

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA
DOTTORATO DI RICERCA
IN
INGEGNERIA DEI MATERIALI E DELLE STRUTTURE
XXI CICLO

Settore Scientifico Disciplinare ICAR/08

**PROBLEMI DI DANNEGGIAMENTO NEI MATERIALI
COMPOSITI A FIBRA CORTA**

Tesi presentata per il conseguimento del titolo di
Dottore di Ricerca in Ingegneria dei Materiali e delle Strutture

Dottorando
Pasquale PEDACE

Coordinatore del Corso di Dottorato
Prof. Renato Sante OLIVITO

Tutors del Candidato
Ing. Paolo LONETTI
Prof. Bertrand WATTRISSE

Università degli studi della Calabria
Dipartimento di Strutture
Novembre 2009

*“Everything should be made as simple as possible,
but not simpler.”.*

- Albert EINSTEIN

RINGRAZIAMENTI

Questa tesi di dottorato è stata svolta nell'ambito del XXI ciclo del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dei Materiali e delle Strutture, presso il Dipartimento di Strutture dell'Università degli Studi della Calabria.

Il compimento di questo lavoro non può non suggerirmi un profondo segno di stima e riconoscenza verso alcune persone che hanno avuto un ruolo importante nella mia formazione culturale e umana durante questi anni di studi e ricerche. Ad essi desidero rivolgermi attraverso queste righe.

Un primo, doveroso ringraziamento è rivolto al Prof. Domenico Bruno per tutte le possibilità che mi ha offerto in questi anni. Nella sua persona ho riconosciuto lo spessore di un Maestro dall'elevata caratura ingegneristica ed un'ammirevole forza e sicurezza interiori.

All'Ing. Paolo Lonetti non voglio solo esprimere la mia riconoscenza per tutte le virtù che riconosco al mio tutore, ma soprattutto per l'infinita pazienza mostrata verso le mie discontinuità emotive e professionali.

Un ringraziamento particolare è rivolto al Prof. Fabrizio Greco, per essere sempre stato un punto di riferimento sicuro nel corso di questi anni.

Al collega ed amico Ing. Paolo Nevone Blasi, che mi ha onorato di partecipare ad uno dei momenti formativi più importanti della mia vita, desidero esprimere la mia gratitudine per l'accoglienza fraterna che mi ha offerto durante gli studi nel corso della calda estate 2008.

Il periodo di formazione all'estero mi ha permesso di incontrare persone straordinarie ed indimenticabili. Primo fra tutti il Prof. André Chrysochoos, che mi ha accolto con immenso affetto nel suo gruppo di ricerca, mettendomi a disposizione tutto quello di cui ho avuto bisogno. Egli, con il suo indescrivibile calore umano, mi ha sempre aperto la porta del suo studio, all'interno del quale ho trovato risposte esaurienti a domande scientifiche ed un amico sensibile e premuroso nei momenti difficili.

In secondo luogo desidero ringraziare il Prof. Bertrand Wattrisse per la continua

disponibilità manifestata nei miei confronti e per avermi fatto partecipe della sua lodevole cultura accademica. In lui ho riconosciuto l'umiltà dei Grandi.

Un ringraziamento speciale lo voglio rivolgere a Stéphane Pagano, Loïc Daridon, Vincent Huon, David Dureisseix e Franck Jourdan, per tutto quello che ho imparato lavorando con loro.

Ai miei genitori e a mia sorella Jessica, esprimo riconoscenza ed un profondo bene per l'incommensurabile sostegno che, incondizionatamente, mi hanno sempre donato.

Desidero dedicare una speciale espressione di gratitudine a tutti i colleghi ed amici incontrati a Montpellier, per avere contribuito alla mia serenità nel corso del mio anno di permanenza in Francia. Ciascuno di essi, a suo modo, mi ha donato momenti speciali ed irripetibili: l'amico ed ingegnere Andrea Trovato, Chantal, Cristina, Chiara, Bruno Berthel, Vincent Richefeu, Félix, Silvère, Julien Colmars, Bertrand Marcon, Jana, Chang Chang, Mamadou, Riccardo, Alejandra, Baptiste, Jian.

Infine rivolgo un ringraziamento al Gruppo Utilizzatori Italiani di $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ e $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, per l'inestimabile patrimonio messo a disposizione di tutti.

Pasquale PEDACE

Novembre 2009

Indice

Sommario	1
Abstract	3
Introduzione	5
1 La Correlazione delle Immagini Digitali	17
1.1 Introduzione delle immagini digitali nella Meccanica dei Materiali . . .	17
1.2 La termografia a raggi infrarossi	18
1.3 La tecnica di correlazione delle immagini digitali	19
1.4 Grandezze meccaniche nelle trasformazioni finite	20
1.4.1 Richiami di meccanica delle trasformazioni finite	20
1.5 Dispositivo sperimentale utilizzato	25
1.5.1 Principio di funzionamento e caratteristiche della camera C.C.D.	26
1.5.2 Aspettative nelle caratteristiche del metodo	27
1.5.3 Il metodo granulare in luce bianca	29
1.6 La Correlazione delle immagini digitali	30
1.6.1 Scelta dei valori della Z_C e della Z_R	35
1.7 Calcolo della componente di spostamento fuori piano	36
1.8 Il problema del calcolo delle derivate	38
1.9 Caratteristiche dell'ottica utilizzata	41
1.10 La validazione del metodo	42
1.10.1 Controllo degli spostamenti nel piano	43
1.10.2 Controllo e sensibilità del metodo per diverse condizioni di spostamento	44
2 Problemi Inversi: stato dell'arte e metodo di identificazione utiliz-	47
zato	47
2.1 Intoduzione ai Problemi Inversi	47

2.2	Equazioni generali nei Problemi Inversi	48
2.2.1	Equazioni fondamentali dell'elasticità	48
2.2.2	Il principio dei lavori virtuali	50
2.2.3	Le formulazioni variazionali	51
2.3	Il problema diretto	52
2.4	Il problema dell'identificazione	52
2.4.1	L'approccio <i>FEMU</i>	54
2.4.2	Il metodo del GAP nelle equazioni costitutive	56
2.4.3	Il metodo dei campi virtuali	58
2.4.4	Il metodo del GAP all'equilibrio	61
2.4.5	Il reciprocity GAP method	62
2.5	Scelta del modello e metodo di identificazione utilizzato	63
2.5.1	Robustezza del metodo e scelta dei parametri di filtraggio	71
3	Meccanica del danneggiamento continuo	81
3.1	Principi generali	81
3.2	Principio di equivalenza della deformazione	89
3.3	Principio di equivalenza della tensione	91
3.4	Principio di equivalenza dell'energia elastica	91
3.5	Alcuni richiami di termodinamica	92
3.5.1	Le variabili interne	94
3.5.2	Il potenziale termodinamico	94
3.5.3	Il potenziale di dissipazione e le leggi di stato	96
3.6	Variabili di danneggiamento e plasticità	98
3.7	Modello Costitutivo	101
3.8	Superficie di danneggiamento	102
3.9	Superficie di plasticità	103
4	Algoritmo di soluzione ed implementazione agli EF del modello	105
4.1	Metodi numerici nello studio del danneggiamento	105
4.1.1	Approccio disaccoppiato	107
4.1.2	Approccio accoppiato	108
4.2	Algoritmo di soluzione	110
4.3	Implementazione agli elementi finiti	114
5	Applicazioni e Risultati	119
5.1	Introduzione	119
5.2	Applicazioni sperimentali	120

Indice

5.2.1	Costruzione dello stato di tensione locale	123
5.2.2	Prova monotona di trazione	126
5.2.3	Prova ciclica uniassiale	141
5.2.4	Applicazione del metodo di identificazione inverso	156
5.3	Validazione del modello	161
6	Conclusioni	173
	Bibliografia	176

Sommario

LO scopo del presente lavoro di tesi è costituito essenzialmente da uno studio sperimentale e teorico dei fenomeni di localizzazione all'interno del materiale composito PA66: un materiale composito a matrice polimerica e fibre corte di vetro a dispersione random. La caratterizzazione del materiale è avvenuta indagandone la risposta sperimentale sotto carico e le proprietà meccaniche attraverso un metodo di identificazione inverso. Successivamente è stato proposto un modello teorico in grado di simularne il comportamento sotto condizioni di carico simili a quelle sperimentali, e sono stati confrontati i risultati ottenuti nei due ambiti.

I fenomeni di localizzazione nei materiali compositi sono da attribuire ai processi di degradazione generati dai cambiamenti microstrutturali. Tali cambiamenti sono responsabili di modalità di danneggiamento tipiche, provocate dalle degradazioni delle fibre, della matrice o dell'interfaccia tra la matrice e le fibre.

Nel capitolo 1 è stata illustrata la tecnica sperimentale utilizzata per le prove di laboratorio e la successiva analisi dei dati. Tale tecnica è nota in letteratura come Correlazione delle Immagini Digitali e fa uso di strumenti avanzati per la ripresa, ad elevata frequenza, di immagini granulari sequenziali della superficie del campione sottoposto a prove meccaniche. La possibilità di integrare tali strumenti avanzati, che non richiedono il contatto con il corpo da indagare e metodologie computazionali capaci di sfruttare le potenzialità dei microcalcolatori attualmente disponibili, rende possibile misurare in maniera accurata tutte le grandezze cinematiche necessarie a descrivere il processo evolutivo del materiale fino al suo stato ultimo.

Una sintesi dei metodi di identificazione inversi, disponibili in letteratura, è stata discussa nel capitolo 2, all'interno del quale è stato altresì descritto il metodo inverso utilizzato in questa tesi. Tale metodo è integrabile nel contesto del metodo del GAP nelle equazioni costitutive. Nello stesso capitolo è stata indagata la robustezza del metodo, conducendo un'analisi di ottimizzazione dei parametri di filtering. Il metodo di identificazione inverso è stato implementato in un programma agli elementi finiti, per applicare la metodologia di identificazione ai risultati sperimentali ottenuti dalle

prove di laboratorio.

La valutazione dei fenomeni di danneggiamento e di plasticità è stata affrontata nel contesto della Meccanica del Danneggiamento Continuo, in cui il danneggiamento è definito in funzione delle microfrazture e dei vuoti presenti nel materiale. Nel capitolo 3 si riporta una descrizione dei meccanismi di danneggiamento, introducendo componenti di degradazione intralaminare, ed ipotizzando una risposta isotropa del materiale. Le condizioni di formazione e di crescita delle microfrazture sono state formulate attraverso un dominio di danneggiamento, la cui frontiera rappresenta la zona di separazione tra le parti elastica ed anelastica. L'evoluzione del danneggiamento è stata descritta facendo uso di un approccio incrementale-iterativo basato sulla metodologia delle variabili interne. In particolare, al fine di stimare lo stato di danneggiamento nel materiale sono stati definiti opportuni domini di danneggiamento e leggi di evoluzione dipendenti da un numero minimo di parametri del materiale. La descrizione delle deformazioni plastiche fa uso di una formulazione associata, nella quale il dominio ed il potenziale di dissipazione sono rappresentati nel sistema di riferimento effettivo. In questo modo è stato realizzato un accoppiamento, in senso termodinamico, tra i fenomeni di danneggiamento e di plasticità. All'interno del capitolo 4 è stato descritto l'algoritmo utilizzato per l'integrazione delle equazioni relative al danneggiamento ed alla plasticità. Il modello costitutivo è stato implementato per mezzo di una formulazione agli elementi finiti, per ottenere soluzioni compatibili con quelle sperimentali per geometria e condizioni di carico. I parametri introdotti nelle equazioni costitutive sono stati in parte ricavati dalle prove sperimentali ed in parte ricavati da un'analisi bibliografica.

I risultati delle prove sperimentali, analizzati con la tecnica della correlazione delle immagini digitali sono stati riportati nel capitolo 5. In tale capitolo sono discussi i fenomeni di localizzazione, evidenziati dalle grandezze cinematiche misurate, ed i risultati della procedura di identificazione, tramite la quale è stata effettuata anche una stima del danneggiamento subito dal materiale PA66 nel corso della prova monotona di carico. Nello stesso capitolo viene proposto un confronto tra i risultati sperimentali e quelli numerici, al fine di valutare l'accuratezza e l'affidabilità del modello teorico proposto.

Abstract

THE aim of the present work is to propose an experimental and theoretical investigation on the localization phenomena produced in the PA66 short glass fibre polyamide composite material. Experimental response under tensile test are developed to identify the mechanical properties of the material by means of an inverse method. Moreover, a theoretical formulation is developed to predict the material response under monotonic or cyclic loading conditions. The thesis is composed of five fundamental chapters.

The localization phenomena in composite materials are affected by degradation processes produced by changes of the microstructures. Such changes give rise to typical damage states, which can be attributed to fiber breaks, matrix cracking, fiber/matrix debonding, and so on, all of which decrease the integrity of the material.

In chapter 1, the experimental technique used for laboratory tests and the subsequent data treatment are reported. This technique, known in the literature as Digital Image Correlation (D.I.C.), is based on the use of an high speed C.C.D. camera and it is able to determine in plane displacement and strain fields as a function of the surface patterns of the undeformed and deformed configurations. This method does not need to be in contact with the specimen and it is able to describe the material behavior up to rupture.

In chapter 2, a description of the inverse methods available from the literature as well as the one utilized in the experimental investigation is reported. This method is developed in framework of the GAP Constitutive Equation Method. Validation on the robustness of the inverse method by means of a filtering parameters analysis as well as numerical implementation by using a finite element approach are proposed.

In order to predict the inelastic behavior of the composite material, a damage model based on Continuous Damage Mechanics approach is developed. In this framework, the damage variable is strictly connected to the microcracks and voids density produced during the loading application. In chapter 3 the theoretical formulation based on an isotropic damage description is reported. According to the internal

variable method, the microcracks damage mechanisms are predicted by introducing a damage surface and an evolution damage law. Moreover, the description of the plastic phenomena is obtained by standard formulation, in which the plastic domain is expressed in terms of the stress variables evaluated in the effective configuration. In this way, a thermodynamic coupling between damage and plasticity dissipation mechanisms is developed.

In chapter 4 the numerical implementation of the proposed formulation in the framework of a finite element algorithm is developed. In order to solve the governing equations a numerical integration scheme based on an incremental-iterative procedure is developed. Finally, in chapter 5, the experimental results analyzed by D.I.C. are reported. The localization effects of the material response as well as the damage variables are evaluated for monotonic load test. Finally, in order to evaluate the accuracy of the proposed model, a comparison between experimental and numerical results is reported.

Introduzione

I materiali polimerici: una nuova tendenza nel mercato dei materiali. I materiali polimerici, o *materiali plastici* sono il frutto della ricerca scientifica del XX secolo. Le origini del termine polimero provengono dalla lingua greca, ed indicano un insieme di unità.

Lo sviluppo industriale, cominciato nel XIX secolo, ha messo in evidenza aspetti complessi del comportamento strutturale, che non potevano essere superati con i materiali classici. Questa è stata l'occasione per avviare gli studi verso nuove generazioni di materiali, in particolare si è pervenuti alla sintesi dei materiali polimerici. Essi sono materiali organici, dotati di peso specifico ridotto, e di proprietà di resistenza e rigidità tali da considerarli utilizzabili in diversi campi dell'ingegneria.

I materiali polimerici, in prima istanza, sono classificabili come segue:

- materiali di sintesi, utilizzati nelle costruzioni, e destinati a sostituire i materiali tradizionali;
- i caoutchoucs, appartenenti al gruppo degli elastomeri;
- le fibre sintetiche;
- i polimeri propriamente detti, utilizzati nella produzione di adesivi, vernici, e additivi per il raffinamento della carta.

I materiali polimerici sono in stretta relazione con le materie plastiche. Entrambi provengono dalla trasformazione di prodotti naturali. Tuttavia mentre il termine polimero è riservato ai materiali ottenuti per sintesi organica, i materiali plastici sottolineano il carattere del materiale di sintesi finito.

Il periodo dello sviluppo industriale è l'epoca che ha dato i natali alla *bakélite* e alle macromolecole. La prima è una resina sintetica capace di indurire sotto gli effetti della pressione e del calore, le seconde hanno permesso di interpretare le lunghe catene molecolari formanti le materie plastiche [*Staudinger, 1970*].

Un ulteriore traguardo importante è stato raggiunto nella metà del *XX* secolo, quando con la conversione del carbonio, e la conseguente introduzione dei *materiali termoplastici*, è stata raggiunta una notevole economia di produzione nel settore. I principali materiali termoplastici derivati sono il polipropilene (*PP*), il polistirene (*PS*) e il cloruro di polivinile (*PVC*).

Un aspetto essenziale della produzione delle materie plastiche consiste nella possibilità di utilizzare i prodotti di scarto provenienti dalle raffinerie petrolifere. In Francia circa il 6% di tale prodotto di scarto è utilizzato per produrre le plastiche. Questo aspetto ha permesso di quadruplicare in pochi anni la produzione volumetrica mondiale delle materie plastiche rispetto a quella dell'acciaio. Un raggruppamento sintetico delle materie plastiche è il seguente:

- *le plastiche standard*;
- *i materiali termoplastici*;
- *le materie plastiche speciali*.

Le plastiche standard comprendono i materiali di grande diffusione come il cloruro di polivinile (*PVC*), il polietilene (*PE*) ed il polipropilene (*PS*), ma anche la poliammide (*PA*), il polyoxymetilene (*POM*) e i policarbonati (*PC*).

I termoplastici possiedono proprietà meccaniche, termiche ed elettriche migliori rispetto alle plastiche standard, che li rendono capaci di resistere ad azioni esterne elevate.

Le plastiche speciali consistono in materiali capaci di prestazioni elevate alle alte temperature.

Le materie plastiche più utilizzate nelle applicazioni tecniche sono i termoplastici, ai quali appartengono il polietilene, il cloruro di polivinile e la poliammide.

I principali settori di impiego delle materie plastiche sono quello delle costruzioni e dei lavori pubblici, quello elettrico, dell'elettronica, e dell'automobile. Tuttavia l'impiego delle materie plastiche è rimasto ridotto fino a più di dieci anni fa, quando i loro costi erano ancora elevati a fronte delle carenze manifestate sotto alcuni aspetti prestazionali. Negli ultimi anni gli studi nel settore delle materie plastiche hanno migliorato gli aspetti seguenti:

- qualità tecnica;
- tecniche di produzione;
- riduzione dei costi di produzione;

- miglioramento delle conoscenze di settore.

Nella produzione delle materie plastiche è stato fatto un passo avanti importante con l'avvento dei catalizzatori, che hanno ridotto notevolmente l'impatto sull'ambiente. Basta pensare che nel 1950 la produzione di una tonnellata di polipropilene era accompagnata da 250 Kg di sotto prodotti di scarto. Attualmente con 1 gr di catalizzatore si riesce a produrre fino a 40 tonnellate di polimeri, senza bisogno di eliminare il catalizzatore, per via della modica quantità utilizzata.

Occorre osservare come l'interesse generale verso le materie plastiche abbia avuto effetti non trascurabili anche sul mercato globale. Infatti a partire dal 1990 diverse società operanti in tale settore produttivo si sono fuse, formando delle grandi compagnie. Gli effetti di tale iniziativa sono stati meno evidenti negli USA e più sensibili in Europa, dove i prezzi si sono notevolmente abbassati, consentendo una rapida sostituzione dei materiali più costosi, mentre gli stessi prezzi sono diventati competitivi con quelli dell'acciaio e dell'alluminio.

L'utilizzo dei polimeri nei materiali compositi. Malgrado le plastiche godano dei vantaggi derivanti da un ridotto peso specifico e da una messa in opera semplice e flessibile, presentano numerosi inconvenienti. Uno dei più rilevanti è rappresentato dai valori sperimentali delle caratteristiche meccaniche di resistenza e di rigidezza afferenti alle plastiche compatte, che raggiungono soltanto una frazione dei valori teorici. Analoghe osservazioni sperimentali hanno messo in evidenza che i valori relativi alle fibre sono potenzialmente più prossimi a quelli teorici, in quanto le fibre manifestano una struttura a catena naturalmente allineata con il loro asse. A partire da questa osservazione è ragionevole ipotizzare che i materiali plastici ammettano un elevato potenziale di miglioramento delle loro proprietà meccaniche. Tale miglioramento è stato reso possibile dall'avvento dei materiali compositi, che permettono di sfruttare le proprietà migliori dei materiali da costruzione.

Nel contesto dei materiali compositi i polimeri sono utilizzati come matrice insieme ad altri materiali, di natura ed origine diversi, per produrre elementi strutturali monolitici, capaci di prestazioni meccaniche di gran lunga superiori.

Possedendo il ruolo di matrice, i polimeri devono permettere la collaborazione tra le fibre e la distribuzione degli stati interni di sollecitazione; racchiudendo le fibre in un unico solido, gli effetti dei carichi possono essere trasferiti tra le fibre e fino alle zone di contorno. Inoltre essi devono proteggere le fibre dalle aggressioni ambientali e dagli agenti meccanici nocivi per le stesse fibre, facendo fronte a sollecitazioni particolari, quali quella da taglio interlaminare.

