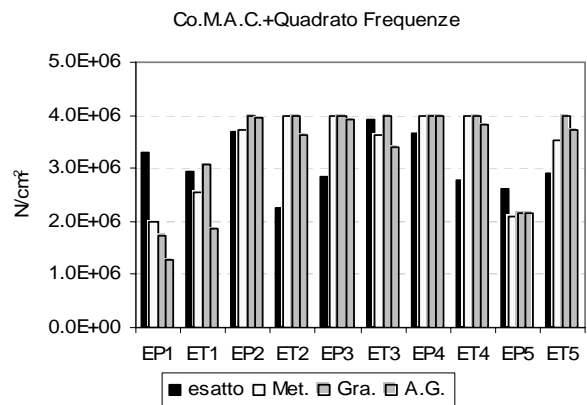
**Figura 6.134.** Valore assoluto delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



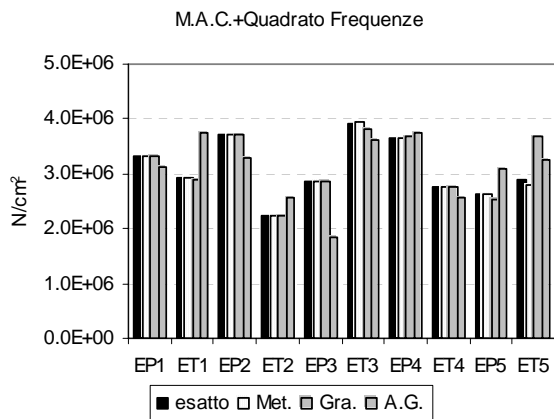
**Figura 6.135.** Quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



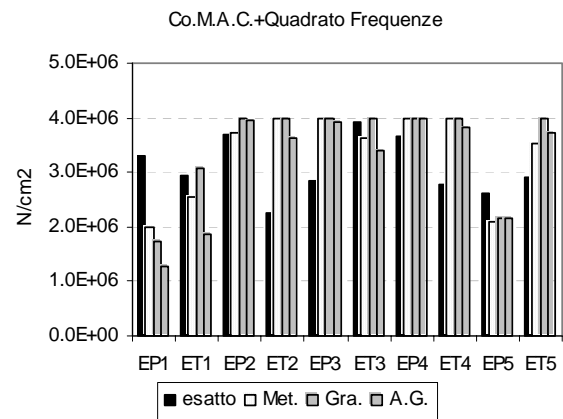
**Figura 6.136.** MAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



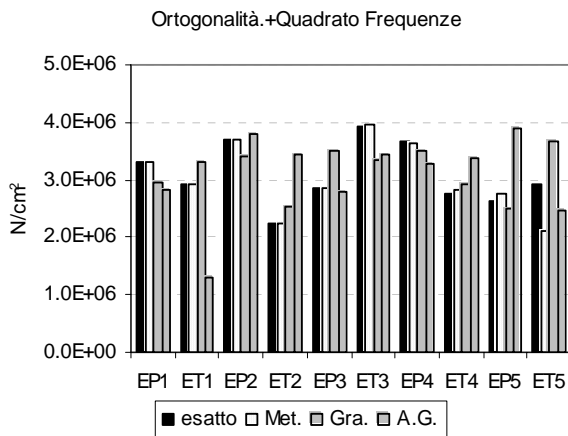
**Figura 6.137.** COMAC. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



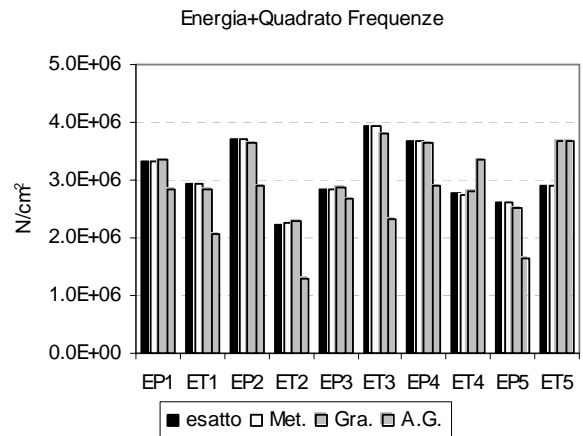
**Figura 6.138.** MAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.139.** COMAC e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.140.** Ortogonalità e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione



**Figura 6.141.** Energia di deformazione e quadrato delle frequenze. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con i diversi criteri di ottimizzazione

### 6.6.3 Commento risultati.

Con riferimento ai metodi di ottimizzazione Metrica Variabile e Gradiente, dai set di sperimentazioni condotte si possono trarre le seguenti conclusioni riguardo ai vari criteri di confronto:

#### **Criteri: Frequenze e quadrato delle frequenze:**

##### Set A:

I metodi basati sul confronto delle frequenze hanno dato risultati relativamente buoni. La comparazione dei quadrati delle frequenze ha fornito risultati in genere più accurati, rispetto alla valutazione dei valori assoluti. Per contro quest'ultimo criterio trova la soluzione di minimo con un numero di iterazioni in generale più basso.

L'accuratezza della soluzione decade all'aumentare del numero di variabili in ambo i metodi. Ma anche nel caso del telaio "5" e "5.2" i risultati ottenuti possono dirsi accettabili per il metodo frequenze (Fre). e buoni per il metodo del Quadrato delle frequenze.

Un problema rilevante è dato dal fatto che, la soluzione di minimo per ambo i metodi, se determinata con il criterio della Metrica Variabile, non è unica, ciò significa che il programma può trovare una soluzione di minimo "congruente", che fornisce cioè le stesse caratteristiche dinamiche del modello pseudo-sperimentale, ma che in realtà non è quella esatta. Per contro, l'ottenimento di risultati differenti, ad ogni iterazione dello stesso metodo, mette lo sperimentatore subito in guardia dalla non univocità della soluzione.

Il problema della non univocità non si è mai manifestato se la soluzione di minimo veniva determinata tramite il metodo del Gradiente.

##### Set B:

L'accuratezza della soluzione è andata diminuendo rispetto al set di prove precedenti: i criteri basati unicamente sulla frequenza, hanno dato risultati accettabili nel caso in cui la funzione di errore era ottimizzata con il metodo della metrica variabile, risultati meno accurati nel caso di impiego del metodo del gradiente. I risultati ottenuti sono accettabili per il criterio frequenze (Fre). fino al telaio 2 e per il Quadrato delle frequenze fino al telaio 4.

In entrambi i casi l'accuratezza della soluzione decade all'aumentare del numero di piani, venendo meno in particolare sul valore delle variabili dell'ultimo piano.

Entrambi i criteri se utilizzati in accoppiamento alla Metrica Variabile non rispettano l'unicità della soluzione, ma i valori trovati oscillano intorno ad un valore centrale.

La soluzione ottenuta ottimizzando con il metodo del gradiente è sempre univoca.

### **Criteri: M.A.C e Co.M.A.C:**

I metodi basati sul confronto delle caratteristiche modali, non sono applicabili, al caso del telaio ad un piano Per le strutture a più gradi di libertà, si è visto che:

#### Set A:

M.A.C. Co.M.A.C, utilizzati singolarmente, presentano difficoltà nell'avviamento, spesso alle prime iterazioni il criterio si arresta in corrispondenza dei valori estremi del dominio specie nel caso di ottimizzazione con il metodo del gradiente.

Nel caso in cui la procedura si avvia fornendo risultati diversi dai valori estremi del dominio, le soluzioni ottenute non rispecchiano i valori di riferimento in termini di valore assoluto, ma mantengono molto fedelmente i valori dei loro rapporti.

#### Set B:

M.A.C e Co.M.A.C, valutati singolarmente ed accoppiati al criterio della M.V. manifestano anche in questo caso difficoltà nell'avviamento e una volta avviati le soluzioni ottenute non rispecchiano i valori di riferimento in termini di valore assoluto, ma solo in termini dei loro rapporti.

L'accuratezza della soluzione, in termini di rapporti fra le variabili di confronto, è in questo appena accettabile ed inoltre sia M.A.C che Co.M.A.C non rispettano l'unicità della soluzione che oscilla intorno ad un valore centrale.

M.A.C e Co.M.A.C accoppiati al criterio del Gradiente in nessun caso danno risultati accettabili, ma valori che coincidono o si avvicinano agli estremi di definizione del dominio di esistenza delle variabili di confronto.

### **Criteri: ortogonalità dei vettori modali - energia di deformazione:**

#### Set A:

I metodi basati sulla valutazione dell'ortogonalità dei vettori modali, e sulla valutazione dell'energia di deformazione, forniscono costantemente risultati non soddisfacenti, che il più delle volte corrispondono ai valori estremi del dominio di definizione della variabile di confronto.

#### Set B:

Visti i risultati poco soddisfacenti ottenuti nel set A, i criteri di cui sopra, non sono stati impiegati nel set di prove B.

### **Criteri misti: M.A.C + Quadrato delle frequenze + Co.M.A.C**

L'utilizzo congiunto dei due criteri di confronto si è dimostrato sempre positivo sia in ordine all'accuratezza dei risultati che riguardo alla diminuzione del numero di iterazioni. in particolare:

#### Set A:

Con riferimento ad entrambi i metodi misti si può dire che:

- I risultati ottenuti, sono molto più accurati di quelli forniti da ciascun metodo valutato singolarmente e forniscono praticamente il valore esatto della variabile di confronto ( $E_{\text{piano}}$ ).
- Viene implicitamente superata, la limitazione dei criteri M.A.C e Co.M.A.C. relativa al valore assoluto del parametro di confronto fornito.
- La soluzione ottenuta è sempre univoca, si supera in tal modo la limitazione del criterio frequenze( $\text{Fre.}^2$ ) accoppiato alla Metrica variabile.

## Set B:

Dall'implementazione dei criteri basati sulla contemporanea valutazione del M.A.C e del Quadrato delle frequenze minimizzando la funzione di errore con la M.V. si sono ottenuti ottimi risultati, sia in termini di accuratezza che di numero di iterazioni. L'accuratezza del risultato si è mantenuta sempre buona anche all'aumentare del numero di variabili. Lo stesso criterio accoppiato alla minimizzazione con il metodo del gradiente ha fornito risultati leggermente meno accurati, specie nei problemi a più di 6 variabili.

Il Co.M.A.C associato al Quadrato delle frequenze, si è dimostrato criterio meno robusto di quello precedente. Infatti fornisce buoni risultati fino ai problemi con tre variabili, per problemi a più variabili manifesta una perdita di accuratezza, in special modo per le variabili degli ultimi piani. Anche in questo caso, l'ottimizzazione della funzione con il metodo della M.V. porta il criterio a fornire risultati più accurati di quelli ottenuti se si minimizza la funzione con il metodo del Gradiente. E' da rilevare che i risultati ottenuti, in ogni caso, sono molto più accurati di quelli forniti da ciascun metodo preso singolarmente.

Se l'ottimizzazione viene effettuata con il criterio della M.V. sia il M.A.C + Quadrato delle frequenze che il Co.M.A.C. + Quadrato delle frequenze non rispettano l'unicità della soluzione, ma in ogni caso i risultati ottenuti oscillano in un intervallo abbastanza contenuto da variare di molto l'accuratezza della soluzione.

Con la sovrapposizione di M.A.C e Co.M.A.C, sia con la M.V. che con il metodo del Gradiente, non si riesce in nessun caso a determinare il minimo della funzione di errore. Entrambi i criteri di minimo, si arrestano agli estremi del dominio di definizione della variabile di confronto.

**Criteri misti: Orto + Quadrato delle frequenze**

Anche in questo caso i risultati ottenuti sono molto più accurati di quelli forniti da ciascun metodo preso singolarmente e forniscono un'ottima stima del valore della variabile di confronto in particolare:

## Set A:

Il numero di iterazioni si riduce notevolmente se confrontato con qualsiasi altro criterio. L'accuratezza della soluzione è ottima anche nel caso dei telai a 5 variabili ed è indipendente dal criterio di ottimizzazione utilizzato.

## Set B:

La sovrapposizione di Orto + Quadrato delle frequenze, fornisce risultati accettabili, per problemi con un numero di variabili inferiori a 6. Fino a questo limite, si ottengono risultati più accurati con la M.V. rispetto al gradiente, e si manifesta una certa perdita di accuratezza sulle variabili di confronto degli ultimi piani. Oltre le sei variabili, la perdita di accuratezza, sia con la M.V. che con il gradiente è notevole e tale da non rendere utili i risultati ottenuti.

Anche in questo caso, l'utilizzo della M.V. non garantisce l'unicità della soluzione, ma la sua oscillazione, attorno ad un valore centrale. La soluzione è sempre univoca allorché si utilizza il metodo del gradiente.

La sovrapposizione di 3 criteri ovvero M.A.C + Ortogonalità+ Quadrato delle frequenze ha fornito, risultati sempre accettabili ma sicuramente meno accurati di quelli forniti dal criterio M.A.C + Quadrato delle frequenze. In tutte le prove è stata manifestata una perdita di accuratezza sistematica sul valore della variabile di confronto dell'ultimo piano. Anche in questo caso, la M.V. ha fornito risultati più accurati rispetto al gradiente, ma al solito mentre quest'ultimo soluzioni oscillano intorno ad un valore centrale.

In definitiva il criterio più affidabile ed accurato risulta essere M.A.C+ Quadrato delle frequenze accoppiato alla M.V.

Discorso a parte meritano i risultati ottenuti con i G.A. Come già accennato gli G.A. non garantiscono di trovare una soluzione ottima per un problema, ma generalmente trovano una soluzione sufficientemente buona e in tempi sufficientemente rapidi. Nel caso specifico della sperimentazione condotta, gli A.G., partendo da una *pop-size* di 25 unità dopo 500 generazioni, hanno sempre trovato una soluzione, indipendentemente dal criterio di confronto utilizzato e senza manifestare problemi nell'avviamento. Tuttavia la soluzione trovata si è dimostrata quasi sempre molto approssimata, rispetto ai valori di riferimento della variabile di confronto nel modello pseudo-sperimentale. Inoltre, in conformità con la filosofia evolutiva dei G.A. si è visto l'iterazione di più cicli, di un numero fissato di generazioni, sullo stesso problema, forniva risultati sempre diversi. Anche aumentando, nel set di prove "B",  $P_c$  e  $P_m$  (rispettivamente probabilità di crossover e di mutazione) fino a 0,7 così come le iterazioni fino a 1000, non si è notata alcuna variazione sensibile nella qualità dei risultati ottenuti. Ne consegue che un utilizzo dei G.A. può avere significato solo per ottenere valori orientativi delle variabili di confronto.

#### 6.6.4. Simulazione dell'errore sperimentale.

Dai set di prove precedenti è emerso che il criterio più efficace, per trovare la una buona approssimazione della soluzione di minimo della funzione di errore, anche nel caso in cui questa dipenda da due variabili per piano, è la valutazione combinata del M.A.C e del quadrato delle frequenze. Se si ottimizza la funzione attraverso il metodo della Metrica Variabile, anziché con il metodo del Gradiente, le soluzioni trovate, in termini di variabili meccaniche, praticamente coincidono, con quelle del modello pseudo-sperimentale.

E' da dirsi, che la funzionalità di questo sistema (M.A.C+ Quadrato delle frequenze + Metrica Variabile), si fonda anche sulla esattezza dei dati pseudo-sperimentali, che giacché generati in modo numerico, non sono affetti dalle incertezze di cui risentirebbero sicuramente se fossero dei dati acquisiti sperimentalmente, a causa della inevitabile imprecisione delle misure sperimentali e dalla impossibilità di eliminare completamente i rumori.

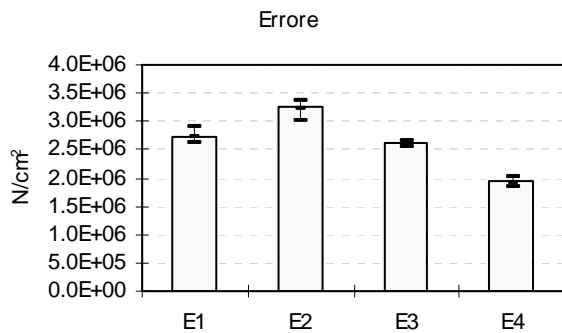
Alla luce di queste considerazioni, il criterio suddetto (M.A.C + Quadrato delle frequenze +Metrica Variabile), è stato messo alla prova, introducendo intenzionalmente degli errori, nel modello modale pseudo-sperimentale, per simulare le inevitabili imprecisioni di cui sopra, in modo tale da poter esprimere un giudizio più realistico sulla sua accuratezza.

Giacché i dati disponibili in letteratura, convengono nel fissare intorno al 5% il *range* entro cui varia l'errore sui dati dinamici acquisiti attraverso il test modale sperimentale, le caratteristiche modali del modello pseudo-sperimentale, sono state variate, in maniera random nello stesso *range* con una distribuzione di errore uniforme e sulla base di questi dati "alterati" si sono cercate le soluzioni di minimo.

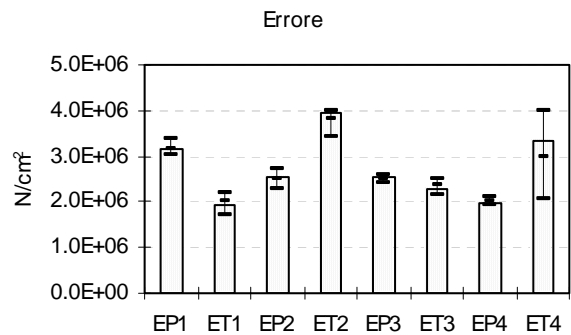
In particolare si è scelto di implementare la procedura sul telaio "4", considerando sia il caso di 1 variabile per piano, che di 2, variabili per piano. Generati 10 diversi modelli pseudo-sperimentali "alterati" si è determinata in tutti i casi la soluzione.

Nelle tabelle e nei diagrammi che seguono si riportano i risultati ottenuti .





**Figura 6.142.** Telaio 4, una variabile per piano. MAC e quadrato delle frequenze. Range delle soluzioni su dati affetti da errore



**Figura 6.143.** Telaio 4, una variabile per piano. MAC e quadrato delle frequenze. Range delle soluzioni su dati affetti da errore

### 6.6.5. Commento risultati.

Dai risultati delle prove condotte, si nota che l'errore sulle soluzioni ottenute, oscilla in modo uniforme in un *range* compreso tra lo 0 e circa l'8%, rispetto al valore esatto, per il caso del telaio caratterizzato da 1 variabile per piano. Per il caso del telaio con 2 variabili meccaniche per piano ( $E_{\text{pilastri}}$  ed  $E_{\text{travi}}$ ), l'errore oscilla in un range compreso tra lo 0 ed il 13% circa, della soluzione esatta, per entrambe le variabili dei primi 3 piani, e per la variabile.

$E_{\text{pilastri}}$  dell'ultimo piano, mentre aumenta notevolmente arrivando fino a punte che sfiorano il 40% del valore esatto per la variabile  $E_{\text{travi}}$  dell'ultimo piano. Quest'ultimo dato conferma il fatto che anche i metodi più robusti, perdono in accuratezza specie sul valore delle variabili degli ultimi piani (probabilmente perchè le caratteristiche dinamiche degli ultimi piani, incidono di meno sulla soluzione modale globale). I calcoli presenti, in ogni caso, dimostrano che anche introducendo intenzionalmente sui dati modali del modello pseudo-sperimentale, un errore random, con distribuzione uniforme, minore del 5% il sistema sviluppato continua a fornire risultati utili, e suggeriscono, così come gli altri studi numerici condotti, che il massimo errore ammissibile nell'acquisizione dei dati dinamici è piccolo, per cui un impiego utile, della sperimentazione dinamica non può prescindere dalla necessità di ridurre al minimo l'errore sulle misure sperimentali.

### 6.7. Conclusioni

Questo capitolo ha esaminato il problema dell'identificazione del danneggiamento strutturale, basata sui cambiamenti delle caratteristiche dinamiche della struttura. Tale metodo è fondato sull'idea che i parametri modali sono una funzione delle caratteristiche fisiche della struttura e per questo l'analisi dei loro cambiamenti rappresenta un metodo globale di valutazione della condizione strutturale. Su questa base, sono state sviluppate alcune metodologie di identificazione del danno e proposti alcuni criteri con le relative applicazioni numeriche al caso dei telai piani.

I criteri proposti sono basati sulla valutazione del: M.A.C. Co.M.A.C, del valore assoluto e del quadrato delle frequenze, dell'ortogonalità dei vettori modali, dell'energia di deformazione e di alcune loro combinazioni.

La sperimentazione ha dimostrato che, fra tutti questi parametri, la comparazione delle frequenze naturali, dei vettori dei modi di vibrare può essere un significativo indice di individuazione e quantificazione del danneggiamento strutturale, a tal proposito si è visto che l'utilizzo contemporaneo di più criteri di confronto fornisce, almeno sperimentalmente

risultati molto confortanti specie se il criterio di confronto è il M.A.C + Quadrato delle frequenze e la funzione di errore è ottimizzata attraverso metrica variabile. Si è visto inoltre che introducendo, intenzionalmente un errore <5% distribuito in modo uniforme sui dati modali del modello pseudo-sperimentale, il sistema sviluppato continua a fornire risultati utili. Le metodologie di determinazione del danneggiamento proposte in questa tesi, sono state analizzate limitatamente agli aspetti analitico e numerico. E' evidente che le loro *performances* dovrebbero essere studiate in applicazioni su strutture realmente esistenti in modo da valutarne, l'affidabilità ed il costo. Per quanto riguarda il costo del "collaudo dinamico", è noto che questo sia ancora elevato, per quanto riguarda l'affidabilità delle prove, anche se, come si è visto, molto dipende dalla precisione delle misure sperimentali, e dalla possibilità di ridurre al minimo i rumori, andrebbero considerati altri effetti fondamentali legati per esempio all'interazione suolo struttura, all'influenza delle murature, alla possibilità di valutare un modello tridimensionale della struttura tenendo in conto anche l'ipotesi di deformabilità a taglio e quella di nodi rigidi. La valutazione della risposta del terreno e dell'effettiva azione delle murature, che influiscono sulle deformate modali, è essenziale per la definizione del modello numerico di una struttura che si avvicini il più possibile a quella reale.

## CAPITOLO 7

### IDENTIFICAZIONE IN TELAI PIANI TAMPONATI

*L'influenza di elementi non strutturali può condizionare in maniera anche pesante i risultati dell'analisi. Il modello teorico dovrà essere quanto più vicino a rappresentare il reale comportamento della struttura, cogliendo anche le influenze che parti non strutturali hanno sulla sua risposta.*

*Il presente capitolo si propone, in particolare, di testare l'efficacia di metodi inversi nel caso si consideri, nella risposta strutturale di telai piani, l'influenza dei pannelli di tamponamento. Questi ultimi costituiscono un importante "elemento di disturbo", specie nella risposta di strutture sotto sisma.*

*L'idea è quindi quella di arricchire il modello di telaio piano considerando l'influenza del pannello di tamponamento e valutarne l'influenza in una procedura di identificazione strutturale.*

## 7.1. Introduzione.

La più diffusa tipologia costruttiva, nel nostro paese, è rappresentata da edifici con struttura portante intelaiata in calcestruzzo armato, nella quale si impiegano pannelli di muratura costituiti da elementi di laterizio, per lo più forati, e malta cementizia, per chiudere la costruzione (tamponature) e dividere gli ambienti interni (divisori). Per semplicità ed economia di costruzione, è pratica comune costruire questi pannelli a diretto contatto con l'ossatura portante, senza interporre nessun tipo di giunto che ne assicuri la separazione, ma senza peraltro predisporre alcun meccanismo di connessione che assicuri un completo ed efficace collegamento dei due sistemi.

In ambito progettuale, il contributo di queste parti non strutturali alla statica dell'intero edificio, è comunemente trascurato.

Si è invece visto come, in eventi sismici verificatisi in passato, il contributo delle tamponature sia stato fondamentale per la resistenza di alcuni edifici coinvolti [98]. Ne segue che la risposta sismica dei telai tamponati è fortemente condizionata dalle tamponature. Anche semplici pannelli di laterizio forato, non armati, sono in grado di irrigidire notevolmente la struttura, oltre ad aumentarne la duttilità e le capacità dissipative, andando poi a compensare, con la propria resistenza, il conseguente aumento delle forze d'inerzia.

Il contributo delle tamponature si rivela poi fondamentale in quegli edifici che non vengono progettati per resistere ad eventi sismici, arrivando, in alcuni casi, perfino a scongiurare il crollo.

Per contro, la presenza delle tamponature, e la loro elevata rigidità in particolare, introduce irregolarità che possono essere anche rilevanti, pregiudicando una configurazione strutturale altrimenti corretta. Si pensi in primo luogo alla distribuzione delle rigidità nel piano: la presenza di elementi estremamente rigidi quali sono i tompagni, può far spostare il centro delle rigidità, con conseguenti situazioni di torsione in pianta. Altro problema è rappresentato, in altezza, dalla formazione del *piano soffice*, situazione che può innescare un pericoloso meccanismo di collasso. Tra l'altro, queste situazioni possono verificarsi anche se vi è una distribuzione regolare dei pannelli, a seguito della crisi di solo alcuni di essi, essendo il loro collasso caratterizzato da marcate caratteristiche di fragilità, sia per le proprietà intrinseche del materiale che lo costituisce, sia per eventuali collassi fuori piano, dovuti ai collegamenti inefficaci con l'ossatura portante, oppure a fenomeni di instabilità, visto l'esiguo spessore del pannello in relazione alle altre dimensioni.

Trascurando il contributo delle tamponature in sede di progetto si rischia, inoltre, di invalidare l'analisi delle sollecitazioni e, di conseguenza, il dimensionamento degli elementi resistenti. Esempio più comune è la rottura a taglio del tratto di pilastro che rimane scoperto per una tamponatura parziale in altezza.

Da queste considerazioni segue che è essenziale considerare il contributo della muratura nella verifica delle strutture che non presentino un'adeguata resistenza di progetto. Per quanto riguarda invece la progettazione di edifici nuovi, si riscontrano due correnti di pensiero. La prima fa prevalere gli effetti negativi delle tamponature, visto che queste costituiscono comunque un fattore di grande incertezza nella risposta sismica e rischiano di rendere vani tutti quegli accorgimenti progettuali e costruttivi che vengono impiegati per ottimizzare la risposta della struttura. Si prevede quindi di considerare il pannello di tamponatura completamente sconnesso dall'ossatura, in modo che la sua presenza non ne modifichi il previsto comportamento.

La seconda tendenza è invece quella di considerare sempre collaborante la tamponatura con l'ossatura resistente, ciò sia per motivi di economia della costruzione, sia per l'incertezza sull'effettivo impegno richiesto da un evento sismico alla struttura. In questa ottica, conviene

trarre beneficio da tutti gli elementi, strutturali e non strutturali, che possono dare contributo alla stabilità della costruzione. Da ciò deriva che la tamponatura dovrebbe essere sempre resa collaborante con l'ossatura, costituendo così una riserva di resistenza contro eventi sismici severi, andando però a minimizzare i potenziali effetti negativi sopra citati, con un'adeguata modellazione in fase di analisi.

## **7.2. Modellazione dei telai tamponati.**

Come è stato già detto, la presenza, all'interno della maglia di telaio, di un pannello di tamponatura, ne modifica sostanzialmente il comportamento, sia per quanto riguarda la rigidità, sia per quanto riguarda la resistenza ultima dell'organismo strutturale. Questa situazione è stata, negli ultimi cinquanta anni, oggetto di numerosi studi sperimentali, volti ad ottenere una descrizione analitica rigorosa del comportamento del telaio tamponato.