Le fibre rappresentano i componenti che garantiscono il rinforzo meccanico dei materiali compositi. Esse sono leggere, rigide e molto resistenti, e provengono da materiali di origine, dai quali le tecniche di produzione selezionano soltanto le parti meno difettose. Tali parti selezionate sono poi lavorate, e le molecole vengono orientate nella direzione preferenziale di resistenza. Le fibre utilizzate possono essere continue, o corte con dispersione random all'interno della matrice. Le fibre continue creano direzioni preferenziali di resistenza e conferiscono un carattere anisotropo al materiale finito. Le tecniche produttive dei materiali a fibra lunga richiedono una mano d'opera consistente e tecniche produttive onerose. Quando si vogliono ottenere comparabili proprietà meccaniche in ogni direzione, vengono usate fibre molto corte e ad orientazione random, con le quali i compositi risultano deboli soltanto lungo il loro spessore.

I materiali più impiegati per la produzione delle fibre sono: il carbonio ed il vetro; la scelta del materiale da usare per le fibre dipende dalle proprietà meccaniche desiderate, dai costi di produzione affrontabili, e dal tipo di esposizione ambientale che interesserà nelle condizioni di esercizio.

Le fibre in carbonio trovano largo utilizzo nella tecnica attuale, poichè denotano leggerezza ed elevata resistenza. Tuttavia l'impiego del carbonio resta proibitivo a causa di alcuni effetti collaterali e dei costi elevati. Inoltre i costi del carbonio per la produzione delle fibre sono abbastanza elevati perchè, essendo il carbonio conduttore di corrente, il suo impiego nei materiali compositi richiede che venga affiancato da buoni materiali isolanti.

Le fibre di vetro sono dotate di durezza, resistenza alla corrosione, flessibilità, leggerezza e basso costo, grazie ai quali le fibre di vetro sono le più usate nei processi industriali. Il basso numero di difetti, e la loro piccola dimensione conferiscono alle fibre di vetro pregevoli qualità meccaniche. Al pari dei materiali metallici, un fattore di rischio considerevole è rappresentato dalle alte temperature, che riducono fortemente la resistenza a trazione complessiva dei materiali compositi.

I compositi a fibra corta ed il PA66. L'interesse verso lo studio dei polimeri rinforzati con fibre corte di vetro è nato dall'esigenza di colmare il vuoto esistente tra le proprietà dei laminati con fibre continue, utilizzati nell'industria aeronautica ed aerospaziale, ed i polimeri non rinforzati, inizialmente utilizzati negli elementi strutturali non sollecitati. Sotto certi aspetti, i materiali compositi a fibra corta mettono insieme i vantaggi provenienti da entrambe le tipologie. Infatti, se le fibre a dispersione random sono sufficientemente lunghe, tali compositi presentano proprietà meccaniche paragonabili a quelli dei sistemi a fibre continue, conservando, nello stes-

so tempo, la possibilità di realizzare geometrie complesse per mezzo di tecnologie semplici. I polimeri rinforzati con fibre corte sono prevalentemente utilizzati nella fabbricazione di elementi strutturali secondari, sottoposti a carichi ridotti. Questo tipo di elementi strutturali offre un vantaggioso incremento di resistenza rispetto ai polimeri non rinforzati.

Le proprietà meccaniche dei materiali compositi a fibra corta dipendono da una complessa interazione di variabili interne, come il tipo della matrice, il tipo d'interfaccia fibra-matrice, il contenuto di fibra, le dimensioni delle fibre, e di variabili esterne, quali la velocità d'applicazione del carico, la temperatura e l'umidità.

Il materiale composito indagato in tale contesto di studio è il PA66. L'interesse verso questo materiale è nato come conseguenza della convergenza di interessi verso lo studio dei materiali compositi tra il gruppo di ricerca di Scienza delle Costruzioni del Dipartimento di Strutture dell'Università della Calabria e l'équipe di Thermomécanique des Matériaux del Laboratoire des Mécanique et Génie Civil dell'Università di Montpellier II. Quest'ultimo fa parte del gruppo di ricerca GDR 2519 "Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides", istituito in Francia dal 2003 con l'obiettivo di studiare le tecniche di misura avanzate ed i sistemi di identificazione in meccanica sperimentale dei solidi e delle strutture. Inoltre è impegnato da diversi anni nello studio del comportamento termomeccanico dei materiali, e condivide i frutti delle proprie ricerche con diverse aziende produttrici di materiali della Francia. Il materiale composito PA66 è infatti molto utilizzato nelle industrie automobilistica, elettrica ed elettronica. L'impiego di tale materiale ha permesso di sostituire svariati componenti strutturali metallici, e di produrre forme strutturali dalla geometria complessa.

Se si osserva che nel settore automobilistico la poliammide (*PA*) è utilizzata nella costruzione di alcuni componenti del motore, del sistema di trasmissione e delle tubazioni d'aspirazione per iniezione, l'importanza di questi materiali nel settore automobilistico risulta evidente constatando che 100 kg di polimeri possono sostituire in media dai 200 ai 300 Kg di materiale tradizionale. Ipotizzando una durata media di vita di 150000 Km, l'alleggerimento risultante dall'impiego dei materiali compositi permette un risparmio di oltre 750 litri di carburante per ogni automobile. Pertanto la riduzione del peso dei veicoli permette ogni anno una notevole economia di carburante su tutto il parco automobilistico europeo.

Il materiale composito PA66 è prodotto per mezzo della tecnica dell'*injection moulding*, ovvero dello stampo per iniezione. Tale tecnica prevede l'iniezione di un impasto fuso, contenente una miscela di polimeri e fibre, all'interno di uno stampo, dal quale si ricavano le forme strutturali volute. Con questa tecnica di produzione

l'orientazione delle fibre corte dipende dalle condizioni del flusso durante la procedura d'impasto, nella quale si distinguono due fenomeni distinti: l'allineamento longitudinale, che determina una disposizione delle fibre parallela alla direzione del flusso, e l'allineamento trasversale, che determina la disposizione delle fibre nella direzione perpendicolare al flusso stesso. Durante l'iniezione dell'impasto all'interno dello stampo, il materiale fuso è sottoposto a tensioni tangenziali di contatto sulla parete dello stampo, che, per effetto del rapido raffreddamento dell'impasto, determinano un allineamento uniforme delle fibre con la direzione del flusso. Al contrario, nella parte centrale dell'impasto l'allineamento delle fibre è perpendicolare alla direzione del flusso. Pertanto si crea una struttura sandwich in cui le fibre assumono una direzione diversa lungo lo spessore del provino realizzato, e nella zona centrale le fibre, disposte verticalmente, fungono da cucitura degli strati superficiali.

Collocazione bibliografica del lavoro di tesi. I lavori all'interno della letteratura scientifica indicano un interesse crescente verso lo studio sperimentale dei materiali compositi a fibra corte di vetro in generale, e verso lo studio del materiale PA66 in particolare, a partire dagli ultimi dieci anni circa. Tale interesse è venuto alla luce dalla constatazione dell'importanza di questo materiale nelle applicazioni industriali.

Studi sperimentali riguardanti la risposta meccanica del materiale composito PA66 sono presenti nella letteratura scientifica già nel 1995, con indagini rivolte a mettere in luce i miglioramenti apportati dalle fibre di vetro alla matrice polimerica. Infatti attraverso una tecnica fotografica in grado di individuare l'innescò delle fratture, nel lavoro compiuto da [Akay and O'Regan, 1995] è stata confrontata la resistenza a frattura da modo I della matrice polimerica con quella del materiale rinforzato con fibre di vetro. Le stesse indagini sperimentali sono state estese allo studio della resistenza a trazione dei compositi a fibra corta con la pubblicazione di [Fu et al., 2000]. Con questo lavoro gli autori hanno osservato gli effetti della frazione in volume delle fibre sulla risposta meccanica. In particolare la resistenza a trazione ed i moduli elastici dei compositi studiati, sono stati correlati agli effetti combinati della frazione in volume e della lunghezza delle fibre attraverso una funzione esponenziale. Nello stesso periodo, grazie all'uso combinato delle emissioni acustiche e delle analisi fotografiche, gli studi sperimentali sono stati orientati verso il danneggiamento dei compositi a fibre. In tale contesto con la ricerca condotta da [Laksimi et al., 2000] sono stati valutati gli effetti di alcuni parametri strutturali sull'evoluzione del danneggiamento nel caso di prova ciclica di trazione, riconoscendo un ruolo determinante all'interfaccia fibre-matrice. Tuttavia, la risposta meccanica del materiale PA66 dipende anche da parametri micromeccanici, quali la resistenza a taglio interfacciale, il fattore di orientazione delle

fibre e la tensione nelle fibre. Tale osservazione è stata compiuta nell'articolo di [Thomson, 2001], nel quale la dipendenza dai parametri micromeccanici è stata rilevata attraverso informazioni riguardanti la struttura macroscopica del materiale. Tuttavia la complessità del materiale composito PA66 è influenzata anche da parametri dipendenti dal moulding process: il processo produttivo con cui è realizzato il materiale. Questo aspetto è stato messo in luce con il lavoro di [Guerrica-Echevarria et al., 2001], nel quale è stata studiata l'influenza del moulding process sulle proprietà meccaniche del PA66, individuando un range di valori all'interno del quale le stesse proprietà sono risultate indipendenti dal metodo di preparazione. La dipendenza del PA66 dal suo procedimento di produzione, ha orientato alcune ricerche a migliorarne le prestazioni meccaniche partendo da accorgimenti tecnologici. Sotto tale punto di vista, con lo studio di [Sui et al., 2005] è stata stimata la resistenza a taglio interfacciale in presenza di fase gommosa all'interno del PA66, osservando un contributo al miglioramento del legame interfacciale tra fibre e matrice. La tendenza a migliorare le prestazioni meccaniche del PA66 attraverso opportuni accorgimenti di natura tecnologica, è continuata con le sperimentazioni compiute in [Abdulkadir Gullu et al., 2006]. In tale lavoro è stata indagata l'influenza di percentuali diverse di fibre in vetro rivestite sulla risposta meccanica del materiale PA66. Sottoponendo opportuni campioni di materiale a prove di trazione e di impatto, è stato rilevato un incremento di resistenza meccanica al variare della percentuale di fibre impiegate, nonché la conservazione di un legame non lineare. Nello stesso lavoro è stato osservato che la temperatura e la velocità di iniezione dell'impasto fuso determinano rispettivamente l'incremento e la riduzione della resistenza a trazione del materiale. Oltre alla temperatura, la dipendenza da parametri esterni come la velocità di deformazione imposta ed il contenuto in fibre di vetro è stata confermata nello studio effettuato da [Mouhmid et al., 2006], che ha permesso una caratterizzazione del PA66 utilizzato specificatamente nell'industria automobilistica. I confronti hanno interessato i risultati di prove di trazione uniassiale su materiale rinforzato con percentuali diverse di fibre in vetro e materiale non rinforzato. Gli autori hanno dimostrato la dipendenza della risposta meccanica del materiale dai parametri esterni, utilizzando la tecnica delle emissioni acustiche per fornire una stima della soglia di danneggiamento ed un'espressione analitica della resistenza a trazione in funzione della densità relativa di fibre di vetro. Nell'ambito degli stessi impieghi nell'industria automobilistica il materiale composito PA66 ha evidenziato carenze nella resistenza a fatica. In tale contesto, attraverso delle prove di trazione uniassiale su provini intagliati lungo direzioni differenti da piastre realizzate per moulding process, le ricerche pubblicate da [Bernasconi et al., 2007a] hanno messo in luce la variazione della resistenza a fatica in funzione dell'orientazione delle fibre

sia in superficie che nello spessore dei provini. Di particolare attualità è la possibilità di riciclare il materiale composito PA66, introducendo la tematica della salvaguardia ambientale e della progettazione ecosostenibile nell'ambito dell'ingegneria dei materiali. Sotto questo punto di vista, lo studio compiuto da [Bernasconi et al., 2007c] ha avuto per oggetto gli effetti del riciclaggio del PA66 sulla resistenza a trazione. Gli autori hanno messo a confronto i risultati relativi al materiale vergine con quelli afferenti a provini realizzati in materiale riciclato, ottenuti per macinazione e successivo trattamento per moulding process. La conseguenza principale del riciclaggio è risultata la rottura delle fibre, ed il decremento della partecipazione delle fibre stesse alla portanza del materiale. Con questa pubblicazione gli autori hanno messo in evidenza l'esigenza di un modello micromeccanico per la simulazione dei risultati delle prove sperimentali sul materiale riciclato.

In questa tesi lo studio del modello teorico di danneggiamento è stato basato su modelli al continuo che utilizzano la Meccanica del Danneggiamento Continuo attraverso un approccio termodinamico di tipo fenomenologico [Lemaitre and Chaboche, 1990]. In tale contesto, i modelli reperibili in letteratura si basano su formulazioni che introducono variabili di stato nelle equazioni costitutive, simulando meccanismi di degradazione di tipo macroscopico. Purtroppo l'interpretazione fisica di tali variabili non è sempre evidente, ma dipende dalle caratteristiche intrinseche del materiale. Gli studi sperimentali e fenomenologici sui fenomeni di danneggiamento e di plasticità, presenti in letteratura, permettono di interpretare le cause responsabili della formazione e della crescita di microfratture e deformazioni permanenti. Dal punto di vista macroscopico, le formulazioni più accurate sono state sviluppate nel contesto della Meccanica del Danneggiamento Continuo. Alla base di tale teoria si assume l'ipotesi che il danneggiamento sia distribuito uniformemente nel corpo, e possa essere descritto da una funzione continua di tipo scalare o tensoriale [Kachanov, 1958], [Rabotnov, 1969], [Chaboche J.L., 1981a], [Krajcinovic and Fonseka, 1981], [Krajcinovic D., 1983], [Murakami, 1987]. Il materiale è considerato privo di danneggiamento, introducendo una configurazione fittizia, o "effettiva", che risulta meccanicamente equivalente a quella danneggiata, nella quale le variabili sono descritte da funzioni a valori continui. Diverse formulazioni permettono di definire il legame tra le configurazioni danneggiata e fittizia [Lemaitre, 1971], [Lemaitre and J.L., 1978], [Simo and J.W., 1987], [Cordebois and Sidoroff, 1979]. I diversi approcci considerano la reale distribuzione delle microfratture e delle dislocazioni omogeneizzata in funzione di variabili macroscopiche. Queste quantità possono assumere valori scalare [Kachanov, 1958], vettoriale [Davison and Stevens, 1973] o tensoriale [Chaboche, 1982]. Ulteriori teorie più generali hanno affrontato il problema della modellazione dei processi di degrada-

zione nei materiali compositi attraverso un accoppiamento tra danneggiamento e plasticità. Tali teorie si basano su un approccio termodinamico, introducendo una serie di variabili interne nelle equazioni che simulano i processi di dissipazione nel materiale [Simo and Ortis, 1987], [Simo and J.W., 1987], [Ju, 1989], [Voyiadjis and Guelzim, 1996], [Johansson and Runesson, 1997], [Barbero and Lonetti, 2002]. In letteratura è possibile trovare diversi modelli di calcolo, che offrono una buona rispondenza tra i dati sperimentali e quelli numerici, e descrivono lo stato di danneggiamento in funzione di variabili scalari o, tensoriali, la cui identificazione avviene con metodi di tipo analitico-sperimentale [Lemaitre and J.L., 1978], [Ladeveze and Le Dantec, 1992], [Voyiadjis and Deliktas, 2000]. Tali modelli sono basati su una descrizione monodimensionale o bidimensionale del danneggiamento, malgrado lo stato reale sia dominato da una distribuzione tridimensionale di tensioni e deformazioni, con un conseguente danneggiamento che evolve lungo le direzioni interlaminari.

I problemi inversi nella Meccanica Sperimentale. Da diversi anni la letteratura scientifica mette a disposizione studi e applicazioni sulle soluzioni inverse nella meccanica sperimentale. Recentemente la possibilità di utilizzare microcalcolatori ad alte prestazioni ha permesso l'elaborazione di volumi cospicui di dati provenienti dalle tecniche di misura *full-field*. Storicamente le soluzioni inverse hanno riguardato l'elaborazione di pochi dati, dai quali venivano estratte informazioni che generavano problemi matematicamente mal posti. Oggi, l'elaborazione delle immagini digitali permette di affrontare e risolvere i problemi inversi in maniera precisa. L'obiettivo principale delle tecniche di misura *full-field* consiste nella risoluzione di un problema inverso mal posto: "la determinazione del flusso ottico", ossia la misura di un campo di spostamenti a partire da immagini acquisite nel corso delle prove meccaniche. Una conseguenza diretta di tale applicazione consiste nell'estrazione dei parametri costitutivi dei materiali e nella stima del livello di degradazione. Quest'area di ricerca è innovativa e sta aprendo le porte a nuove prospettive nello studio del comportamento dei materiali.

La tecnica tradizionalmente impiegata nella stima del danneggiamento subito dai materiali è stata per diverso tempo quella riguardante l'emissione di segnali acustici durante le prove di carico. Nel lavoro portato a compimento da [Huguet et al., 2002] i dati acquisiti con le emissioni acustiche sono stati correlati ai modi di frattura, permettendo una stima del danneggiamento nei compositi polimerici fibrorinforzati. Con l'avvento, negli ultimi anni, delle tecniche di misura *full-field*, e delle camere C.C.D. per l'acquisizione dei dati, è diventato possibile risalire direttamente ai campi di spostamento superficiali, da utilizzare nell'applicazione dei metodi inversi. La

tecnica di correlazione delle immagini digitali piane necessita di una camera C.C.D. per l'acquisizione dei dati di spostamento afferenti a provini in condizione deformata o indeformata. Tanto le componenti piane di spostamenti quanto i campi di deformazione si ricavano a partire da coppie sequenziali di immagini. In tale contesto, utilizzando la trasformata veloce di Fourier, i di calcolo sono ridotti drasticamente. L'obiettivo degli studi attuali è quello di impiegare tale tecnica sperimentale avanzata in indagini più approfondite riguardanti i materiali. Infatti già nel lavoro di [Périeré et al., 2002] la correlazione delle immagini digitali è stata utilizzata per la stima del danneggiamento in un materiale composito in C/C sottoposto ad una condizione di taglio nel piano. Le indagini sul danneggiamento sono state estese ad una condizione di carico più generale con lo studio sperimentale condotto da [Roux and Hild, 2006], nel quale è stata stimata la legge di evoluzione del danneggiamento in una piastra in materiale composito sottoposta a carico biassiale. Gli autori hanno stimato la degradazione progressiva a partire dai dati di spostamento, acquisiti per correlazione delle immagini numeriche in corrispondenza di passi di carico crescenti, ricavando un campo di spostamenti continuo a decomposto in elementi finiti. Applicando la medesima tecnica, gli stessi autori hanno fornito una interpretazione del comportamento di un policarbonato sottoposto a prova di trazione indiretta. La stessa tecnica di correlazione ha permesso di approfondire le indagini circa il comportamento meccanico e sulla distribuzione delle microdeformazioni spaziali in una resina epossidica rinforzata con fibre di vetro [Godara and Raabe, 2007]. In questo lavoro gli autori hanno messo in luce l'anisotropia del materiale, dovuta ad un diverso allineamento delle fibre esterne rispetto ai carichi, interpretando la formazione dei gradienti di deformazione in funzione della microstruttura del materiale. Un'analisi delle superfici di frattura al microscopio elettronico ha rivelato la presenza di fratture multiple, dovute alla diversa orientazione delle fibre. La possibilità di utilizzare i dati di spostamento full-field ha permesso anche approfondimenti sperimentali che hanno messo in evidenza l'elasticità isotropa trasversale di una terra cotta [Huon et al., 2007]. In tale ambito è stata anche verificata la consistenza della procedura di caratterizzazione confrontando i dati cinematici con quelli ricavati dai calcoli di un calcolo tridimensionale agli elementi finiti.

L'obiettivo del presente lavoro di dottorato è stato quello di condurre uno studio sulla risposta meccanica del materiale composito a matrice termoplastica, e fibre corte di vetro PA66. A tale scopo è stata utilizzata la tecnica innovativa della Correlazione delle Immagini Digitali (D.I.C.), unitamente a metodi inversi di valutazione delle proprietà meccaniche e dello stato di danneggiamento subito dal materiale durante le prove di laboratorio. I risultati sperimentali, ottenuti in laboratorio, sono stati con-

frontati con i risultati di previsione di un modello accoppiato di danneggiamento e di plasticità che, facendo uso dei concetti della meccanica del continuo e prevedendo condizioni al contorno analoghe a quelle prove sperimentali, è stato in grado di simulare la risposta del materiale, e di confermare l'attendibilità del modello teorico.

Capitolo 1

La Correlazione delle Immagini Digitali

1.1 Introduzione delle immagini digitali nella Meccanica dei Materiali

LO studio del comportamento meccanico dei materiali è un ambito di ricerca molto attivo, il cui obiettivo consiste essenzialmente nella ricerca delle equazioni costitutive. Da un punto di vista teorico le equazioni costitutive sono di origine fenomenologica e permettono di completare le equazioni provenienti dalle più importanti leggi della Fisica: il principio di conservazione della massa, il principio di conservazione dell'energia e il principio di conservazione della quantità di moto. In pratica le equazioni costitutive sono utilizzate dagli ingegneri nel dimensionamento delle strutture, nel controllo dei processi di produzione e nella previsione della durata dei componenti meccanici. Esse costituiscono, insieme alle condizioni di carico ai limiti, la fisica integrata nei codici di calcolo agli elementi finiti. Attualmente le equazioni costitutive dei materiali sono ricercate per mezzo di due approcci.

Il primo approccio è di tipo macroscopico ed impiega l'ambito coerente della *Termodinamica dei Processi Irreversibili* per interpretare gli effetti macroscopici di eventi microstrutturali complessi e spesso accoppiati, mediante opportune *variabili di stato interne*. In oltre vent'anni di studi scientifici questo approccio ha permesso importanti sviluppi nel campo delle conoscenze sui materiali.

Tuttavia negli ultimi anni, grazie, in parte, all'aumento costante della potenza di calcolo dei mezzi informatici e allo sviluppo di strumenti di indagine innovativi

all'interno dei laboratori, sono stati considerevolmente sviluppati ulteriori approcci di carattere più deduttivo. Utilizzando gli approcci moderni e partendo dalla misura dei parametri e dei meccanismi di deformazione a livello *microstrutturale*, è possibile effettuare passaggi di scala comunemente chiamati *passaggi micro-macro*, pervenendo alle leggi di comportamento macroscopiche. I successi ottenuti sono stati notevoli e molto importanti. In questo modo si è pervenuti a descrizioni accurate dei meccanismi di incrudimento dei metalli [Peyroux et al., 1998], a previsioni realistiche delle caratteristiche macroscopiche dei materiali compositi [Moreau et al., 2005] e così via. Lo sforzo perseguito in numerosi centri di studio e di ricerca è stato quello di osservare accuratamente le manifestazioni termiche, energetiche e cinematiche che si sviluppano durante i processi deformativi dei materiali. Tale obiettivo ha portato all'introduzione di due tecniche moderne di osservazione e di misurazione dei processi evolutivi irreversibili: *la termografia a raggi infrarossi* e *la tecnica di correlazione delle immagini digitali*.

1.2 La termografia a raggi infrarossi

Le deformazioni nei materiali solidi sono accompagnate quasi sempre da emissioni di calore. Tali sorgenti di calore hanno origini diverse, ma è possibile raggrupparle in due grandi classi: le sorgenti correlate ad una dissipazione di energia e quelle provenienti da accoppiamenti termomeccanici. Quando il comportamento del materiale è viscoso, plastico, viscoplastico oppure quando è soggetto a fenomeni di danneggiamento o di fessurazione, una parte dell'energia necessaria per la deformazione si trasforma irreversibilmente in calore e si dice che avviene una *dissipazione di energia*.

Le sorgenti dovute agli accoppiamenti termodinamici sono rivelatrici del comportamento dei materiali [Chrysochoos, 2002]. Nel caso della termoelasticità l'accoppiamento termomeccanico è il concetto alla base del metodo di misura delle tensioni.

In generale i materiali termoelastici si riscaldano quando sono compressi o si dilatano quando sono riscaldati. Tuttavia, i materiali esistenti non sono tutti termoelastici e sono interessati anche da altri meccanismi di accoppiamento. Ad esempio, nel caso degli elastomeri o nel caso delle trasformazioni di fase solido-solido (leghe a memoria di forma), i materiali si raffreddano quando vengono compressi o si contraggono quando sono riscaldati.

In generale i processi deformativi sono accompagnati sempre da variazioni di temperatura, che dipendono dalla diffusività del materiale, dalle condizioni di scambio

con i mezzi esterni e non sono totalmente intrinseche al comportamento del materiale stesso.

La conoscenza delle temperature superficiali, che accompagnano i provini durante le loro deformazioni, consente dunque importanti informazioni sulla natura del materiale in gioco. La necessità di sviluppare opportune tecniche di misura delle temperature superficiali ha portato alla nascita delle tecniche di trattamento delle immagini infrarosse. Esse permettono di stimare le potenze calorifiche sviluppate durante i processi deformativi. La termografia a raggi infrarossi rappresenta un mezzo molto affidabile per il monitoraggio delle mappe di temperatura durante la deformazione dei provini piatti. Poichè la temperatura e la distribuzione del calore all'interno dei provini obbediscono all'equazione di diffusione, l'elaborazione ed il trattamento delle immagini termiche permettono anche la stima delle sorgenti locali di calore.

1.3 La tecnica di correlazione delle immagini digitali

Nelle ultime due decadi gli strumenti di calcolo e simulazione, utilizzati nella meccanica dei materiali, sono diventati sempre più potenti. Il progresso compiuto nel campo del calcolo scientifico ha dato origine ad un nuovo ramo della meccanica, chiamato *meccanica computazionale dei solidi*, che permette di applicare modelli di comportamento realistici e anche più complessi. Naturalmente la consistenza delle simulazioni, permesse dalle applicazioni della meccanica computazionale, dipende moltissimo dall'efficacia e dall'attinenza alla realtà delle equazioni costitutive implementate nei codici di calcolo computazionali. Le equazioni costitutive sono spesso identificate attraverso esperimenti compiuti su strutture molto particolari, per le quali le distribuzioni di tensione e di deformazione sono ipotizzate o note a priori. L'esigenza di indagare sulle equazioni fenomenologiche di situazioni realistiche ha portato alla nascita e allo sviluppo di esperimenti termomeccanici complessi. Questo tipo di esperimenti richiede accurate misure di spostamenti e di deformazione (i.e. localizzazione delle deformazioni nei materiali, concentrazioni di deformazioni in punti particolari, singolarità negli spostamenti e nelle deformazioni dei solidi fessurati). Purtroppo esistono delle situazioni reali nelle quali l'impiego degli strumenti classici per la misura degli spostamenti e delle deformazioni (trasduttori di spostamento, estensometri, strain gauges) risulta difficoltoso, se non addirittura impossibile: si pensi alle misure eseguite alle alte temperature o su materiali che rendono difficoltosa l'applicazione degli strumenti [Périeré et al., 2002].

Le risorse computazionali correntemente disponibili offrono nuovi e potenti mezzi di elaborazione dei dati sperimentali. I metodi ottici, che impiegano la tecnica della Correlazione delle Immagini Digitali, possono fornire i dati di spostamento a tutto campo di un intero dominio di osservazione piano (*full-field measurements*).

La tecnica della Correlazione delle Immagini Digitali o “Digital Image Correlation” (D.I.C.) è stata introdotta nello studio sperimentale della Meccanica dei Solidi all’inizio degli anni ’80. Con questa tecnica sono utilizzate esclusivamente le informazioni contenute nelle immagini dei provini acquisite durante una trasformazione meccanica, per determinare il campo di spostamenti responsabile del cambiamento di configurazione. Tale calcolo viene eseguito identificando punti corrispondenti tra immagini successive, sulla base di distribuzioni di livelli di grigio simili nell’intorno dei punti stessi.

La tecnica della correlazione delle immagini digitali (*Digital Image Correlation*) è utilizzabile ormai in svariate circostanze. In generale le misure *full-field* permettono di superare il gap esistente tra gli esperimenti e le simulazioni, consentendo dei confronti tra i campi di spostamento e di deformazione ottenuti con le misure e quelli provenienti dai calcoli.

1.4 Grandezze meccaniche nelle trasformazioni finite

Con la tecnica di correlazione delle immagini numeriche è possibile percorrere la storia deformativa di un qualsiasi corpo continuo fino al suo istante di rottura. Le misure di deformazione realizzate dipendono sempre dal materiale osservato e possono raggiungere anche valori dell’ordine del 50%. Pertanto il contesto osservato è quello delle deformazioni finite.

1.4.1 Richiami di meccanica delle trasformazioni finite

Un corpo continuo \mathcal{C} è formato da infiniti punti materiali, che possono mettersi in corrispondenza biunivoca con i punti di un aperto connesso \mathcal{E} , la cui frontiera è costituita da un numero finito di superfici regolari.

Quando un corpo continuo \mathcal{C} si deforma, subisce un cambiamento di configurazione e la posizione di ciascun punto P è individuata dalla traiettoria

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t). \tag{1.1}$$

Essa è funzione della configurazione iniziale \underline{X} e del tempo t .

In ogni istante di tempo t è possibile definire lo spostamento subito dallo stesso punto, per passare dalla configurazione di riferimento $\mathcal{C}(t_0)$ alla configurazione attuale $\mathcal{C}(t)$. Tale spostamento è definito come segue

$$\underline{s}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad (1.2)$$

e rappresenta un cambiamento di configurazione che avviene senza lacerazioni, senza compenetrazioni di materia, rispettando le condizioni imposte sul contorno vincolato del corpo continuo.

Le deformazioni subite da un qualsiasi corpo continuo si realizzano nel corso delle prove di carico. In tali circostanze un generico punto $P_0(\underline{X}_0)$, che nell'istante iniziale ha occupato la posizione \underline{X}_0 della configurazione di riferimento $\mathcal{C}(t_0)$, si trasforma nel punto $p_0(\underline{x}_0)$ della configurazione attuale $\mathcal{C}(t)$ 1.1.

L'ipotesi di congruenza richiede che ogni punto $P(\underline{X})$, originariamente appartenente all'intorno di P_0

$$d\underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_0 \quad \forall d\underline{X} \in \mathcal{J}(P_0), \quad (1.3)$$

si trasformerà nel nuovo punto $p(\underline{x})$ appartenente all'intorno di p_0

$$d\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0 \quad \forall d\underline{x} \in \mathcal{J}(p_0). \quad (1.4)$$

La velocità di p_0 nel corso della deformazione è un vettore tangente alla traiettoria

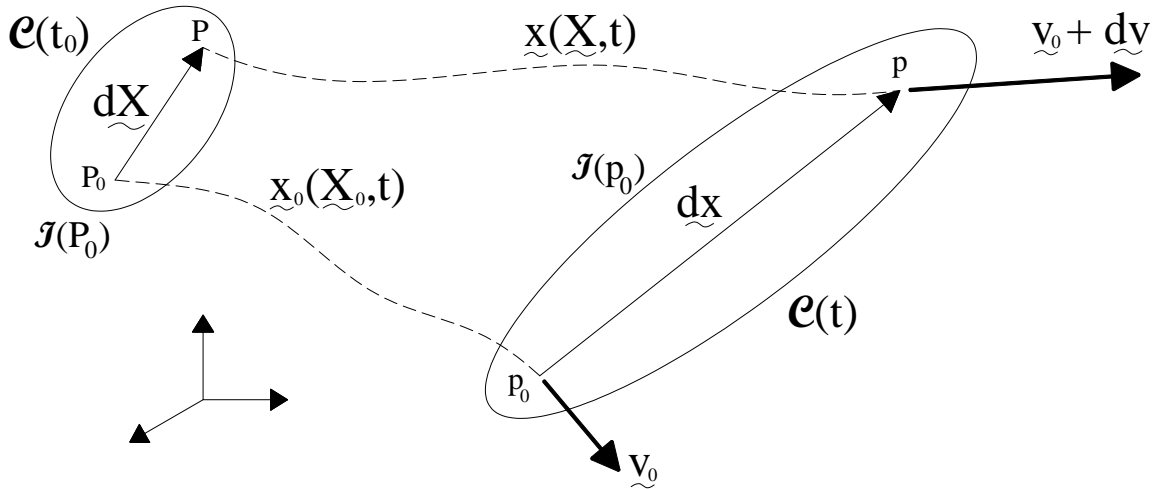


Figura 1.1: Deformazione di un intorno $\mathcal{J}(p_0)$ di un corpo continuo.

di x_0 nel punto p_0 stesso ed è espressa come

$$\underline{v}_0(\underline{x}_0, t) = \frac{d\underline{x}_0}{dt}. \quad (1.5)$$

Verosimilmente la velocità del punto p nell'intorno di p_0 si può esprimere come $\underline{v} = \underline{v}_0 + d\underline{v}$. Assumendo che le velocità siano differenziabili,

$$d\underline{v} = \left(\frac{d\underline{v}}{d\underline{x}} \right) d\underline{x} \quad (1.6)$$

si introduce il tensore doppio

$$\underline{L} = \frac{d\underline{v}}{d\underline{x}}, \quad (1.7)$$

detto *gradiente di velocità*. In generale il tensore \underline{L} non è simmetrico: $\underline{L} \neq \underline{L}^T$ e si può sempre esprimere come somma delle sue parti simmetrica ed emisimmetrica (1.8).

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W}. \quad (1.8)$$

I tensori \underline{D} e \underline{W} sono noti rispettivamente come “*tensore velocità di deformazione*” e “*tensore velocità di rotazione*”. Essi si esprimono secondo le (1.9). In particolare la (1.9a) verrà utilizzata per caratterizzare la velocità di deformazione.

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T) \quad (1.9a)$$

$$\underline{W} = \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (1.9b)$$

L'equazione (1.8) permette di esprimere la velocità di un qualsiasi punto dell'intorno deformato $\mathcal{J}(p_0)$ secondo la (1.10).

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{W} d\underline{x} + \underline{D} d\underline{x}. \quad (1.10)$$

L'atto di moto dell'intorno deformato $\mathcal{J}(p_0)$ può pensarsi costituito da una parte responsabile della traslazione rigida \underline{v}_0 , da un'aliquota responsabile della velocità di rotazione $\underline{W} d\underline{x}$ e da una parte rappresentativa della celerità di deformazione $\underline{D} d\underline{x}$ [Corradi Dell'Acqua, 1992].

L'equazione (1.2) permette di esprimere un qualsiasi intorno nella configurazione deformata in funzione dello stesso intorno nella configurazione indeformata. In particolare, passando dalla (1.2) alla (1.11)

$$\underline{x}(\underline{X}) = \underline{X} + \underline{s}(\underline{X}, t) \quad (1.11)$$

e differenziando rispetto a $d\underline{X}$, si ottiene

$$\underline{F} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{X}} = \underline{I} + \frac{d\underline{s}(\underline{X})}{d\underline{X}}. \quad (1.12)$$

Il tensore \underline{F} è noto come *gradiente di deformazione* e, attraverso la (1.13), permette di esprimere un qualsiasi intorno deformato in funzione dello stesso intorno nella configurazione di riferimento [Ascione and Grimaldi, 1989; Corradi Dell'Acqua, 1992].

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X} \quad (1.13)$$

Il tensore \underline{F} è sempre decomponibile nel prodotto di due trasformazioni (1.14).

$$\underline{F} = \underline{R}\underline{U} = \underline{V}\underline{R} \quad (1.14)$$

Il tensore \underline{R} è noto come “*tensore di rotazione*”, mentre i tensori \underline{U} e \underline{V} sono due tensori definiti positivi, noti rispettivamente come “*tensore destro della deformazione*” e “*tensore sinistro della deformazione*”.

Le relazioni (1.15) manifestano un legame analitico tra i tensori \underline{F} , \underline{U} e \underline{V} [Ascione and Grimaldi, 1989].

$$\underline{U}^2 = \underline{F}^T \underline{F} \quad \underline{V}^2 = \underline{F} \underline{F}^T \quad (1.15)$$

Nell'ambito delle deformazioni di *Hencky* le stesse (1.15) possono scriversi nella forma (1.16). In esse la (1.16a) rappresenta una misura di deformazione finita che si riferisce alla configurazione di riferimento $\mathcal{C}(t_0)$, mentre la (1.16b) è una misura di deformazione finita che si riferisce alla configurazione attuale $\mathcal{C}(t)$.

$$e_0 = \log \underline{U} \quad (1.16a)$$

$$\bar{e}_0 = \log \underline{V} \quad (1.16b)$$

Un notevolissimo esempio di misura di deformazione finita è rappresentato dal tensore doppio simmetrico (1.17).

$$\underline{E}(\underline{X}) = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}) \quad (1.17)$$

Esso è noto come “*tensore di deformazione di Green-Lagrange*” e rappresenta una misura di deformazione riferita alla configurazione indeformata $\mathcal{C}(t_0)$. Qualora venga utilizzato come misura di deformazione, il corrispondente “*tensore di velocità di deformazione secondo Lagrange*” è fornito dalla (1.18).

$$\dot{\underline{E}} = \underline{F}^T \underline{D} \underline{F} \quad (1.18)$$

Una misura di deformazione finita analoga al tensore di Green-Lagrange, ma riferita alla configurazione attuale $\mathcal{C}(t)$, è il “*tensore di Almansi*” (1.19) [Ascione and Grimaldi, 1989].

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{X}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (1.19)$$

In questo lavoro di tesi lo stato tensionale verrà espresso come tensioni di “*Cauchy*”. Poichè l’obiettivo del lavoro consiste nella discussione e nell’applicazione di tecniche inverse di identificazione, le proprietà materiali non sono note a priori, dunque di seguito viene dimostrata la relazione che, indipendentemente dalle proprietà materiali, permette di correlare le tensioni di Cauchy alle deformazioni finite riferite alla configurazione di riferimento (1.16a).

A tal fine si osserva che, nel caso di un materiale isotropo, sussiste la relazione seguente [Ogden, 1983]:

$$\underline{\underline{T}}^0 = \underline{\underline{R}}^T J \underline{\underline{T}} \underline{\underline{R}}, \quad (1.20)$$

nella quale $\underline{\underline{T}}^0$ è il tensore delle tensioni coniugato delle deformazioni finite (1.16a), $\underline{\underline{T}}$ è il tensore delle tensioni di Cauchy, $\underline{\underline{R}}$ è il tensore di rotazione pura, proveniente dalla decomposizione polare (1.14), e J è il determinante del gradiente della trasformazione (1.12).

Nel caso di un materiale incompressibile risulta $J = 1$, e se il materiale è sottoposto ad una prova meccanica di trazione pura il tensore di rotazione pura si riduce al tensore identità ($\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$). In questo caso dalla (1.20) consegue che i tensori $\underline{\underline{T}}^0$ ed $\underline{\underline{T}}$ rappresentano lo stesso stato tensionale:

$$\underline{\underline{T}}^0 = \underline{\underline{T}}. \quad (1.21)$$

Si introduce a questo punto il “*secondo tensore di Piola-Kirchhoff*” ($\underline{\underline{T}}_R$):

$$\underline{\underline{T}}_R = J \underline{\underline{T}} \underline{\underline{F}}^{-T}. \quad (1.22)$$

Nel caso di prova di trazione omogenea il tensore di rotazione coincide con il tensore identità ($\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$), l’espressione (1.14) si riduce ad $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}$, ed il secondo tensore di Piola Kirchhoff si esprime come segue:

$$\underline{\underline{T}}_R = J \underline{\underline{T}} \underline{\underline{U}}^{-T}, \quad (1.23)$$

da cui, banalmente, consegue un’espressione del tensore di Cauchy in funzione del secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{T}}_R \underline{\underline{U}}. \quad (1.24)$$

1.5 Dispositivo sperimentale utilizzato

In particolare, esprimendo con y l'asse longitudinale di un provino sottoposto a prova omogenea di trazione meccanica, la componente T_{11} della (1.24), che in questo lavoro verrà espressa come σ_Y , vale:

$$\bar{T}_{11} = \frac{1}{J} \bar{T}_{R_{1i}} \bar{U}_{i1}, \quad (1.25)$$

nella è sottintesa la sommatoria sull'indice ripetuto i . Tuttavia, poichè nella prova di trazione l'unica componente di tensione diversa da zero è la T_{11} , l'espressione (1.25) diventa:

$$T_{11} = \frac{1}{J} T_{R_{11}} U_{11}. \quad (1.26)$$

Esplicitando l'espressione (1.26) si ottiene la relazione

$$\sigma_Y = \frac{F(t)}{J \cdot S_0} \exp(\log U_{11}), \quad (1.27)$$

in essa $F(t)/S_0$ rappresenta la tensione convenzionale, calcolata come rapporto tra il carico $F(t)$, applicato nel generico istante t , e l'area iniziale S_0 del provino nella configurazione indeformata.