Tale comportamento è, tuttavia, influenzato da una serie numerosa di parametri per i quali è molto difficile, se non impossibile, valutare l'influenza in una situazione reale.

A tal proposito, si pensi innanzitutto alle proprietà meccaniche delle tamponature, su cui influiscono sia la dispersione delle caratteristiche dei mattoni e della malta, sia la capacità e la cura nel costruire da parte delle maestranze. Si pensi anche all'influenza delle aperture sulla rigidità e sulla resistenza del pannello, alle diverse condizioni del contatto fra il telaio ed il muro in funzione del ritiro della malta, all'interazione del comportamento nel piano e fuori del piano, all'importanza dei fenomeni del secondo ordine in prossimità della rottura di un elemento snello e fragile.

Le indagini sperimentali forniscono, pertanto, risultati fortemente influenzati dal tipo di prova, dal tipo di materiale costituente il pannello, dal fattore di scala usato per i provini (fattore, quest'ultimo, a cui il comportamento della tamponatura risulta particolarmente sensibile). Tali prove hanno consentito di dedurre considerazioni qualitativamente significative sui comportamenti rilevati, senza tuttavia permettere di generalizzare le relazioni empiriche dedotte per la valutazione della rigidità laterale complessiva e della resistenza ultima del sistema telaio-pannello ai fini delle pratiche applicazioni.

Si sono riscontrate, negli studi presi in esame, sostanzialmente due tipologie di ricerca, ognuna volta a meglio identificare un particolare aspetto del comportamento della tamponatura all'interno della maglia di telaio. Il primo aspetto riguarda l'identificazione della resistenza ultima del pannello e quindi dei possibili meccanismi di rottura, estendendo l'analisi, con l'ausilio di modelli ad elementi finiti, ai singoli elementi di laterizio e malta, opportunamente omogeneizzati. Il secondo aspetto si concentra sulle modifiche che la presenza della tamponatura induce nel comportamento del telaio.

La nostra attenzione sarà concentrata su quest'ultimo aspetto, per il quale le numerose indagini condotte, sia a livello di modellazione analitica che di prove in laboratorio, concordano ad adottare quale modello più efficace nello schematizzare la tamponatura, quello di rappresentare quest'ultima con un puntone equivalente.

## **7.3. Comportamento dei telai tamponati**

Come già ribadito, i numerosi studi condotti hanno mostrato come il comportamento di un telaio tamponato sia fortemente influenzato dall'interazione del pannello di tamponatura con il circostante telaio. Si è visto come, in numerosi casi, non sia valido calcolare la resistenza laterale del telaio tamponato come semplice somma dei due contributi del telaio e del pannello di tamponamento, poiché i meccanismi resistenti dei singoli componenti possono essere notevolmente alterati dall'interazione telaio-pannello.

Ad un livello di carico laterale basso, il telaio tamponato si comporta come un meccanismo resistente monolitico. Al crescere del carico, la tamponatura tende parzialmente a separarsi dal telaio circostante, formando il meccanismo resistente di puntone compresso. Tale meccanismo può o non può evolvere in un meccanismo resistente primario della struttura, in base alla sua dipendenza dalle proprietà di rigidezza e resistenza del tamponamento rispetto a quelle del telaio. Ciò è sostanzialmente dovuto al meccanismo di rottura che interviene nel pannello di tamponatura.

Sulla base di osservazioni sperimentali, si possono osservare sostanzialmente cinque principali meccanismi di collasso per i telai tamponati[99] (fig. 7.1):

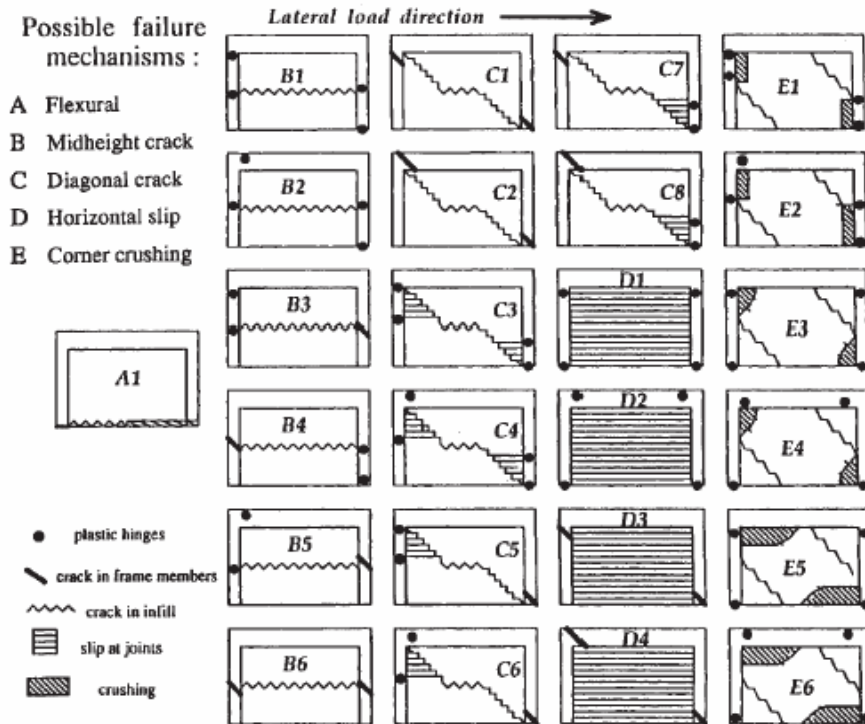


Figura 7.1. Tipiche modalità di rottura nei tamponamenti

Il primo meccanismo di collasso (meccanismo A) è puramente flessionale. In questo meccanismo, tamponatura e telaio si comportano come un unico elemento con prevalente comportamento flessionale. Tale comportamento si verifica generalmente bassi livelli di carico, quando non sia ancora intervenuto il distacco della tamponatura dal telaio, ma raramente evolve in un meccanismo di collasso primario, eccetto che per telai snelli e alti, in cui si hanno pilastri armati molto debolmente a flessione.

Il secondo meccanismo (meccanismo B), si presenta con uno scorrimento orizzontale del giunto di malta della tamponatura posto a metà altezza. Ciò porta ad avere una situazione strutturale con pilastri tozzi, che può portare alla rottura a taglio dei medesimi, rottura con spiccate caratteristiche di fragilità, e quindi da evitare. In questo meccanismo si può avere la formazione di cerniere plastiche alla mezzera dei pilastri.

Il terzo meccanismo (meccanismo C) presenta delle fessure diagonali che si propagano da un angolo all'altro, a volte unite da una fessura orizzontale a mezza altezza. In questo caso può svilupparsi un meccanismo di puntone equivalente, che può eventualmente condurre allo schiacciamento degli angoli ed alla formazione di cerniere plastiche nelle posizioni indicate in figura, oppure alla rottura a taglio dei pilastri.

Il quarto meccanismo (meccanismo D) è caratterizzato dallo scorrimento multiplo dei letti di malta nel tamponamento. In genere questo si verifica in pannelli con giunture di malta molto deboli e può dare luogo ad un comportamento molto duttile, purché venga scongiurata la rottura fragile a taglio nei pilastri.

Il quinto meccanismo (meccanismo E) si nota il realizzarsi di un diverso meccanismo di puntone equivalente, caratterizzato da due fratture parallele. Questo è spesso accompagnato dallo schiacciamento degli angoli. Lo schiacciamento può, a volte, verificarsi al centro del pannello.

Nei vari studi sui telai tamponati rivestono particolare importanza quelli condotti da Klingner & Bertero[100-101] e da Bertero & Brokken [102], che hanno condotto indagini, su modelli in scala 1:3, di telai piani tamponati con pannelli in calcestruzzo, questi ultimi con rinforzi sia orizzontali che verticali. I pannelli sono poi stati saldamente collegati al telaio circostante.

I risultati di queste prove mostrano come i telai tamponati possano offrire maggiori prestazioni in termini di rigidità, resistenza e dissipazione di energia, rispetto ad un telaio nudo. Tuttavia, l'impiego di pannelli di tamponamento rinforzati non è molto comune. Un tamponamento sovra rinforzato può comportare rischi di rottura fragile a taglio per i pilastri.

A tal proposito, ulteriori studi hanno dimostrato come già una tamponatura di muratura debole, non rinforzata, comporti significativi vantaggi a livello di resistenza e rigidità per il telaio in calcestruzzo armato, senza metterne in pericolo la duttilità.

In conclusione si può dire che il meccanismo di collasso e la resistenza di un telaio tamponato dipendono notevolmente dalla resistenza e dalla rigidità del pannello di tamponamento rapportate a quelle del telaio circostante. Altro fattore determinante è la resistenza dei letti di malta. È preferibile l'impiego di pannelli deboli, i quali si sono dimostrati efficaci nel migliorare le prestazioni del telaio, a patto che vengano scongiurati fenomeni di pilastro tozzo e rottura a taglio dei pilastri.

La modellazione quasi unanimemente impiegata, risulta comunque quella del puntone compresso equivalente.

#### **7.4. Il modello del puntone equivalente**

Si basa sull'assunto di sostituire il pannello di tamponatura con un puntone equivalente inserito nella maglia del telaio, corrispondente alla diagonale compressa del pannello stesso.

Assumendo per il puntone lo stesso modulo elastico e lo stesso spessore della tamponatura e, quale lunghezza, quella della diagonale, il problema si riduce nel calcolarne la larghezza.

Il pannello di tamponatura tende a staccarsi dal telaio circostante per livelli di carico laterale relativamente basso, dopodiché le zone di contatto sono limitate ai due angoli opposti della diagonale compressa. In questo modo si forma un meccanismo resistente simile a quello di un puntone diagonale.

Una delle prime proposte per determinare la larghezza del puntone equivalente è stata quella che tale larghezza dipenda principalmente dallo spessore del pannello e dalle sue caratteristiche meccaniche.

Stafford Smith[103] ha usato una teoria elastica per dimostrare che la larghezza del puntone dovrebbe essere funzione della rigidità della tamponatura, rapportata con la rigidità flessionale dei pilastri. Dall'analogia con il modello di trave elastica su suolo elastico, Stafford Smith ha definito un parametro di rigidità relativo adimensionale, da utilizzare come riferimento per determinare il grado di interazione tra telaio e tamponatura e, di conseguenza, la larghezza effettiva del puntone equivalente. Questo parametro è definito come segue:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{E_i \cdot t \cdot \sin 2\theta}{4 \cdot E_c \cdot I_c \cdot h}} \quad (7.1)$$

Dove  $E_i$  e  $t$  sono il modulo elastico e lo spessore del tamponamento,  $E_c \cdot I_c$  è la rigidezza flessionale dei pilastri e  $h$  e  $\theta$  sono, rispettivamente, l'altezza e l'angolo tra la diagonale del pannello di tamponamento e l'orizzontale. È stata poi sviluppata una relazione teorica tra il parametro di rigidezza relativo e la lunghezza di contatto tra il tamponamento ed il telaio circostante, mediante l'uso di un set di curve teoriche, per mettere in relazione le grandezze sopra citate con la larghezza effettiva del puntone equivalente.

Tuttavia, in questo modello teorico, si ottiene una sovrastima della larghezza effettiva. Il set di curve teoriche è stato allora sostituito con un set di curve empiriche che mettono in relazione il parametro di rigidezza  $\lambda$  con la larghezza effettiva del puntone equivalente. Queste curve hanno presentato correlazioni migliori con i dati sperimentali, rispetto ai risultati teorici.

Il limite di questo modello è rappresentato dal fatto di essere basato sulle osservazioni sperimentali di telai in acciaio, con pannello di tamponamento considerato come costituito da materiale omogeneo e isotropo, senza ulteriori test che andassero a considerare l'effettivo comportamento anisotropo della muratura, con i numerosi piani di scorrimento rappresentati dai letti di malta.

A tal proposito interviene uno studio condotto da Mainstone & Weeks [104], che propongono una relazione empirica tra l'ampiezza effettiva del puntone equivalente ed il parametro di rigidezza di Stafford Smith, nel caso di pannello in muratura. Da tale relazione scaturisce un valore più basso della larghezza effettiva del puntone equivalente rispetto a quella determinata col modello di Stafford Smith.

Numerosi altri studi hanno fornito i risultati più vari in relazione alla modifica dei diversi parametri che entrano in gioco.

Pertanto, non si è giunti a nessuna conclusione significativa su una modellazione generale del comportamento dei telai tamponati, visti i risultati, a volte notevolmente diversi tra loro, dei vari studi.

Tuttavia, il modello proposto da Stafford Smith sembra essere l'unico a presentare una certa consistenza all'interno di tutti gli studi atti a valutare una stima della larghezza effettiva del puntone. Ciò porta alla formulazione di due problemi. Il primo riguarda la corretta definizione della rigidezza laterale iniziale del telaio tamponato che sia riflessiva del suo complessivo comportamento prima del collasso. L'altro è la scelta del modulo elastico della muratura che dovrebbe essere utilizzato all'interno del modello.

Prima di proseguire bisogna dire che la scelta di modellare la tamponatura con l'inserimento del puntone equivalente, porta inevitabilmente alla rinuncia di cogliere numerosi aspetti del comportamento della tamponatura, come l'influenza del giunto di contatto telaio-tamponatura, i fenomeni locali di schiacciamento che possono verificarsi in prossimità degli angoli e che possono portare all'innescarsi di meccanismi di collasso dovuti alla crisi dei pilastri per sollecitazione tagliente. Tuttavia, tale modellazione, per via della versatilità e della semplicità computazionale, sembra ancora essere la più adeguata.

Nei diversi studi orientati a fornire una stima accettabile della rigidezza laterale del telaio tamponato, il punto di maggiore incertezza è rappresentato da un'adeguata modellazione del pannello di tamponamento e del giunto di collegamento pannello-telaio.

I diversi modelli si differenziano a seconda degli aspetti che vogliono essere colti nell'analisi. Modelli atti ad analizzare l'evolversi del comportamento della muratura fino al suo eventuale collasso, rappresentano il tamponamento mediante l'impiego di elementi finiti tridimensionali



che inglobano il comportamento del singolo mattone comprensivo del letto di malta, opportunamente omogeneizzato.

Singh, Paul & Sastry [105], propongono un modello ad elementi finiti bidimensionali per la tamponatura, collegati al circostante telaio mediante l'impiego di elementi di collegamenti che schematizzano i giunti (fig. 7.2).

Notevoli difficoltà si incontrano nel modellare l'elemento di interfaccia. Per tale motivo Asteris [106] propone un particolare modello, per stimare la rigidità laterale del telaio tamponato, nel quale il tamponamento è discretizzato con elementi finiti bidimensionali e nel quale viene introdotto un criterio di distacco della tamponatura dal telaio. Il metodo di analisi si basa sulle due considerazioni che seguono:

- Il telaio e il pannello di tamponamento non possono compenetrarsi. Le sole condizioni naturali accettabili sono il contatto o il distacco.
- Il telaio, mentre porta direttamente i carichi esterni, ne trasferisce una parte alla tamponatura. La rigidità laterale del sistema telaio-pannello dipende, in maniera considerevole, dal modo in cui il telaio trasmette i carichi al pannello. Contemporaneamente, il contributo del telaio alla rigidità dipende dall'influenza del tamponamento sul modo di deformarsi del telaio stesso.

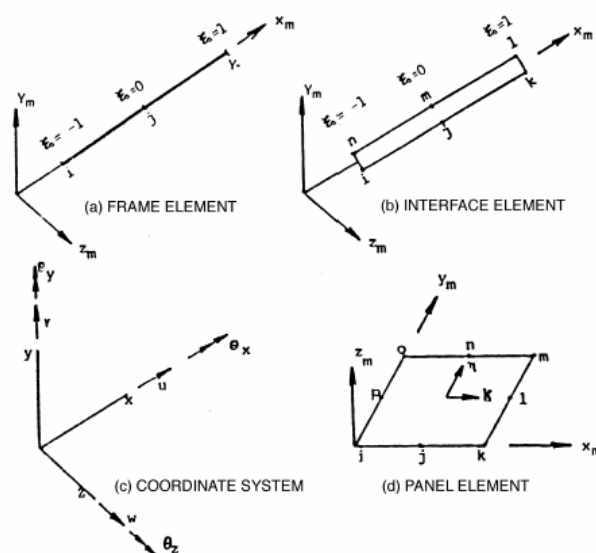


Figura 7.2. Elementi di collegamento per la schematizzazione dei giunti

Il pannello, modellato agli elementi finiti, si considera collegato al telaio soltanto nei due punti d'angolo, rappresentati dagli estremi della diagonale compressa (fig. 7.3).

Si calcolano le forze e gli spostamenti nodali e le tensioni nei punti di Gauss degli elementi e si verifica se i punti del modello del tamponamento si sovrappongono al telaio circostante. Quando i punti del pannello si sovrappongono al telaio, i punti vicini al precedente punto collegato, saranno collegati (fig. 7.4 b). Si controlla se le tensioni nei punti di contatto sono di trazione o di compressione, se di compressione la procedura si arresta, se, invece, di trazione, i punti verranno scollegati.

Una modellazione interessante è stata proposta da Papia [107 108], che calcola la rigidità del telaio tamponato, impiegando elementi di contorno per rappresentare il pannello di tamponatura. Lo scopo dell'analisi è sempre quello di determinare la larghezza effettiva del puntone equivalente, mettendo in relazione la rigidità del telaio tamponato con quella del telaio nudo. Su queste basi, il contributo di rigidità del puntone equivalente dovrà essere

data dalla differenza tra la rigidezza e la rigidezza del telaio nudo. Da qui si andrà poi a determinare il valore dell'ampiezza effettiva del puntone. Questi ultimi modelli saranno più avanti approfonditi in relazione alle analisi condotte per la determinazione delle dimensioni del puntone equivalente.

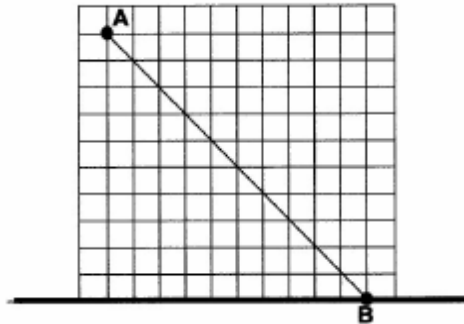


Figura 7.3. Semplificazione strutturale tamponatura

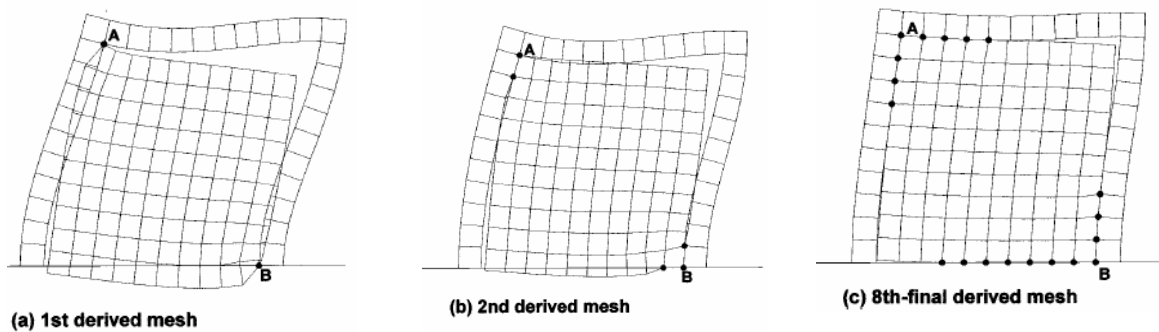


Figura 7.4. Collegamento tamponatura telaio

### 7.4.1. Costruzione del modello.

L'approccio più efficace nella rappresentazione del comportamento di un telaio tamponato soggetto ad azioni orizzontali è risultato quello di modellare il pannello di tamponamento con un puntone equivalente.

Lo spessore del puntone sarà assunto pari allo spessore del pannello, mentre la sua lunghezza sarà pari alla lunghezza della diagonale della maglia di telaio considerata. L'unica grandezza da valutare rimane la larghezza della sezione del puntone. A tal scopo, come già detto, sono stati affrontati diversi studi e formulate numerose ipotesi.

Per gli scopi di questo lavoro si è ritenuto che i modelli con le caratteristiche più soddisfacenti fossero quello sviluppato da Asteris[106], con il metodo dei punti di contatto, e quello di Papia[107 108], che prevede di modellare il pannello di tamponatura con l'impiego di elementi di contorno

Si passa quindi a descrivere più in dettaglio il modello sviluppato.

La prima osservazione da fare è che il modello si caratterizza essenzialmente per il fatto che il proporzionamento del puntone risulta dipendente, oltre che dalla rigidezza laterale del telaio non controventato, anche dalla rigidezza assiale dei suoi elementi (dei pilastri in particolare), chiamata inevitabilmente in causa dallo schema a "nodi fissi" che si realizza per la presenza del puntone stesso.

I risultati di indagini condotte su diversi telai, in acciaio e calcestruzzo, con l'impiego di pannelli di tamponamento di diversa composizione, hanno mostrato che, in tutti i casi, le

rigidezze flessionali delle travi della generica maglia del telaio hanno un'influenza trascurabile sulla rigidezza laterale complessiva del sistema telaio-pannello.

Questa osservazione permette di ricercare la larghezza della sezione del puntone equivalente facendo riferimento allo schema riportato in fig. 7.5 a), dove si considera un semplice portale tamponato, avente i ritti incastrati al piede ad una trave rigida di fondazione. L'azione sismica trasmessa dall'impalcato è rappresentata come una forza orizzontale uniformemente distribuita lungo l'asse baricentrico della trave di piano.

Nella fig. 7.5 b) è invece riportato il modello di calcolo semplificato che si intende utilizzare per valutare la risposta strutturale del sistema, tenendo conto che i due sottosistemi si separano in assenza di azioni mutue di compressione.

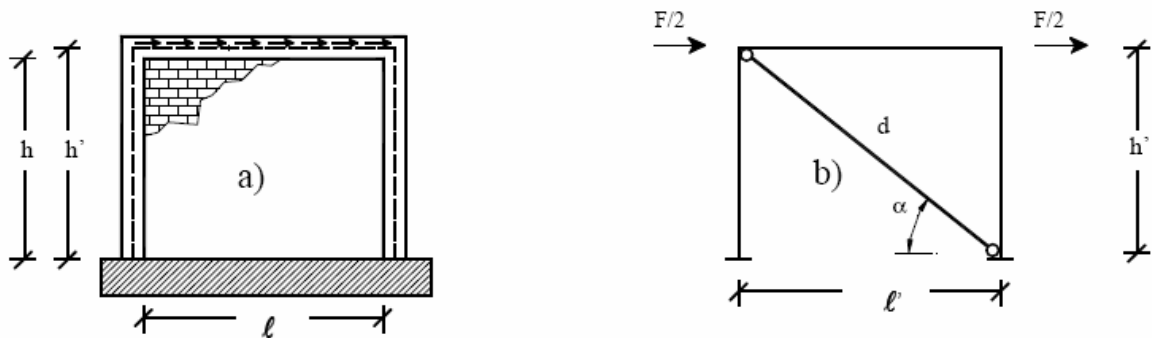


Figura 7.5. Modello puntone equivalente

Essendo nota la forza esterna, l'unica incognita nello schema proposto è, come detto, la larghezza da assegnare al puntone, per il quale si assumono lo stesso spessore e modulo elastico del pannello.

La rigidezza laterale del sistema rappresentato in fig. 7.5 b) può essere ottenuta con buona approssimazione sommando le rigidezze laterali degli schemi a) e b) di fig. 7.6:

la rigidezza dello schema a), che di seguito indicheremo con  $D_d$ , fornisce il contributo offerto dal puntone diagonale, che si considera dipendente dalla rigidezza assiale degli elementi del telaio, oltre che da quella del puntone stesso;

la rigidezza dello schema b), di seguito indicata con  $D_f$ , rappresenta il contributo di rigidezza del telaio considerato senza tamponamento.

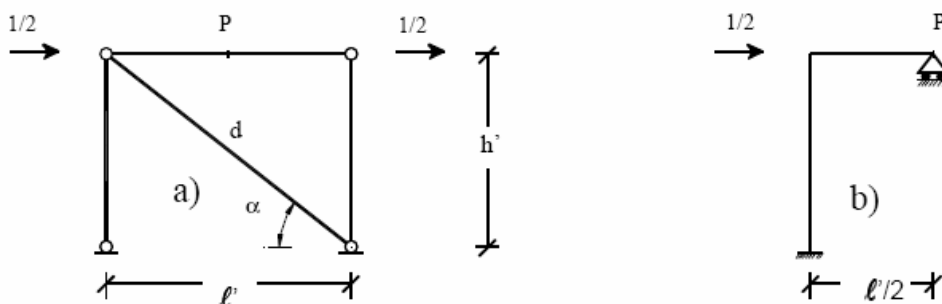


Figura 7.6. Schematizzazione del calcolo della rigidezza laterale

Includendo la deformabilità assiale della trave, la rigidezza del puntone  $D_d$  può essere calcolata dallo schema a) di fig. 7.6, valutando lo spostamento orizzontale del punto P, per la quale si ottiene:

$$\delta_{p,0} = \frac{1 + \frac{k_d}{k_c} \cdot \sin^2 \alpha}{k_d \cdot \cos^2 \alpha} + \frac{1}{4k_t} \quad (7.2)$$

In cui si ha:

$$k_d = \frac{E_d s w}{d}; k_c = \frac{E_f A_c}{h'}; k_t = \frac{E_f A_t}{l'} \quad (7.3)$$

La rigidezza laterale offerta dal puntone vale pertanto:

$$D_d = \frac{1}{\delta_{p,0}} = \frac{k_d \cdot \cos^2 \alpha}{1 + \frac{k_d}{k_c} \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \frac{k_d}{k_c} \cos^2 \alpha} \quad (7.4)$$

Lo schema b) di figura 7.6 fornisce, per la rigidezza laterale del telaio nudo:

$$D_f = 24 \frac{E_f I_c}{h'^3} \left( 1 - \frac{1.5}{3 \frac{I_t}{I_c} \frac{h'}{l'} + 2} \right) \quad (7.5)$$

Le espressioni (7.4) e (7.5) si prestano ad ovvie semplificazioni nel caso in cui la trave si supponga assialmente e/o flessionalmente indeformabile. In ogni caso non appare accettabile trascurare la rigidezza assiale dei pilastri nel calcolo di  $D_d$ , tenendo conto di tutti i possibili valori del rapporto  $k_d/k_c$ .

#### 7.4.2. Calcolo della sezione del puntone equivalente.

Se si indica con  $D_i$  la rigidezza laterale del telaio tamponato, valutata con il metodo “esatto”, cioè considerando il pannello come una lastra in stato piano di tensione e tenendo conto della presenza di sconessioni al contorno, nelle regioni lungo le quali non si esercitano azioni normali mutue di compressione, perché risulti efficace il modello proposto e rappresentato nella figura 2.1 b), si dovrà porre:

$$D_i = D_d + D_f \quad (7.6)$$

Per ogni schema considerato, assumendo noto il valore di  $D_i$ , calcolato tramite la procedura che verrà descritta in seguito, ed essendo note tutte le quantità a secondo membro della (7.5) che consentono quindi il calcolo di  $D_f$ , la (7.6) può essere risolta rispetto a  $D_d$ .

Tenendo conto delle (7.3) e (7.4), la larghezza della sezione del puntone equivalente, normalizzata rispetto alla lunghezza del puntone stesso, verrà valutata attraverso l'espressione:

$$\frac{w}{d} = \frac{1}{1 - \frac{D_d}{k_c} \left( \frac{h^2}{l^2} + \frac{1}{4} \frac{k_c}{k_t} \right)} \frac{D_d}{E_d s \cdot \cos^2 \alpha_1} \quad (7.7)$$

Rimane, a questo punto, da definire una procedura di risoluzione per determinare la soluzione “esatta” del sistema telaio-pannello, e quindi per calcolare il valore di  $D_d$ .