A partire dall'espressione (1.27), e nel caso di materiale incompressibile ($J = 1$) si ottiene la seguente espressione della tensione di Cauchy σ_Y in funzione della tensione convenzionale e della deformazione finita ε_Y :

$$\sigma_Y = \frac{F(t)}{S_0} \exp \varepsilon_Y, \quad (1.28)$$

mentre per trasformazioni non isocore risulta conveniente esprimere le tensioni in accordo con l'espressione di Kirchhoff:

$$J T_Y = \frac{F(t)}{S_0} \exp \varepsilon_Y. \quad (1.29)$$

1.5 Dispositivo sperimentale utilizzato

Il dispositivo sperimentale, utilizzato durante le prove di laboratorio, ha compreso: una macchina per prove di carico, due calcolatori elettronici ed una camera C.C.D.. La macchina da prova utilizzata è stata una macchina servoidraulica con cella di carico della capacità portante massima di 100 KN. Essa è gestita da un calcolatore elettronico che, oltre a pilotarla, acquisisce i dati macroscopici del carico e gli spostamenti della traversa mobile. La camera C.C.D. è posizionata di fronte al campione da testare (Fig. 1.2), per acquisire immagini ad alta frequenza della superficie del provino deformato. Tali immagini sono digitalizzate e salvate su un secondo calcolatore elettronico.

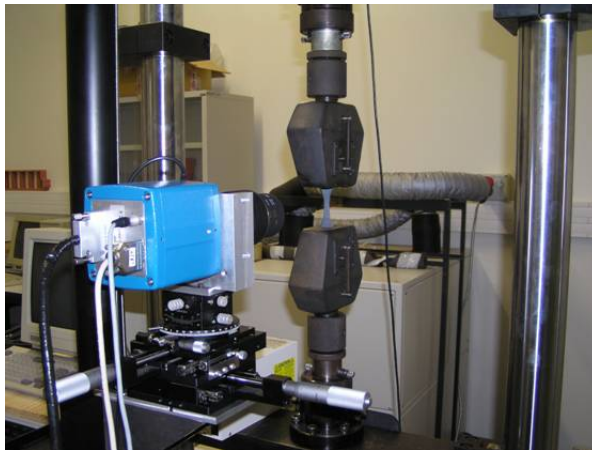


Figura 1.2: *Dispositivo sperimentale utilizzato per le prove di laboratorio.*

1.5.1 Principio di funzionamento e caratteristiche della camera C.C.D.

La camera C.C.D. è un rivelatore di luce elettronico, che utilizza un dispositivo a base di silicio, per registrare la luce proveniente dall'esterno. Il wafer di silicio, detto *Charge Coupled Device*, è un componente elettronico, composto da un array di microcelle chiamate fotositi. Ognuna di queste celle è una struttura di un elemento detto *pixel*. Ciascun pixel può essere composto da una matrice di migliaia di fotositi.

Il principio di funzionamento della C.C.D. si basa sull'effetto fotoelettrico, per cui gli elettroni emessi sono confinati in una data regione in quantità proporzionale al tempo di esposizione fotonica e alla quantità di fotoni incidenti. Quando la luce svanisce, gli elettroni vengono scaricati e i dati ottenuti sono processati per ottenere le immagini di output.

La camera utilizzata per questo lavoro è stata una Camera C.C.D. *CAMELIA 8M* (Fig. 1.2). Essa è una camera ad alta risoluzione dotata di una matrice di detector composta da $1317\text{ pixels} \times 1035\text{ pixels}$. Le immagini acquisite durante la prova meccanica sono digitalizzate e registrate con una risoluzione di $3500\text{ pixels} \times 2300\text{ pixels}$ in un formato 12 bit, ed un numero di livelli di grigio compreso tra 0 e 95. I calcoli di correlazione sono eseguiti sulle immagini digitalizzate, quindi, devono essere il riflesso esatto della superficie esaminata. Pertanto l'obiettivo della camera C.C.D. deve introdurre una distorsione minima dell'immagine, mentre il piano del sensore deve risultare rigorosamente parallelo al piano del provino. Nel caso contrario tutti gli errori di parallasse si tradurrebbero in deformazioni ottiche parassite. Siccome tutte le informazioni sono estratte da immagini digitali, le unità di misura di base sono

i pixels e non le unità metriche. La conversione tra le due unità di misura avviene tramite un opportuno fattore di scala, che dipende dalla distanza tra l'obiettivo della camera C.C.D. ed il provino. Il fattore di scala rappresenta anche la sensibilità dello strumento nelle particolari condizioni di lavoro. Un ordine di grandezza tipico per il fattore di scala è dell'ordine dei $100 \mu m/pixels$. Le immagini derivate sono elaborate seguendo il procedimento descritto nei prossimi paragrafi, che permette di detrarre la ripartizione delle grandezze cinematiche (deformazioni e velocità di deformazione) sulla superficie del provino captata durante la prova.

Il posizionamento della camera C.C.D. rispetto al provino osservato richiede alcune necessarie accortezze che garantiscono la buona riuscita delle misure. Anzitutto è importante impedire gli spostamenti fuori piano della camera, che sono corretti attraverso una vite micrometrica. Dopo un primo posizionamento grossolano viene eseguita una regolazione accurata, impartendo al provino spostamenti massimi dell'ordine dei $10 \div 20 mm$. A tali spostamenti devono corrispondere deformazioni identicamente nulle. Questa condizione permette di correggere i difetti di posizionamento della camera. Ad ogni modo gli errori nella stima delle deformazioni, associati ad un possibile difetto di posizionamento, sono dell'ordine di 10^{-4} , mentre il calcolo per correlazione può raggiungere precisioni dell'ordine di 10^{-5} , chiaramente maggiori dell'errore stesso. È importante evitare che la camera C.C.D. rilevi i movimenti parassiti durante l'applicazione del carico, che darebbero luogo a deformazioni fittizie sulla superficie osservata. A tal fine i provini sono montati alla macchina da prova con delle mordacchie rigide, controllando che l'asse del provino sia ben allineato con l'asse di trazione della macchina, per assicurare l'uniassialità della sollecitazione.

1.5.2 Aspettative nelle caratteristiche del metodo

Lo studio sperimentale dei fenomeni di localizzazione richiede stime spazio-temporali precise delle grandezze cinematiche associate all'evoluzione deformativa. Nel trattamento delle immagini numeriche il primo passo consiste nella stima del campo di spostamenti superficiali del provino captato con la camera C.C.D. durante la prova meccanica. Tale stima impone che la tecnica di correlazione delle immagini digitali rispetti meticolosamente le seguenti caratteristiche:

1. le misure devono essere stimabili con una precisione compresa tra $[0.1, 100] pixels$, corrispondente ad un intervallo di circa $[10^{-2}, 10] mm$;
2. le misure devono poter essere realizzate su numerosi punti (circa 100×100 punti di misura per ogni immagine);

3. una buona densità delle misure nel tempo. Un'elaborazione consistente richiede almeno 100 immagini consecutive;
4. sensibilità ridotta a perturbazioni esterne quali le vibrazioni e le fluttuazioni dell'intensità luminosa.

La tecnica di correlazione delle immagini digitali, le cui caratteristiche sono presentate in questo capitolo, è stata brevettata presso il *Laboratoire de Mécanique et Génie Civil* dell'Università di Montpellier II. Tale tecnica è in grado di acquisire un punto di misura ogni $0.3 \div 0.4\text{ mm}$, permettendo un buon compromesso tra densità delle misure e tempi di calcolo. Inoltre la necessità di monitorare la crescita delle localizzazioni nel tempo ha richiesto frequenze di misura sufficientemente elevate; pertanto l'acquisizione delle immagini è avvenuta ogni 0.5% di deformazione. Un valore ridotto avrebbe reso difficile il rilievo di localizzazioni ridotte.

I fenomeni evolutivi, che si riferiscono alla meccanica dei corpi continui, sono descritti attraverso delle grandezze locali. L'obiettivo della tecnica di correlazione delle immagini digitali è quello di fornire opportune misure da cui estrarre informazioni a livello della scala del punto materiale. Si perviene a questo genere di informazioni attraverso le misure degli spostamenti dei punti appartenenti alle superfici osservate. A tali spostamenti è successivamente applicato un trattamento numerico per il calcolo delle grandezza derivate.

In particolare la tecnica di correlazione delle immagini digitali ha aperto il passaggio verso l'identificazione dei fenomeni di localizzazione. A tal uopo i campi di spostamento sono misurati utilizzando la tecnica granulometrica in condizione di luce bianca. Le superfici dei provini, osservate con la camera C.C.D., sono accuratamente preparate prima di ogni prova. Dapprima sono coperte con della vernice nera che viene lasciata essiccare. Successivamente sono parzialmente ricoperte con della tintura acrilica di colore bianco. Tale tintura è spruzzata in maniera disuniforme sullo strato di vernice nera, permettendo di realizzare numerose macchie di dimensione e forma irregolari, con tonalità variabili tra il bianco ed il grigio scuro. Le macchie ottenute permettono di identificare i punti della superficie del provino necessari per le misure di spostamento e per il successivo calcolo delle grandezze derivate (deformazioni, velocità di deformazioni, ecc.). Le immagini acquisite e digitalizzate per mezzo della camera C.C.D. sono quindi costituite da un elevato numero di macchie d'intensità, forma e dimensioni variabili, ripartite aleatoriamente.

1.5.3 Il metodo granulare in luce bianca

In generale i metodi ottici di misura risultano molto adatti allo studio dei fenomeni di localizzazione. I metodi classici utilizzano strumenti puntuali (gauges, estensometri, trasduttori di spostamento . . .) che forniscono informazioni relative al solo punto in cui vengono applicati, e comportano lo svantaggio di dover essere applicati sulla zona interessata. Contrariamente, utilizzando i metodi ottici, le misurazioni sono effettuate senza contatto fisico con il materiale osservato. Questo vantaggio è notevole, perchè l'assenza di contatto impedisce agli strumenti di misura di disturbare la superficie osservata, e di inficiare i risultati ottenuti. Infatti le stesse localizzazioni possono modificare l'aderenza tra la superficie e gli estensimetri, ad esempio, falsando le misure.

Il metodo della correlazione delle immagini digitali è una tecnica che, oltre ad essere poco sensibile alle perturbazioni esterne, fornisce informazioni complete su tutta la superficie osservata (*full-field measurements*), consentendo sia di misurare i campi di spostamenti e di deformazione sia di individuare le zone in cui si realizzano le localizzazioni durante il processo deformativo.

Ogni punto subisce uno spostamento che possiede tre componenti, di cui due appartenenti alla superficie osservata ed una terza componente perpendicolare alla superficie stessa. Tuttavia, le componenti di spostamento misurate sono quelle appartenenti alla superficie rilevata dalla camera C.C.D.. Le successive deformazioni sono calcolate attraverso il gradiente del campo di spostamenti. Per ogni punto si calcolano quindi le componenti piane del tensore di deformazione, mentre opportune ipotesi di natura meccanica rendono possibile il calcolo della componente di deformazioni fuori piano.

Le misure sono state eseguite utilizzando la luce bianca.¹ Esistono dei materiali che alle normali scale di osservazione presentano delle superfici con un aspetto naturalmente contrastato. Esempi di questo tipo di materiali sono il legno e il calcestruzzo, per i quali l'impiego della luce bianca non richiede alcuna preparazione preventiva delle superfici. Al contrario, nel caso degli acciai e dei polimeri, occorre pretrattare con le vernici nera e bianca le superfici, al fine di ottenere l'effetto granulare necessario (Fig. 1.3).

La tecnica della correlazione delle immagini digitali, adottata per la misura degli spostamenti, si basa sul trattamento delle immagini acquisite durante la sollecitazione dei provini. Il trattamento permette di passare dalle immagini superficiali al campo di

¹In condizione di *luce bianca*, sono riflesse soltanto le lunghezze d'onda che realizzano le condizioni di massimo. Le lunghezze d'onda corrispondenti alle condizioni di minimo sono soppresse.

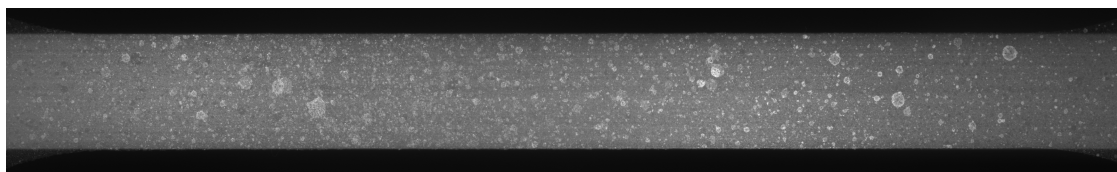


Figura 1.3: Esempio di immagine granulare acquisita dalla camera C.C.D..

deformazione e si effettua a posteriori in due tempi: per prima cosa si calcola il campo di spostamenti e successivamente le deformazioni sono calcolate per derivazione degli spostamenti stessi.

1.6 La Correlazione delle immagini digitali

Con la tecnica di correlazione delle immagini digitali sono calcolate le componenti di spostamento afferenti a ciascun istante di acquisizione di una prova meccanica. Gli spostamenti rappresentano i cambiamenti di configurazione subiti dai punti della superficie di un provino piano, passando da un'immagine alla successiva. In particolare lo spostamento di un punto P , appartenente all'immagine di riferimento, è associato allo spostamento di una "sotto-immagine" costituente un intorno digitale dello stesso punto all'interno di una generica immagine deformata. L'intorno digitale costituente la sotto-immagine del punto P si chiama "*Zona di Correlazione*" (Z_C).

La tecnica della correlazione digitale consiste nel ricercare l'ornamento granulometrico (ovvero la distribuzione dei livelli di grigio), contenuto nella zona di correlazione, all'interno delle immagini acquisite negli istanti successivi a quello iniziale (Fig. 1.4). Tale ricerca è limitata ad una zona di ampiezza fissata, chiamata "*Zona di Ricerca*" (Z_R).

L'effetto granulometrico permette di interpretare le immagini digitali come dei segnali bidimensionali. In tal caso ogni immagine digitalizzata corrisponde alla distribuzione della funzione di ripartizione dell'intensità luminosa sulla superficie osservata. Pertanto lo spostamento subito dai punti appartenenti a due immagini, acquisite in istanti diversi, viene calcolato come sfasamento di due segnali bidimensionali.

In figura 1.5 è stato rappresentato il caso dello sfasamento tra due segnali unidimensionali. In questa figura l'ascissa x rappresenta una coordinata di riferimento, cioè una qualsiasi direzione dell'immagine, mentre la curva continua $f(x, t)$ rappresenta la funzione d'intensità luminosa e dipende dallo spazio (x) e dal tempo (t). La figura 1.5 rappresenta una idealizzazione, perchè nella realtà la digitalizzazione,

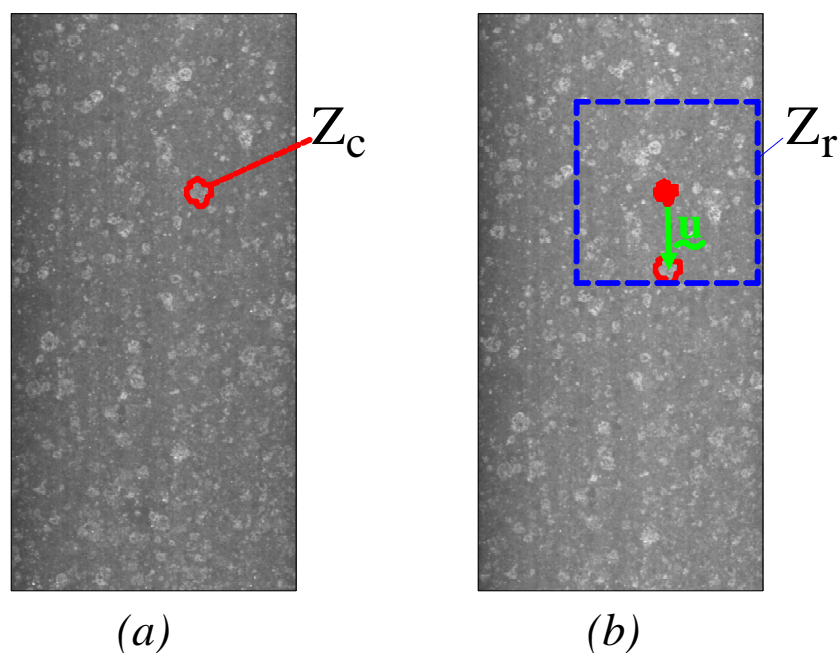


Figura 1.4: Rappresentazioni della zona di correlazione Z_C e della zona di ricerca Z_R nelle immagini iniziale (a) e finale (b).

effettuata attraverso la camera C.C.D., realizza un'acquisizione discreta di segnali bidimensionali a diversa intensità luminosa.

L'obiettivo, come più volte sottolineato, è quello di fornire una stima attendibile dello spostamento $\underline{u}(M, t_1)$ del generico punto M tra gli istanti t_1 e t_2 . Nel seguito di questa introduzione al funzionamento della D.I.C. si espongono i principi generali della tecnica, con particolare riferimento alla metodologia applicata dall'équipe di Thermomécanique des Matériaux del Laboratoire des Mécanique et Génie Civil dell'Università di Montpellier II. La trattazione completa, ed il confronto dei diversi metodi di calcolo sono reperibili in [Bornert *et al.*, 2009].

Siano $\underline{X} = (X, Y)$ ed $\underline{x} = (x, y)$ i vettori posizione dello stesso punto M di un provino in due immagini distinte, e quindi appartenenti rispettivamente alle configurazioni indeformata e deformata, e siano, inoltre, $f(\underline{X})$ e $g(\underline{x})$ i corrispondenti livelli di grigio. Lo spostamento del punto M è determinabile una volta nota la trasformazione meccanica Φ_M tale che $\underline{x} = \Phi_M(\underline{X})$. La seguente relazione di conservazione assicura l'uguaglianza tra i livelli di grigio nelle configurazioni indeformata e deformata:

$$g(\Phi_M(\underline{X})) = f(\underline{X}). \quad (1.30)$$

L'obiettivo degli algoritmi di calcolo della D.I.C. consiste nel determinare la trasfor-

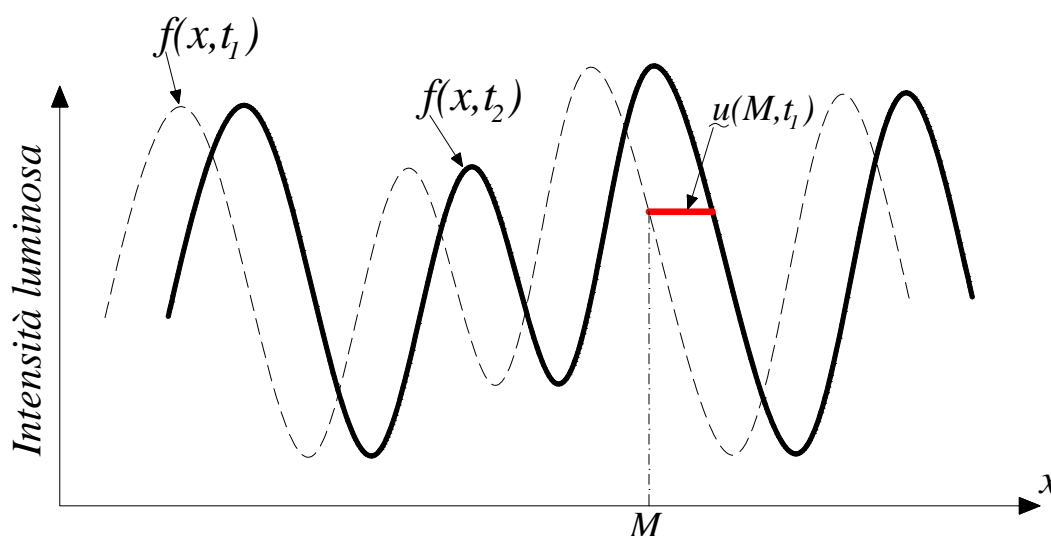


Figura 1.5: Esempio di spostamento tra segnali unidimensionali

mazione Φ_M partendo dalla conoscenza dei segnali corrispondenti ai livelli di grigio f e g . Tale problema, noto come “determinazione del flusso ottico”, consiste in un problema inverso mal posto, risolvibile in maniera approssimata con l’aiuto di ipotesi opportune.

I classici algoritmi di correlazione prevedono una decomposizione delle immagini di riferimento in sottodomini D di forma quadrata, chiamati anche “finestre di correlazione”. In ciascuno di tali sottodomini la trasformazione incognita Φ_M è approssimata con delle funzioni di forma Φ , appartenenti alla famiglia ε_D delle funzioni continue di spostamento, descritte da un numero limitato di parametri scalari. Tali parametri sono calcolati attraverso l’algoritmo generale della D.I.C., minimizzando un coefficiente di correlazione, che misura la differenza tra le distribuzioni dei livelli di grigio nel sottodominio D dell’immagine di riferimento e nel suo corrispondente all’interno dell’immagine deformata:

$$\Phi_D \approx \text{Argmin}_{\Phi} \mathcal{C}(\Phi), \quad \text{con } \Phi \in \varepsilon_D. \quad (1.31)$$

In letteratura esistono varie possibilità per la scelta del coefficiente di correlazione $\mathcal{C}(\Phi)$ e delle funzioni di forma Φ . I coefficienti di correlazione possono essere calcolati attraverso espressioni ai minimi quadrati, oppure per mezzo del prodotto di correlazione, in entrambi i casi la loro espressione può essere normalizzata oppure no.