### 7.5. Calcolo della rigidità laterale.

La modellazione effettuata per il calcolo della rigidità laterale esatta del sistema telaio-pannello, prevede la discretizzazione dei due sottosistemi secondo quanto previsto nel metodo degli elementi finiti [109 110].

In particolare, gli elementi del telaio verranno modellati secondo lo schema di trave di Eulero-Bernoulli. Il sistema è discretizzato mediante l'impiego di elementi finiti monodimensionali, con interpolazione lineare degli spostamenti assiali ed interpolazione hermitiana per quel che riguarda gli spostamenti flessionali.

Per il pannello di tamponamento si adotta una modellazione secondo lo schema di lastra in stato piano di tensione, costituita da materiale elastico, omogeneo e isotropo. Considerando lo stato piano di tensione entra in gioco, oltre al modulo elastico del materiale, anche il coefficiente di Poisson  $\nu$ . La discretizzazione viene effettuata con l'utilizzo di elementi finiti bidimensionali. Si impiega un elemento master di forma rettangolare, a quattro nodi, sul quale si ha quindi un'interpolazione bilineare degli spostamenti.

Su queste basi è stato implementato un codice di calcolo in MATLAB, adottando una mesh opportunamente fitta, al fine di minimizzare gli inevitabili errori di congruenza che si manifestano all'interfaccia tra telaio e pannello.

L'analisi è stata condotta poi su tutte le tipologie di telaio presenti nella successiva sperimentazione. In particolare si è considerato il semplice schema di portale, caricato orizzontalmente con un sistema di forze con risultante pari all'unità, nel quale sono state fatte opportunamente variare le dimensioni degli elementi (fig. 7.7).

Il procedimento di calcolo è stato poi condotto secondo quanto proposto in [106]:

- al primo passo sono stati considerati collegati al telaio soltanto i due nodi d'angolo del pannello, corrispondenti ai due estremi della diagonale compressa;
- si controlla se i punti appartenenti al tamponamento si sovrappongono al circostante telaio;
- se la situazione descritta al passo precedente risulta verificata, i punti vicini al precedente punto collegato verranno a loro volta collegati e si ripete l'analisi;
- se nessun punto del pannello risulta sovrapposto al telaio, si passa a controllare lo stato tensionale nei punti collegati. Se la tensione risulta di compressione, l'analisi si considera terminata; se la tensione risulta invece di trazione, il corrispondente punto viene scollegato e si ripete l'analisi.

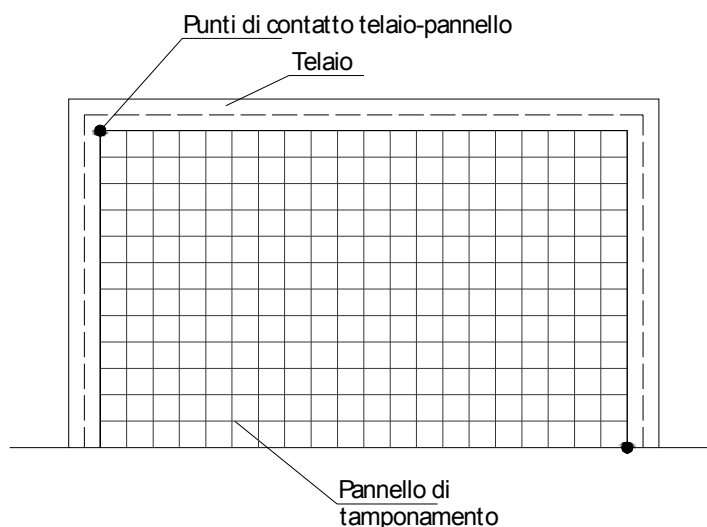


Figura 7.7. Modellazione telaio tamponato

Terminata l'analisi e noto il valore dello spostamento orizzontale del telaio, si è in grado di calcolare il valore della rigidità esatta del telaio tamponato e quindi la dimensione del puntone equivalente mediante la relazione (7.7).

L'analisi è stata eseguita su sei diversi modelli di portale, nei quali, come detto, variano le dimensioni degli elementi.

Di seguito si riportano le figure che mostrano l'evolversi della procedura, con il progressivo collegamento dei punti del pannello che si sovrappongono al telaio.

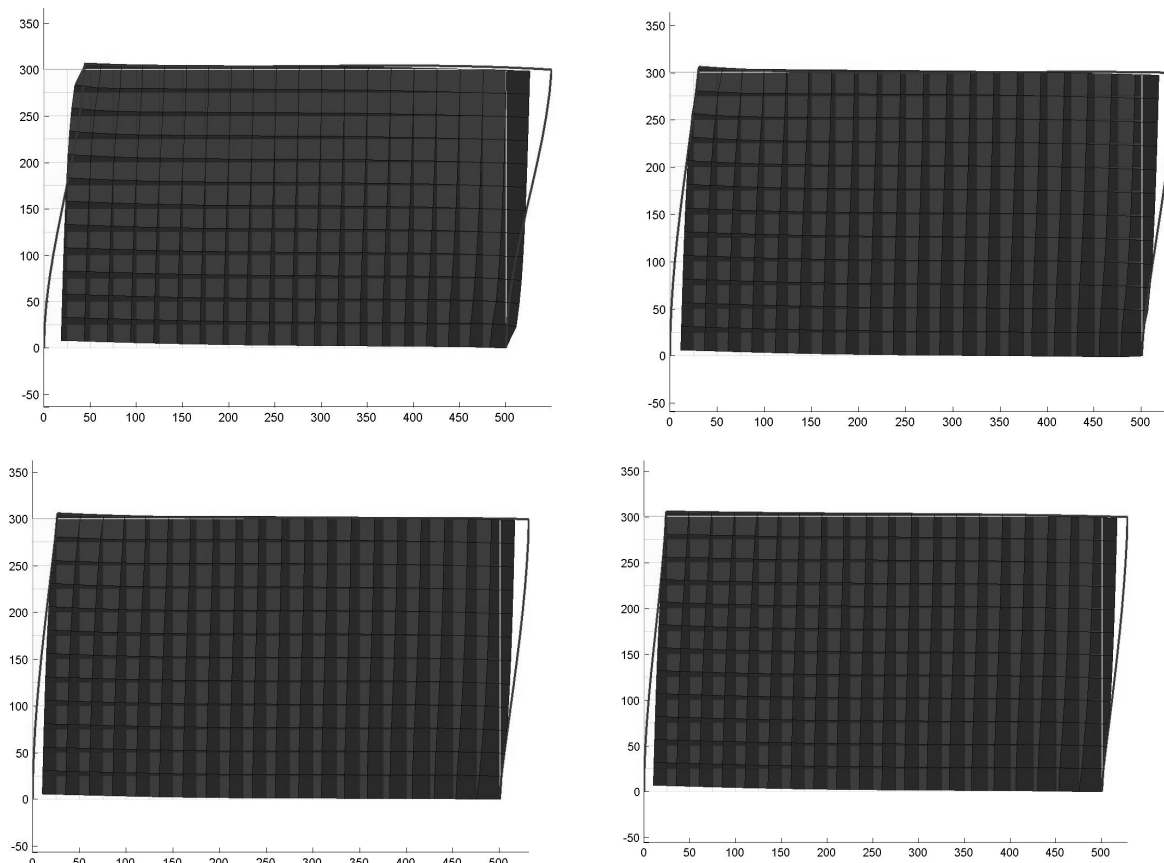


Figura 7.8. Deformata telaio tamponato in funzione delle connessioni

### 7.5.1. Il problema delle aperture nel pannello.

Altro nodo fondamentale da sciogliere riguarda il comportamento del telaio tamponato quando sia presente un'apertura all'interno del pannello di tamponamento.

Come detto in precedenza, la presenza di aperture per la realizzazione di vani porta o finestra all'interno del pannello di tamponamento, può determinare significative perdite di rigidità locale, con conseguente sovraccarico dei pilastri del piano considerato e variazioni dell'eccentricità strutturale di piano, relativamente all'edificio nel suo complesso.

È immediato collegare la perdita di rigidità del pannello alle dimensioni del vano in esso presente, ed è ragionevole supporre che ad una riduzione della rigidità del pannello corrisponda una conseguente diminuzione della larghezza della sezione del puntone equivalente.

La seconda parte di questa sperimentazione è volta ad applicare il modello sviluppato al caso di telai tamponati con apertura nel pannello.

I risultati ottenuti hanno mostrato tutta la validità delle ipotesi di partenza, trovando in tutti i casi maggiori valori dello spostamento orizzontale e, di conseguenza, minori valori della rigidità e della larghezza della sezione trasversale del puntone equivalente.

L'analisi è stata condotta sugli stessi modelli esaminati nel precedente caso. Di seguito si riporta, a titolo esemplificativo, l'evolversi dell'analisi su uno dei sette schemi oggetto di indagine.

Si riporta inoltre la tabella con i risultati di tutte le analisi condotte (tab. 7.1).

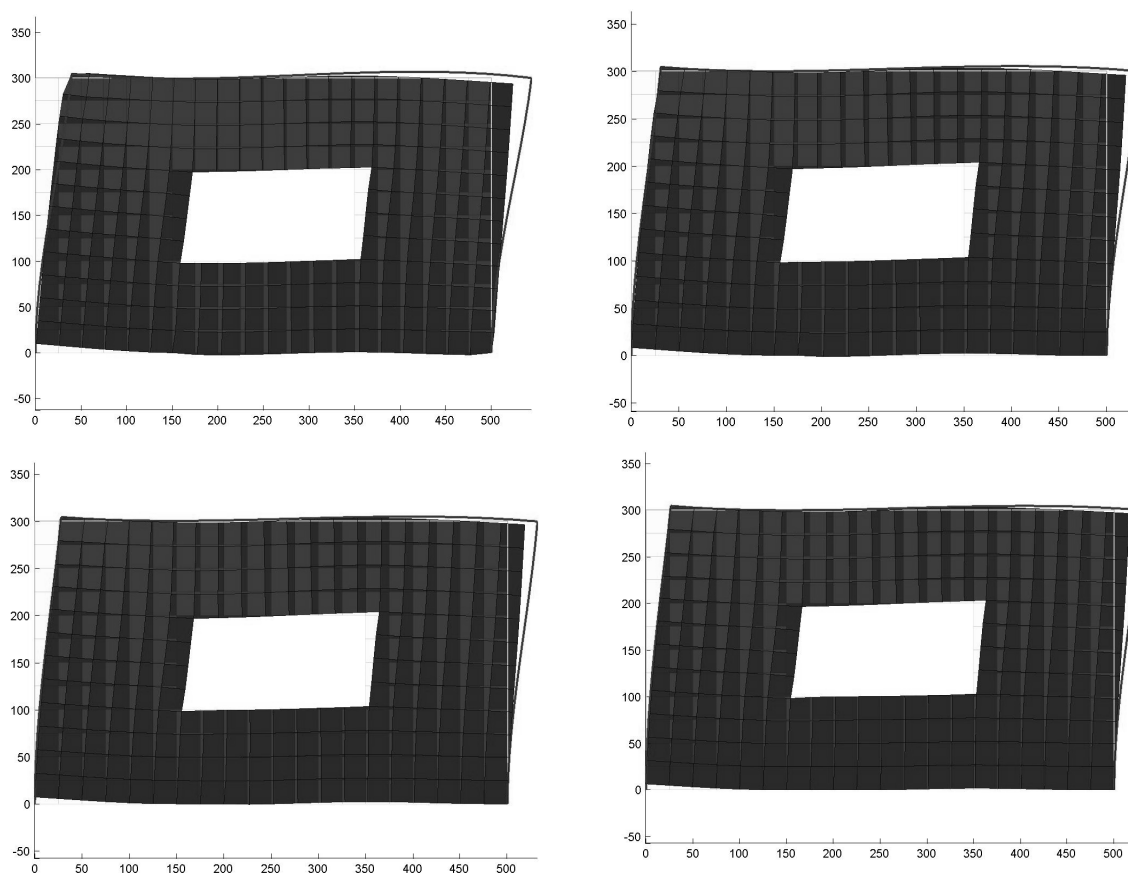


Figura 7.9. Deformata telaio tamponato forato nelle varie iterazioni

Telaio	Dimensioni puntone equivalente			
	Dim. Trave (cm)	Dim. Pilastro (cm)	Tamp. Piena (cm)	Con Apertura (cm)
1	30x50	30x30	181.0	126.7
2	30x50	30x40	178.9	123.4
3	30x50	30x50	194.4	132.3
4	30x50	30x60	164.8	111.1
5	30x50	30x70	236.7	154.6
6	30x55	40x70	272.9	154.9

**Tabella 7.1.** Dimensioni elementi strutturali, e puntone equivalente.

## 7.6 Sperimentazione: identificazione in telai piani tamponati.

Le precedenti sperimentazioni sono state svolte nell'ambito dell'identificazione del danno in telai piani, senza tenere in conto l'influenza che parti non strutturali, come i pannelli di tamponamento, possono avere nella determinazione delle caratteristiche modali della struttura.

Come visto, è ormai assodato che il contributo della tamponatura giochi un ruolo fondamentale nel comportamento della struttura sottoposta ad azioni dinamiche, sia per quanto riguarda le caratteristiche di resistenza che per quelle di rigidezza.

Ne consegue che anche l'acquisizione delle caratteristiche modali della struttura verrà influenzata dalla presenza di parti non strutturali.

Il lavoro svolto nella presente tesi è orientato a studiare se e come l'identificazione del danno in telai piani è influenzata dalle modifiche, dovute alla presenza di pannelli di tamponamento, nelle caratteristiche modali.

Nei precedenti lavori sono stati analizzati diversi metodi di identificazione del danno in telai piani, combinando vari metodi di ottimizzazione con altrettanti metodi di confronto delle caratteristiche modali.

I metodi di ottimizzazione testati sono i seguenti:

- Metodo del gradiente;
- Metodo della metrica variabile;
- Metodo degli algoritmi genetici.

I criteri di confronto delle caratteristiche modali testati sono invece:

- Criteri di confronto delle frequenze (valore assoluto delle frequenze, quadrato delle frequenze);
- Criteri di confronto delle forme modali (M.A.C., C.O.M.A.C., ortogonalità delle forme modali);
- Criteri basati sulla valutazione dell'energia di deformazione.

Il processo di identificazione del danno avviene dalla combinazione di un metodo di ottimizzazione con uno o più metodi di confronto delle caratteristiche modali. In pratica, mediante i criteri di confronto delle caratteristiche modali si definisce una funzione di errore, ottenuta dalla differenza tra le caratteristiche modali misurate sperimentalmente e quelle del modello. La funzione di errore così ottenuta verrà minimizzata con uno dei metodi di ottimizzazione. Il punto di minimo della funzione di errore dovrebbe individuare il danno strutturale.

Uno dei passi principali nella definizione del modello pseudo-sperimentale è la scelta dei gradi di libertà da considerare nel modello stesso. Consapevoli dell'impossibilità di poter eccitare la struttura secondo tutti i suoi gradi di libertà e data la necessità di posizionare i punti



di misura in modo da ottenere dati sperimentali significativi, tale scelta riveste un'importanza fondamentale.

L'idea è quella di considerare come principali quei gradi di libertà rispetto ai quali le forze d'inerzia sono grandi rispetto alle forze elastiche e secondari quelli per cui avviene il contrario. Tale criterio va sotto il nome di riduzione di Guyan.

La riduzione di Guyan è un processo che permette di ridurre i gradi di libertà principali in gradi di libertà secondari.

Per lo scopo di questo lavoro, la riduzione di Guyan è stata implementata in modo da considerare come principali i gradi di libertà corrispondenti alle traslazioni di piano, che generalmente risultano essere i più significativi e più facilmente accessibili.

Le analisi precedenti [111] sono state volte a testare l'efficacia dei vari metodi di ottimizzazione combinati opportunamente con uno o più criteri di confronto delle caratteristiche modali.

Dalle prove è emerso che i risultati migliori sono forniti dal metodo della metrica variabile, associato alla combinazione dei criteri di confronto del quadrato delle frequenze e del M.A.C. per determinare la funzione d'errore.

Si parte da questa base per condurre le successive analisi atte a verificare l'influenza della tamponatura nel comportamento dei telai piani. I pannelli di tamponamento, come visto in precedenza, sono stati rappresentati secondo il modello del puntone equivalente ed opportunamente implementati nei codici di calcolo per l'identificazione strutturale.

Le prove effettuate sono state suddivise in due serie con le seguenti caratteristiche:

- Set di prove "A": a tutti gli elementi di uno stesso piano viene associato il medesimo valore del modulo elastico, denominato  $E_{piano}$ . Il problema presenta quindi una variabile per piano.
- Set di prove "B": a ciascun piano viene assegnato un diverso valore ai moduli elastici di travi di piano e pilastri, rispettivamente  $E_t$  ed  $E_p$ . Il problema presenta due variabili per piano.

Gli schemi di telai piani sono gli stessi del capitolo precedente (figg. 6.9-6.15).

Di seguito si riportano i risultati ottenuti dalle prove, suddivisi secondo le due tipologie riportate sopra.

### 7.6.1. Set di prove "A".

Come accennato in precedenza, in questo primo set di prove si considera un'unica variabile per ogni piano. Tale variabile è rappresentata dal modulo elastico di pilastri e travi, considerato appunto uguale per tutti gli elementi di uno stesso piano.

È stato quindi costruito un modello pseudo-sperimentale di ogni telaio analizzato, nel quale i valori delle variabili di piano,  $E_{piano}$ , sono stati generati in maniera random. Tale modello è stato sottoposto ad analisi modale teorica, allo scopo di ricavarne i parametri modali da utilizzare nel processo di identificazione del danno.

Sembrerà paradossale il fatto di conoscere già in partenza i valori di tutte le variabili di piano che, in teoria, dovrebbero essere ricavate dall'identificazione. In realtà questo fatto costituisce un ottimo controllo del funzionamento e dell'efficacia del metodo, avendo un diretto riscontro tra i risultati ottenuti e quelli attesi.

La sperimentazione è stata condotta generando la funzione di errore mediante l'uso del criterio del quadrato delle frequenze, per confrontare appunto i valori delle frequenze ottenuti dai due modelli, e del M.A.C. per il confronto delle forme modali. Tale funzione è stata poi minimizzata applicando il metodo della metrica variabile.

La matrice del M.A.C. è stata costruita facendo riferimento solo alle forme modali simili, ottenendo in questo modo una matrice diagonale.

Allo scopo di studiare l'influenza dei pannelli di tamponamento nel processo di identificazione del danno, sono stati considerati, nell'analisi, i seguenti tre casi:

- Il caso di telaio nudo;
- Il caso di telaio tamponato, con tamponatura piena;
- Il caso di telaio tamponato, con la presenza di un'apertura nel pannello.

Come già detto in precedenza, il pannello di tamponamento è stato modellato mediante l'inserimento di un puntone equivalente nella maglia del telaio.

La modellazione ad impalcati rigidi per i telai e l'ipotesi che il puntone equivalente sia costituito da materiale elastico, omogeneo ed isotropo, hanno consentito di rendere i risultati indipendenti dalla direzione del puntone all'interno della maglia, rispetto alla direzione dello spostamento di piano.

Di seguito si riportano le tabelle con i risultati ottenuti per i diversi telai analizzati. In ogni tabella sarà indicato il tipo di telaio analizzato ed i risultati ottenuti per i tre casi descritti sopra. Vengono inoltre riportati i valori della variabile di piano del modello pseudo-sperimentale, utilizzati come valori di confronto.

Al fine di rendere più evidente il confronto dei valori ottenuti nei diversi casi, si riportano di seguito gli istogrammi con i raffronti delle variabili di piano.

### 7.6.1.1. Istogrammi.

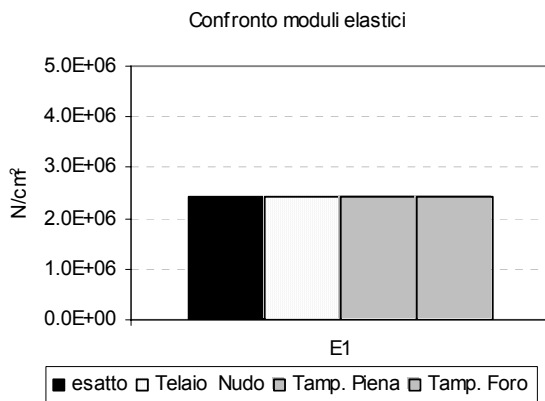


Figura 7.10. Telaio 1, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

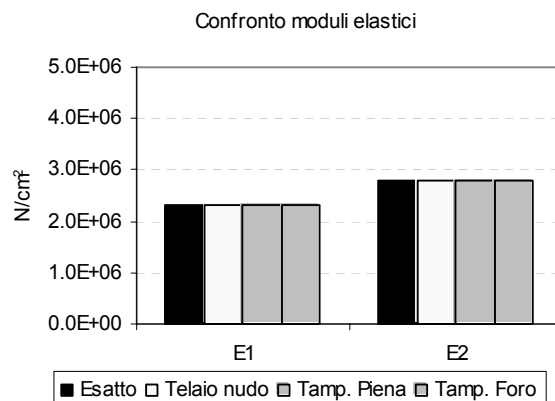


Figura 7.11. Telaio 2, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

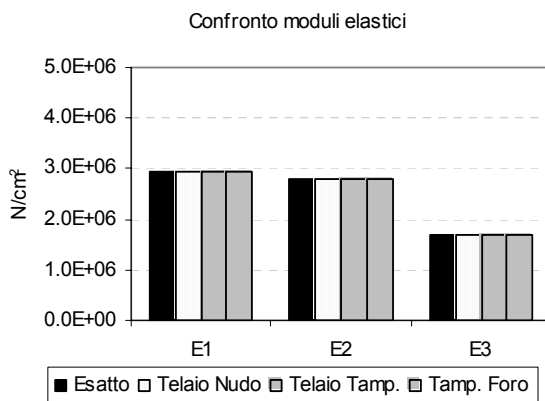


Figura 7.12. Telaio 3, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

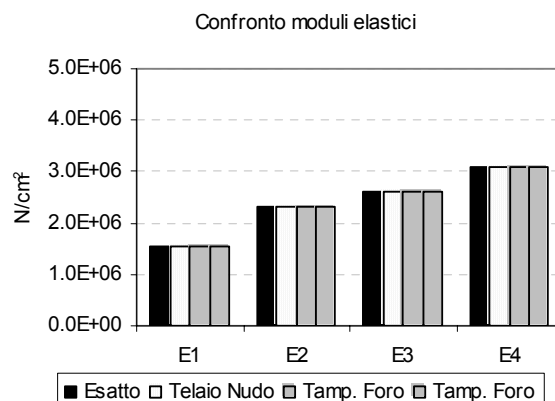


Figura 7.13. Telaio 4, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

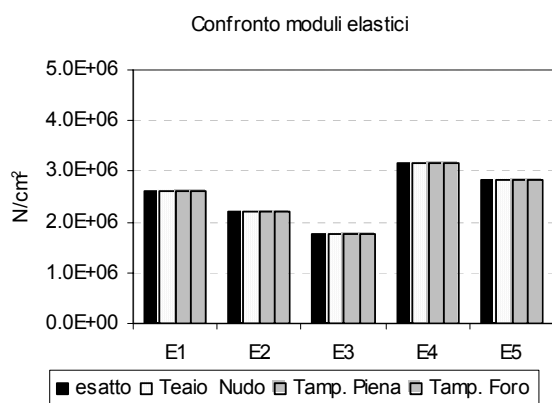


Figura 7.14. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

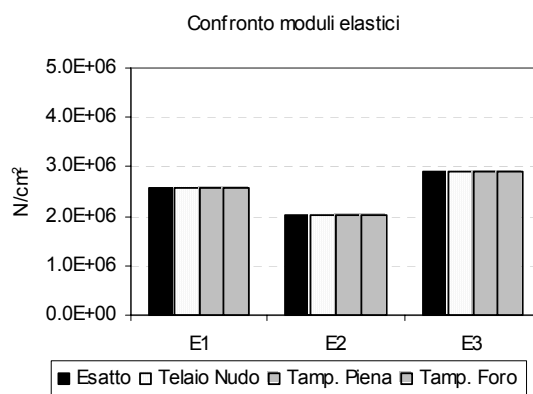


Figura 7.15. Telaio 3.2, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

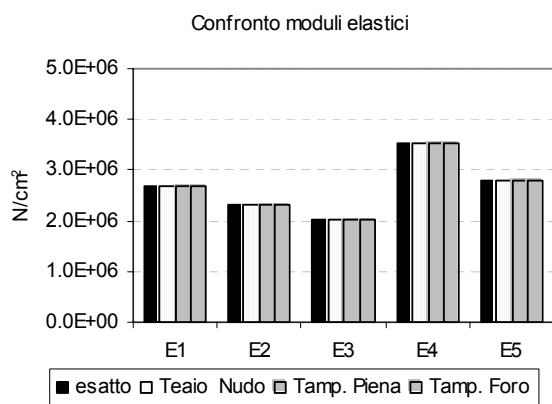


Figura 7.16. Telaio 5.2, Set A. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

### 7.6.2. Set di prove “B”.

Gli stessi criteri utilizzati nel caso di una variabile per piano, sono ora impiegati nel secondo set di prove, che prevede di considerare due variabili per piano. Le strutture analizzate sono le stesse considerate nel set di prove “A”, salvo che per il fatto di considerare due valori distinti per il modulo elastico di pilastri e travi di piano. Le variabili saranno, quindi, il modulo elastico dei pilastri  $E_p$ , ed il modulo elastico delle travi di piano  $E_t$ . È interessante, in questo secondo set di prove, osservare in che modo l’aumento del numero di variabili influenza i risultati dell’identificazione. Si riportano pertanto, come nel caso precedente, le tabelle e gli istogrammi di confronto dei risultati ottenuti.