L’algoritmo sviluppato presso l’équipe di Thermomécanique des Matériaux del Laboratoire des Mécanique et Génie Civil dell’Università di Montpellier II, ed aggiornato

sotto la direzione del Prof. Wattrisse, fa uso della seguente espressione normalizzata per il prodotto di correlazione:

$$\mathcal{C}_{NCC}(\Phi) = 1 - \frac{\int_{Z_C} f(\underline{X}) \cdot g[\Phi(\underline{X})] d\underline{X}}{\sqrt{\int_{Z_C} f(\underline{X})^2 d\underline{X}} \sqrt{\int_{Z_C} g[\Phi(\underline{X})]^2 d\underline{X}}}, \quad (1.32)$$

nella quale le integrazioni avvengono sulla zona di correlazione Z_C , che rappresenta il generico sottodominio D dell'immagine di riferimento. Il coefficiente di correlazione (1.32) assume un valore pari a zero quando la funzione di forma sul sottodominio rappresentato dalla zona di correlazione è pari alla funzione di trasformazione cercata: $\Phi = \Phi_M$.

L'inevitabile presenza di rumore random $n(\underline{X})$ nelle immagini numeriche, determina una restrizione di Φ_M sulla zona di correlazione che non appartiene alla famiglia di funzioni ε_D . Questo fenomeno richiede alla (1.30) di modificarsi nell'espressione seguente:

$$g(\Phi_M(\underline{X})) = f(\underline{X}) + n(\underline{X}). \quad (1.33)$$

Si assume che, anche in presenza di rumore, la trasformazione Φ_0 , che minimizza il coefficiente di correlazione (1.32), fornisce la migliore approssimazione locale di Φ_M su D , e quindi su Z_C . In particolare, lo spostamento \underline{s}_0 del punto centrale \underline{X}_0 del sottoinsieme D è valutabile come:

$$\underline{u}_0 = \Phi_0(\underline{X}_0) - \underline{X}_0. \quad (1.34)$$

Un'espressione ancora più generale per la (1.30) è quella che tiene conto del cambio di contrasto luminoso dovuto a differenti condizioni di illuminazione:

$$g(\Phi_M(\underline{X})) = c \cdot f(\underline{X}) + b + n(\underline{X}), \quad (1.35)$$

nella quale b e c sono opportune costanti scalari. Tuttavia l'espressione (1.32), scelta per la rappresentazione del coefficiente di correlazione risulta insensibile alla costante c [Bornert et al., 2009].

Sia $\Delta \underline{X} = \underline{X} - \underline{X}_0$, considerando un'espansione in serie di Taylor, arrestata al primo ordine, dello spostamento $\underline{u}(\underline{X}) = \Phi(\underline{X}) - \underline{X}$ attorno al punto centrale \underline{X}_0 del sottoinsieme D :

$$\underline{u}(\underline{X}) = \underline{u}(\underline{X}_0) + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \Big|_{\underline{X}_0} \cdot \Delta \underline{X} + \frac{1}{2} \Delta \underline{X}^T \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \underline{X}^2} \Big|_{\underline{X}_0} \cdot \Delta \underline{X} + \dots, \quad (1.36)$$

si ottengono le componenti orizzontale $u_1(X, Y)$ e verticale $u_2(X, Y)$ della trasformazione affine ad otto coefficienti:

$$\begin{cases} u_1(X, Y) = a_1 + a_3\Delta X + a_5\Delta Y + a_7\Delta X\Delta Y \\ u_2(X, Y) = a_2 + a_4\Delta X + a_6\Delta Y + a_8\Delta X\Delta Y. \end{cases} \quad (1.37)$$

Un campo di spostamenti $\mathfrak{u}(X, Y)$ con componenti (1.37) è generalmente utilizzato per piccoli gradienti di deformazione, e la sua espressione è la seguente:

$$\mathfrak{u}(X, Y) = u_1(X, Y) \cdot \mathfrak{i}_1 + u_2(X, Y) \cdot \mathfrak{i}_2, \quad (1.38)$$

nella quale con \mathfrak{i}_1 ed \mathfrak{i}_2 si sono indicati i versori degli assi di riferimento orizzontale e verticale rispettivamente.

Tenendo conto delle (1.34) e (1.38), l'espressione di Φ nel punto centrale di ogni sottodominio D si esprime come segue:

$$\Phi(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} + [u_1(X, Y)\mathfrak{i}_1 + u_2(X, Y)\mathfrak{i}_2], \quad (1.39)$$

quindi, utilizzando lo spostamento $\mathfrak{u}(X, Y)$, il segnale bidimensionale $g(\mathfrak{x})$ nella configurazione deformata si può esprimere come segnale nella configurazione di riferimento $f(\mathfrak{X})$:

$$g(\mathfrak{x}) = g(\Phi(\mathfrak{X})) = f[\mathfrak{X} + \mathfrak{u}(\mathfrak{X})]. \quad (1.40)$$

Inserendo l'espressione (1.40) all'interno della (1.32), si osserva che un valore nullo del coefficiente di correlazione si ottiene quando il minuendo della (1.40) assume valore massimo:

$$\max_{X, Y} \left(\frac{\int_{Z_C} f(\mathfrak{X}) \cdot f[\mathfrak{X} + \mathfrak{u}(X, Y)] d\mathfrak{X}}{\sqrt{\int_{Z_C} f(\mathfrak{X})^2 d\mathfrak{X}} \sqrt{\int_{Z_C} f[\mathfrak{X} + \mathfrak{u}(X, Y)]^2 d\mathfrak{X}}} \right). \quad (1.41)$$

A questo punto bisogna osservare che i segnali all'interno della (1.41) sono espressi dalla funzione continua f , mentre nella realtà i segnali, acquisiti dalla camera C.C.D., sono discreti. Il passaggio al caso discreto della (1.41) richiede due osservazioni.

Innanzitutto un segnale discreto può essere sfasato soltanto di un valore pari ad un multiplo di un pixel, pertanto anche le variabili indipendenti X ed Y possono assumere soltanto valori discreti, con componenti di spostamento pari a multipli del pixel. Una risoluzione più accurata si ottiene interpolando i valori locali dei livelli di grigio con polinomi di classe di continuità C_0 e C_1 .

Inoltre gli integrali devono essere calcolati con opportuni metodi d'integrazione discreta. Il ricorso al metodo d'integrazione di Riemann permette un calcolo molto

veloce. Tuttavia, poichè il numero di somme da realizzare è elevato, i tempi di calcolo potrebbero essere comunque molto lunghi, pertanto si utilizza la trasformata veloce di Fourier (F.F.T.), che permette un ulteriore incremento delle velocità computazionali.

Nel caso discreto la funzione di correlazione (1.32) si esprime nel modo seguente [Wattrisse et al., 2001b]:

$$\bar{\varphi}(k, l) = \frac{\sum_{i,j=-Z_C \setminus 2}^{Z_C \setminus 2} I_1(i_0 + i, j_0 + j) I_2(i_0 + i + k, j_0 + j + l)}{\sqrt{\sum_{i,j=-Z_C \setminus 2}^{Z_C \setminus 2} I_1(i_0 + i, j_0 + j)^2} \sqrt{\sum_{i,j=-Z_C \setminus 2}^{Z_C \setminus 2} I_2(i_0 + i + k, j_0 + j + l)^2}}. \quad (1.42)$$

Nella (1.42) i_0 e j_0 sono le coordinate in pixels di un generico punto della superficie, I_1 ed I_2 rappresentano due immagini separate da uno shift temporale molto piccolo, mentre k ed l sono due valori appartenenti alla zona di ricerca: $k, l \in [-Z_R, Z_R]$.

1.6.1 Scelta dei valori della Z_C e della Z_R

I tempi di calcolo della funzione (1.42) aumentano in funzione dei valori scelti per Z_C e per Z_R secondo un legame quadratico.

Il parametro Z_C influenza l'accuratezza delle misure di spostamento. In particolare l'accuratezza migliora scegliendo valori grandi del parametro Z_C . Un compromesso adeguato tra velocità ed accuratezza si ottiene per valori della Z_C di circa 20×20 pixels. Per ridurre i tempi di calcolo si possono scegliere valori piccoli della Z_R . Tuttavia, nel caso di grandi spostamenti, questa scelta può comportare incrementi di spostamento troppo alti. Una strategia adatta a mantenere tempi di calcolo bassi consiste nel calcolare una stima approssimata del campo di spostamenti su una griglia virtuale rada (dell'ordine di 25×50 pixels), utilizzando un valore della zona di ricerca Z_R sufficientemente grande. Successivamente gli spostamenti vengono calcolati su una griglia più fine, interpolando i dati di prima approssimazione ottenuti sulla griglia rada [Wattrisse et al., 2001a]. Ad esempio tra due immagini con risoluzione di 1024×1024 pixels, rappresentative di uno stato di deformazione omogeneo del 10%, si può scegliere una zona di ricerca Z_R di almeno 103 pixels. In tal caso, calcolando gli spostamenti di 10^4 punti, il tempo computazionale per un calcolo completo si aggira sui 22×10^3 secondi. Viceversa, calcolando il campo di spostamenti attraverso l'interpolazione dei valori corrispondenti a 10^2 punti, il tempo di calcolo si riduce a circa 264 secondi. Utilizzando la prima stima del campo di spostamenti, si può scegliere un valore per la zona di ricerca (Z_R) compreso tra 3 e 5 pixels.

1.7 Calcolo della componente di spostamento fuori piano

La tecnica di correlazione, esposta al paragrafo precedente, dà accesso alle componenti piane di spostamento, appartenenti alla superficie captata dalla camera C.C.D.. A partire dalla conoscenza di tali componenti di spostamento ed applicando un'equazione supplementare, fornita da un'ipotesi di natura meccanica, è possibile stimare anche la componente di spostamento fuori piano. In [Wattrisse Bertrand, 1999] l'ipotesi meccanica, alla quale si è fatto ricorso è stata l'*incompressibilità materiale*. Utilizzando il formalismo dell'espressione ricavata in [Wattrisse Bertrand, 1999], e tenendo conto che, a causa del danneggiamento, un materiale composito a fibra corta subisce una trasformazione non isocora la metodologia per il calcolo della componente di spostamento fuori piano è di seguito esposta. Nel contesto delle trasformazioni finite sia $J = \Delta V/V$ la variazione di volume subita da un intorno infinitesimo di materiale:

$$\det \underline{\mathbb{F}} = J, \quad (1.43)$$

dove, al solito, $\underline{\mathbb{F}}$ indica il tensore *gradiente di deformazione*.

In generale lo spostamento di un punto M all'interno di una terna di riferimento cartesiano si scrive nel modo seguente:

$$\underline{u}(M(x_1, x_2, x_3), t) = u_1(M(x_1, x_2, x_3), t)\underline{i}_1 + u_2(M(x_1, x_2, x_3), t)\underline{i}_2 + u_3(M(x_1, x_2, x_3), t)\underline{i}_3. \quad (1.44)$$

Nella (1.44) x_1, x_2, x_3 rappresentano le coordinate di un generico punto M all'interno di un sistema di riferimento cartesiano ortonormale, i cui assi sono identificati dai versori $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$. Una semplificazione è possibile ipotizzando che le componenti \underline{i}_1 ed \underline{i}_2 non dipendano da x_3 . In tal caso la (1.44) si scrive come:

$$\underline{u}(M(x_1, x_2, x_3), t) = u_1(M(x_1, x_2, 0), t)\underline{i}_1 + u_2(M(x_1, x_2, 0), t)\underline{i}_2 + u_3(M(x_1, x_2, x_3), t)\underline{i}_3.$$

L'equazione (1.43) diventa

$$\det \underline{\mathbb{F}} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (1.45)$$

ovvero:

$$\det \tilde{\mathbb{F}} = \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = J. \quad (1.46)$$

La (1.46) permette di esplicitare la componente di spostamento fuori piano u_3 per integrazione dell'equazione differenziale (1.47).

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}} - J = f(x_1, x_2) \quad (1.47)$$

L'applicazione delle formule (1.42) e (1.47) permette di calcolare il campo di spostamenti relativo ai nodi della griglia virtuale, solidale con la superficie osservata. Con riferimento alla formula (1.42) questi spostamenti rappresentano il passaggio dalla configurazione rappresentata dall'immagine I_1 alla configurazione rappresentata dall'immagine I_2 . A questo punto la procedura è ripetuta per una nuova coppia di immagini $I_2 - I_3$ e così via, fino ad ottenere il path completo dei nodi della griglia per ogni incremento di carico del processo evolutivo del provino osservato.

Occorre ricordare che i pixels sono rappresentati da numeri interi; pertanto dopo un qualsiasi incremento di carico la posizione di ciascun punto M non sempre corrisponde ad un valore intero di pixel. Il modo più banale di risolvere questo problema potrebbe essere quello di approssimare la soluzione all'intero più prossimo a quello calcolato ed utilizzare quest'ultimo come base per i calcoli successivi. Purtroppo questo modo di procedere non solo introdurrebbe un errore nelle misure, ma renderebbe i risultati incompatibili con la descrizione Lagrangiana del moto. Tipicamente l'incremento di deformazione $\Delta\varepsilon$ tra due immagini acquisite consecutivamente è di circa 5×10^3 . Conseguentemente il massimo errore che si commetterebbe, approssimando uno spostamento al pixel più vicino, è di $\Delta\varepsilon \setminus 2$ che corrisponde a 2.5×10^3 . Un errore di tale entità è sicuramente abbastanza piccolo, tuttavia è ulteriormente ridotto attraverso una traslazione numerica delle immagini I_1 ed I_2 . Le zone di correlazione Z_C di ciascun punto M sono traslate di una quantità decimale rispetto agli spostamenti interi calcolati inizialmente. In questo modo le zone di correlazione seguono sempre la stessa zona materiale durante tutta la prova.

1.8 Il problema del calcolo delle derivate

Abbiamo già osservato che, come tutte le misure sperimentali, anche gli spostamenti calcolati per correlazione delle immagini numeriche sono inevitabilmente affetti da rumore. L'obiettivo di questa tecnica non si limita alla valutazione dei campi di spostamenti, ma consiste anche nella stima dei campi di velocità, di deformazione e di velocità di deformazione. Tali grandezze cinematiche si ottengono per derivazione spaziale o temporale dei dati di spostamento. Gli operatori di derivazione comportano lo svantaggio di amplificare il rapporto *rumore/segnale*, riducendo drasticamente la possibilità di interpretare il segnale utile rispetto al disturbo generato dal rumore. Quindi i segnali, che rappresentano i dati di spostamento, devono essere opportunamente trattati prima di procedere al calcolo delle derivate. Tale trattamento è noto in letteratura come *filtering*. Di seguito sono rapidamente esposte le tecniche più comuni.

Interpolazione del segnale Con questa tecnica il campo di spostamenti è interpolato con una funzione polinomiale. L'operatore di derivazione è poi applicato direttamente alla funzione polinomiale. Questa tecnica è molto rapida ed è anche molto utilizzata, tuttavia non risulta idonea a ridurre il rumore afferente gli spostamenti, pertanto è una tecnica inadatta ad individuare l'attivazione dei fenomeni di localizzazione nei materiali.

La proiezione del segnale su una base di funzioni Con questa tecnica i segnali di spostamento sono proiettati su una base di funzioni e gli operatori di derivazione sono applicati direttamente alle funzioni della base. Le operazioni di proiezione richiedono tempi di calcolo maggiori rispetto a quelle di derivazione. Esistono diversi metodi di proiezione del segnale, che differiscono tra loro per la scelta della base di proiezione utilizzata. Le basi comunemente incontrate sono: base di funzioni trigonometriche, base di onde (*Wavelet*) o base spettrale associata all'operatore differenziale. Queste tecniche presentano lo svantaggio di essere molto lente e delicate da implementare, ma permettono di troncatura la decomposizione del segnale ad un ordine dato o di attenuare alcune componenti del segnale. Risultano quindi adatte nello studio dei fenomeni di localizzazione. Tuttavia gli algoritmi di proiezione del segnale, utilizzando la trasformata veloce di Fourier (F.F.T.), rendono il segnale periodico e richiedono un campionamento regolare dei dati. Quando si manifestano fenomeni locali, l'aspetto dei materiali in superficie subisce una drastica trasformazione che diventa responsabile di un calcolo di correlazione difettivo e inaccurato. Nelle condizioni sperimentali

1.8 Il problema del calcolo delle derivate

in cui sono effettuate le prove, i punti interessati da una correlazione difettiva sono meno dello 0.5%. Si è scelto di ignorare questi punti e quindi di non utilizzare la trasformata veloce di Fourier.

Il metodo utilizzato per questo lavoro di tesi è un metodo di approssimazione, messo a punto ed implementato presso il *Laboratoire de Mécanique et Génie Civil di Montpellier*. Questo metodo si basa su una tecnica di approssimazione locale ai minimi quadrati del campo di spostamenti. Il segnale è approssimato mediante una funzione in prossimità di un punto all'interno di una regione che prende il nome di "zona di approssimazione" (Z_A). La forma della funzione di approssimazione è scelta in funzione del fenomeno fisico osservato e, dunque, dell'operatore differenziale associato. Nel calcolo delle derivate spaziali sono scelte funzioni di approssimazione lineari che corrispondono a deformazioni costanti sulla zona di approssimazione, mentre per il calcolo delle derivate temporali sono scelte delle funzioni di approssimazione quadratiche che corrispondono ad un'accelerazione localmente costante. L'operatore di derivazione è applicato alla funzione di approssimazione e il risultato di questa operazione è assegnato al punto ubicato al centro della zona di approssimazione. Il rumore viene così, in parte, filtrato, scegliendo una funzione di approssimazione adatta al fenomeno fisico osservato. Effettuando questo calcolo per ogni punto della griglia si ottiene il campo delle grandezze derivate. Questo procedimento permette il filtraggio dei dati sperimentali di spostamento senza richiedere maglie regolari di spostamento [Wattrisse et al., 2001a].