### 7.6.2.1. Istogrammi.

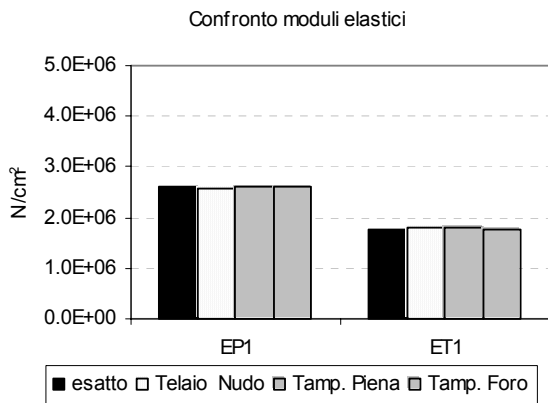


Figura 7.17. Telaio 1, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

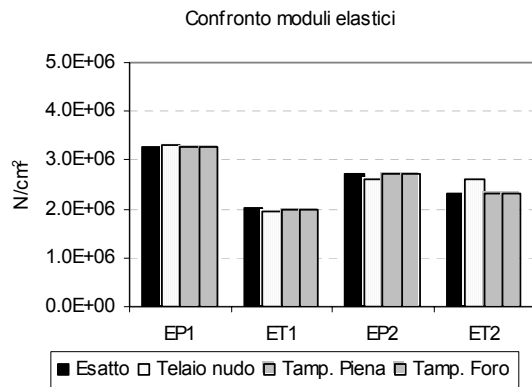


Figura 7.18. Telaio 2, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

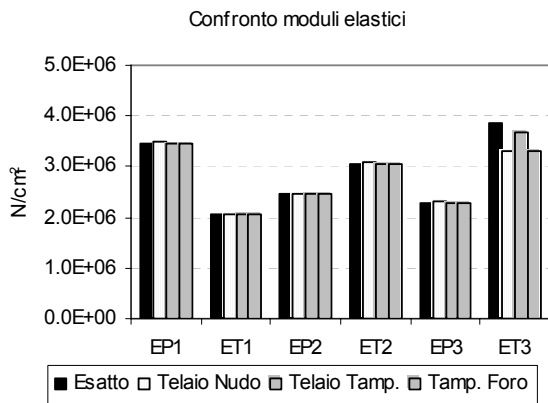


Figura 7.19. Telaio 3, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

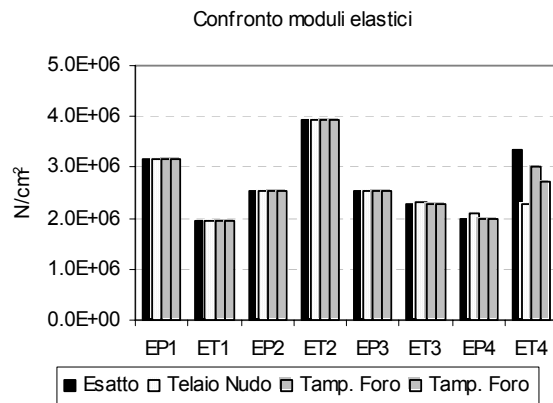


Figura 7.20. Telaio 4, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

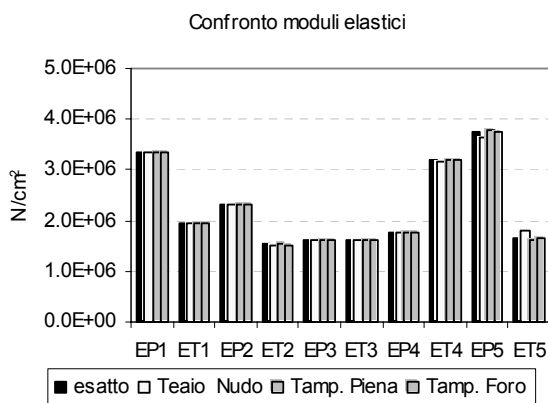


Figura 7.21. Telaio 5, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

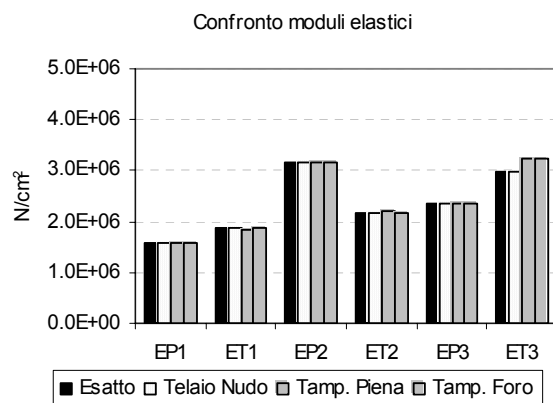
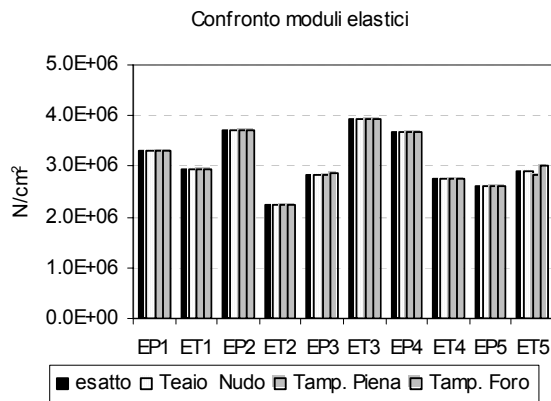


Figura 7.22. Telaio 3.2, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno



**Figura 7.23.** Telaio 5.2, Set B. Identificazione telaio al variare delle condizioni al contorno

### 7.6.3. Commento risultati.

Alla luce delle prove effettuate possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- **Set di prove “A”:** per ogni tipologia di prove, il metodo utilizzato di combinare quadrato delle frequenze e M.A.C. con la metrica variabile ha fornito risultati soddisfacenti. In tutti i casi analizzati si è trovato un risultato buono, con livelli di errore che si mantengono bassi (dell’ordine di 9-10 %).  
In un primo tempo le prove sono state effettuate considerando la matrice del M.A.C. completa, assemblata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{se } i \neq j &\Rightarrow \text{err} = \sum_{i=1}^L (|0 - \text{M.A.C.}(i, j)|) \\ \text{se } i = j &\Rightarrow \text{err} = \sum_{i=1}^L (|1 - \text{M.A.C.}(i, j)|) \end{aligned} \quad (7.8)$$

In questo caso l’analisi fornisce valori della variabile di piano che risultano accettabili fino al telaio a tre piani, ma che, per i telai a quattro e cinque piani, non trova una soluzione coerente, specie nei valori delle variabili corrispondenti agli ultimi due piani, che in alcuni casi si spingono al limite superiore del campo di variazione della variabile. Si riscontra inoltre che l’errore si mantiene molto alto (dell’ordine di 10-20%), sempre per quel che riguarda i telai a quattro e cinque piani. Lo stesso riscontro si ha nei telai 3.2 e 5.2.

In seguito si è pensato di disporre i puntoni secondo lo schema di croce di Sant’Andrea dimezzandone la rigidità.

In questo caso i valori delle variabili hanno subito un riallineamento, anche se l’ordine di grandezza dell’errore è rimasto invariato. Per i telai fino a tre piani, per i quali prima si sono trovati risultati buoni, si nota, con questo secondo schema, un incremento dell’errore non indifferente ed un maggiore scostamento dai valori attesi, che per il caso precedente risultava irrisorio.

Si è quindi operata la scelta di ridurre, nell’ambito del M.A.C., i termini di confronto alle sole forme modali simili, andando così ad ottenere una matrice di M.A.C. diagonale e migliorando sensibilmente l’efficacia del metodo.

- **Set di prove “B”:** in questo caso è stato utilizzato direttamente il criterio del M.A.C. modificato. Per quanto riguarda i telai ad una sola campata, si sono ottenuti buoni risultati, con livelli di errore che rimangono bassi. Come per il caso precedente,

l'aumentare del numero di variabili in rapporto al numero di piani provoca, nei piani superiori, scostamenti anche sensibili dei valori ottenuti rispetto a quelli attesi. Questa tendenza si nota in maniera più spiccata nel caso di telai nudi, mentre diminuisce con la presenza di tamponature fino quasi a sparire nel caso di telai tamponati con pannello pieno.

Il fatto di considerare la presenza di una tamponatura sufficientemente rigida contribuisce quindi a stabilizzare il metodo.

La tendenza va via via scemando con il diminuire della rigidità del puntone equivalente, dovuta alla presenza di aperture, fino a sparire nel caso di telaio nudo.

Da questo comportamento si può ipotizzare come l'influenza dei tamponamenti dipenda anche dal modulo elastico del materiale di cui sono costituiti e quindi dal maggiore o minore contributo alla rigidità laterale complessiva del sistema.

Per contro c'è da dire che nell'analisi dei telai a due campate questa tendenza non si è verificata, anche se si sono ottenuti in tutti i casi risultati buoni con livelli di errore bassi.

Inoltre, in tutto il set di prove, si è riscontrata la non univocità della soluzione, ottenendo valori delle variabili congruenti con le caratteristiche modali del sistema, ma sensibilmente diversi dai valori attesi.

## **7.7. Influenza dei modi superiori sull'accuratezza della soluzione.**

È un fatto assodato che si possa descrivere la dinamica di una struttura considerando soltanto i primi modi di vibrazione e le rispettive frequenze. Con l'aumento del numero delle variabili, però, si trascurerebbero informazioni sull'effettivo comportamento dinamico della struttura, tali da influire sull'accuratezza della soluzione cercata e da impedire di cogliere comportamenti, a volte molto importanti a livello locale, che non possono essere descritti con le sole informazioni fornite dai primi modi di vibrazione.

L'accuratezza della soluzione dipende, dunque, dal numero di parametri modali considerati nell'analisi.

Può costituire, quindi, un grave errore trascurare i modi superiori in un'analisi della struttura, specie nell'impiego di metodi, come quelli per l'identificazione strutturale, che risultano avere una forte sensibilità rispetto ai dati in input.

Per tutti questi motivi si è deciso di analizzare l'influenza dei modi superiori nell'accuratezza della soluzione fornita dai metodi utilizzati nella presente tesi.

È stato scelto il telaio a cinque piani come base per i nuovi test, considerando i tre casi di telaio nudo, telaio tamponato con pannello di tamponatura pieno e telaio tamponato, con la presenza di aperture nel pannello.

Naturalmente l'analisi è stata condotta per il caso di una variabile per piano e per il caso di due variabili per piano.

Una volta ottenuti i valori delle diverse variabili, è stato calcolato l'errore medio su ogni variabile, riferendosi al valore "esatto" assegnato al modello pseudo-sperimentale.

7.7.1. Caso di una variabile per piano.

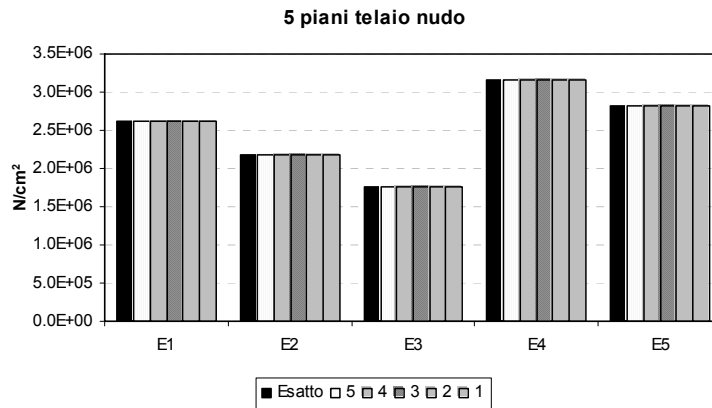


Figura 7.24. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio al variare del numero di informazioni modali

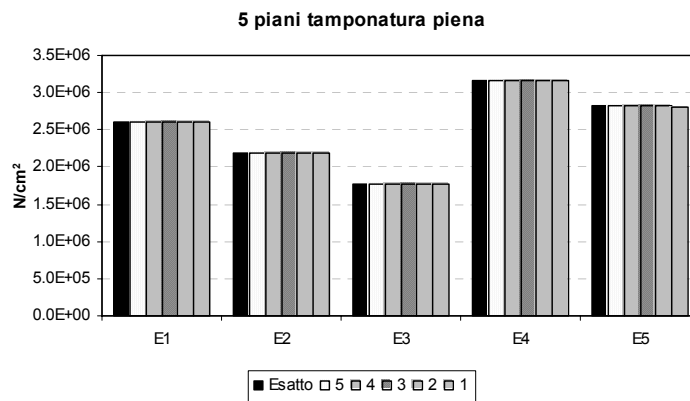


Figura 7.25. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio con tamponatura piena al variare del numero di informazioni modali

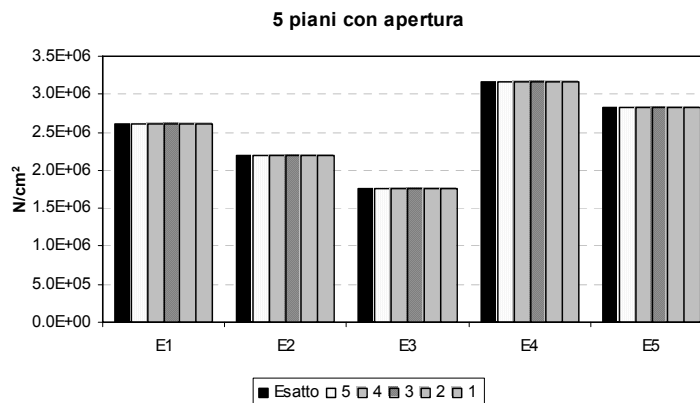


Figura 7.26. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio con tamponatura forata al variare del numero di informazioni modali

Dall'analisi degli istogrammi di confronto delle variabili, non è immediato cogliere l'influenza dei modi superiori sull'accuratezza della soluzione. Si propone, di seguito, il confronto dell'errore medio

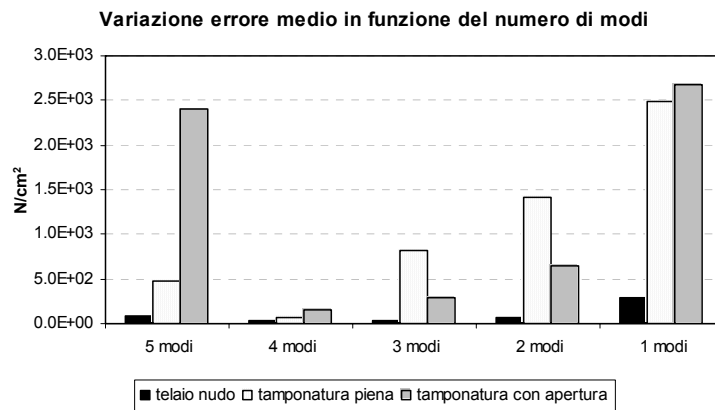


Figura 7.27. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio con tamponatura forata al variare del numero di informazioni modali e al variare delle condizioni al contorno.

### 7.7.2. Caso di due variabili per piano.

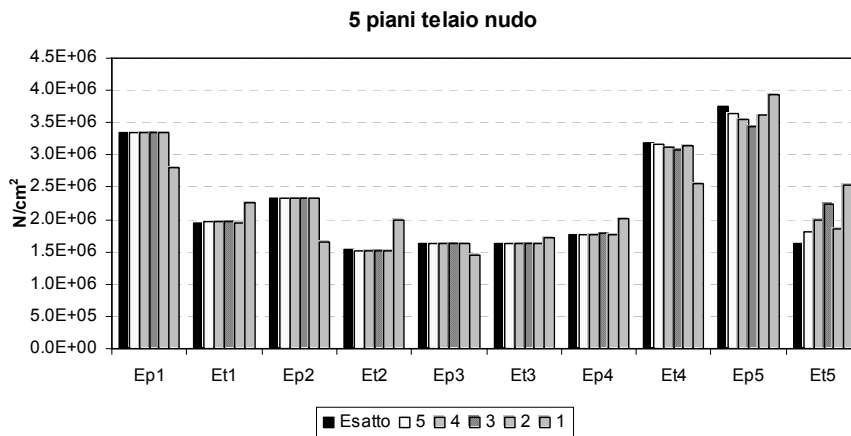


Figura 7.28. Telaio 5, Set B. Identificazione telaio al variare del numero di informazioni modali

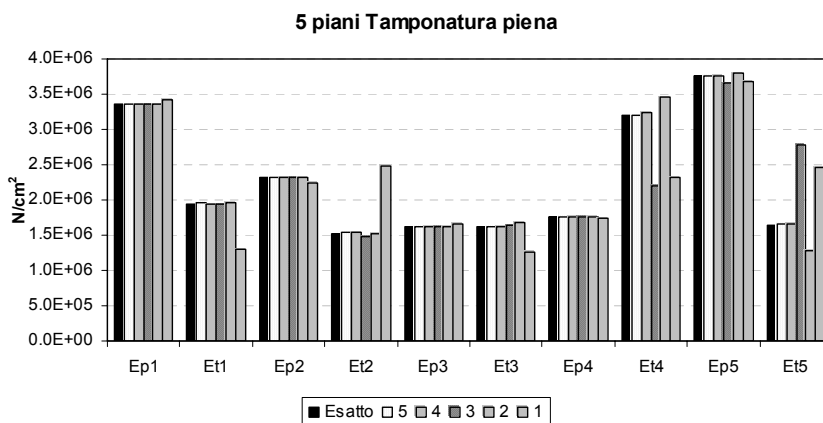
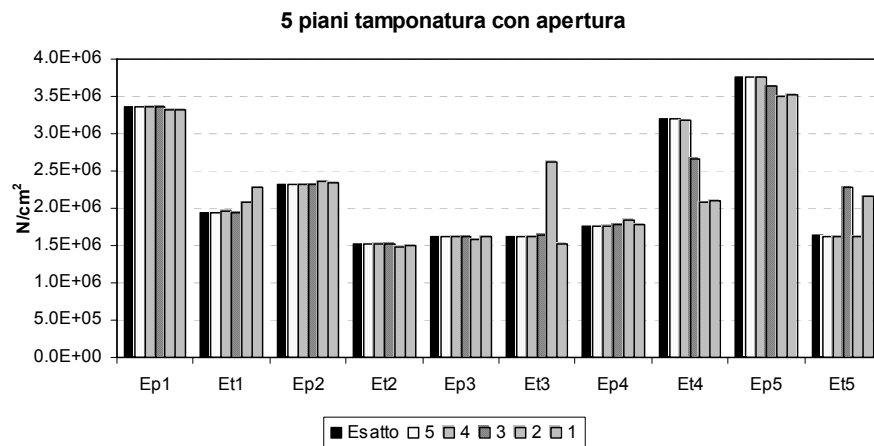


Figura 7.29. Telaio 5, Set B. Identificazione telaio con tamponatura piena al variare del numero di informazioni modali





**Figura 7.30.** Telaio 5, Set B. Identificazione telaio con tamponatura forata al variare del numero di informazioni modali

Anche in questo caso si riportano gli istogrammi di confronto dell'errore medio tra soluzione e risultati per ogni prova

### 7.7.3. Commento risultati.

#### Una variabile per piano.

Osservando i grafici di raffronto dei moduli elastici, si può notare come, in questo caso, già con il primo modo di vibrazione si ottengano buoni risultati per tutti e tre i casi analizzati. Come ci si aspettava, dal raffronto degli errori medi come degli errori percentuali, si nota come l'errore vada a decrescere man mano che si considerano i modi di vibrazione più alti. L'errore si mantiene comunque inferiore allo 0,1%, attingendo il suo massimo valore nel caso di telaio tamponato con apertura nel pannello, quando si considera solo il primo modo di vibrazione.

#### Due variabili per piano.

In questo caso, si può notare come l'aumento delle variabili in gioco renda il metodo molto più sensibile all'influenza dei modi superiori.

Si ha infatti un deciso incremento dell'errore rispetto al caso precedente.

Le maggiori variazioni nei valori delle variabili si hanno nei pilastri dell'ultimo piano e praticamente in tutte le travi.

Nel caso di telai tamponati si nota uno scostamento minore dei risultati ottenuti considerando soltanto l'influenza del primo modo di vibrazione, in corrispondenza dei pilastri dei piani inferiori. Computando però l'errore medio, si nota come questo sia più basso nel caso di telaio nudo.

Osservando i grafici dell'errore si nota poi come, in corrispondenza dei modi intermedi, questo subisca una leggera inflessione verso valori più alti, fatto che può imputarsi alla perdita dell'unicità della soluzione riscontrata nel set di prove "B".

L'errore percentuale si mantiene comunque basso. Il valore massimo è di poco superiore al 2,5% e si ha, come nel caso precedente, per il telaio tamponato con apertura, considerando l'influenza soltanto del primo modo di vibrazione.

## 7.8. Simulazione dell'errore sperimentale.

Il fatto di definire a priori i valori delle variabili nel modello pseudo-sperimentale e di ricavare, da questo, i parametri modali secondo un procedimento analitico, fa sì che l'efficacia del metodo non possa essere testata in maniera completa.

I dati acquisiti sperimentalmente sono, infatti, inevitabilmente affetti da errori di misurazione. Le fonti disponibili in letteratura concordano nel fissare il range entro cui varia l'errore di misurazione intorno al 5%.

Per tale motivo, il metodo di identificazione fin qui testato, è stato ulteriormente messo alla prova, introducendo nei dati pseudo-sperimentali un errore uniforme, generato in modo random all'interno del range di cui sopra.

Il caso di telaio nudo è già stato analizzato in un precedente lavoro. Le prove sono state condotte sul Telaio 4, analizzato sia per il caso di una variabile per piano che nel caso di due variabili per piano.

Nel primo caso (una variabile per piano) si è visto che l'errore oscilla tra lo 0% e l'8%.

Nel secondo caso (due variabili per piano) l'errore si mantiene intorno al 13% per i primi tre piani e per la variabile dei pilastri del quarto piano. Per la trave, invece, l'errore tocca punte del 40%.

In questa sede è stato analizzato il Telaio 5, ripetendo l'analisi con dieci diverse distribuzioni d'errore, sia per il caso di una variabile per piano che per il caso di due variabili per piano. Al caso di telaio nudo sono stati affiancati i due casi di telaio tamponato, con pannello pieno e con la presenza di apertura nel pannello.

Di seguito verranno riportati i risultati ottenuti dall'analisi.

### 7.8.1. Una variabile per piano. SET A

- Telaio nudo

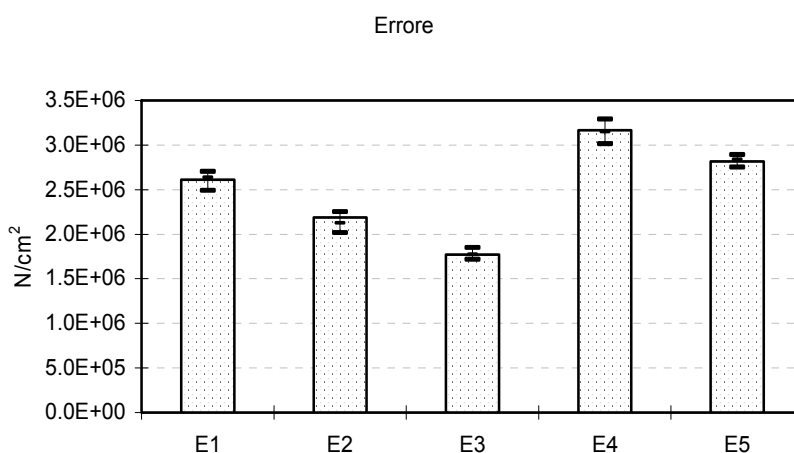
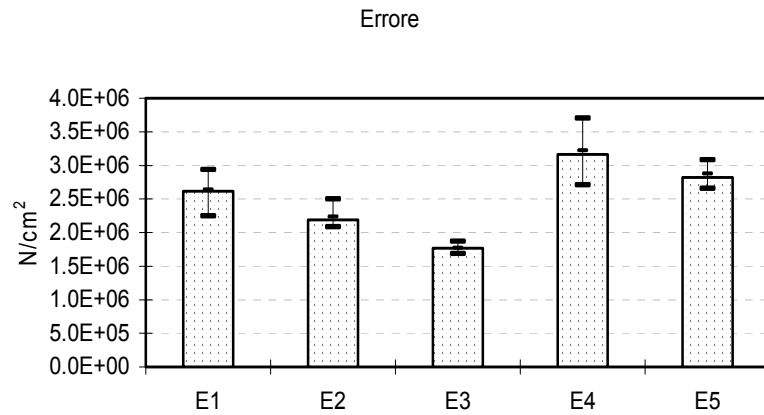


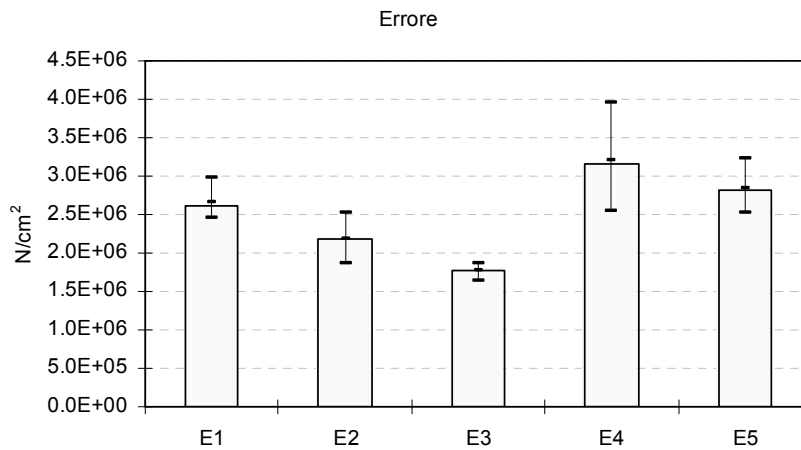
Figura 7.31. Telaio 5, Set A. Identificazione telaio in funzione dell'errore sperimentale

- Telaio con pannello di tamponatura pieno:



**Figura 7.32.** Telaio 5, Set A. Identificazione telaio con tamponatura piena in funzione dell'errore sperimentale

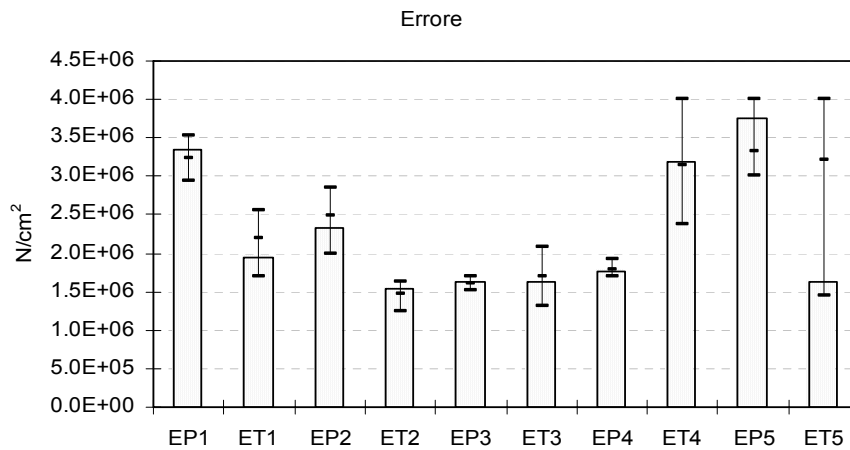
- Telaio tamponato con apertura nel pannello:



**Figura 7.33.** Telaio 5, Set A. Identificazione telaio con tamponatura forata in funzione dell'errore sperimentale

## 7.8.2. Due variabili per piano. SET B

- Telaio nudo:



**Figura 7.34.** Telaio 5, Set B. Identificazione telaio in funzione dell'errore sperimentale

- Telaio con pannello di tamponatura pieno:

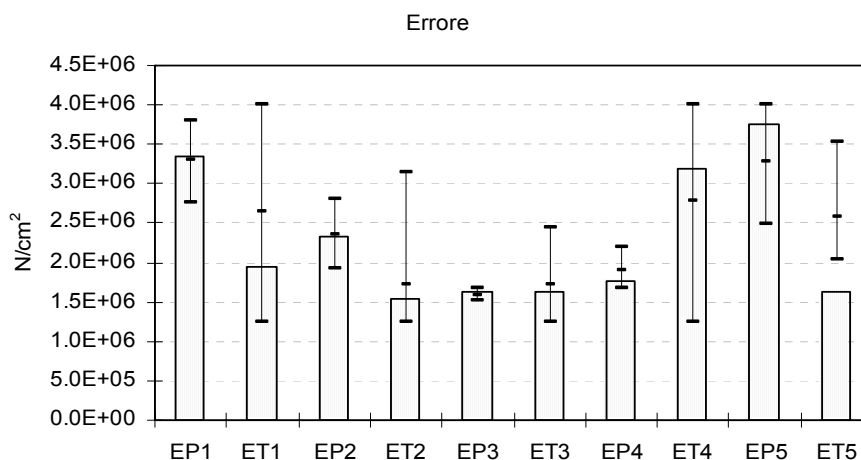


Figura 7.35. Telaio 5, Set B. Identificazione telaio con tamponatura piena in funzione dell'errore sperimentale

- Telaio tamponato con apertura nel pannello.