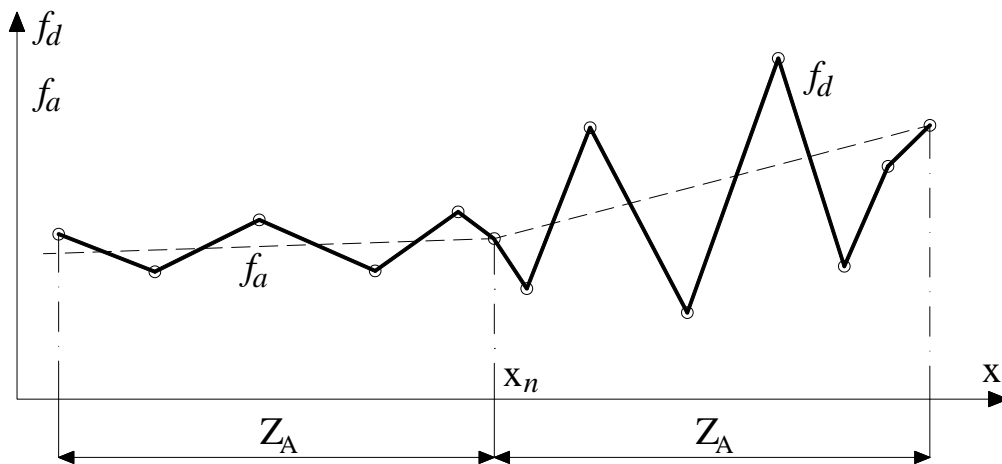


Figura 1.6: *Influenza della Z_A sul filtering.*

Il parametro Z_A equivale al numero fissato di punti attigui, usati per l'infittimento

locale. Le dimensioni della zona di approssimazione corrispondono al grado locale di approssimazione e da esse possono dipendere eventuali errori nella stima delle deformazioni. La scelta del valore da assegnare a Z_A rappresenta un compromesso tra regolarità ed accuratezza dei dati filtrati. In particolare scegliendo grandi valori di Z_A si riduce la deviazione standard delle misure di deformazione; con una scelta di questo tipo si aumenta l'accuratezza dei calcoli di deformazione, quando tali misure sono omogenee. Inoltre, in presenza di deformazioni localizzate, valori elevati di Z_A rendono il campo di deformazione uniforme. In figura 1.6 si illustra un esempio di segnale unidimensionale f_d , filtrato con una funzione di approssimazione f_a , in cui x è la variabile rispetto alla quale si esegue l'operazione di derivazione. All'interno della Z_A , a sinistra del punto x_n , la funzione di approssimazione f_a risulta adeguata alle variazioni del segnale f_d . Nel caso di segnali eterogenei, illustrati nella Z_A a destra del punto x_n , la funzione di approssimazione f_a sottostima le variazioni del segnale f_d . In prossimità dei bordi delle immagini l'approssimazione avviene su un numero

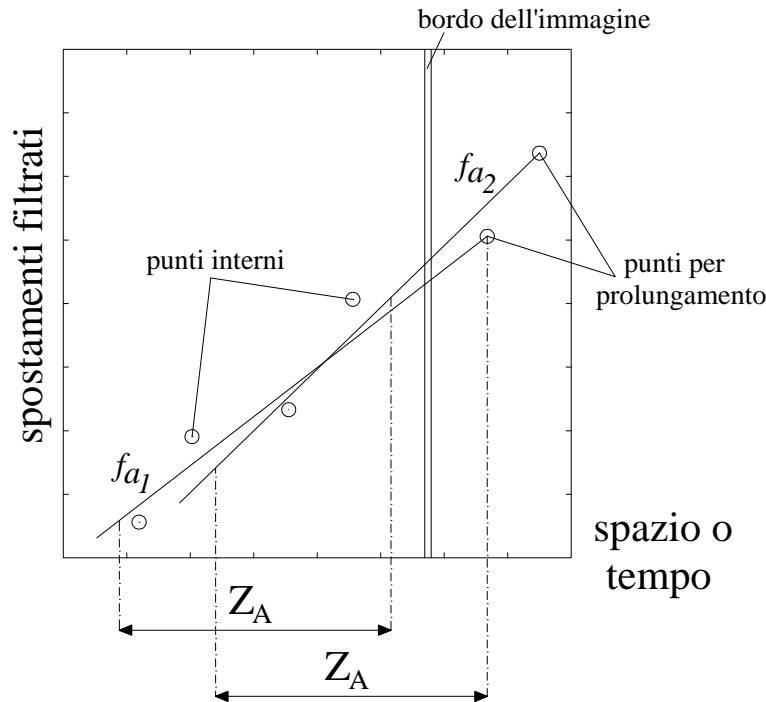


Figura 1.7: *Prolungamento degli spostamenti oltre il bordo delle immagini.*

ridotto di punti, con conseguente perdita di precisione nelle misure filtrate. Per evitare questo inconveniente si prolunga il segnale filtrato, conservandone la continuità fino all'ordine desiderato. Il prolungamento del segnale oltre il bordo delle immagini ne

richiede un'approssimazione. Il procedimento è illustrato in figura 1.7. Si calcola la funzione di approssimazione fa_1 su una Z_A di bordo, prolungandola fino ad un punto esterno al dominio iniziale, che deve distare dal bordo di un valore uguale al passo della griglia all'interno della Z_A di bordo. A questo punto è possibile spostare la zona di approssimazione verso l'esterno del dominio iniziale e ricalcolare una nuova funzione di approssimazione fa_2 . Il calcolo è reiterato utilizzando i punti generati all'esterno dell'immagine. La procedura viene interrotta quando fuori dal dominio iniziale sono stati creati $Z_A \setminus 2$ punti [Wattrisse et al., 2001a].

1.9 Caratteristiche dell'ottica utilizzata

La camera C.C.D. acquisisce immagini ad alta frequenza durante l'esecuzione della prova meccanica. Le immagini acquisite sono digitalizzate nel formato a 12 bits, riconoscendo fino a 95 livelli di grigio. A ciascun pixel dell'immagine è assegnato un valore del livello di grigio, pertanto le immagini digitalizzate sono immagini in bianco e nero ad alta risoluzione. La scelta del grigio, come colore di base, costituisce un ragionevole compromesso tra efficienza e memoria necessaria. Basta pensare, infatti, che un'immagine con una risoluzione di 3500×2300 pixels, codificata nel formato ad 12 bits, contiene l'equivalente di $1024 \times 1024 = 8,05 \times 10^6$ caratteri ASCII. Risulta evidente che la digitalizzazione nel formato a 12 bits richiede già un concreto impegno di memoria. Poichè i livelli di grigio permettono accuratezza e affidabilità, l'uso della digitalizzazione a colori sarebbe ingiustificata.

La camera C.C.D. fornisce immagini affette da rumore che invalida le misure di spostamento e di deformazione. Un apposito studio ha dimostrato che il rumore introdotto dalla camera C.C.D. è un rumore Gaussiano, stazionario [Wattrisse Bertrand, 1999]. Nell'ambito della stessa indagine [Wattrisse Bertrand, 1999] è stata condotta una valutazione dell'errore introdotto dalle aberrazioni ottiche. Al pari del rumore le aberrazioni sono sempre, inevitabilmente, presenti. Esse consistono in deformazioni fittizie introdotte dall'obiettivo della camera C.C.D. La stima di tali aberrazioni è avvenuta confrontando l'immagine reale, aberrata di una mira topografica acquisita per mezzo della camera C.C.D., con un'immagine artificiale, creata numericamente, della stessa mira.

La camera C.C.D. ad alta frequenza introduce naturalmente del rumore nei livelli di grigio delle immagini. Il rumore, appartenente all'immagine corrente, è valutato per differenza tra l'immagine corrente ed un'immagine di riferimento. È stato stimato che, il rumore elettronico, introdotto nei livelli di grigio delle immagini acquisite per

questo lavoro di tesi, è un intero compreso tra $\in [-1600, 1850]$; esso si distribuisce attorno al valore medio 22.87 con una deviazione standard di 36.89 (figura 1.8).

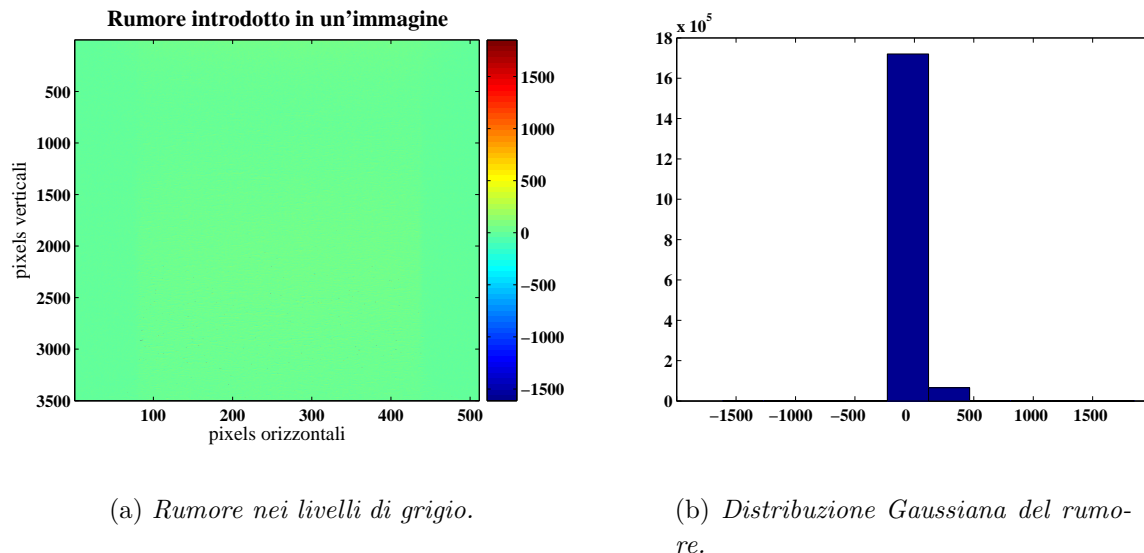


Figura 1.8: Caratteristiche del rumore nei dati.

1.10 La validazione del metodo

Il metodo descritto ha richiesto un controllo di validazione, al fine di verificarne l'affidabilità e di assicurarne le potenzialità. A tal uopo sono richiesti due tipi di controlli.

Il primo consiste nel controllare che gli spostamenti e le deformazioni, ottenuti per correlazione, eguagliano, a meno delle incertezze sulle misure, le corrispondenti quantità afferenti ad una traslazione rigida del provino osservato. Questo genere di prova è facile da realizzare.

Con il secondo bisognerebbe conoscere a priori la soluzione relativa ad un corpo deformabile sottoposto a condizioni a contorno note. Tuttavia, è praticamente impossibile imporre sperimentalmente un campo di deformazioni, noto a priori, su una struttura reale. Pertanto, le procedure e gli algoritmi di correlazione e di differenziazione sono stati testati sulle immagini analitiche deformate numericamente. Infatti, nell'ambito del metodo di correlazione, una data immagine I_1 può essere tanto reale quanto virtuale. Partendo da un'immagine di riferimento reale, acquisita in condizioni nor-

mali, la funzione d'intensità luminosa è stata valutata ai nodi di una griglia regolare virtualmente sovrapposta all'immagine. Questi dati nodali sono stati interpolati con una spline bicubica, al fine di avere un'espressione analitica della funzione d'intensità luminosa [Wattrisse Bertrand, 1999]. È bene osservare che un'interpolazione di questo tipo è possibile soltanto se l'intensità luminosa dell'immagine originale rimane relativamente regolare. Inoltre la distribuzione dei livelli di grigio, relativi all'immagine analitica, deve essere in accordo con la distribuzione dei livelli di grigio nell'immagine reale.

L'immagine virtuale consiste in una superficie sulla quale sono distribuiti numerosi punti luminosi. Ogni punto è rappresentato da una funzione Gaussiana. La posizione (x_k, y_k) , la dimensione (R_k^x, R_k^y) e l'intensità (I_k^0) di un punto luminoso qualsiasi sono scelte in maniera random. La sovrapposizione di N_S punti luminosi restituisce la seguente definizione analitica della funzione numerica d'intensità luminosa:

$$I(x, y) = \sum_{k=1}^{N_S} I_k^0 \exp\left(-\left(\frac{x - x_k}{R_k^x}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{y - y_k}{R_k^y}\right)^2\right). \quad (1.48)$$

L'immagine digitale analitica è ottenuta valutando la funzione (1.48) sui punti di una griglia regolare e uguale a quella del rilevatore C.C.D. [Wattrisse et al., 2001a]. Una volta nota la (1.48) è possibile costruire campi di traslazione, di rotazione e di deformazione.

1.10.1 Controllo degli spostamenti nel piano

È stato osservato che, applicando una traslazione all'immagine analitica, l'errore medio, che influenza le misure di spostamento (\bar{e}_u), dipende dallo spostamento imposto (u_{imp}) ed è definito nel modo seguente:

$$\bar{e}_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_{comp}^i - u_{imp}), \quad (1.49)$$

in cui u_{comp}^i è lo spostamento calcolato in corrispondenza del generico punto di misura i ed n è il numero complessivo di punti di misura. L'errore definito dalla (1.49) ha una forma approssimativamente sinusoidale con periodo di circa 1 pixel ed è definito "errore sistematico" ($\bar{e}_{syst} = \bar{e}_u$). Nel caso unidimensionale l'errore sulla misura dello spostamento nel generico punto i si scrive come:

$$\bar{e}_u^i = e_{syst}(u_{imp}) + e_{rand}^i. \quad (1.50)$$

Nella (1.50) e_{rand}^i rappresenta la componente random dell'errore nel punto i , esso non dipende dall'entità dello spostamento applicato ed è caratterizzato da una distribuzione normale attorno al valore medio nullo e ad una deviazione standard pari ad 1.2×10^{-2} pixels. Inoltre e_{syst} non dipende dal valore scelto per la zona di correlazione Z_C , mentre e_{rand}^i decresce per elevati valori di Z_C . Un'ulteriore dipendenza dell'errore è legata alle dimensioni dei punti luminosi: l'errore sistematico si riduce per punti luminosi di dimensioni crescenti, i quali non influenzano per niente il valore di e_{rand}^i [Wattrisse et al., 2001a].

L'analisi di immagini simulate numericamente ha messo in luce che l'errore sistematico ha origine dalla combinazione di due fattori: l'errore di integrazione numerica, contenuta nel calcolo per correlazione, e l'uso dei polinomi per l'interpolazione a livello dei subpixels. A dispetto dell'errore random, l'errore sistematico non è facilmente rimovibile con dei metodi standard di filtering. Tuttavia la sua influenza può essere ridotta.

1.10.2 Controllo e sensibilità del metodo per diverse condizioni di spostamento

La tecnica di correlazione permette di accedere alle sole componenti traslazionali del campo di spostamenti, ma non è adatta a stimare la rotazione locale della zona di correlazione Z_C . Ad ogni modo una stima della rotazione relativa tra due immagini, acquisite in istanti successivi, è possibile a patto che l'angolo di rotazione relativo sia piccolo. In particolare il metodo è utilizzabile per stimare rotazioni relative più piccole di 20 gradi sessagesimali. Infatti la funzione d'intercorrelazione (1.42) risulta fortemente sensibile alle componenti rotatorie del moto. Verosimilmente, a parità di zona di ricerca Z_R , la funzione d'intercorrelazione (1.42) incontra un solo punto di picco, quando lo spostamento tra due immagini consecutive è puramente traslatorio, mentre incontra più punti di picco nel caso di componenti di spostamento puramente rotazionali. Pertanto ne consegue che, a meno di rotazioni relative piccole, la soluzione è univoca soltanto nel caso di traslazione pura.

Appropriati controlli, effettuati in laboratorio per mezzo di una macchina di misura triassiale, hanno permesso di controllare la procedura di calcolo della componente di spostamento fuori piano (1.47), nonché la consistenza delle ipotesi che ne sono alla base [Wattrisse et al., 2001a]. L'evoluzione temporale dei calcoli permessi dalla (1.47) risulta sempre in accordo con le misure sperimentali ogni volta che l'ipotesi di incompressibilità materiale è applicabile.

Un ruolo importante nella risoluzione e nella precisione delle deformazioni è gio-

cato dal parametro rappresentante la zona di approssimazione Z_A . In situazioni di deformazioni distribuite in maniera omogenea, le stesse possono essere visualizzate con un'elevata risoluzione sulla superficie osservata. Questo, tuttavia, richiede tempi di calcolo molto elevati che aumentano con il quadrato di Z_A . Quando sul dominio di osservazione le deformazioni sono eterogenee, con forti localizzazioni concentrate in zone dalle dimensioni di 200 pixels, un valore elevato della zona di approssimazione rende possibile visualizzare gli effetti delle concentrazioni di deformazioni su zone più ampie. Risulta, tuttavia, svantaggioso sottostimare le deformazioni massime rispetto alla realtà. In definitiva valori di Z_A compresi tra 25 e 50 pixels costituiscono un buon compromesso tra accuratezza dei risultati e tempi di calcolo.

Si osserva, infine, che l'accuratezza nella misura delle deformazioni dipende anche dal numero di incrementi di spostamento e, dunque, dalla velocità con cui è eseguita la prova di carico. In questo caso l'errore rimane sempre inferiore a 2×10^{-4} .

Capitolo 2

Problemi Inversi: stato dell'arte e metodo di identificazione utilizzato

2.1 Introduzione ai Problemi Inversi

NEL capitolo precedente è stato già discusso della tendenza da parte della meccanica sperimentale moderna ad utilizzare strumenti per la misura degli spostamenti e delle deformazioni che non richiedono il contatto con i corpi e con le superfici studiate. Tale tendenza è invogliata da un fattore importante. La continua evoluzione del mercato tecnologico permette di reperire camere C.C.D. a costi sempre più competitivi, e microcalcolatori elettronici sempre più potenti ed affidabili. Pertanto l'utilizzo di tecniche di misura *non-contact* sta diventando sempre più diffuso all'interno dei laboratori di ricerca. Tali tecniche includono l'interferometria speckle, ma soprattutto la *digital image correlation* (D.I.C.). Rispetto alle tecniche di misura classiche, quelle moderne consentono di rilevare un numero molto elevato di dati sperimentali (tipicamente da 1000 a 10000 punti di misura indipendenti), e, pertanto, hanno modificato le procedure sperimentali seguite all'interno dei laboratori di ricerca, incrementando l'interesse verso i cosiddetti "*Problemi Inversi*".

Infatti un campo molto promettente della meccanica sperimentale, che è già diventato un settore molto attivo nella ricerca, è proprio quello che si propone di identificare le proprietà costitutive dei materiali attraverso misure cinematiche di spostamenti o di deformazioni a tutto campo: *full-field measurements*. Nei metodi di prova standard i valori dei parametri costitutivi sono determinati utilizzando poche misure di quantità globali e semplici soluzioni esatte, applicate ai sottodomini caratterizzati da una distribuzione omogenea di deformazioni e di tensioni. Al contrario le misure a

tutto campo permettono una flessibilità maggiore. In particolare, esse forniscono una notevole quantità di dati sperimentali anche quando le deformazioni e le tensioni non sono omogenee all'interno della zona del provino osservata. Inoltre, a partire da un numero limitato di prove, di complessità eventualmente crescente, è possibile estrarre numerose ed attendibili informazioni sulla natura dei materiali, identificandone i parametri costitutivi. Tuttavia questo approccio richiede strategie computazionali avanzate, adatte all'analisi dei dati provenienti dalle misure a tutto campo.

Esperienze condotte in tal senso sono già numerose in letteratura, e riguardano soprattutto materiali con proprietà isotrope, tuttavia non mancano interessanti esempi condotti anche su materiali anisotropi e non omogenei.

2.2 Equazioni generali nei Problemi Inversi

2.2.1 Equazioni fondamentali dell'elasticità

I metodi di identificazione attualmente conosciuti, ed applicati, derivano dai principi essenziali della meccanica dei corpi continui. Di seguito sono richiamate alcune nozioni essenziali di meccanica, sulle quali si basano i metodi di identificazione che verranno brevemente descritti nei paragrafi successivi.

Si consideri un corpo elastico, che nella configurazione indeformata occupi una regione dello spazio Euclideo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, delimitata dalla superficie S . Le deformazioni sono descritte attraverso un campo vettoriale di spostamento $\underline{u}(\underline{x}, t)$, con $\underline{x} \in \Omega$ di modo che il processo deformativo porti un intorno materiale, giacente inizialmente in \underline{x} , nella nuova posizione $\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t)$. Come ben noto, la teoria dell'elasticità lineare è fondata sull'ipotesi delle piccole deformazioni, che implica un gradiente del campo di spostamenti molto piccolo $|\nabla \underline{u}(\underline{x}, t)| \ll 1$. In questo caso le deformazioni sono descritte dal tensore linearizzato, simmetrico delle deformazioni $\underline{\epsilon}(\underline{x}, t)$ attraverso l'equazione di compatibilità cinematica per piccole deformazioni:

$$\underline{\epsilon}[\underline{u}](\underline{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}, t) + \nabla \underline{u}^T(\underline{x}, t)). \quad (2.1)$$

Ogni materiale è identificabile meccanicamente attraverso due parametri costitutivi. Il primo è la densità di massa $\rho(\underline{x})$, alla quale è associata l'energia cinetica (2.2)

$$T(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\dot{\underline{u}}|^2 dV. \quad (2.2)$$

Il secondo è il tensore del quarto ordine $\mathbf{A}(\underline{x})$ noto come “*tensore di elasticità*”. Esso contiene i moduli elastici del materiale, ed è correlato con l'energia di deformazione

elastica (2.3)

$$E(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}] : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}] dV. \quad (2.3)$$

Per definizione il tensore di elasticità è una forma quadratica, definita positiva nello spazio a sei dimensioni dei tensori simmetrici del secondo ordine, che gode delle simmetrie (2.4), ed è dotato al più di 21 coefficienti indipendenti.

$$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikl} \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 3) \quad (2.4)$$

Nel caso più semplice di elasticità isotropa, il tensore \mathbf{A} dipende soltanto dai due moduli indipendenti, noti come coefficienti di Lamé (λ, μ):

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{i,j} \delta_{k,l} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}). \quad (2.5)$$

Comunemente il tensore di elasticità è espresso in funzione di altri due parametri: il modulo di Young E ed il coefficiente di Poisson ν , correlabili ai parametri di Lamé (2.6).

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.6)$$

È noto che in ciascun punto \underline{x} del contorno Ω agisce una forza elementare $\underline{p}[\underline{n}]$ applicata sulla superficie infinitesima dS di normale uscente \underline{n} . La sua espressione è la seguente:

$$\bar{\mathbf{T}}[\underline{n}](\underline{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}), \quad (2.7)$$

in essa $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore delle tensioni, che descrive le forze interne al corpo.

Si riporta, inoltre, l'equazione fondamentale della dinamica dei corpi deformabili, ottenuta come estensione della seconda legge di Newton ad elementi materiali infinitesimi:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) + \underline{f}(\underline{x}, t) - \rho(\underline{x}) \ddot{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad (2.8)$$

nella quale $\underline{f}(\underline{x}, t)$ rappresenta una determinata distribuzione di forze di massa.

Nell'ipotesi di elasticità lineare il tensore delle tensioni $\boldsymbol{\sigma}$ dipende linearmente dal tensore delle deformazioni linearizzato:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}, t). \quad (2.9)$$

Combinando le equazioni (2.8) e (2.9) il campo di spostamento diventa integrabile a partire dalla seguente equazione differenziale, che è analoga all'equazione d'onda iperbolica lineare:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}])(\underline{x}, t) + \underline{f}(\underline{x}, t) - \rho(\underline{x}) \ddot{\underline{u}}(\underline{x}, t) = \underline{0}. \quad (2.10)$$

Una semplificazione notevole è possibile quando le prove meccaniche sono eseguite in condizioni quasi statiche e le forze di massa sono trascurabili ($\underline{f}(\underline{x}, t) \approx 0$). In questo caso il comportamento meccanico di qualsiasi corpo elastico, che occupi la configurazione indeformata Ω , è governato da tre insiemi di equazioni: le equazioni di equilibrio (2.11),

$$\begin{cases} \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \underline{0} & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \bar{\boldsymbol{T}} & \text{su } S_f \end{cases} \quad (2.11)$$

le equazioni di compatibilità cinematica (2.12),

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}(\underline{x}, t) + \nabla \underline{u}^T(\underline{x}, t)) & \text{in } \Omega \\ \underline{u} = \bar{\underline{u}} & \text{su } S_u \end{cases} \quad (2.12)$$

e le equazioni costitutive (2.13). In queste ultime le componenti del tensore di Hooke (\mathbf{A}) sono costanti se il materiale è omogeneo, oppure dipendenti dal punto se il materiale è eterogeneo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

Nei sistemi di equazioni (2.11), (2.12), (2.13), S_u ed S_f indicano le porzioni della superficie di bordo sulle quali sono imposte, rispettivamente, le condizioni al contorno di natura cinematica e statica. Le condizioni al contorno risultano ben poste quando i due insiemi S_u ed S_f sono tali che $S_u \cup S_f = \partial\Omega$ ed $S_u \cap S_f = 0$.

È consueto introdurre gli insiemi S e C , definiti rispettivamente come campi tensoriali *staticamente ammissibili* e campi di spostamento *cinematicamente compatibili*:

$$S(\bar{\boldsymbol{T}}) = \{\boldsymbol{\tau} \in v_\sigma, \text{div}(\boldsymbol{\tau}) = \underline{0} \text{ in } \Omega \text{ e } \boldsymbol{\tau} \cdot \underline{n} = \bar{\boldsymbol{T}} \text{ su } S_f\} \quad (2.14)$$

$$C(\bar{\underline{u}}) = \{\boldsymbol{\nu} \in v_u, \boldsymbol{\nu} = \bar{\underline{u}} \text{ su } S_u\}. \quad (2.15)$$

Essi introducono l'insieme dei tensori simmetrici del secondo ordine v_σ e v_u . L'insieme v_σ rappresenta i campi tensoriali simmetrici del secondo ordine $\boldsymbol{\tau}$, che, insieme a $\text{div}(\boldsymbol{\tau})$, risulta quadrato integrabile su Ω , mentre v_u è l'insieme dei campi vettoriali di spostamento definito su Ω , su cui sono dotati di energia di deformazione vincolata.

2.2.2 Il principio dei lavori virtuali

Il principio dei lavori virtuali è un principio fondamentale della dinamica dei corpi continui, che è indipendente dalle proprietà costitutive dei materiali, e che consente di dedurre l'equazione di equilibrio (2.8). Nel contempo, la stessa (2.8) si può scrivere

in forma debole, utilizzando il prodotto vettoriale con un campo arbitrario e continuo $\underline{w}(\underline{x})$. Si ricava in questo modo il principio dei lavori virtuali per i corpi continui deformabili (2.16).

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{w}](\underline{x}) dV + \int_{\Omega} \underline{f}(\underline{x}, t) \cdot \underline{w}(\underline{x}) dV + \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \underline{w} dS \\ & = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \ddot{\underline{u}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{w}(\underline{x}) dV \quad \forall \underline{w} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Utilizzando le equazioni costitutive, e trascurando le forze di massa, si ottiene la seguente equazione di equilibrio in forma debole, scritta in funzione del campo di spostamenti $\underline{u}(\underline{x}, t)$:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{u}](\underline{x}) : \mathbf{A}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{w}](\underline{x}) dV = \int_S \bar{\mathbf{T}} \cdot \underline{w}(\underline{x}) dS \quad \forall \underline{w}. \quad (2.17)$$

2.2.3 Le formulazioni variazionali

Le soluzioni dei problemi di equilibrio elastico sono dotate della ben nota proprietà di minimizzazione rispetto ad un opportuno funzionale energetico. Per un corpo continuo, dotato di tensore elastico \mathbf{A} e di condizioni al contorno ben poste, il campo di spostamento \underline{u} , soluzione del problema dell'equilibrio elastico, minimizza il potenziale energetico nello spazio degli spostamenti cinematicamente ammissibili:

$$\underline{u} = \text{Argmin}_{v \in C} W_C(\underline{v}) \quad (2.18)$$

in cui

$$W_C(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{v}] : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{v}] dV - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} dV - \int_{S_p} \bar{\mathbf{T}} \cdot \underline{v} dS. \quad (2.19)$$

Nel contempo il campo di tensione $\boldsymbol{\sigma}$, soluzione dello stesso problema di equilibrio, minimizza l'energia complementare nello spazio dei campi di tensione staticamente ammissibili:

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{Argmin}_{s \in S} W_C^*(\underline{s}) \quad (2.20)$$

in cui

$$W_C^*(\underline{s}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{s} : \mathbf{A}^{-1} : \underline{s} dV - \int_{S_u} \underline{u} \cdot (\underline{s} \cdot \underline{n}) dS. \quad (2.21)$$

Nelle due equazioni (2.19) ed (2.21) gli spazi dei campi ammissibili sono coerenti con le (2.14), (2.15).

Nel contempo la soluzione in termini di spostamenti e di tensioni si può ottenere come soluzione di minimo della somma dell'energia potenziale e dell'energia complementare rispetto al sottospazio $C \times S$:

$$(\underline{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \text{Argmin}_{(v,s) \in (C \times S)} [W_C(\underline{v}) + W_C^*(\underline{s})]. \quad (2.22)$$

2.3 Il problema diretto

Il tipico problema della meccanica dei solidi consiste nel calcolare i campi di spostamento, di deformazione e di tensione a partire dalla geometria del solido studiato, dai parametri costitutivi del materiale e dalle condizioni al contorno. Questo genere di problema è noto in letteratura come problema *diretto*. Le equazioni (2.11), (2.12) ed (2.13) costituiscono un tipico problema diretto. Le soluzioni in forma chiusa dei problemi diretti sono disponibili soltanto in casi molto particolari, pertanto la loro risoluzione richiede il ricorso a tecniche numeriche, la più utilizzata delle quali è il metodo degli elementi finiti. La versione del metodo degli elementi finiti, che utilizza gli spostamenti come incognite principali, ed è basata sul principio dei lavori virtuali è la seguente:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*] : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}] dV - \int_{S_f} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{T} dS \quad \forall \mathbf{u}^* \in C. \quad (2.23)$$

La scelta delle funzioni di forma nell'ambito del metodo di Galerkin fornisce un insieme di equazioni della forma (2.24),

$$\mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.24)$$

nel quale $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ rappresenta la matrice di rigidità, che dipende dai parametri costitutivi del materiale, \mathbf{R} è il vettore dei carichi generalizzati, ed \mathbf{U} è il vettore dei gradi di libertà incogniti, introdotti dalla discretizzazione agli elementi finiti.

2.4 Il problema dell'identificazione

In questo paragrafo si espone una sintesi dello stato dell'arte sui metodi inversi attualmente disponibili in letteratura. Tale sintesi è integralmente reperibile nel lavoro di [Avril et al., 2008], dove i vari metodi sono discussi ed i corrispondenti risultati sperimentali sono messi a confronto.

Come già accennato all'inizio del capitolo, i problemi inversi permettono l'identificazione dei parametri costitutivi, e dunque la valutazione dei termini afferenti al tensore di elasticità. In generale le informazioni che permettono di valutare i parametri costitutivi sono sempre scarse, sia quando si lavora con materiali omogenei, che nel caso dei materiali eterogenei. Tale mancanza di dati deve essere compensata con dei dati sovradeterminati. Pertanto, in aggiunta alle condizioni al contorno sui carichi $\bar{\mathbf{T}}$ e sugli spostamenti $\bar{\mathbf{u}}$, occorrono informazioni aggiuntive, che sono rese disponibili dalle misure cinematiche a tutto campo descritte nel capitolo precedente.

2.4 Il problema dell'identificazione

In molti casi pratici, le incognite principali del problema di identificazione sono rappresentate dagli M parametri costitutivi del vettore $\boldsymbol{\vartheta} = [\vartheta_1, \dots, \vartheta_M]^T$, da cui dipende il tensore di elasticità $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})$. Ad esempio nel caso di materiale elastico ed isotropo i parametri costitutivi sono soltanto il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson. In questo caso il vettore dei parametri costitutivi si rappresenta come $\boldsymbol{\vartheta} = (E, \nu)$. Verosimilmente anche la matrice di rigidezza è parametrizzabile in funzione del vettore dei parametri costitutivi, e risulta:

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})) = \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\vartheta}), \quad (2.25)$$

in questo modo l'equazione (2.24) assume la forma seguente:

$$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{U} = \mathbf{R}. \quad (2.26)$$

Se il tensore di elasticità si può scrivere come una combinazione lineare dei parametri costitutivi, sono possibili le seguenti posizioni:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}_i \vartheta_i, \quad (2.27a)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{K}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})) = \sum_{i=1}^M \tilde{\mathbf{K}}_i \vartheta_i \quad (2.27b)$$

Un'osservazione importante consiste nel fatto che sono disponibili soltanto informazioni parziali sui carichi applicati alla struttura; ad esempio non è noto a priori come sono distribuiti i carichi applicati ai bordi della struttura stessa, ma se ne conoscono soltanto le risultanti. Per tali motivi l'insieme S delle tensioni ammissibili è ridefinito nel modo seguente:

$$S = \{\boldsymbol{\tau} \in v_\sigma, \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \text{ in } \Omega \quad l_1(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) = g_1, \dots, l_N(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) = g_N\}, \quad (2.28)$$

in cui ciascuna costante $l_k(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) = g_k$ rappresenta la risultante delle trazioni agenti su una parte Γ del contorno:

$$l_k(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.29)$$

Soluzioni in forma chiusa, che permettono l'identificazione dei parametri costitutivi, sono disponibili soltanto in casi molto particolari, come ad esempio in prove di trazione uniassiale o di flessione su 3 o 4 punti. In questi casi la distribuzione delle deformazioni è costante o al più lineare. Si osserva, pertanto, come i parametri costitutivi siano direttamente connessi alle componenti di spostamento misurate ed alle

forze applicate. Tuttavia nella maggior parte dei casi i campi di tensione e di deformazione sono eterogenei, ed il legame tra le quantità misurate ed i parametri costitutivi nelle formule (2.11), (2.12), (2.13) è implicito. Di seguito è riportata la descrizione dei principali approcci di identificazione basati sulle misure degli spostamenti a tutto campo.

2.4.1 L'approccio *FEMU*

Il significato dell'acronimo *FEMU* è “*finite element model updating method*”. Questo approccio consiste nell'eseguire iterativamente delle simulazioni numeriche con il metodo degli elementi finiti. Le iterazioni vengono interrotte quando si trova una corrispondenza soddisfacente tra i dati calcolati e quelli provenienti dalle misure sperimentali.

L'obiettivo dell'approccio *FEMU* è quello di sfruttare l'equazione tipica del metodo degli elementi finiti (2.26) per identificare i parametri costitutivi ϑ . Sostanzialmente l'approccio *FEMU* consiste nel minimizzare la discrepanza tra i valori noti delle forze e quelli ottenuti dai calcoli (approccio *FEMU-F*) oppure nel minimizzare le differenze esistenti tra il campo di spostamento misurato e quello ottenuto con i modelli numerici (approccio *FEMU-U*).

L'approccio (*FEMU-F*) è anche noto come *metodo dell'equilibrio delle forze, metodo dell'input residuo* o *metodo dell'equilibrio*. Il metodo si basa sulla disponibilità sperimentale di tutti gli spostamenti nodali $\hat{\mathbf{U}}$ e dei carichi imposti $\hat{\mathbf{R}}$. Sostituendo le quantità note $\hat{\mathbf{U}}$ ed $\hat{\mathbf{R}}$ nell'equazione (2.26) si perviene ad un sistema di equazioni che permettono di calcolare le incognite costitutive ϑ . Questo insieme di equazioni è verificato in senso approssimato, ed è solitamente sovradeterminato. Pertanto l'approccio *FEMU-F* consiste nel minimizzare nel senso dei minimi quadrati il funzionale seguente:

$$J_F(\vartheta) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{K}}(\vartheta)\hat{\mathbf{U}})^T \mathbf{W}_F(\hat{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{K}}(\vartheta)\hat{\mathbf{U}}), \quad (2.30)$$

in cui \mathbf{W}_F è una matrice dei pesi, simmetrica e definita positiva. Qualora il tensore di elasticità $\mathbf{A}(\vartheta)$ sia lineare in ϑ , minimizzando il funzionale (2.30) si perviene ad un sistema lineare di equazioni in ϑ , che assume la forma seguente:

$$\sum_{i=1}^M (\tilde{\mathbf{K}}_j \hat{\mathbf{U}})^T \mathbf{W}_F (\tilde{\mathbf{K}}_i \hat{\mathbf{U}}) \vartheta_i = (\tilde{\mathbf{K}}_j \hat{\mathbf{U}})^T \mathbf{W}_F \hat{\mathbf{R}} \quad (1 \leq j \leq M). \quad (2.31)$$

Verosimilmente è possibile definire a priori un campo di spostamenti virtuali \mathbf{U}_i^* , definito in modo tale che sia soddisfatta l'identità $\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{K}}_i \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{I}$. In questo modo

ciascun parametro costitutivo si ottiene semplicemente come:

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = \mathbf{U}_i^{*T} \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.32)$$

Il metodo dell'input residuo non richiede alcuna soluzione diretta agli elementi finiti.

In molti casi il campo di spostamenti è noto solo parzialmente ed il metodo dell'equilibrio delle forze non è applicabile. Pertanto in qualità di approccio alternativo è stato sviluppato il *metodo dello spostamento*, anche noto come *metodo dell'output residuo* o FEMU-U. Questo approccio consiste nel minimizzare delle funzioni del tipo (2.33):

$$J_U(\boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\omega}}))^T \mathbf{W}_U (\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\omega}})), \quad (2.33)$$

nella quale $\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$ rappresenta la soluzione di un problema di elasticità diretto ben posto, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ rappresenta le informazioni disponibili sulle condizioni al contorno, e \mathbf{W}_U è una matrice dei pesi simmetrica e definita positiva. Normalmente gli spostamenti ottenuti dai calcoli $\mathbf{U}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{R})$ non dipendono linearmente da $\boldsymbol{\vartheta}$. Il potenziale $J_U(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{R})$, sotto condizioni al contorno del tipo (2.29), è minimizzato dalla soluzione $(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{R})$, ricercata per mezzo di una procedura iterativa, che dipende dalle condizioni al contorno scelte. Se le forze imposte sono completamente note o completamente incognite è possibile una procedura di minimizzazione non vincolata su $J_U(\boldsymbol{\vartheta}, \bar{\boldsymbol{\omega}})$.

L'approccio FEMU consente diverse varianti in base alla scelta delle matrici dei pesi \mathbf{W}_F o \mathbf{W}_U . Ad esempio $J_U(\boldsymbol{\vartheta})$ assume una forma omogenea se si sceglie $\mathbf{W}_U = \mathbf{K}$. Verosimilmente è possibile ottenere delle funzioni miste combinando J_F e J_U . In questo caso si parla di approccio FEMU-U-F. Questo genere di formulazione è adatta a problemi che implicano concentrazioni di tensioni e deformazioni con localizzazione del danneggiamento.

Il metodo FEMU permette di lavorare su svariati problemi di identificazione, scegliendo campi di misure differenti, e adeguando il metodo alla particolare situazione oggetto di studio. Infatti mentre la variante FEMU-U si presta in modo particolare alle situazioni in cui i dati sono incompleti, la variante FEMU-F richiede necessariamente delle misure di campo complete. I metodi numerici, utilizzati per la risoluzione del metodo, possono richiedere strategie di espansione o di condensazione dei dati. La minimizzazione dei funzionali J_F e J_U si può eseguire con i metodi di Gauss-Newton o di Levenberg-Marquardt, che risultano relativamente economici in termini di numero totale di soluzioni iterative FEM richieste, ed adeguati per problemi con un numero moderato di incognite costitutive. Nelle situazioni con un numero elevato di parametri costitutivi incogniti, come ad esempio nell'identificazione dei materiali eterogenei, la necessità di gestire un elevato numero di soluzioni iterative FEM richiede specifici metodi di ottimizzazione globale.

In letteratura sono disponibili interessanti esempi di applicazioni FEMU all'elasticità lineare. In particolare le indagini già disponibili hanno riguardato l'identificazione dei parametri elastici nel caso dell'ortotropia piana e a partire da misure provenienti da prove uniassiali su provini forati nel loro centro. Inoltre la stessa tecnica è stata perfino utilizzata in combinazione con modelli tridimensionali agli elementi finiti per indagare le proprietà costitutive del bacino umano.

L'applicazione del metodo FEMU al caso della flessione di piastre sottili anisotrope sembra particolarmente ostile. Gli esempi in letteratura hanno richiesto metodi basati sulla sensibilità agli elementi finiti, nonché formulazioni di funzioni di costo in termini di curvature, risultate comunque sconvenienti nel momento in cui occorre applicare la formula di differenziazione numerica al secondo ordine degli spostamenti misurati sperimentalmente.

Interessanti indagini sono state compiute nell'ambito dell'identificazione dei parametri elastoplastici per prove di trazione su provini dotati di difetti. In questo caso i campi di spostamento, misurati per mezzo della camera C.C.D. hanno dato accesso agli stati di tensione eterogenei.

Le applicazioni dell'approccio FEMU, come già accennato in precedenza, non si limitano all'identificazione dei parametri costitutivi nell'ambito della meccanica classica. Nel campo della biomedica, infatti, sono state condotte applicazioni rivolte alla caratterizzazione del comportamento non lineare della pelle umana *in vivo* ed *in vitro*.

2.4.2 Il metodo del GAP nelle equazioni costitutive

Questo approccio consiste nella minimizzazione di un opportuno funzionale, di cui sono disponibili diverse varianti, per calcolare i valori dei parametri costitutivi. Si presta in modo particolare ai materiali non omogenei.

Il metodo è noto in letteratura come CEGM (*Constitutive Equation Gap Method*), ed è un approccio con il quale si misura la distanza tra due campi di tensione, di cui il primo è un campo assegnato ($\boldsymbol{\tau}$), mentre il secondo si ricava con il metodo diretto.

L'applicazione di questo metodo prevede la misura di un campo di spostamenti \mathbf{y} per mezzo della camera C.C.D., il calcolo, per derivazione, delle relative deformazioni e dello stato tensionale attraverso un modello costitutivo scelto a priori. Se il modello costitutivo è elastico lineare il CEGM tra i campi $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{y} è definito secondo come segue:

$$\varepsilon(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{y}]) : \mathbf{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{y}]) dV \quad (2.34)$$

L'espressione all'interno della formula (2.34) ha la dimensioni fisiche di un'energia,

in essa il tensore di elasticità può essere eterogeneo. L'utilità dell'approccio CEGM scaturisce dalle osservazioni seguenti:

1. La soluzione $(\underline{u}, \boldsymbol{\sigma})$ di un tipico problema elastico-lineare, definito dalle equazioni (2.11), (2.12), (2.13) è caratterizzata dalle condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} (\underline{u}, \boldsymbol{\sigma}) &= \text{Argmin}_{(v, \tau) \in (C(\bar{u}) \times S\bar{T})} \varepsilon(\underline{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}) \\ \varepsilon(\underline{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

nelle quali $S\bar{T}$ e $C(\bar{u})$ definiscono rispettivamente gli insiemi (2.14) e (2.15) delle tensioni staticamente ammissibili e degli spostamenti cinematicamente compatibili.

2. In un problema di identificazione dei parametri costitutivi, in cui bisogna determinare il tensore di elasticità \mathbf{A} , è possibile modificare le definizioni (2.14) e (2.15), in modo da includere nella procedura tutte le informazioni sperimentali disponibili riguardanti gli spostamenti e le tensioni. In questo modo il tensore \mathbf{A} è ricercato in modo tale da minimizzare il CEGM:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{Argmin}_{\mathbf{A} \in \mathbb{A}} J(\mathbf{A}^*) \quad \text{in cui} \\ J(\mathbf{A}^*) &= \min (v, \tau) \in (C \times S) \varepsilon(\underline{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^*), \end{aligned} \quad (2.36)$$

nella quale \mathbb{A} rappresenta l'insieme dei campi tensoriali elastici ammissibili, cioè dei tensori del quarto ordine simmetrici e definiti positivi.