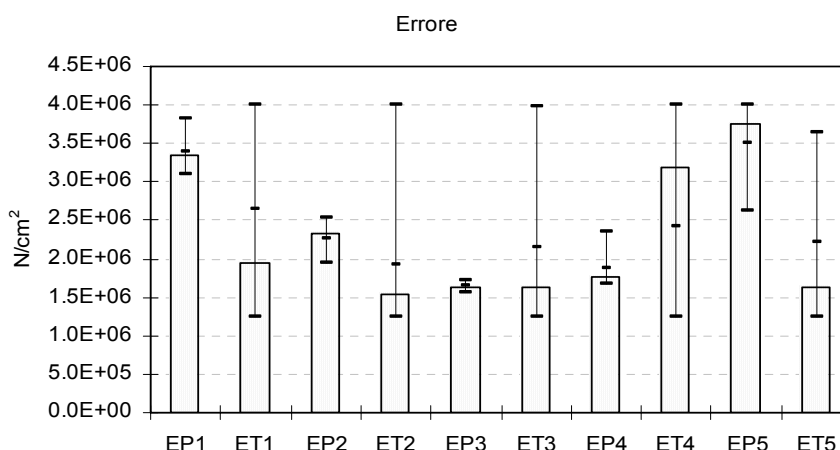


Figura 7.36. Telaio 5, Set B. Identificazione telaio con tamponatura forata in funzione dell'errore sperimentale

Dai risultati ottenuti dalle prove condotte, si osserva che, per il caso di una variabile per piano, l'errore massimo è di circa il 6% nel caso di telaio nudo, mentre sale al 16% per il caso di telaio tamponato, con la presenza di aperture nel pannello, ed arriva a punte del 25% nel caso di pannello di tamponatura pieno.

Nel caso si considerino due variabili per piano, invece, in corrispondenza di quegli stessi elementi per cui il calcolo della variabile presentava gli scostamenti maggiori (le travi di piano), si riscontrano valori di errore che superano il 100% nel caso di pannello di tamponatura con aperture, mentre raggiungono addirittura il 150% nella trave del secondo piano, nel caso di pannello di tamponatura pieno.

Un discorso a parte merita il caso del telaio nudo, per il quale si hanno livelli di errore inferiori al 30% per tutte le variabili, eccetto che per la variabile corrispondente alla trave dell'ultimo piano, per la quale l'errore arriva a toccare punte di circa il 150%.

Alla luce di questi ultimi risultati si può affermare che il metodo risulta abbastanza instabile quando comincia a crescere il numero di variabili.

Gli scostamenti maggiori si rilevano per le variabili di quasi tutte le travi e per i pilastri dell'ultimo piano.

Si nota inoltre una spiccata sensibilità agli errori di misurazione delle caratteristiche modali, anche se, per una buona parte delle variabili continuano ad ottenersi comunque buoni risultati. Si può concludere dicendo che il buon funzionamento del metodo non può prescindere dalla precisione nell'acquisizione dei parametri dinamici della struttura, richiedendo margini d'errore estremamente ridotti.

## 7.9. Conclusioni.

Nel presente capitolo è stata esaminata l'influenza dei pannelli di tamponatura nel problema dell'identificazione strutturale in telai piani.

Nella prima parte del lavoro si è cercato di definire un modello per la rappresentazione discreta del comportamento del pannello di tamponamento all'interno della maglia del telaio.

La rappresentazione più efficace si è rivelata essere quella che prevede l'inserimento di un puntone equivalente che sostituisca la tamponatura e che fornisca risultati che siano quanto più vicini possibile al reale comportamento del telaio tamponato.

Si è quindi costruito un modello agli elementi finiti che consenta di determinare, in vari casi, le dimensioni del puntone equivalente; in particolare, assumendo la lunghezza del puntone pari a quella della diagonale della maglia del telaio e lo spessore della sua sezione trasversale pari allo spessore del pannello, l'unica grandezza da determinare rimane la larghezza della sezione trasversale del puntone.

Conclusa questa prima parte di analisi con la determinazione dei puntoni da inserire nei diversi telai oggetto di indagine, si è passati alla sperimentazione del metodo di identificazione del danno, nel caso in cui i parametri modali acquisiti vengano "alterati" dall'influenza di parti non strutturali, quali i pannelli di tamponamento, sulla risposta della struttura.

Il metodo testato, come già detto, nasce dalla combinazione dei criteri di confronto del quadrato delle frequenze e del M.A.C., per quel che riguarda la costruzione della funzione di errore, con il metodo della metrica variabile per ricercare il minimo di tale funzione.

Dai risultati dell'analisi è emerso che, nel caso di modellazione dei telai con una variabile per piano, si sono ottenuti, in tutti i casi, risultati ottimi, con livelli di errore molto bassi.

Considerando invece due variabili per piano, si sono ancora ottenuti buoni risultati, ma con livelli di errore leggermente più alti e con la perdita dell'unicità della soluzione, dovuta all'aumento delle variabili in gioco.

Si è poi indagata l'influenza dei modi di vibrazione superiori sull'accuratezza della soluzione, trovando, come ci si attendeva, una progressiva diminuzione dell'errore man mano che venivano coinvolte le forme modali più alte. Ne discende che, per una soluzione che sia il più possibile accurata, sarebbe indicato l'impiego del più alto numero possibile di dati in ingresso e quindi di misurazioni sulla struttura che rilevino quante più informazioni possibili sul suo comportamento.

Infine si è introdotto intenzionalmente un errore minore del 5%, uniformemente distribuito sui dati in ingresso, per simulare l'errore strumentale da cui sono inevitabilmente affette le misurazioni.

Si è riscontrato che, per il caso di una variabile per piano, l'errore strumentale ha un'influenza irrisoria, aumentando man mano che si fa più pesante l'influenza del pannello di tamponamento.

Nel caso di due variabili per piano invece le cose si complicano: si perde l'unicità della soluzione e, in molti casi, il metodo non riesce a trovare valori vicini a quelli esatti, per le variabili delle travi e per alcuni pilastri.

Si può concludere dicendo che, il metodo di identificazione testato continua a fornire risultati utili nonostante le perturbazioni nei dati in ingresso dovute all'influenza dei pannelli di tamponamento. All'aumentare del numero di variabili, l'accuratezza della soluzione diminuisce, specie in relazione all'errore nelle rilevazioni delle caratteristiche modali della struttura in esame.

Si auspica quindi una più alta precisione nelle misurazioni e la costruzione di un modello strutturale che si avvicini il più possibile al reale comportamento della struttura.

## CAPITOLO 8

### PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE DI TELAI 3D.

*In questo capitolo viene analizzato il problema dell'identificazione su una struttura intelaiata 3D. Il problema, per alcuni aspetti, risulta essere molto diverso da quello piano, come la definizione del problema diretto, per altri invece, molto simile, come per esempio l'approccio nella fase inversa. La sostanziale differenza rispetto al caso piano, è che nel test modale sperimentale è possibile ottenere in generale, tre forme modali per ogni piano rigido; tale numero di informazioni risultano essere maggiori rispetto al caso piano. Lo studio si è concentrato quindi, nell'analizzare questo problema in tali condizioni, per verificare se esistono problemi nella determinazione di alcune caratteristiche e nel valutare il numero minimo di forme modali capaci di identificare la struttura. Anche nel presente studio sono state condotte alcune semplificazioni, aspetto che si rende necessario in quasi tutti i problemi di identificazione, in modo da ridurre le variabili da determinare. Sono dunque stati sviluppati due set di prove, uno che considera una singola variabile per piano, l'altra, invece, che considera due variabili per piano; nulla vieta però di considerare altri tipi di semplificazioni o schematizzazioni.*

## 8.1. Introduzione.

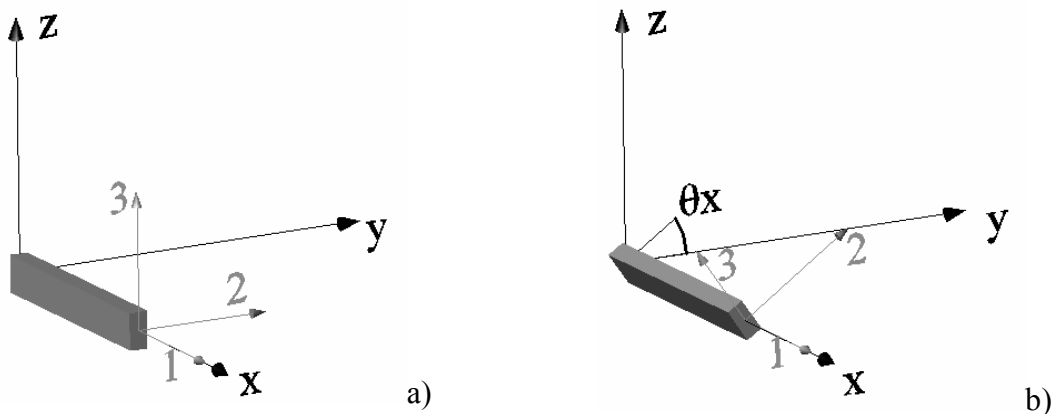
Il lavoro di ricerca svolto in questo capitolo tende ad avvicinare il modello diretto che viene costruito alla situazione reale. Le strutture spesso vengono schematizzate come strutture piane, magari in fase di progettazione, allo scopo di semplificare il problema e nello stesso tempo per effettuare tutte le procedure, progettazione e verifica, in maniera rapida. In un problema di identificazione [112-123], il modello diretto che si deve costruire deve essere necessariamente più vicino alla realtà, aspetto necessario perché, dovendo procedere con un ottimizzazione basata sugli errori che si ottengono dal confronto dei dati sperimentali [124] con quelli teorici, avendo poi a che fare con problemi generalmente mal condizionati è facile capire come il modello diretto sia decisivo.

La struttura idealizzata presenta quindi un insieme di informazioni che generalmente, in un edificio classico, è facile da trovare, come ad esempio travi ad asse inclinato; non sono state considerate però, piastre in elevazione e in fondazione. La fondazione è stata semplicemente schematizzata imponendo spostamenti nulli alla base dei pilastri.

## 8.2 Schematizzazione telai 3d

Le fasi che si devono seguire per poter descrivere, in maniera computazionale, una struttura 3D sono le stesse viste nel caso piano. Si tratta di un insieme di strutture elementari che devono essere assemblate in modo da rispettare le connessioni. L'elemento viene così, ad essere modellato in maniera indipendente utilizzando un sistema di riferimento locale, in fig. 8.1 il riferimento locale è rappresentato dagli assi 1-2-3. Dal sistema di riferimento locale è necessario riferirsi a quello globale, utilizzato nelle successive analisi. Per poter fare ciò, mentre nel caso piano era necessaria una singola matrice di rotazione (la rotazione, in questo caso, è unica e relativa all'asse ortogonale al piano che contiene la struttura), nel caso 3D si tratta di una matrice di rotazione che rappresenta la composizione ordinata di tre matrici di rotazione, ognuna rispetto al proprio asse globale.

$$R = R_x \cdot R_y \cdot R_z \quad (8.1)$$





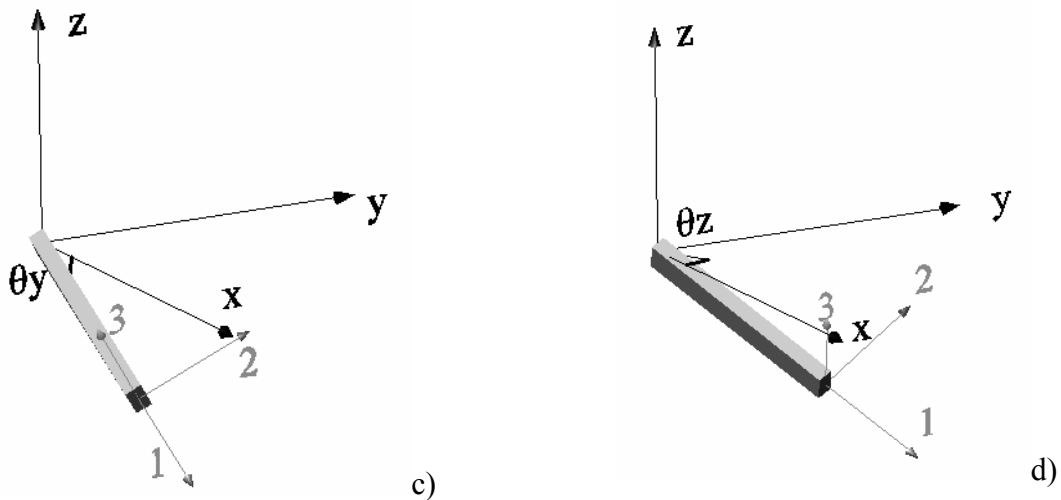


Figura 8.1. a)Elemento di riferimento, b) Rotazione asse x, c) Rotazione asse y, d) Rotazione asse z.

Il prodotto delle tre matrici di rotazione non è unico; cambiando infatti l'ordine di rotazione si ottengono matrici diverse.

### 8.2.1 Ordinamento delle variabili cinematiche

Il processo fondamentale da affrontare è quello dell'ordinamento del vettore cinematico connesso alla struttura. La struttura possiede 12 parametri cinematici nodali, questi vengono definiti rispetto ad una terna destrorsa con il primo asse parallelo all'asse della trave. I parametri cinematici vengono ordinati nel modo seguente:

$$\mathbf{u}^t = (u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}, u_j, v_j, w_j, \varphi_{xj}, \varphi_{yj}, \varphi_{zj}) \quad (8.2)$$

Dove  $u, v$  e  $w$  rappresentano, rispettivamente, gli spostamenti lungo  $x, y, z$ .

La costruzione della matrice delle rigidità è stata determinata utilizzando la schematizzazione dei sei modi deformativi naturali ed impiegando la matrice di trasferimento  $A$ :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{A} \quad (8.3)$$

in cui

$$\mathbf{k}_n = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & \\ & \frac{4EJ_2}{L} & & & & \\ & & \frac{12EJ_2}{L} & & & \\ & & & \frac{4EJ_1}{L} & & \\ & & & & \frac{12EJ_1}{L} & \\ & 0 & & & & \frac{GJ_t}{L} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Dalle matrici di riferimento globale di ogni elemento, si determina, con un processo di assemblaggio, la matrice dell'intera struttura. Nell'assemblaggio si considerano tutti i vincoli presenti, ordinando i parametri cinematici in variabili attive e vincolate.

### 8.2.3 Piano rigido

Gli edifici in genere presentano impalcati orizzontali rigidi nel loro piano. Questo tipo di vincolo semplifica di molto il problema; infatti le variabili cinematiche dei nodi appartenenti allo stesso piano risultano tra loro legate. E' possibile individuare per ogni piano rigido un nodo di riferimento, nodo master, al quale gli altri nodi, che appartengono allo stesso insieme di vincolo, sono legati. Le espressioni di piano rigido che legano gli spostamenti di un qualsiasi nodo ad un altro sono:

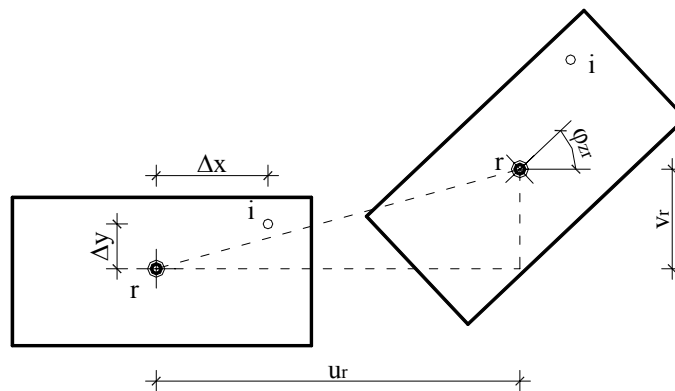


Figura 8.2. Moto rigido di piano

$$\begin{cases} u_i = u_r - \Delta y \cdot \varphi_{zr} \\ v_i = v_r + \Delta x \cdot \varphi_{zr} \\ \varphi_{zi} = \varphi_{zr} \end{cases} \quad (8.6)$$

Per poter esaminare una struttura che possiede piani rigidi si può procedere in diversi modi: o inserendo degli elementi fittizi infinitamente rigidi che legano i vari punti del piano, oppure creare una ulteriore matrice di congruenza (P) che leghi i parametri cinematici dei nodi del piano con quelli master.

Da questa matrice è possibile risalire alla matrice di rigidezza globale semplicemente pre e post moltiplicando la matrice di rigidezza precedente.

$$K_{rig} = P^T \cdot K_{TOT} \cdot P \quad (8.7)$$

in cui le variabili sono così ordinate.

$$u_{TOT}^t = (u_{p1}, v_{p1}, \varphi_{zp1}, \dots, u_{pN}, v_{pN}, \varphi_{zPN}, w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \dots) \quad (8.8)$$

Lo stesso procedimento seguito per la matrice delle rigidezze viene utilizzato anche per quella delle masse.

In questo modo si ottengono le quantità matriciali utili alla soluzione del problema diretto ovvero del problema inverso. Attraverso l'analisi modale è possibile determinare tutte quelle forme modali utili al processo inverso.

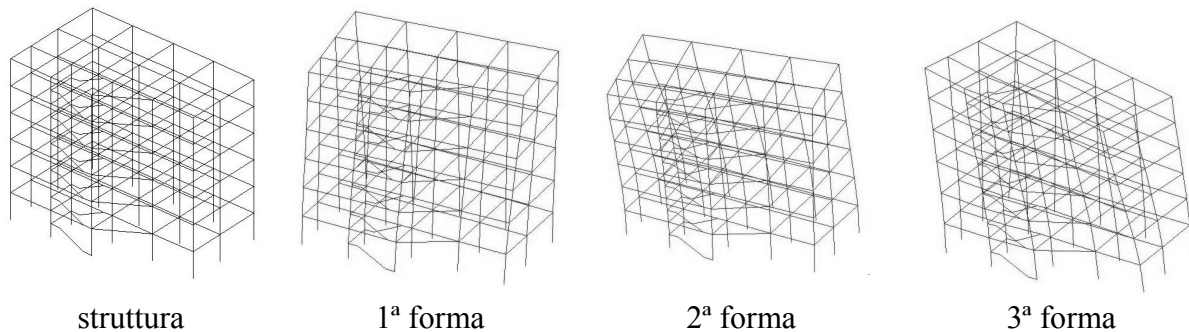


Figura 8.3. Struttura indeformata e prime forme modali

### 8.2.4 Forme modali utilizzate.

Le forme modali che si utilizzano sono quelle relative ai parametri cinematici di piano [119-123]. In generale si riescono a determinare facilmente solo le forme modali traslazionali. In questo capitolo è stata fatta un'analisi atta a definire le forme necessarie ad identificare le caratteristiche degli elementi strutturali della struttura. Nel caso 2D, essendo  $n$  il numero di piani, si possono aspettare generalmente  $n$  forme modali, anche se in alcuni casi è possibile determinare altre forme posizionando alcuni trasduttori in punti differenti o disponendoli in maniera diversa. Ugualmente ci si trova a lavorare con poche informazioni rispetto ai parametri che si vogliono determinare [114]. Nel caso 3D le cose cambiano, perché è possibile posizionare più sensori per determinare più quantità, dato che i parametri cinematici, in questo caso, sono pari al numero di piani rigidi moltiplicato per tre.

In questo capitolo si tratta la stessa problematica vista nel capitolo 6, ma si vuol verificare se il problema inverso connesso all'identificazione strutturale di una struttura 3D sia meno mal condizionato rispetto a quello 2D.

### 8.3 Analisi effettuate

Le analisi svolte sono del tutto teoriche e ci si è affidati solo a dati pseudo sperimentali. Il procedimento svolto consente di testare il metodo su dati che sono, di sicuro, non affetti da errori e di analizzare il problema generando un insieme di valori che invece ne è affetto. Si

parte con alcuni dati, che sono quelli che si vogliono determinare, si effettua un'analisi diretta e si ottengono dei valori in uscita che diventeranno i dati in ingresso del problema inverso. La procedura testa la capacità di un problema del genere nel valutare i dati ed estrapolare in esse la soluzione.

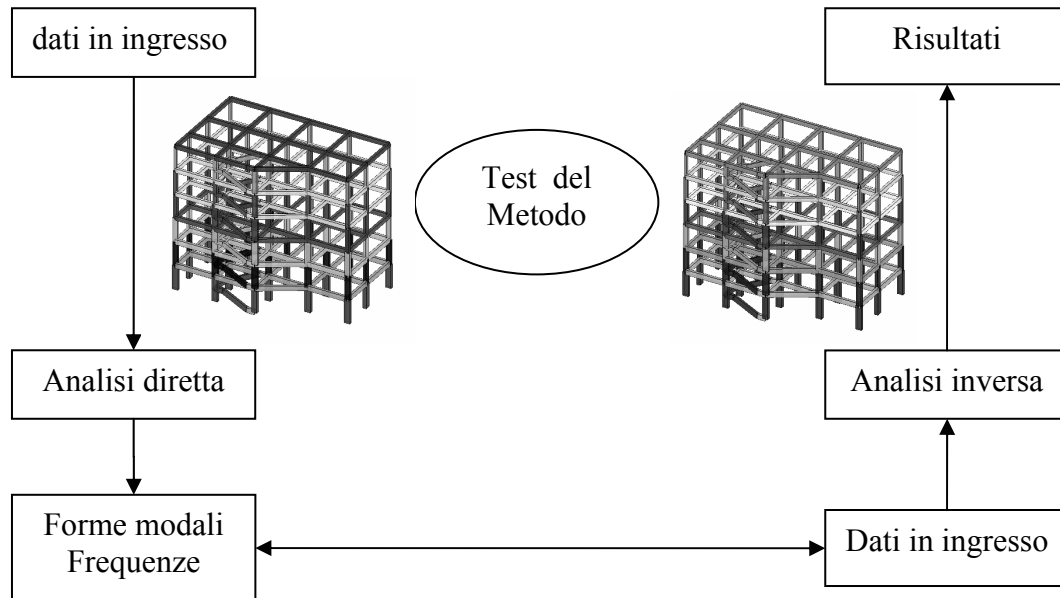


Figura 8.4. Flow chart. Schema riassuntivo procedura di identificazione

Nello sviluppare il problema inverso, è necessario effettuare alcune semplificazioni. Il numero di parametri disponibile per questo tipo di analisi è generalmente ridotto. Se in generale si associa la caratteristica che si vuole determinare ad ogni elemento singolo, ci si trova subito con  $n$  variabili in cui  $n$  è pari al numero di elementi. In altri casi si vuole determinare il danno localmente, quindi un'asta che si trova a fare parte di una struttura, può essere suddivisa in più parti. Ad esempio se si ha di fronte un edificio di 5 piani che ha 100 aste, l'idea di associare la caratteristica al numero di elementi fa diventare il numero di variabili uguale ad  $n$ , mentre se si discretizza ulteriormente l'elemento strutturale, e non sapendo a priori dove sia posizionato l'eventuale danno, fa sì che ogni elemento deve essere sezionato in più parti facendo così crescere il numero di variabili.

Come è stato evidenziato nei capitoli precedenti, si è deciso di semplificare il problema riducendo il numero di variabili, lavorando con due set di prove differenti. Nel primo si è utilizzata una sola variabile di piano, si sono inglobati il modulo  $E$  delle travi e dei pilastri di piano in un unico valore. Nel secondo set invece, si è raddoppiato il numero di variabili, nello stesso tempo è aumentato l'onere computazionale, differenziando il modulo delle travi da quello dei pilastri.

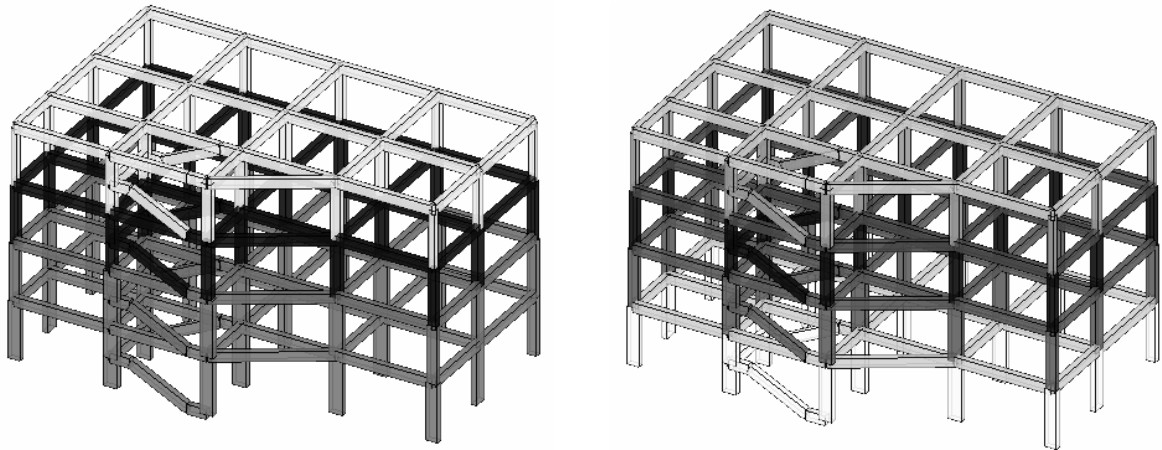


Figura 8.5. Strutture esaminate Set A e Set B.

E' possibile fare molte altre schematizzazioni; l'idea sarebbe quella di effettuare quella che si avvicina alla realtà, ma lavorando in maniera discreta con un numero finito di elementi [115 116] ciò si può difficilmente realizzare.

Il tipo di problema è strettamente basato ai dati sperimentali, le misure che si effettuano, sono affetti da una serie di errori, che in parte possono essere eliminati o ridotti, facendo effettuare le letture automaticamente (tentando di eliminare gli errori accidentali), altri invece non possono essere rimossi perché sono insiti alla struttura del sensore che si utilizza. Alcuni errori possono ridursi, operando con opportuni sensori, oppure incrementandone il numero.

Gli errori commessi in fase di acquisizione ed elaborazione dei dati porta inevitabilmente al propagarsi degli stessi fino ai risultati, che quindi devono essere letti in un'ottica più ampia. È necessario porsi prima il problema di quanto un dato, che si determinerà, possa essere più o meno valido. Si è valutato il comportamento delle variabili allorquando, a dati in ingresso si aggiunge un errore casuale del 5%.

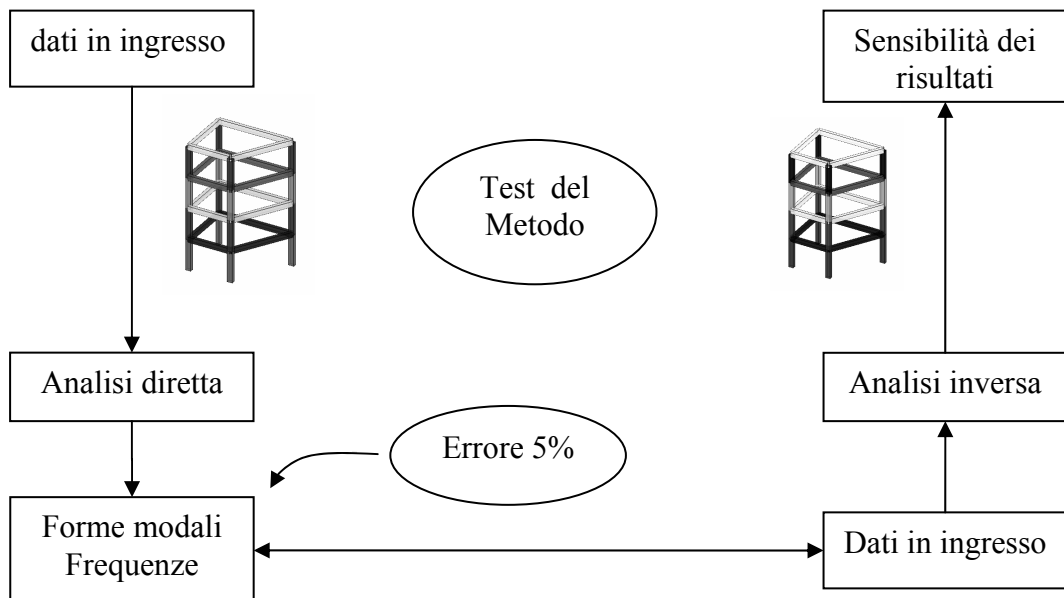


Figura 8.6. Flow chart. Schema riassuntivo procedura di identificazione con errore

I problemi mal condizionati soffrono molto, a piccole variazioni ne corrispondono altre che invece sono grandi, inteso con grandi quelle variazioni che non sono accettabili e che quindi o non hanno un peso oppure che non corrisponde un significato fisico, ma spesso questo non

succede perché si tratta di ottimizzare rispetto ad un dominio vincolato nei limiti fisici di una variabile. E' stata condotta un'analisi a riguardo sia nel set "A" che in quello "B" valutando la propagazione degli errori sui risultati ottenuti.

I parametri cinematici sono stati ridotti a quelli strettamente necessari all'implementazione della procedura di identificazione, condensando alla Guyan il tutto ai soli parametri cinematici traslazionali di piano.

### 8.4 Processo di identificazione.

Le differenze sostanziali rispetto al caso piano sono ben poche. Anche in questo caso si tratta di ottimizzare un problema vincolato, in cui i vincoli rappresentano i moduli elastici degli elementi strutturali. L'approccio di identificazione utilizza il cosiddetto "response quantities procedure", con il quale si confrontano le quantità modali, specificatamente forme modali, e frequenze proprie; si determina una funzione di errore composta dalla differenza delle letture delle frequenze e delle forme modali rispetto a quelle sperimentali utilizzando le equazioni viste precedentemente:

$$Err = \sum_{i=1}^L \left( \left( 1 - \frac{(\phi_{i(T)}^T \cdot \phi_{i(sp)})^2}{(\phi_{i(T)}^T \cdot \phi_{i(T)}) \cdot (\phi_{i(sp)}^T \cdot \phi_{i(sp)})} \right)^2 + \left( \frac{\omega_{i(T)} - \omega_{i(sp)}}{\omega_{i(sp)}} \right)^2 \right) \quad (8.9)$$

L'ottimizzazione della funzione di errore utilizzando la relazione (8.9), è svolta utilizzando il metodo della metrica variabile affiancato alla line search sviluppata con il metodo di Fibonacci. La line search opera su un dominio rettangolare introdotto dalle limitazioni nelle variabili.

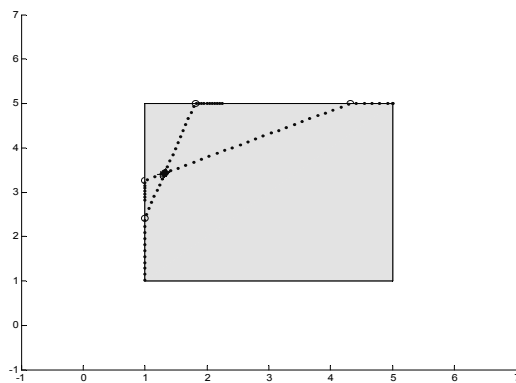


Figura 8.7. Schema di proiezione lungo una linea

Il metodo di Fibonacci è valido per funzioni monodimensionali e unimodali. Non sapendo a priori se la funzione di errore, proiettata sulla direzione di ricerca, risulta unimodale, si è deciso di effettuare una scansione prima di poter applicare il metodo

### 8.5 Strutture esaminate.

Le strutture prese in esame sono state diverse, per poter valutare l'influenza delle informazioni sull'identificazione in vari casi è stato necessario analizzare telai a più piani così come schematizzato in figura. La pianta degli edifici esaminati rimane la stessa per tutti i casi; cambia in effetti solo il numero di piani.

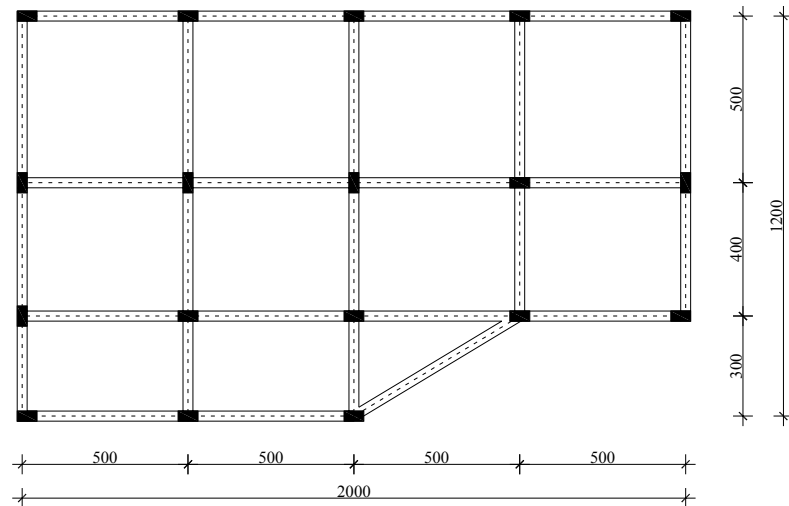


Figura 8.8. Pianta edificio esaminato (misure in cm).

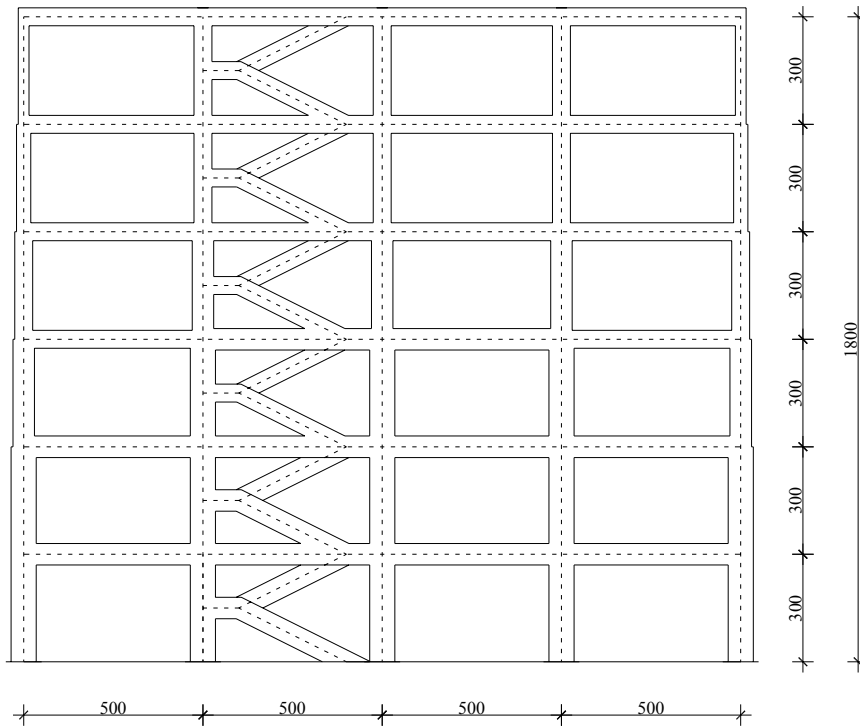


Figura 8.9. Prospetto struttura esaminata a 6 piani (misure in cm).

Sulla struttura è presente una scala con travi a ginocchio che irrigidisce il tutto. I piani ai vari livelli sono considerati infinitamente rigidi e su di essi sono stati inserite le relative masse, che in fase di sperimentazione rappresentano le masse presenti sulla struttura, senza eventuali decrementi imposti dalle normative vigenti. Sulle travi, per tener conto della presenza di tamponature, sono stati considerati gli effetti solo in termini di masse, che il tamponamento produce sulle quantità modali.

### 8.5.1. Analisi Set prove A

L'analisi di identificazione basate su strutture 3D, utilizza dati sperimentali e precisamente vengono usate le informazioni sulle forme modali pari al numero di parametri cinematici relativi ai piani.

I risultati ottenuti, vengono sintetizzati con istogrammi in cui la prima colonna rappresenta il valore esatto mentre gli altri sono i risultati ottenuti.

Nella prima prova non viene introdotto nessun errore e l'identificazione utilizza tutte le quantità modali riferite ai parametri cinematici dei piani rigidi.

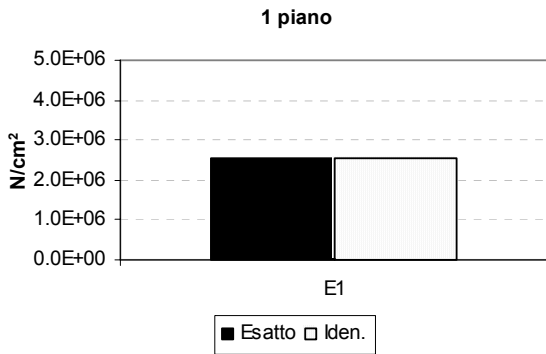


Figura 8.10. Set A. 1 piano. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

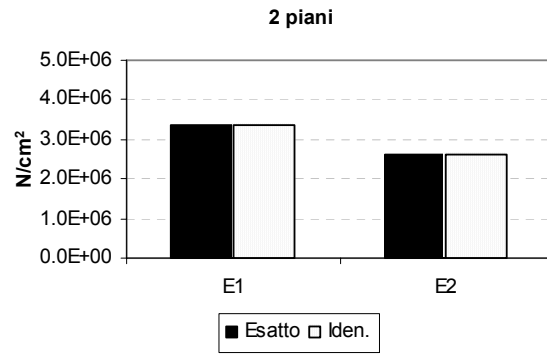


Figura 8.11. Set A. 2 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

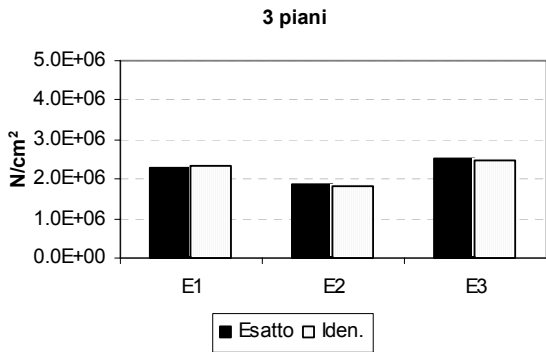


Figura 8.12. Set A. 3 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

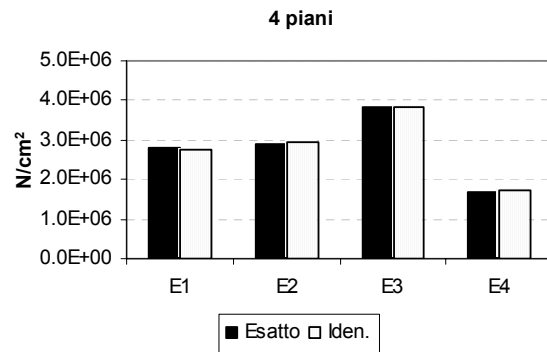


Figura 8.13. Set A. 4 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

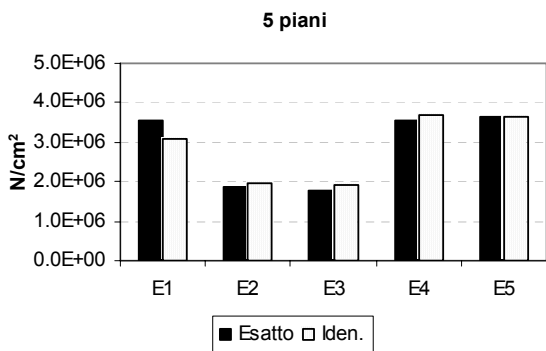


Figura 8.14. Set A. 5 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

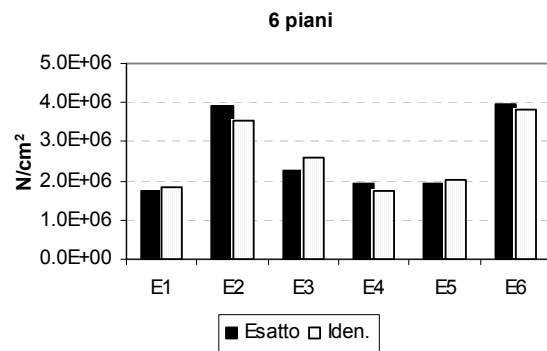


Figura 8.15. Set A. 6 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

Come si può notare dai risultati ottenuti, utilizzando un numero di informazioni sufficienti si riescono a determinare i parametri strutturali che si volevano trovare. Nel caso di un solo piano e quindi di una sola variabile il metodo funziona meglio rispetto al caso di 5 e 6 piani, nei quali si riscontrano delle imprecisioni, anche se i valori sono simili alla soluzione cercata. Si può riassumere il tutto valutando i valori cromatici ottenuti e quelli imposti per i vari casi:



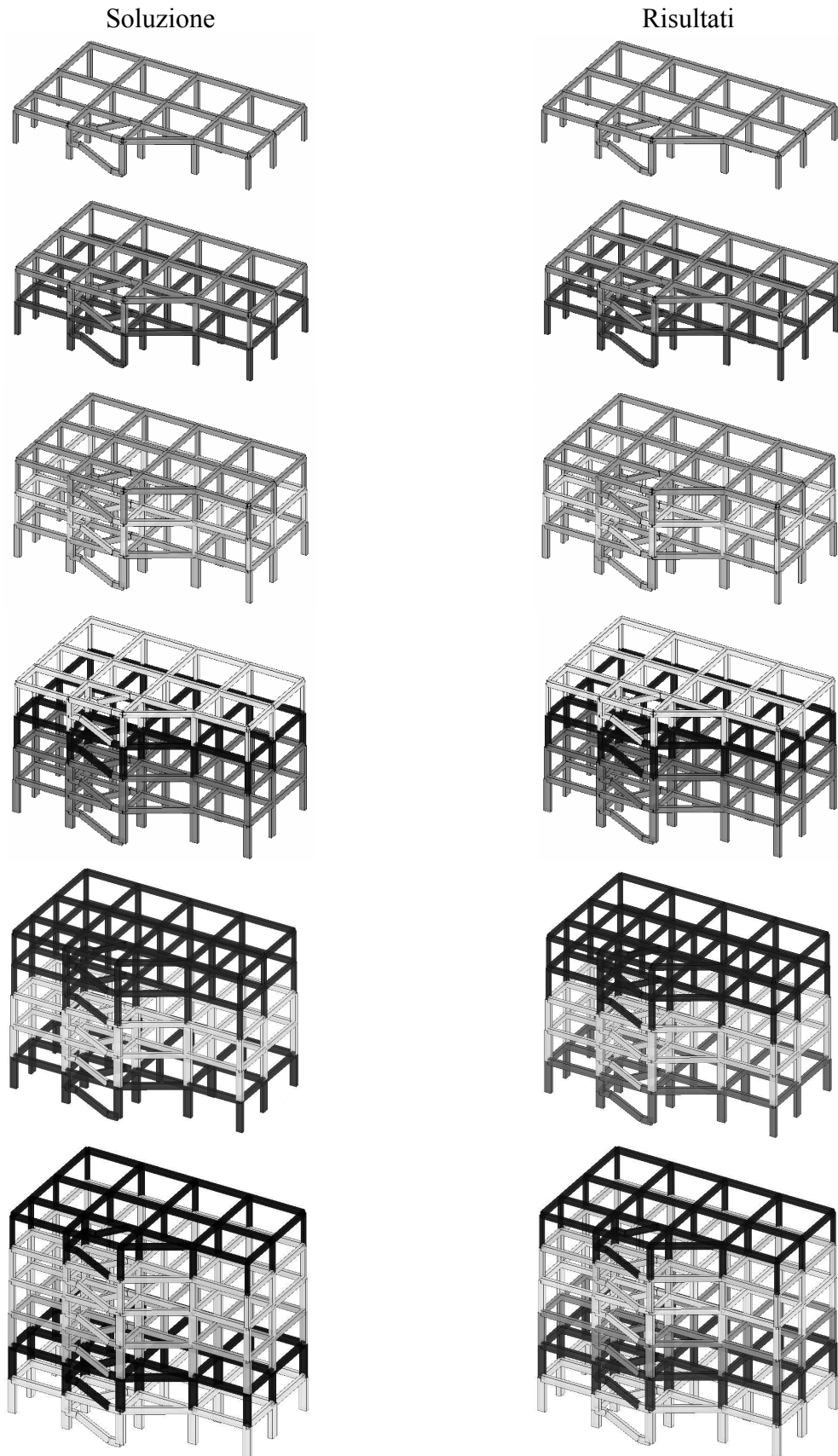


Figura 8.16. Risultati grafici riepilogativi analisi Set A.

Si può valutare come il metodo riesca a determinare una buona soluzione per tutti i piani.

### 8.5.2 Errore sperimentale. SET A

Per il caso a 4 piani si inserisce nei dati un errore casuale del 5%, vengono così generati una serie di valori in maniera random e uniformemente distribuiti rispetto ai valori esatti. L'analisi vuole valutare la sensibilità del metodo e quindi dei valori delle variabili rispetto a delle misure non esatte. Gli istogrammi seguenti ne riassumono i risultati:

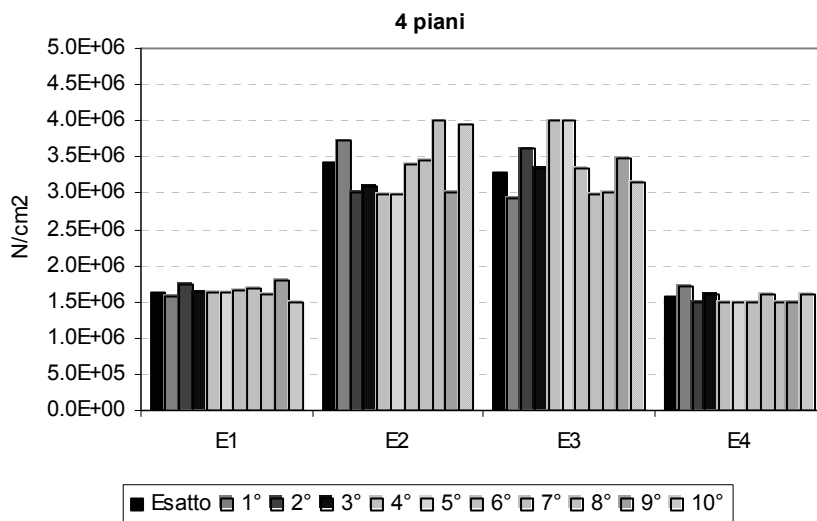


Figura 8.17. Set A, 4 piani. Confronto dati ottenuti con simulazione dell'errore sperimentale

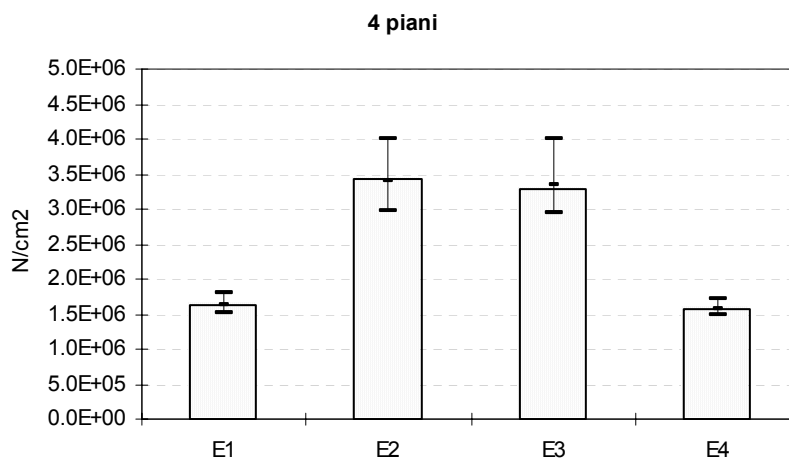


Figura 8.18. Set A, 4 piani. Valori massimi, minimi e medi analisi errore

Sulla prima variabile l'errore massimo è del 10%, sulla seconda del 16%, sulla terza del 22% mentre sull'ultima del 8%; ciò in effetti sottolinea il comportamento del metodo quando vengono utilizzati dati che sono affetti da errori. Valutando altresì i valori medi si ottengono errori decisamente più bassi, che sono dell'ordine del 2%.

### 8.5.3. Influenza del numero di modi. Set A

Viene adesso valutata su un telaio a 5 piani, l'influenza che il numero di modi ha sulla soluzione cercata. Per ogni caso si varia la funzione di errore; essa dipenderà anche dal

numero di modi utilizzati e si vuole valutare il variare della soluzione rispetto al numero di informazioni. I dati in ingresso sono forniti senza errori.

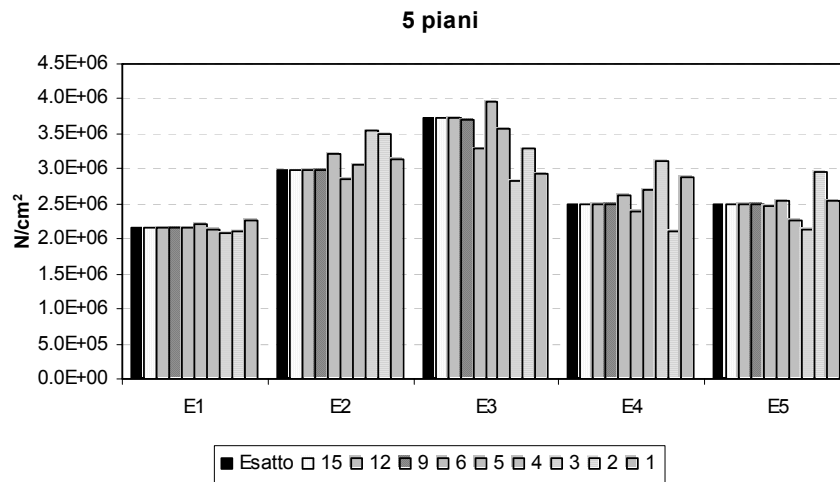


Figura 8.19. Set A, 5 piani. Soluzione al variare del numero di informazioni modali

Si può vedere come, utilizzando informazioni complete, si riesca ad ottenere la soluzione esatta, lo stesso succede utilizzando informazioni di poco ridotte. L'utilizzo delle informazioni relative a 12 e a 9 forme modali forniscono risultati ottimi mentre al diminuire delle informazioni l'errore nell'identificazione cresce.

Nel determinare i parametri vibrazionali di una struttura, spesso, ci si accontenta di determinare solo alcuni modi che presentano una bassa frequenza, quindi i modi al alta frequenza o vengono trascurati o difficilmente si riescono a determinare con buona precisione, ad esempio perché la strumentazione non riesce a cogliere alcuni dati.

L'analisi fatta dimostra come, in alcuni casi, le informazioni ridotte producono buoni risultati.

### 8.5.4 Analisi SET B

In questo set di prove vengono riprodotte le analisi fatte nel set A. Questo tipo di problema, per quanto visto nei capitoli precedenti, dovrebbe essere più sensibile e le analisi svolte vogliono determinare se conoscendo le forme modali si riescono a determinare tutte le informazioni volute.

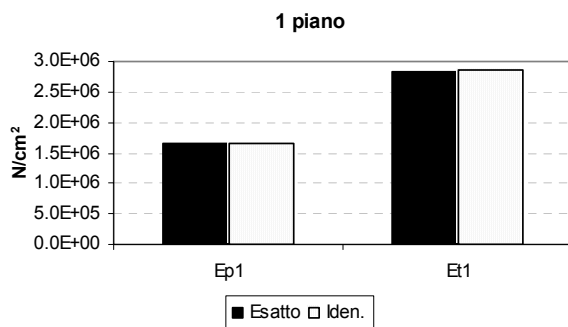


Figura 8.20. Set B. 1 piano. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

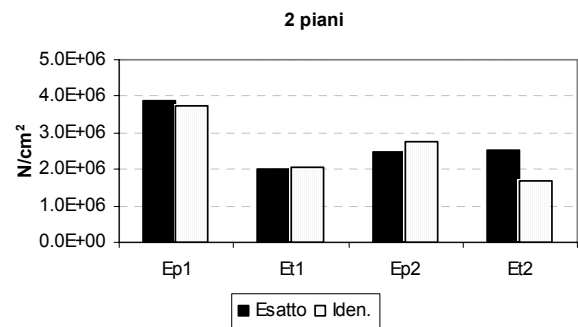
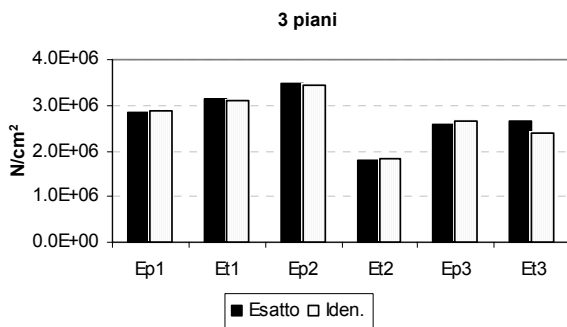
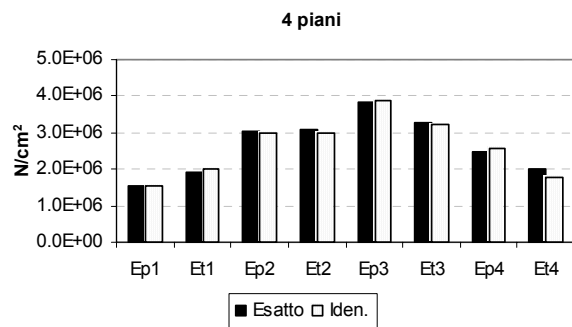


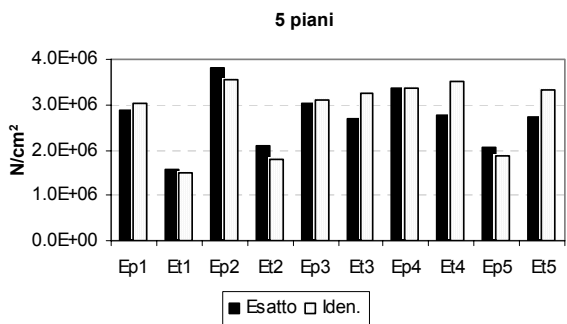
Figura 8.21. Set B. 2 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso



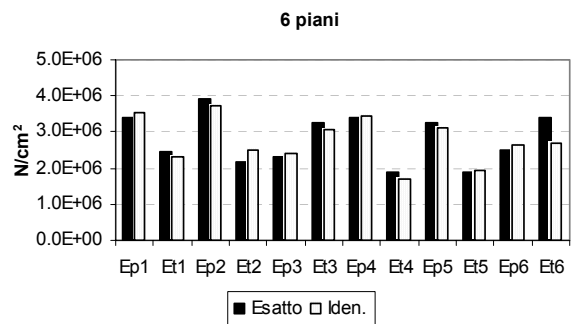
**Figura 8.22.** Set B. 3 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso



**Figura 8.23.** Set B. 4 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso



**Figura 8.24.** Set B. 5 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso



**Figura 8.25.** Set B. 6 piani. Confronto tra la soluzione esatta e quelle ottenute con il processo inverso

Come si vede dai risultati, utilizzando un numero di informazioni sufficienti si riescono a determinare i parametri strutturali che si cercavano. Nel caso di un solo piano, quindi di una sola variabile il metodo funziona meglio del caso di 5 e 6 piani, nei quali si riscontrano delle imprecisioni, anche se i valori sono simili alla soluzione cercata. Si riassume in fig. 8.26 il tutto valutando i valori cromatici ottenuti e quelli imposti per i vari casi:

### 8.5.5 Errore sperimentale. SET B

Per il caso a 4 piani si inserisce, nei dati in ingresso, un errore casuale del 5%, generato 10 volte in maniera random e uniformemente distribuito rispetto al valore esatto. L'analisi vuole valutare la sensibilità del metodo e quindi dei valori delle variabili, rispetto a delle misure non esatte.

Si riesce a valutare dalle figg. 8.27-8.28 come i valori massimi e minimi, per ogni variabile, si discostano dalla soluzione. La variabile  $E_{t4}$  presenta un errore massimo del 77%, mentre tutte le altre variabili assumono errori decisamente più bassi. Se però, si valuta la media di tutti i risultati, si ottengono valori prossimi alla soluzione, ottenendo ad esempio, un errore medio su  $E_{t4}$  del 10%.

L'analisi modale sperimentale (Modal Testing), non potendo prescindere dai risultati avuti dal metodo, deve necessariamente ricollegarsi ad essi; dunque, l'analisi che deve essere svolta per la determinazione dei dati vibrazionali deve essere molto precisa.

Si nota, inoltre, a piccole variazioni corrispondono grossi scostamenti nella soluzione dimostrando che anche un problema semplificato con una singola variabile per piano è mal condizionato.

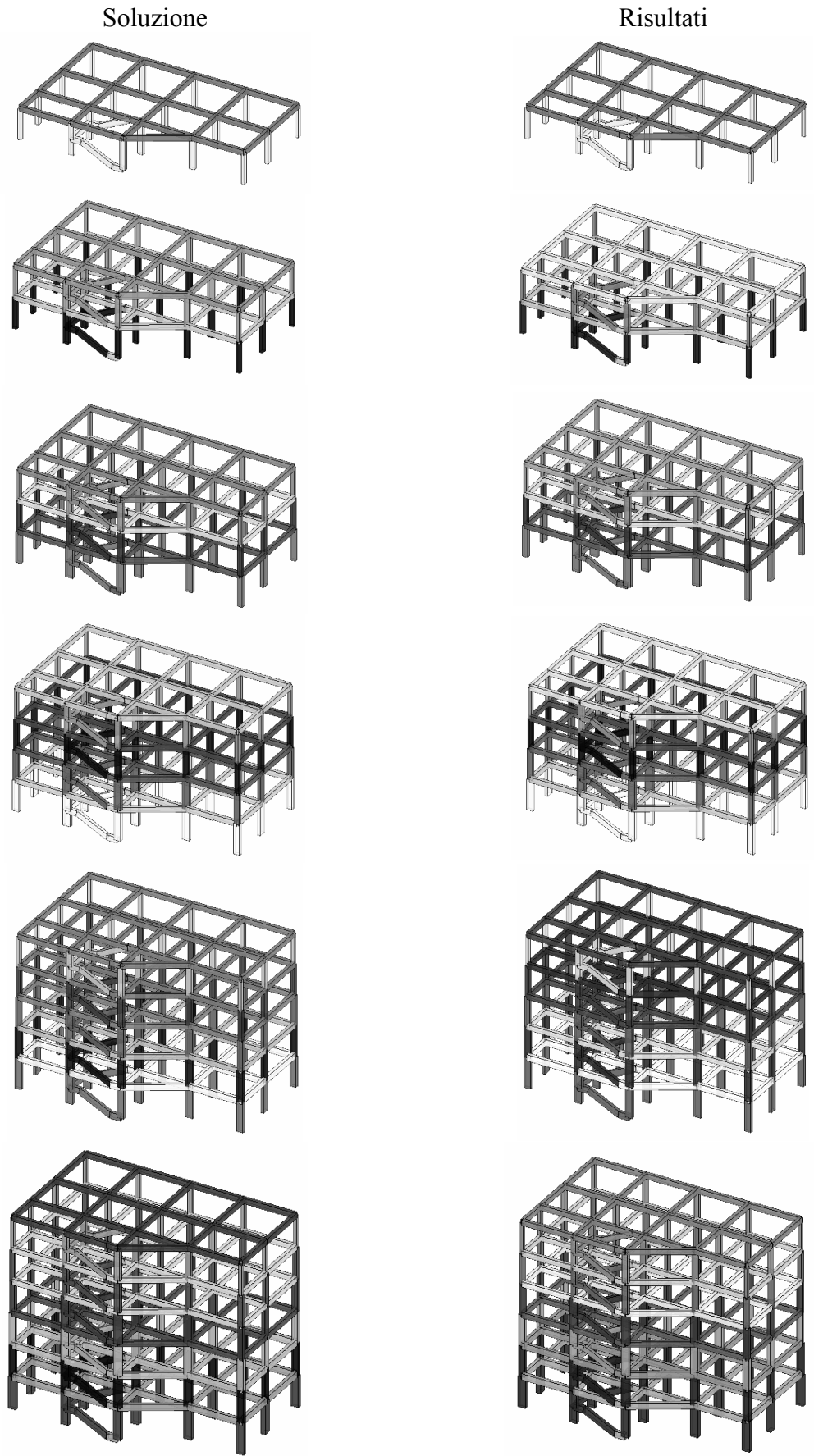


Figura 8.26. Risultati grafici riepilogativi analisi Set B.

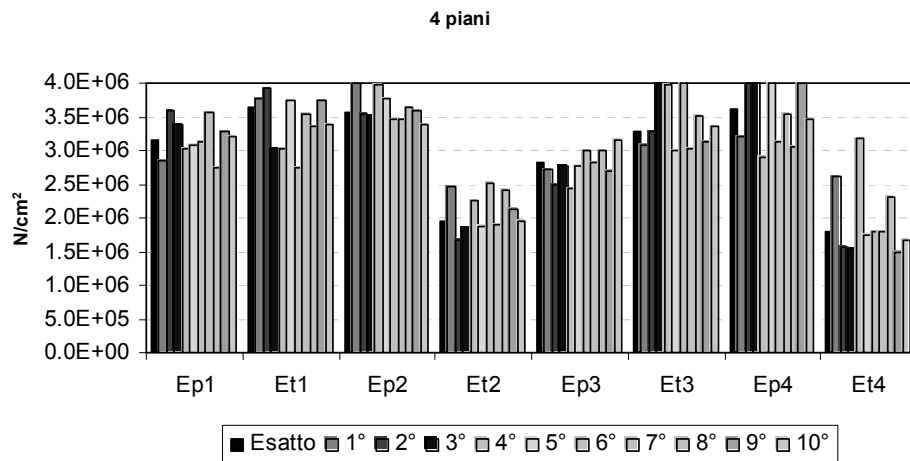


Figura 8.27. Set B, 4 piani. Confronto dati ottenuti con simulazione dell'errore sperimentale

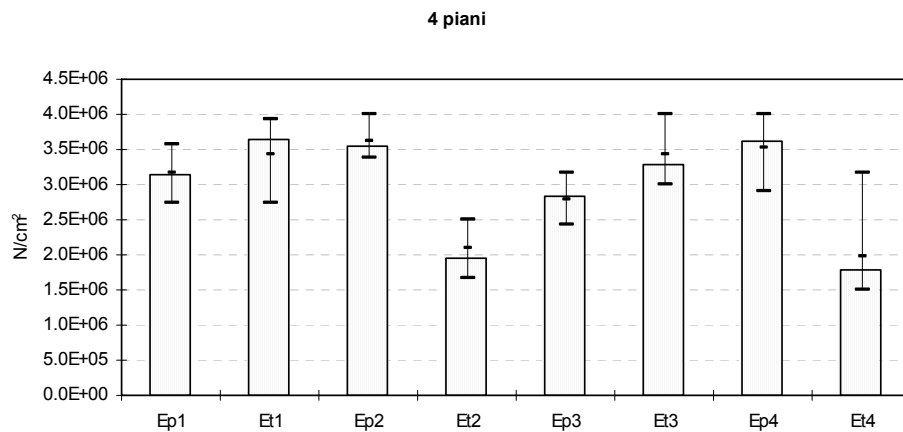


Figura 8.28. Set B, 4 piani. Valori massimi, minimi, e medi analisi errore

### 8.5.6 Influenza del numero di modi. SET B.

Viene adesso valutata, su un telaio a 5 piani, l'influenza che il numero di modi sulla soluzione cercata per poter valutare se le alte frequenze possono essere utili ad un problema di identificazione del genere. I casi esaminati sono i seguenti:

- 15     15 forme utilizzate
- 12     12 forme utilizzate
- ....
- 1       1 forma utilizzata

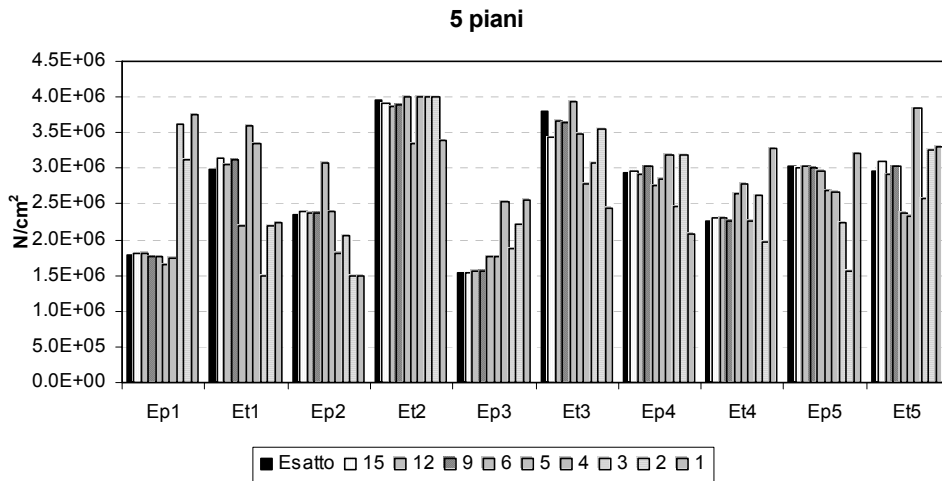


Figura 8.29. Set B, 5 piani. Soluzione al variare del numero di informazioni modali

Utilizzando informazioni complete si riesce ad ottenere la soluzione; lo stesso succede utilizzando informazioni di poco ridotte. I casi 12, 9 forniscono risultati ottimi mentre al diminuire delle informazioni l'errore nell'identificazione cresce.

Nel determinare i parametri vibrazionali di una struttura, spesso, ci si accontenta di determinare solo alcuni modi che presentano una bassa frequenza, quindi i modi al alta frequenza o vengono trascurati o difficilmente si determinano con buona precisione, magari perché la strumentazione non riesce a cogliere alcuni dati.

L'analisi condotta dimostra come, in alcuni casi, le informazioni ridotte producono buoni risultati.

## 8.6 Conclusioni.

Nel presente capitolo sono state analizzate diverse strutture tridimensionali; l'analisi è stata svolta per verificare le varie problematiche connesse all'identificazioni strutturale delle stesse. La prima fase è stata quella di creare il modello matematico che meglio risponda a tutte quelle problematiche che si possono trovare. Sono state inserite aste genericamente posizionate ed è stata studiata la relativa problematica nella descrizione sia della matrice delle rigidezze che quella delle masse. È stato necessario inserire vincoli interni, quali i piani rigidi, che molto spesso si trovano negli edifici; tali tipi di vincoli sono stati presi in considerazione utilizzando una opportuna matrice di congruenza, capace di ordinare le variabili cinematiche e inoltre di creare le opportune relazioni.

Il problema inverso è stato risolto utilizzando le tecniche viste nei capitoli precedenti; si utilizza infatti la procedura della metrica variabile associata alla funzione di errore che tiene contemporaneamente in considerazione sia le discrepanze delle frequenze misurate che quelle delle forme modali.

Sono state svolte diverse prove, una riguardante il cosiddetto SET A, e l'altra il SET B.

Il caso di una sola variabile di piano, si dimostra essere il criterio più affidabile. Ciò dipende dal fatto che non si creano quelle condizioni di multisoluzione e il criterio adottato fornisce risultati più che soddisfacenti; si nota una leggera flessione per i piani alti, dove il numero di variabili cinematiche rende il problema molto complesso e quindi molto lento nella sua risoluzione.

L'introduzione dell'errore fittizio del 5 % produce, nel caso esaminato di 4 piani, errori ragionevoli che però superano quelli in ingresso. Si è valutato nello specifico che

l'introduzione dell'errore del 5% produce errori che vanno dal 8% fino al 22%, il che fa condurre a termine che si tratta sempre di problemi malcondizionati.

E' stata inoltre analizzata la dipendenza del numero di forme modali nell'identificazione; si è visto che nel caso di 5 piani, come, solamente 9 forme modali invece di 15, forniscano risultati ottimi.

La seconda tipologia di problema è assai più delicata, sia nel caso piano che nel caso 3D. Si è notato principalmente che il problema di identificazione resta poco sensibile alle variabili associate alle travi, gli errori maggiori vengono attinti proprio a tutti gli elementi orizzontali. La presenza dell'errore sperimentale conduce ad soluzioni affette da errori maggiori rispetto a quelli in ingresso. Infine è stata considerata, anche per questo caso, la dipendenza rispetto alla quantità di modi acquisiti; utilizzare informazioni ridotte è sufficiente ad inquadrare bene il problema, poiché effettivamente nel caso di 5 piani sono necessarie 9 forme modali.



## CONCLUSIONI

La seguente tesi di dottorato si è occupata dell'individuazione del danno su strutture di interesse civile. Molte sono le prove che si possono condurre per determinare lo stato di salute delle costruzioni ma spesso si privilegia l'uso di quelle tecniche che sono distruttive e locali. Esistono in letteratura diverse metodologie che consentono di determinare lo stato di salute dell'intera struttura, e quindi, la presenza di un eventuale danno a partire dai dati sperimentali. Tali tecniche sono in fase di sviluppo e molti, ancora, sono gli aspetti che devono essere analizzati. Il vantaggio principale di questa metodologia è essenzialmente che è possibile determinare lo stato di salute globale della struttura in esame realizzando prove non distruttive e che, quindi non alterano lo stato della struttura. La metodologia si sviluppa in due step successivi: il primo è la prova sperimentale che si realizza per estrarre i dati necessari, il secondo è quello di risolvere il problema di identificazione del danno (problema inverso).

Nella prima parte della tesi si sono studiate le varie tecniche di identificazione del danno, ognuna delle quali basata su diverse metodologie di indagine. Alcuni metodi riescono a risalire allo stato di danno utilizzando procedure dirette. I vantaggi sono la velocità di identificazione, mentre lo svantaggio principale è quello che ogni caso risulta matematicamente diverso rispetto ad un altro.

Il metodo basato sulla differenza, dinamica o statica, tra misure reali ottenute a seguito di prove sperimentali e quelle teoriche che derivano da modelli diretti che utilizzano il FEM, risulta più semplice nell'applicazione e più flessibile nella modifica della struttura da identificare e nel cambiamento delle variabili da identificare. Questo tipo di metodo è stato quello sviluppato in tutta la tesi. Si tratta di minimizzare funzioni di discrepanza tra misure reali e misure teoriche, le prime sono funzioni dipendenti dal danno della struttura mentre le seconde dipendono dalle variabili associate al problema diretto. È di fondamentale importanza che in qualsiasi metodo, in effetti, trattandosi di minimizzazioni di funzioni di errore, se si commette un errore nella definizione del problema diretto, si otterrà un errore ancora più grande della differenza dei dati sperimentali teorici; quindi, la minimizzazione della discrepanza produrrà, per le variabili, come risultato una serie di numeri che non sono validi e che, pertanto, non forniranno una reale conoscenza della struttura.

Le prove sperimentali condotte su una generica struttura, che sono alla base di tutta la problematica di identificazione del danno, sono essenzialmente di due tipi: prove statiche e prove dinamiche. Entrambi i metodi consentono di determinare parametri utili al processo di identificazione. Sono in generale prove molto complesse nell'attuazione, infatti, deformare una grossa struttura a seguito di carichi non è una operazione semplice da realizzare. Per tale motivo sono state sviluppate procedure dinamiche che consentono in generale di determinare, in maniera relativamente semplice, parametri utili al processo di identificazione.

È stato necessario studiare diverse metodologie di ottimizzazione da applicare alla minimizzazione della funzione di discrepanza. Questa funzione si è presentata in modo diverso a seconda del caso analizzato (trave, telaio, telaio con tamponatura, telaio 3D), perciò, si sono visti diversi metodi di ottimizzazione: gli algoritmi genetici, il metodo del gradiente e il metodo della metrica variabile.

Gli algoritmi genetici sono metodi che utilizzano l'analogia della evoluzione delle specie. Sono metodi semplici da applicare e consentono di determinare una soluzione del problema, però, per come sono costruiti, non garantiscono di trovare la soluzione esatta al problema ma

quasi sempre una “buona soluzione”. Sono metodi che si adattano ad ogni problema, ad esempio, quando non è possibile dare una espressione matematica. Inoltre sono però metodi sensibili rispetto ad alcuni parametri come la probabilità di combinazione e mutazione; questi devono essere determinati applicando il metodo più volte e valutando il comportamento dell’algoritmo rispetto ai valori scelti. Spesso infatti, si può manifestare una stabilizzazione nella ricerca della soluzione, in questi casi per poter ottenere una buona soluzione è necessario procedere con un numero elevato di generazioni.

Il metodo del gradiente e quello della metrica variabile richiedono, invece, che la funzione obiettivo sia differenziabile, rispettivamente una e due volte, è necessario, infatti, nel metodo di Newton determinare la matrice hessiana della funzione. La metrica variabile è definita spesso metodo quasi Newton, perché utilizzando alcuni criteri, riesce a “stimare” e non determinare la matrice hessiana.

Nel caso del lavoro di tesi, in cui si aveva la differenziabilità della funzione obiettivo, sono stati utilizzati entrambi i criteri. I casi analizzati sono stati caratterizzati da avere più minimi relativi, per cui si è deciso di affiancare alla ricerca multidimensionale del gradiente e della metrica variabile, quella della ricerca monodimensionale con il criterio di Fibonacci. In questo modo, si è visto che è possibile ridurre i rischi di concludere l’analisi determinando un solo minimo relativo.

Il metodo del gradiente presenta come svantaggio una stabilizzazione delle direzioni di ricerca, provocando, dunque, una limitata sicurezza del dominio di ricerca perché non si riesce a spazzare per bene il dominio.

Per gli stessi casi analizzati il metodo della metrica variabile, che si può considerare un metodo adattivo, nella stima della matrice hessiana “ricorda” le direzioni spazzate precedentemente e ne determina altre diverse, assicurando una distribuzione uniforme delle direzioni di ricerca e mostrando così una rapidità maggiore nella convergenza alla soluzione esatta.

La ricerca si è focalizzata su diversi aspetti e tipologie strutturali:

- Travi con danno diffuso
- Telai Piani con qualche elemento danneggiato (trave o pilastro)
- Telai Piani con elementi di disturbo
- Telai 3D

### **Travi con danno diffuso**

Sono stati usati due modelli di danneggiamento per determinare il danno in una trave soggetta ad un crack diffuso. Si è utilizzato il FEM in due diverse forme: discrete damaged e continuous damaged.

Si è proceduto a valutare la funzione di errore tra i dati in ingresso e quelli calcolati, e minimizzare la stessa grazie all’uso degli algoritmi genetici. La funzione da minimizzare è dipendente dalla posizione del danno, dalla grandezza e dalla sua intensità. Le variabili nel discrete damaged sono variabili discrete, mentre sono continue nel continuous damaged. L’algoritmo genetico, si è adattato bene in entrambi i casi.

L’identificazione del danno ha dato buoni risultati in entrambi i casi; nel modello discreto si è ottenuta una buona soluzione incrementando la mesh, con un aggravio in termini computazionali, mentre il modello continuo è risultato indipendente da ciò.

La tecnica di identificazione si è dimostrata sufficiente all’individuazione del danno, ma per questi tipi di problemi è consigliabile utilizzare un numero di informazioni maggiore rispetto a quanto fatto in questa sede. Sono state, infatti, confrontate solo le prime frequenze di

vibrazione, in questo modo si va a discapito della precisione e nei problemi simmetrici, come nel caso esaminato, non è possibile distinguere in maniera univoca la localizzazione del danno (a destra o a sinistra dell'asse di simmetria). In questi casi, ma è sempre opportuno farlo, è consigliabile l'uso delle forme modali, che in via sperimentale si determinano più difficilmente rispetto alle frequenze, ma danno informazioni migliori. Utilizzando nel confronto anche le forme modali, è possibile determinare in maniera univoca anche la localizzazione del danno.

### **Telai Piani**

Si è esaminato il problema dell'identificazione del danneggiamento strutturale, basato sui cambiamenti delle caratteristiche dinamiche della struttura. Tale metodo si fonda sull'idea che i parametri modali sono una funzione delle caratteristiche fisiche della struttura e, per questo, l'analisi dei loro cambiamenti rappresenta un metodo globale di valutazione della condizione fisica della struttura. Sono state sviluppate alcune metodologie di identificazione del danno e proposti alcuni criteri con le relative applicazioni numeriche al caso dei telai piani.

I criteri proposti sono basati sulla valutazione del: M.A.C., Co.M.A.C, del valore assoluto e del quadrato delle frequenze, dell'ortogonalità dei vettori modali, dell'energia di deformazione e di alcune loro combinazioni. Si sono utilizzati i seguenti metodi di minimizzazione: algoritmi genetici, metodo del gradiente e metrica variabile.

La sperimentazione ha dimostrato che, fra tutti questi parametri, la comparazione delle frequenze naturali, con i modi di vibrare può essere un significativo indice di individuazione e quantificazione del danneggiamento strutturale; a tal proposito si è visto che l'utilizzo contemporaneo di più criteri di confronto fornisce, almeno sperimentalmente, risultati molto confortanti specie se il criterio di confronto è il M.A.C + quadrato delle frequenze e la funzione di errore è ottimizzata attraverso la metrica variabile. Si è visto inoltre, che introducendo, intenzionalmente un errore del 5% distribuito in modo uniforme sui dati modali del modello pseudo-sperimentale, il sistema sviluppato continua a fornire risultati utili.

### **Telai Piani con elementi di disturbo**

Si è esaminata l'influenza dei pannelli di tamponatura nel problema dell'identificazione strutturale in telai piani.

Nella prima parte del lavoro si è definito un modello diretto per la rappresentazione discreta del comportamento del pannello di tamponamento all'interno della maglia del telaio.

La rappresentazione più efficace si è rivelata essere quella che prevede l'inserimento di un puntone equivalente che vada a sostituire la tamponatura e che fornisca risultati che siano quanto più vicini possibile al reale comportamento del telaio tamponato.

Una volta determinata la dimensione dei puntoni da inserire nei diversi telai oggetto di indagine, si è passati alla sperimentazione del metodo di identificazione del danno. Il metodo testato, come già detto, nasce dalla combinazione dei criteri di confronto del quadrato delle frequenze e del M.A.C., utilizzando il metodo della metrica variabile per ricercare il minimo di tale funzione.

Dai risultati dell'analisi, nel caso di modellazione dei telai con una variabile per piano, si sono ottenuti risultati ottimi, con livelli di errore molto bassi. Se si utilizzano due variabili per piano danno su trave e pilastro, si sono ottenuti risultati ancora buoni, ma con livelli di errore leggermente più alti e con la perdita dell'unicità della soluzione.

Si è indagata l'influenza che hanno i modi di vibrazione superiori sull'accuratezza della soluzione, trovando, come ci si attendeva, una progressiva diminuzione dell'errore man mano

che venivano coinvolte le forme modali più alte. Si è introdotto intenzionalmente un errore minore del 5%, uniformemente distribuito sui dati in ingresso, per simulare l'errore strumentale da cui sono inevitabilmente affette le misure. Per il caso di una variabile per piano, l'errore strumentale ha un'influenza irrisoria in assenza di tamponatura, aumenta man mano che si fa più pesante l'influenza del pannello di tamponamento. Nel caso di due variabili per piano si perde l'unicità della soluzione e, in molti casi, il metodo non riesce a trovare valori vicini a quelli esatti.

### **Telai 3D**

Per affrontare le problematiche relative all'identificazione dello stato di danneggiamento di strutture tridimensionali è stata svolta l'analisi su telai 3D. Il problema inverso è stato risolto utilizzando la procedura della metrica variabile associata al quadrato delle frequenze e del M.A.C.

Il criterio di ottimizzazione (ovvero di minimizzazione) è risultato affidabile solo nel caso di una sola variabile per piano, ciò dipende dal fatto che non si creano quelle condizioni di multisoluzione e quindi, i risultati ottenuti sono più che soddisfacenti. Si è osservato che negli edifici con numero di piani elevato la soluzione converge più lentamente ed è affetta da una leggera imprecisione; questo perché il grande numero di variabili cinematiche rende il problema molto complesso e lento nella sua risoluzione. L'introduzione dell'errore fittizio produce, errori ragionevoli anche se superano quelli in ingresso. E' stata, inoltre, analizzata la dipendenza della soluzione dal numero di forme modali prese in considerazione nell'identificazione. Utilizzando solo le informazioni sui primi modi si sono ottenuti comunque, buoni risultati.

Nell'affrontare la seconda tipologia di problema, ovvero, l'introduzione di due variabili di danneggiamento per piano si è notato, principalmente, che il problema di identificazione resta poco sensibile alle variabili associate alle travi, gli errori maggiori vengono attinti proprio in corrispondenza degli elementi orizzontali. L'introduzione di un errore sperimentale conduce a soluzioni affette da errori maggiori rispetto a quelli in ingresso. Infine, si può concludere che per inquadrare bene il problema di identificazione dello "stato di salute" di un edificio in c.a. è sufficiente utilizzare informazioni ridotte.

### **Conclusioni comuni**

Il criterio basato sul confronto tra dati sperimentali e quelli simulati consente, con un'adeguata procedura di minimizzazione, di determinare una mappa delle caratteristiche meccaniche espresse in termini di modello elastico dell'intera struttura e, quindi, di rilevare l'eventuale presenza del danno (espressa in termini di riduzione del modulo elastico). Il processo inverso si traduce in una serie di operazioni dirette, volte a minimizzare la funzione di discrepanza tra i dati che si utilizzano. Se si vuole che i risultati dell'analisi teorica siano di supporto ad indagini di tipo locale da condurre sui singoli elementi (trave e/o pilastro), sarebbe necessario, però, discretizzare il singolo elemento strutturale in tanti elementini la cui grandezza, a meno di non utilizzare la procedura vista nel *continuous damaged*, è tanto più piccola quanto più è concentrato il danno che si vuole rilevare.

La soluzione finale dipende sia dal modello diretto scelto che dal criterio di ottimizzazione, la minimizzazione svolge, in questa ottica, un ruolo fondamentale. Le funzioni di errore, essendo espressioni che derivano da problemi malcondizionati, presentano minimi che sono difficili da localizzare. E' necessario, perciò, capire che tipo di funzione si è generata e

successivamente imporre il miglior metodo, andando semmai a correggere la funzione, regolarizzarla oppure studiandone una più opportuna.

Negli ultimi casi esaminati, la funzione di errore basata sul confronto tra le frequenze e quelle delle forme risulta essere la migliore. Si è poi visto come la minimizzazione della discrepanza valutata sulle sole frequenze o sulle sole forme modali non dia, in generale, buone soluzioni, mentre l'unione di queste informazioni fornisce risultati nettamente migliori. Infine, non tutte le forme e frequenze modali sono necessarie per l'identificazione strutturale, alcune di esse hanno un peso maggiore rispetto ad altre. Le prime forme modali e pulsazioni, infatti, danno informazioni globali migliori rispetto a quelle con frequenza maggiore, e quindi possibile ridurre l'analisi di identificazione alle sole forme modali iniziali; è, però, da stabilire volta per volta quale sia il numero strettamente necessario per ottenere un buon risultato. L'analisi sperimentale di identificazione modale, non può prescindere dal tipo di utilizzo che i suoi risultati avranno, ci si aspetta, quindi, una grossa precisione, specialmente nei primi dati, che, come si è visto, sono più importanti.

A partire dall'identificazione del danno sulla trave fino ad arrivare al caso del telaio tridimensionale, la caratteristica trainante in tutti gli studi è la semplificazione da adottare nei problemi di identificazione strutturale. Nel caso della trave, il tratto danneggiato deve essere unico, nel caso dei telai piani e tridimensionali, si suppone che i parametri che identificano il danno siano gli stessi per gli elementi verticali e per quelli orizzontali appartenenti allo stesso piano. E' da sottolineare come il danno sia una funzione di più variabili: la posizione, l'entità, ma anche la distribuzione. La distribuzione diventa superflua quando è possibile discretizzare la struttura con un numero elevato di elementi, ma quando si utilizzano criteri che compiono un numero notevole di iterazioni, si capisce come sia importante ridurre il numero di gradi di libertà usando una discretizzazione più rada. Per individuare un danno localizzato in un elemento è necessario suddividerlo in più parti, non sapendo però quale sia l'elemento danneggiato, sarà necessario suddividere anche gli altri elementi, incrementando così il numero di variabili da determinare e rendendo il problema maggiormente malcondizionato. Nel caso della trave danneggiata, infatti, è possibile determinare uno stato della trave con due tratti danneggiati che producono gli stessi effetti del caso visto, in questo modo esistono più soluzioni. Allo stesso modo, sui telai piani che in quelli 3D, esiste una distribuzione del danno sui pilastri tale da produrre le stesse frequenze e le stesse forme modali, prodotte da un danno distribuito su tutti i pilastri. In questo modo nell'identificazione del danno nelle strutture tra le infinite distribuzioni del danno se ne sceglie una o una serie finita.

L'ultimo aspetto da sottolineare è quello relativo agli errori sulle soluzioni ottenute. Si tratta di problemi inversi malcondizionati e la soluzione può risultare affetta da errori, anche se si parte da dati precisi. I dati, per loro natura, però, sono affetti da errori, che se da un lato si possono ridurre, dall'altro non si possono eliminare; questi, anche se minimi, si propagano fino ai risultati finali. Per ogni caso di identificazione, dunque, è necessario definire il loro peso sulla soluzione finale. La scelta delle funzioni obiettivo da minimizzare, il numero di dati da usare e il criterio di ottimizzazione sono legati a tale problematica e devono essere tali da ridurre gli effetti degli errori sulla soluzione finale.

Per tutti i casi esaminati si è valutata la propagazione degli errori sui risultati finali, generando in maniera random i dati rispetto a quelli in ingresso. In alcuni casi l'errore finale è paragonabile a quello iniziale e in quelli con molte variabili l'errore finale cresce ottenendo soluzioni non valide.



## BIBLIOGRAFIA

### Capitolo 1

- [1] Rytter A. (1993): “Vibration based inspection of civil engineering structures”, Ph. D.Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [2] Doebling S. W., Farrar C. R., Prime M. B. and Shevitz D. W. (1996): “Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics: A Literature Review”, Los Alamos National Laboratory report LA-13070-MS.
- [3] Stubbs N. and R. Osegueda (1990): “Global Damage Detection in Solids–Experimental Verification”, *Modal Analysis, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*.
- [4] Hearn G. and R.B. Testa (1991): “Modal Analysis for Damage Detection in Structures”, *Journal of Structural Engineering*, 117(10), 3042–3063.
- [5] Richardson M.H. and M.A. Mannan (1992): “Remote Detection and Location of Structural Faults Using Modal Parameters”, in *Proc. of the 10th International Modal Analysis Conference*, 502–507.
- [6] Yuen M.M.F. (1985): “A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever”, *Journal of Sound and Vibration*, 103, 301–310.
- [7] Kam T.Y. and T.Y. Lee (1992): “Detection of Cracks in Structures Using Modal Test Data”, *Engineering Fracture Mechanics*, 42(2), 381–387.
- [8] Salawu, O.S., (1995): “Nondestructive Assessment of Structures Using the Integrity Index Method Applied to a Concrete Highway Bridge”, *Insight*, 37(11), 875–878.
- [9] Pandey A.K., M. Biswas, and M.M. Samman (1991): “Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes”, *Journal of Sound and Vibration*, 145(2), 321–332.
- [10] Stubbs N., J.-T. Kim and K. Topole (1992): “An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms”, in *Proc. ASCE Tenth Structures Congress*, 543–546.

- [11] Dong C., P.Q. Zhang, W.Q. Feng and T.C. Huang (1994): “The Sensitivity Study of the Modal Parameters of a Cracked Beam”, in Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference, 98–104.
- [12] Aktan, A.E., K.L. Lee, C. Chuntavan and T. Aksel (1994): “Modal Testing for Structural Identification and Condition Assessment of Constructed Facilities”, in Proc. of 12th International Modal Analysis Conference, 462–468.
- [13] Mayes R.L. (1995): “An Experimental Algorithm for Detecting Damage Applied to the I-40 Bridge over the Rio Grande”, in Proc. 13th International Modal Analysis Conference, 219–225.
- [14] Lin, C. S. (1990): “Location of Modeling Errors Using Modal Test Data”, AIAA Journal, 28, 1650–1654.
- [15] Lin, C.S. (1994): “Unity Check Method for Structural Damage Detection”, in Proc. of 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 347–354, AIAA-94-1717-CP.
- [16] He J. and D.J. Ewins (1986): “Analytical Stiffness Matrix Correction Using Measured Vibration Modes”, Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 1(3), 9–14.
- [17] Gysin H.P. (1986): “Critical application of an Error Matrix Method for Location of Finite element Modeling Inaccuracies”, in Proc. of the 4th International Modal Analysis Conference, 1339–1351.
- [18] Doebling S.W., L.D. Peterson, and K.F. Alvin (1995): “Measurement of Static Flexibility Matrices for Experiments with Incomplete Reciprocity”, in Proc. of 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2777–2791, AIAA-95-1092-CP.
- [19] Doebling S.W. (1995): “Measurement of Structural Flexibility Matrices for Experiments with Incomplete Reciprocity”, University of Colorado, Boulder, CO, Department of Aerospace Engineering Sciences, CU-CAS-95-10.
- [20] Doebling S.W. (1996): “Damage Detection and Model Refinement Using Elemental Stiffness Perturbations with Constrained Connectivity”, in Proc. of the AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum, 360–370, AIAA-96-1307.
- [21] Doebling S.W., L.D. Peterson, and K.F. Alvin (1996): “Estimation of Reciprocal Residual Flexibility from Experimental Modal Data”, AIAA Journal.



- 
- [22] Salawu O.S. and C. Williams (1993): “Structural Damage Detection Using Experimental Modal Analysis—A Comparison of Some Methods”, in Proc. of 11th International Modal Analysis Conference, 254–260.
- [23] Ojalvo I.U. and D. Pilon (1988): “Diagnostics for Geometrically Locating Structural Math Model Errors from Modal Test Data”, in Proc. of 29th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 1174–1186.
- [24] Smith S.W. and C.A. Beattie (1991): “Model Correlation and Damage Location for Large Space Truss Structures: Secant Method Development and Evaluation”, NASACR-188102.
- [25] Zimmerman D.C., S.W. Smith, H.M. Kim and T.J. Bartkowicz (1996): “Spacecraft Applications for Damage Detection Using Vibration Testing”, in Proc. of the 14th International Modal Analysis Conference, 851–856.
- [26] Hemez F.M. (1993): “Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures”, Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, CO.
- [27] Kaouk M. (1993): “Finite Element Model Adjustment and Damage Detection Using Measured Test Data”, Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Mechanics and Engineering Science, Univ. of Florida, Gainesville, FL.
- [28] Baruch M. and I.Y. Bar Itzhack (1978): “Optimum Weighted Orthogonalization of Measured Modes”, AIAA Journal, 16(4), 346–351.
- [29] Kabe A.M. (1985): “Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data”, AIAA Journal, 23(9), 1431–1436.
- [30] Lindner D.K. and R. Goff (1993): “Damage Detection Location and Estimation for Space Trusses”, SPIE Smart Structures and Intelligent Systems, 1917, 1028–1039.
- [31] Liu P.-L. (1995): “Identification and Damage Detection of Trusses using Modal Data”, Journal of Structural Engineering, 121(4), 599–608.
- [32] Zimmerman D.C. and M. Kaouk (1994): “Structural Damage Detection Using a Minimum Rank Update Theory”, Journal of Vibration and Acoustics, 116, 222–230.
- [33] Hemez F.M. (1993): “Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures”, Ph. D.

Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, CO.

- [34] Norris M.A. and L. Meirovitch (1989): “On the Problem of Modeling for Parameter Identification in Distributed Structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2451–2463.
- [35] Ricles J.M., (1991): “Nondestructive Structural Damage Detection in Flexible Space Structures Using Vibration Characterization”, NASA report CR-185670.
- [36] Lim T.W., (1994): “Structural Damage Detection of a Planar Truss Structure Using a Constrained Eigenstructure Assignment”, *Structural Dynamics and Materials Conf. in Proc. of 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures*, 336–346, AIAA-94-1715-CP.
- [37] Bishop C.M., (1994): “Neural Networks and Their Applications”, *Review of Scientific Instrumentation*, 65(6), 1803–1832.
- [38] Ni Y.Q., B.S.Wang, J.M. Ko, (2002): “Constructing input vectors to neural networks for structural damage identification”, *Institute of physics publishing. Smart Materials and Structures. Struct.* 11 825–833.

## **Capitolo 2**

- [39] Herrera Sanchez J.C., (2005): Tesi di dottorato, “Evaluation of structural damage identification methods based on dynamic characteristics”. University of Puerto Rico Mayaguez Campus.
- [40] Jaishi B., (2005): Tesi di dottorato, “Finite element model updating of civil engineering structures under operational conditions”. Fuzhou University.
- [41] Ewins D. J., (1984): “Modal Testing: Theory and Practice”, John Wiley and Sons, New York.
- [42] Stubbs N., T.H. Broome and R. Osegueda, (1990): “Non destructive Construction Error Detection in Large Space Structures”, *AIAA Journal*, 28(1), 146–152.
- [43] Stubbs N. and R. Osegueda, (1990): “Global Non-Destructive Damage Evaluation in Solids”, *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 5(2), 67–79.
- [44] Lim T.W. and T.A.-L. Kashangaki, (1994): “Structural Damage Detection of Space Truss Structure Using Best Achievable Eigenvectors”, *AIAA Journal*, 32(5), 1049–1057.

- 
- [45] Lim, T.W., (1995): “Structural Damage Detection Using Constrained Eigenstructure Assignment”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(3), 411–418.
- [46] Zonta D., (2000): Tesi di dottorato, “Structural damage detection and localization by using vibrational measurements”. DISTART Università degli Studi di Bologna Italia.
- [47] Doebling S.W., C.R. Farrar, M.B. Prime, D.W. Shevitz, (1996): “Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review”. LA-13070-MS. UC-900.
- [48] Vestroni F., D. Capecchi, (1996): “Damage evaluation in cracked vibrating beams using experimental frequencies and finite element models”. *J. of Vibration and Contr.*, 2, 69-86.

### Capitolo 3

- [49] Hassiotis S., (1998): “Identification of damage using natural frequencies and Markov parameters”. Tampa, USA.
- [50] Yuen M.M.F., (1985): “A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever”, *Journal of Sounds and Vibrations*, 103, 301-310.
- [51] Ziaei Rad S., (1997): Tesi di dottorato: “Methods for updating numerical models in structural dynamics”, Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine, London.
- [52] Walter Salvatore, (2004): “Metodologie sperimentali dinamiche per la verifica strutturale di edifici esistenti”, Seminario: La sicurezza delle costruzioni in zona sismica: dagli stati limite all'affidabilità strutturale, Salerno.
- [53] Guglielmo Alberto, (2004): Tesi di laurea: “Caratterizzazione dinamica del telaio del Monster S4R”, Facoltà di Ingegneria, Università degli studi di Pisa.
- [54] Alessandro Rivola, “Misure di vibrazione e analisi modale”, dispense del corso di Dinamica delle Macchine e dei Sistemi Meccanici, Università degli studi di Bologna, II Facoltà di Ingegneria - sede di Forlì.
- [55] Ziaei Rad S., (1997): Tesi di dottorato: “Methods for updating numerical models in structural dynamics”. Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine London.

### Capitolo 4

- [56] Di Pillo, L. Palagi, G., (2001): “Nonlinear Programming: Introduction, Unconstrained and Constrained Optimization” Dip. di Informatica e Sistemistica Università degli Studi di Roma “La Sapienza”, Tech. Rep. 25-01.
- [57] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, (1988): “Numerical recipes in C.”, Cambridge University Press,.
- [58] Hongwei Jiao, Yunrui Guo, Peiping Shen, (2006): “Global optimization of generalized linear fractional programming with nonlinear constraints”. Applied Mathematics and Computation 183 717–728.
- [59] Gabor Renner, Anikò Ekart, (2003): Genetic algorithms in computer aided design, Computer-Aided Design 35 709–726.
- [60] P. Pedegral. (2004): “Introduction to optimization”, Springer-Verlag, New York, Inc.
- [61] Singeresu S.RAO, (1996): “Engineering Optimization, Theory and Practice, Third Edition”. John Wiley & Sons, Inc.
- [62] Edwin K.P. Chong, Stanislaw H. Zak. (2001): “An Introduction to Optimization, Second Edition”. John Wiley & Sons, Inc.
- [63] S. Vob, D. L. Woodruff. (2006): “Introduction To Computational Optimization Models for Production Planning in a Supply Chain, Second Edition”. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Inc.
- [64] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemarechal, C. A. Sagastizabal. (2006): “Numerical Optimization, Theoretical And Practical Aspects, Second Edition”. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Inc.
- [65] J. Jahn. (2007): “Introduction To The Theory Of Nonlinear Optimization, Third Edition”. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, Inc.
- [66] Whitley D., (1991): “A Genetic Algorithm Tutorial”, Colorado Advanced Software Insitute IRI 9010-456.

## **Capitolo 5**

- [67] Pei-Ling Liu (1995): “Identification and damage detection of trusses using modal data”, Journal of structural engineering. 121, No. 4. 599-608.
- [68] Chee Kiong Soh, Yue Xing Dong (2001): “Evolutionary programming for inverse problems in civil engineering”, Journal of computing in civil engineering. 144-150.

- [69] S. Choi, N. Stubbs. (2004): "Damage identification in structures using the time domain response", *Journal of Sound and Vibration*, 275, 577-590.
- [70] A. Alvandi, C. Cremona. (2006): "Assessment of vibration-based damage identification techniques", *Journal of Sound and Vibration*, 292, 179-202.
- [71] M. Dilella, A. Morassi. (2006): "Damage detection in discrete vibrating systems", *Journal of Sound and Vibration*, 289, 830-850.
- [72] Bijaya Jaishi, Wei-Xin Ren. (2006): "Damage detection by finite element model updating using modal flexibility residual", *Journal of Sound and Vibration*, 290, 369-387.
- [73] B. Li, X. F. Chen, J. X. Ma, Z. J. He (2005): "Detection of crack location and size in structures using wavelet finite element methods", *Journal of Sound and Vibration*, 285, 767-782.
- [74] O.S. Salawu. (1997): "Detection of structural damage through changes in frequency: a review", *Engineering structures*, 19 No. 9, 718-723.
- [75] B.P. Nandwana, S.K. Maiti (1997): "Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, 203(3), 435-446.
- [76] M. N. Cerri, F. Vestroni (2000): "Detection of damage in beams subjected to diffused cracking", *Journal of Sound and Vibration*, 234(2), 259-276.
- [77] S. Chinchalkar (2001): "Determination of crack location in beams using natural frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, 247(3), 417-429.
- [78] Hai-Ping Lin (2004): "Direct and inverse methods on free vibration analysis of simply supported beams with a crack", *Engineering Structures*, 26, 427-436.
- [79] Trisha Sain, J.M. Chandra Kishen, A.M. ASCE (2006): "Damage assessment in beams using inverse method", *Journal of Engineering Mechanics*, 132 No.4, 377-344.
- [80] S.S. Law, Z.R. Lu (2005): "Crack identification in beam from dynamic response", *Journal of Sound and Vibration*, 285, 967-987.
- [81] M. Dilella, A. Morassi (2002): "Identification of crack location in vibrating beams from changes in node positions", *Journal of Sound and Vibration*, 255(5), 915-930.
- [82] Jeong Tae Kim, Yeon-Sun Ryu, Hyun-Man Cho, Norris Stubbs (2003): "Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method", *Engineering Structures*, 25, 57-67.

- [83] Ruotolo R., C. Surace, (1997): "Damage assessment of multiple cracked beams: numerical results and experimental validation". *Journal of Sound and Vibration*, 206(4), 567-588.
- [84] A. Tarantola (2005): "Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation". SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [85] Jung Huai Chou, Jamshid Ghaboussi (2003): "Genetic algorithm in structural damage detection", *Computers and Structures* 79, 1335-1353.
- [86] M. Ananda Rao, J.Srinivas, B.S.N. Murthy (2004): "Damage detection in vibrating bodies using genetic algorithms", *Computers and Structures* 82, 963-968.

## **Capitolo 6**

- [87] Lieven N. A. J. and D. J. Ewins, (1988): "Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)", *Proc. of the 6th IMAC*, 690-695, Kissimmee, Florida.
- [88] Shi Z. Y., S. S. Law, L.M. Zhang (1998): "Structural damage localization from modal strain energy change", *Journal of Sound and Vibration* -218(5) - 825 - 844. Article N° sv870767, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Republic of China.
- [89] Ratnam C., D. Parameswara Rao, (2005): "Identification of Damage in Structures using Genetic Algorithms", Department of Mechanical Engineering, University College of Engineering, Andhra University",. *IE (I) Journal MC*.
- [90] Lisiskai T. R., A.M. Raich, (2005): "Solving Inverse Problems in Structural Damage Identification Using Advanced Genetic Algorithm Representations". 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization Rio de Janeiro, 30 May - 03 June Brazil.
- [91] Betement M.T., C.R. Farrar (2000): "Issues for the application of statistical models in damage detection", Engineering Analysis Group, Los Alamos National Laboratory, N.M. U.S.A.: Presented at IMAC 18, Feb 7-10, San Antonio, Texas.
- [92] Hu X., H. W. Shenton (2002): "Structural Damage Identification Using Static Dead Load Strain Measurements", 15th ASCE Engineering Mechanics Conference June 2-5, Columbia University, New York.

- [93] Brasiliano A., G. N. Doz, J.L. De Brito, (2004): "Damage identification in continuous beams and frame structures using the Residual Error Method in the Movement Equation" Department of Civil and Environmental Engineering, University of Brasilia, Nuclear Engineering and Design 227 1–17.
- [94] Wu J.R., Q.S. Li, (2006): "Structural parameter identification and damage detection for a steel structure using a two-stage finite element model updating method". Journal of Constructional Steel Research 62 231–239.
- [95] Zembatya Z., M. Kowalskya, S. Pospisilb, (2006): "Dynamic identification of a reinforced concrete frame in progressive states of damage". Engineering Structures 28 668–681.
- [96] Yun C.B., J.Yi, E.Y. Bangh, (2001): "Joint damage assessment of framed structures using a neural networks technique". Engineering Structures 23 425–435.
- [97] Abdel Wahab M.M., G. De Roeck (1999): "Damage Detection in Bridges Using Modal Curvatures: Application to a Real Damage Scenario". Journal of Sound and vibration 226(2), 217-235.

## Capitolo 7

- [98] S. Biondi, F. Colangelo e C. Nuti, (2000): "La risposta sismica dei telai con tamponature murarie", CNR - Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti - Roma, 179 pp.
- [99] P. Benson Shing and Armin B. Mehrabi, (2002): "Behaviour and analysis of masonry-infilled frames", Prog. Struct. Engng Mater. 4:320-331.
- [100]Klingner R.E. & Bertero V.V., (1976): "Infilled frames in earthquake-resistant construction", Report EERC/76-32, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkley, CA, USA.
- [101]Klingner R.E. & Bertero V.V., (1978): "Earthquake resistance of infilled frames", Journal of the Structural Division, ASCE 104:973-89.
- [102]Bertero V.V. & Brokken S., (1983): "Infills in seismic resistant building", Journal of Structural Engineering, ASCE, 109(6):1337-1361.
- [103]Stafford Smith B., (1996): "Behaviour of square infilled frames", Journal of Structural Division, ASCE; 92(1): 381-403.

- [104] Mainstone R.J. & Weeks G.A., (1970): “The influence of bounding frame on the racking stiffness and strength of brick walls”, *Proceeding of the 2nd international Conference on Brick Masonry*, Stoke-on-Trent, UK, 165-171.
- [105] Harpal Singh, D.K. Paul, V.V. Sastry, (1998): “Inelastic dynamic response of reinforced concrete infilled frames”, *Computers and Structures* 69 685-693.
- [106] P.G. Asteris (2003): “Lateral stiffness of brick masonry infilled plane frames”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, August: 1071-1079.
- [107] M. Papia (1988): “Analysis of infilled frames using a coupled finite element and boundary element solution scheme”, *Int. J. Numerical Meth. in Engrg.*, Vol 26, pp 731-772.
- [108] M. Papia, L. Cavaleri, (2001): “Effetto irrigidente dei tamponamenti nei telai in c.a.”, *Atti della 2° conferenza plenaria*, Firenze, pp. 85-94, Ed. Politecnico di Milano.
- [109] K.J. Bathe, (1982): “*Finite Elements Procedure*”, Prentice Hill.
- [110] J.N. Reddy, (1993): “*An introduction to the finite element method, second edition*”, McGraw Hill.
- [111] Varano P. (2006): *Tesi di Laurea: “Utilizzo dei metodi inversi per la determinazione del danno in telai piani”*, Università degli Studi della Calabria, Facoltà di Ingegneria.

## **Capitolo 8**

- [112] Doebling S.W., C.R. Farrar, M.B. Prime, (1999): “Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods”.
- [113] Farrar C.R., T.A. Duffey, S.W. Doebling, D.A. Nix, (1999): “A Statistical Pattern Recognition Paradigm for Vibration-Based Structural Health Monitoring”. 2nd International Workshop on Structural Health Monitoring Stanford, CA Sept 8-10.
- [114] Ferrara L., P. Negro, (2003): “Seismic Behaviour of reinforced concrete industrial buildings report of the test 4 July”, Politecnico di Milano Italy (ELSA Laboratory - ISPRA).
- [115] Gorl E., M. Link (2001): “Identification of damage parameters of a full-scale steel structure damaged by seismic loading”. Institute of physics publishing. *Smart Mater. Struct.* 10 459–465.
- [116] Fritzen C.P., K. Bohle, (2001): “Application of model-based damage identification to a seismically loaded structure”, *Smart Mater. Struct.*, Department of Mechanical



- 
- Engineering, University of Siegen, Germany, Institute of physics publishing. 10 452–458.
- [117] Stubbs N., T.H. Broome and R. Osegueda, (1990): “Non destructive construction error detection in large spaces structures”, *AIAA journal*, 28(1), 146-152.
- [118] C. Gentile, A. Saisi. (2007): “Ambient vibration testing of historic masonry towers for structural identification and damage assessment”. *Construction and Building Materials* 21 1311–1321.
- [119] A. De Sortis, E. Antonacci, F. Vestroni, (2005): "Dynamic identification of a masonry building using forced vibration tests", *Engineering Structures* 27 155–165.
- [120] G.A. Papagiannopoulos, D.E. Beskos, (2006): “On a modal damping identification model of building structures”, *Arch Appl Mech* 76: 443–463.
- [121] Y.-T SHIH, A.C. LEE, J.-H. CHEN. (1998): “Sensor And Actuator Placement Formodal Identification”, *Mechanical Systems and Signal Processing* 12(5), 641-659.
- [122] R. Camillacci, S. Gabriele, (2005): “Mechanical identification and model validation for shear type frames”, *Mechanical Systems and Signal Processing* 19 597–614.
- [123] J. B. Bodeux, J. C. Golinval, (2001): “Application of ARMAV models to the identification and damage detection of mechanical and civil engineering structures”, *Smart Materials And Structures*, 10 479–489.
- [124] Bursi O.S., J. Molina, W. Salvatore, F. Taucer, (2004): “Dynamic characterization of a 3-D full scale steel-concrete composite building at ELSA”.



## Ringraziamenti

Alla fine di un viaggio, dove ogni una cosa finisce ma tante nuove hanno inizio, c'è sempre un attimo intenso dove ti volti e rivivi istantaneamente ogni cosa sia essa buona, sia essa negativa, vissuta e provata, dal gesto più semplice all'aiuto più grande, dall'incoraggiamento giornaliero al sorriso di ogni giorno, a quanti hanno collaborato direttamente ed indirettamente affinché io potessi raggiungere questo risultato.

Anche se il termine risulta riduttivo, ringrazio prima di tutto la mia GRANDE FAMIGLIA nella quale si trovano gli affetti più ricchi, gli stimoli per proseguire nel cammino e i migliori insegnamenti della vita. Ringrazio mia Mamma Antonia simbolo di saggezza e spirito da imitare, mia Sorella Liberata e i Fratelli Nicola e Domenico, le guide continue nella strada che è stata e che verrà.

I momenti intensi che sono trascorsi hanno lasciato tracce indelebili sui tempi che verranno, hanno prima di tutto lasciato le grandi amicizie. A Roberto rivolgo il mio più affettuoso ringraziamento, per ogni fraterno minuto passato insieme e per ogni piccola grande crescita fatta. Ringrazio Pasquale per la sua sapiente e disarmante umanità. Loro sono le essenze delle rispettive famiglie, di ognuna vado fiero di averle conosciute. Loro da cui ho imparato e da cui imparerò.

Ringrazio gli amici di casa, molti sono ancora qui, alcuni di loro sono partiti, ringrazio Sonny, Simone, Francesco "Oriolo", Antonio "Montalbano", Francesco Antonio e se la porta del mio appartamento è sempre aperta come non ringraziare quanti l'hanno varcata passando momenti di serenità con me.

Ringrazio il Prof. Raffaele Zinno, persona di grande umanità e smisurato impegno, per avermi caparbiamente coinvolto nel progetto di ricerca fin qui sviluppato, affiancandomi e offrendomi piena fiducia in ogni passo di questo percorso.

Ringrazio Giovanna grande e valorosa compagna di questo viaggio; non solo abbiamo condiviso lo spazio nel nostro ambiente di lavoro ma ogni momento di difficoltà e di grande soddisfazione, di certo numerosi ed intensi.

Ringrazio tutti i membri del collegio dei docenti del dottorato di Meccanica Computazionale che mi sono stati vicini in questi anni, offrendomi preziosi suggerimenti.

Ringrazio inoltre Vincenzo, Manuela, Giuseppe Fortunato ed Eugenia insostituibili amici.

Come non rivolgere un sentito pensiero di gratitudine verso i tecnici di laboratorio e non: ing. Sposato, ing. Ciro, dott.sa Marino, ing. Fuoco, con loro ho assaporato la bellezza della sperimentazione e ho, invece, superato gli ostacoli.

Ringrazio infine la vera amicizia, quella SINCERA, ringrazio quella vicina e quella lontana, ringrazio quella vecchia che è durata inalterata, anzi, sempre in crescita in tutti questi anni, quella nuova consapevole che nella sincerità in cui è nata maturerà e diventerà ancora più forte.

GRAZIE.