L'equazione (2.36) rappresenta la qualità fondamentale del metodo CEGM. Si osserva, infatti, come questa procedura permetta una direzione di ricerca alternativa, nella quale la minimizzazione parziale rispetto ai parametri $(\underline{v}, \boldsymbol{\tau})$ è seguita da una minimizzazione rispetto ad \mathbf{A}^* .

Esistono due varianti del metodo CEGM, applicabili al problema dell'identificazione dei tensori elastici eterogenei. In entrambe le varianti, occorre conoscere a priori una distribuzione sperimentale \hat{u} dei valori di spostamento u .

La prima variante consiste nell'imporre il rispetto delle misure cinematiche acquisite con la tecnica full-field. Gli spostamenti misurati sperimentalmente \hat{u} sono introdotti direttamente all'interno del funzionale CEGM, ed il tensore elastico \mathbf{A} è ricercato attraverso il seguente problema di minimizzazione:

$$\mathbf{A}^* = \text{Argmin}_{\mathbf{A}^* \in \mathbb{A}} J(\mathbf{A}^*) \quad (2.37a)$$

$$J(\mathbf{A}^*) = \min (\tau) \in S \varepsilon(\hat{u}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^*), \quad (2.37b)$$

che introduce l'insieme S delle tensioni ammissibili definito secondo l'equazione (2.28). La minimizzazione (2.37b) è condotta attraverso un'interpolazione agli elementi finiti dei campi di tensione ammissibili. In letteratura questo genere di problema è risolto utilizzando elementi finiti adatti a problemi piani del tipo stress assumed. I vincoli introdotti dalla definizione (2.28) dell'insieme S , sono fatti osservare per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange. Si ottiene così il problema variazionale (2.38), che viene risolto numericamente, mentre la successiva minimizzazione (2.37a) è risolta in forma esplicita.

$$\inf_{\boldsymbol{\tau} \in H(\text{div})} \sup_{\gamma, \lambda_i} \varepsilon(\hat{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^*) + \gamma_1 \int_{\Omega} \gamma \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dV + \sum_i \lambda_i (l_i(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{g}_i) \quad (2.38)$$

Questo approccio permette di calcolare al più tre coefficienti materiali locali. Tali coefficienti si ipotizzano costanti su ciascun elemento finito o su un determinato gruppo di elementi finiti.

La seconda variante al metodo CEGM consiste nel far rispettare le misure cinematiche attraverso un fattore di penalizzazione. In questo caso si introduce il funzionale (2.39)

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^*) = \alpha \varepsilon(\mathbf{y}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^*) + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \quad (2.39)$$

nel quale i coefficienti α e β sono dei pesi positivi. Essi, insieme alla norma $\|\cdot\|$, sono scelti in modo tale che i due addendi del funzionale (2.39) siano dello stesso ordine di grandezza. I funzionali \mathcal{F} della forma (2.39) sono convessi rispetto a $\mathcal{C} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A}$. La presenza del rumore all'interno dei dati rende difficoltoso l'esatto rispetto delle misure cinematiche.

Inizialmente i funzionali basati sull'approccio CEGM sono stati usati per l'identificazione delle proprietà elastiche, ma recentemente hanno trovato spazio anche nel contesto dei modelli costitutivi non lineari. Versioni speciali del CEGM sono stati applicati a modelli elasto-plastici incrementali, e, utilizzando i campi di spostamento misurati con la C.C.D., hanno permesso di identificare le matrici di rigidità tangente e secante.

Nell'ambito dell'approccio CEGM la ricerca punta a formulare potenziali per materiali standard generalizzati in termini della densità di energia libera locale e del potenziale di dissipazione, insieme con i loro potenziali duali di Legendre.

2.4.3 Il metodo dei campi virtuali

Questo metodo si basa su un'opportuna scelta dei campi virtuali all'interno del principio dei lavori virtuali. Esso richiede comunque di conoscere le misure cinematiche

che full-field e nei casi di elasticità lineare conduce a formule esplicite.

Il metodo dei campi virtuali, noto con l'acronimo VFM, è applicabile in qualsiasi condizione di carico, nonchè nelle situazioni in cui il campo di deformazione è sperimentalmente noto su tutto il dominio di osservazione Ω : $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, in cui $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ è noto per differenziazione dei campi di spostamento ottenuti dalle misure a tutto campo. I parametri costitutivi $\boldsymbol{\vartheta}$ sono identificati utilizzando un modello costitutivo $\mathbf{A}(\boldsymbol{\vartheta})$ assunto a priori, che utilizza i dati sovradeterminati nella forma di una distribuzione nota di deformazioni $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Ipotizzando l'assenza di forze di massa e che le condizioni al contorno siano del tipo (2.11), (2.12), il principio dei lavori virtuali assume la forma seguente:

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*] dV + \int_{S_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^* dS = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^* dV \quad (2.40)$$

per qualsiasi campo continuo di spostamenti \mathbf{u}^* . Il metodo consiste nello sfruttare le potenzialità dell'espressione (2.40), per mezzo della quale ogni opportuna scelta dei campi virtuali consente di risolvere uno specifico problema di identificazione. Dovendo identificare dei moduli elastici, viene inizialmente scelto un modello costitutivo, permettendo di esprimere il campo tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ in funzione dei parametri costitutivi $\boldsymbol{\vartheta}$, e quindi di esprimere in maniera completa il primo integrale della (2.40). A tal uopo occorre ricordare che, come già discusso nel capitolo precedente, i metodi di misura a tutto campo forniscono delle componenti di deformazione misurate su un piano, ed in particolare sulla sola superficie esterna dei solidi. La scelta dei provini utilizzabili è quindi limitata a quelli in cui le deformazioni all'interno del solido siano facilmente collegabili alle deformazioni in superficie. Casi particolari di questo genere si hanno soltanto in situazioni di stato piano di tensione, di stato piano di deformazione o di flessione di piastre sottili. Di conseguenza il primo integrale della (2.40) è calcolabile come funzione di $\boldsymbol{\vartheta}$ per qualsiasi scelta del campo virtuale. In letteratura sono disponibili applicazioni all'elasticità anisotropa lineare e non lineare, alla viscoelasticità ed all'elasto-plasticità in condizioni statiche di carico, per cui il terzo integrale all'interno della (2.40) scompare.

Dopo avere scelto i campi virtuali, ognuno di esso conduce, attraverso la (2.40), ad un'equazione scalare. I parametri costitutivi sono ricercati come soluzione di un insieme di equazioni scalari. Naturalmente il numero delle equazioni scalari ricavate deve essere almeno pari al numero M dei parametri costitutivi ϑ_i da identificare. Un aspetto cruciale dell'efficacia del metodo è rappresentato dalla costruzione dei campi virtuali. A tal proposito, fino ad oggi, sono stati proposti tre approcci.

Il più semplice consiste nel costruire dei campi virtuali arbitrari analiticamente, utilizzando delle funzioni polinomiali. Essi devono essere definiti sull'intero dominio

di osservazione e devono rispettare le condizioni sul bordo vincolato S_u . Se la parametrizzazione è lineare si perviene ad un sistema lineare invertibile di M equazioni in M incognite della forma:

$$\sum_{j=1}^M \mathbf{C}_{ij} \vartheta_j = \int_{S_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_i^* dS \quad \text{in cui} \quad \mathbf{C}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{A}_j : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}_i^*] dV \quad (1 \leq i \leq M) \quad (2.41)$$

Un miglioramento a questa procedura è stato apportato grazie ad una procedura che permette di costruire dei campi virtuali automaticamente. Una procedura di questo tipo consente di pervenire a sistemi di equazioni (2.41), quando sono possibili parametrizzazioni lineari del tipo (2.27a). I campi virtuali \mathbf{u}_i^* , detti *campi speciali*, sono determinati in modo tale che la matrice \mathbf{C}_{ij} sia una matrice identità di dimensioni $M \times M$. L'equazione (2.41) permette di ricavare direttamente i parametri costitutivi ϑ_i come lavoro virtuale del carico esterno su \mathbf{u}_i^* . Per una data configurazione e per un certo modello costitutivo, esistono infiniti campi speciali. Pertanto fra tutti è possibile scegliere un campo speciale che sia meno sensibile al rumore nel particolare problema di identificazione affrontato.

Solitamente i campi virtuali sono definiti utilizzando la stessa espressione sull'intero dominio di osservazione. Questo richiede l'utilizzo di polinomi di grado elevato, che hanno lo svantaggio di amplificare l'effetto del rumore all'interno della procedura di identificazione. Tuttavia gli effetti di questo fenomeno possono essere contenuti utilizzando campi virtuali continui a tratti. In questo modo è possibile scegliere polinomi di approssimazione di grado inferiore, riducendo l'effetto del rumore, e nel contempo si può contare su una maggiore flessibilità, perchè il problema dell'identificazione può essere risolto per vari sottodomini del dominio di osservazione.

Esistono tre aspetti riguardanti la costruzione dei campi virtuali, che meritano di essere evidenziati. Il primo riguarda la distribuzione dei carichi, che entra in gioco nell'identità dei lavori virtuali. Essa è in pratica difficile da misurare e solitamente se ne conosce soltanto la risultante applicata. In questo caso i campi virtuali sono scelti in modo tale che l'identità dei lavori virtuali utilizzi soltanto la risultante dei carichi e non la loro distribuzione, mentre ai punti del contorno caricato, sui quali non è applicata la risultante, si impone uno spostamento costante. Il secondo aspetto riguarda il problema dell'identificazione su sottodomini locali molto ristretti. In questo caso si utilizzano campi virtuali che si annullano sul bordo caricato S_f , annullando il lavoro virtuale compiuto dai carichi esterni \mathbf{T} , e riducendo, in condizioni statiche, l'identità dei lavori virtuali al primo integrale della (2.40). In questo caso è necessario conoscere a priori almeno un parametro costitutivo, per evitare che il sistema finale di equazioni diventi omogeneo, e che il risultato del calcolo si riduca ad una mera estrapolazione

dei rapporti di rigidità. Infine l'esigenza di calcolare gli integrali tripli richiederebbe la conoscenza dei campi di spostamento e di deformazione all'interno del solido e non soltanto in superficie. Questo problema si può superare con delle ipotesi sulla distribuzione degli spostamenti, che permettano di connettere gli spostamenti misurati in superficie agli spostamenti interni al solido osservato. Recenti applicazioni del metodo VFM, disponibili in letteratura, hanno riguardato l'identificazione dei parametri materiali associati a modelli costitutivi non lineari.

2.4.4 Il metodo del GAP all'equilibrio

Questo approccio è stato sviluppato per risolvere problemi in cui l'elasticità eterogenea assume la forma di una funzione scalare $C(\underline{x})$. In questo caso il tensore di elasticità è il seguente:

$$\mathbf{A}(\underline{x}) = C(\underline{x}) \mathbf{A}_0, \quad (2.42)$$

in cui \mathbf{A}_0 è un tensore noto a priori e corrispondente ad un corpo di riferimento. In questo caso, i campi di spostamento, misurati all'interno del dominio Ω , consentono di determinare la funzione $C(\underline{x})$, chiamata *contrasto scalare*. La funzione contrasto scalare è molto utile nel calcolo del campo di danneggiamento isotropo $D(\underline{x})$ ($C(\underline{x}) = 1 - D(\underline{x})$).

Utilizzando questo approccio, le misure di spostamento, acquisite con la camera C.C.D. devono appartenere ai nodi di una griglia regolare. Una mesh di elementi finiti viene costruita in modo che i suoi nodi coincidano con i punti della griglia di misura. Si fa l'ipotesi che la funzione di contrasto ($C(\underline{x}) = C_e$) sia costante su ciascun elemento finito, in questo modo la matrice di rigidità dell'elemento E_e assume la forma (2.43)

$$[\mathbf{K}_e](C) = C_e[\mathbf{K}_{e0}], \quad (2.43)$$

che dipende dalla matrice di rigidità $[\mathbf{K}_{e0}]$ di un elemento finito del materiale di riferimento, fornito di moduli \mathbf{A}_0 . In questo modo si perviene ad un'equazione agli elementi finiti per ogni grado di libertà m afferente ciascun nodo su cui non agiscono carichi esterni:

$$\sum_{e|m \in E_e} C_e \{\mathbf{e}_m\}^T [\mathbf{K}_{e0}] \{\mathbf{u}_e\} = 0. \quad (2.44)$$

Nell'equazione (2.44) la sommatoria è estesa a tutti gli elementi finiti che condividono il nodo con grado di libertà m , $\{\mathbf{u}_e\}$ è il vettore dei gradi di libertà dell'elemento finito E_e , ed $\{\mathbf{e}_m\}$ è il vettore unitario afferente al grado di libertà m . Ne scaturisce un sistema di equazioni del tipo (2.44). Tale sistema presenta l'inconveniente di essere

sovradeterminato, e deve essere risolto con la tecnica dei minimi quadrati, imponendo il vincolo di positività su C_e . Nel caso particolare in cui, all'interno di uno stato piano di tensione o di deformazione, si utilizzino elementi finiti quadrilateri, dotati di un nodo sul punto medio di ogni lato (i.e. elementi finiti ad 8 nodi), il grado di libertà m è condiviso esattamente da due elementi finiti E_{e1} ed E_{e2} , e l'equazione (2.44) diventa:

$$\ln C_{e1} - \ln C_{e2} = \ln |\{\mathbf{e}_m\}^T [\mathbf{K}_{e20}] \{\mathbf{u}_{e2}\}| - \ln |\{\mathbf{e}_m\}^T [\mathbf{K}_{e10}] \{\mathbf{u}_{e1}\}|. \quad (2.45)$$

In essa il logaritmo è volutamente utilizzato per calcolare soluzioni positive: $C_{ei} > 0$, $i = 1 \dots n$. Lo schema di identificazione, fornito dalla (2.45), è uno schema robusto, infatti nel caso di una mesh quadrata, formata da N elementi, si ottiene sistema di $4N$ equazioni del tipo (2.45). Una volta definito il vettore dei termini incogniti $\{\mathbf{c}\}^T = \{\ln C_1, \dots, \ln C_N\}$, il problema dell'identificazione è risolto attraverso una funzione di costo, pesata nel senso dei minimi quadrati:

$$J(\{\mathbf{c}^*\}) = ([\mathbf{M}]\{\mathbf{c}^*\} - \{\mathbf{q}\})^T \mathbf{W} ([\mathbf{M}]\{\mathbf{c}^*\} - \{\mathbf{q}\}). \quad (2.46)$$

La matrice \mathbf{M} ed il vettore \mathbf{q} sono assemblati a partire dal sistema di equazioni (2.45), e dipendono dagli spostamenti nodali. La matrice dei pesi \mathbf{W} è una matrice diagonale:

$$[\mathbf{W}] = \text{Diag}(w_1, \dots, w_k)$$

in cui

$$w_k = |\{\mathbf{e}_k\}^T ([\mathbf{K}_{e1,k0}] \{\mathbf{u}_{e1,k}\} + [\mathbf{K}_{e2,k0}] \{\mathbf{u}_{e2,k}\})|^{1.5}.$$

Il metodo EGM è considerabile equivalente al metodo VFM che utilizza campi virtuali non nulli e continui a tratti su ciascun elemento finito.

2.4.5 Il reciprocity GAP method

Il reciprocity gap method (RGM) si può considerare una variante del metodo VFM. Esso si applica quando i dati delle misure meccaniche sono disponibili sul contorno del dominio osservato. Considerando una distribuzione nota di spostamenti e di trazioni ($\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{T}}$) sul contorno, a partire dal principio dei lavori virtuali è possibile definire un funzionale di scambio del gap. Si consideri un corpo elastico occupante un dominio Ω con contorno S , di cui si vuole determinare il tensore di elasticità $\mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}})$ utilizzando un insieme di misure acquisite in superficie. Si consideri, inoltre, un corpo con le stesse caratteristiche geometriche, caratterizzato da un tensore elastico di prova $\mathbf{A}^*(\underline{\mathbf{x}})$ e da un campo di spostamenti \mathbf{u}^* afferente ad una distribuzione \mathbf{T}^* di

trazioni sulla parte caricata di S . Il teorema di reciprocità di Maxwell-Betti permette di definire il funzionale seguente:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{\mathbf{u}}] : [\mathbf{A} - \mathbf{A}^*] : \boldsymbol{\varepsilon}[\underline{\mathbf{u}}^*] dV = \int_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^* - \mathbf{T}^* \cdot \hat{\underline{\mathbf{u}}}) dS \equiv R(\mathbf{A}^*, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^*), \quad (2.47)$$

che è una funzione nota dei dati sperimentali $(\hat{\underline{\mathbf{u}}}, \hat{\mathbf{T}})$. Imponendo:

$$R(\mathbf{A}^*, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^*) = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{u}}^* \quad (2.48)$$

si ottiene una relazione scalare, che risulta indipendente da \mathbf{A}^* per qualsiasi scelta di $\underline{\mathbf{u}}^*$. In generale gli spostamenti effettivi $\underline{\mathbf{u}}$ all'interno del corpo non sono noti a priori e devono essere ricostruiti insieme al tensore \mathbf{A} attraverso una procedura iterativa. Alcuni studi teorici sull'identificazione dei moduli elastici eterogenei si stanno basando sullo sfruttamento di una versione linearizzata dell'equazione (2.47), in cui figura la trasformata spaziale di Fourier del termine $\mathbf{A} - \mathbf{A}^*$. L'approccio RGM risulta molto utile soprattutto nell'identificazione delle fessure all'interno dei materiali. Tuttavia in letteratura sono disponibili applicazioni della versione linearizzata all'identificazione del tensore di rigidità flessionale nelle piastre di Love-Kirchhoff.

2.5 Scelta del modello e metodo di identificazione utilizzato

Gli sforzi compiuti dalla ricerca scientifica degli ultimi 50 anni nell'ambito della Meccanica dei Solidi sono stati orientati a restringere il vuoto esistente tra la sperimentazione, la modellazione, e le simulazioni. In particolare, la possibilità di utilizzare microcalcolatori sempre più potenti e lo sviluppo di metodi numerici sofisticati consentono di simulare il percorso evolutivo delle strutture fino alle condizioni di crisi. Tuttavia i metodi numerici, e le ipotesi in essi insite, devono essere sempre convalidati da opportune indagini sperimentali. Se, partendo da un modello costitutivo e dalle condizioni al contorno, l'obiettivo dei metodi diretti è la determinazione dei campi di spostamento, l'obiettivo dei metodi inversi è quello di utilizzare i campi di spostamento, misurati con le tecniche di correlazione full-field, e le condizioni al contorno, per stimare i parametri costitutivi dei materiali. Un linguaggio comune tra la meccanica sperimentale e la meccanica computazionale è un fatto desiderabile, per un'adeguata interazione tra i due ambiti. In questo paragrafo viene spiegato il metodo di identificazione utilizzato in questo lavoro di tesi per l'identificazione in problemi piani. Tale metodo è integrato nel formalismo del metodo del gap nelle equazioni costitutive, e

prevede che i dati ottenuti dalla correlazione delle immagini digitali siano accoppiati ad un metodo variazionale, al fine di identificare i parametri materiali.

La procedura di identificazione afferisce ad un corpo continuo piano occupante un dominio Ω con contorno Γ , e sottoposto ad un carico progressivamente crescente. Per ogni passo di carico sia noto il campo di spostamento, ottenuto con la tecnica di correlazione delle immagini digitali, ed il carico applicato dalla macchina di prova. Il problema dell'identificazione consiste nel calcolare la matrice associata al tensore di elasticità \mathbf{A}_α^S e lo stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ in equilibrio con il carico applicato in corrispondenza di ciascun step del processo di carico. Le equazioni da soddisfare sono quelle di equilibrio (2.49),

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (2.49)$$

di legame (2.50),

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}_\alpha^S \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega \quad (2.50)$$

e le condizioni al contorno (2.51).

$$\begin{cases} \mathbb{R}_i = \int_{\Gamma_j^R} \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, dS \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{su } \Gamma_j^U \end{cases} \quad (2.51)$$

Sia \sum_{adm} l'insieme non vuoto dei campi tensionali ammissibili, definito come segue:

$$\sum_{adm} = \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}), \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, L_i(\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{\mathbf{n}}) = g_i \text{ su } \Gamma_i \in \partial\Omega, i = 1, \dots, N \} \quad (2.52)$$

con g_i che assume uno dei valori (2.51). Nella (2.52) \mathbf{u}^* rappresenta il campo di spostamenti misurato con la tecnica della D.I.C., e deve essere tale che $\mathbf{u}^* \in (H^1(\Omega))^2$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, mentre

$$H(\operatorname{div}) = \{ \boldsymbol{\tau} \in (L^2(\Omega))^4; \tau_{ij} = \tau_{ji}; \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) \in (L^2(\Omega))^2 \}, \quad (2.53)$$

in cui $H^n(\omega)$ è uno spazio di Sobolev di ordine n su Ω , ed $L^m(\omega)$ è uno spazio di Hilbert di ordine m su Ω .

L'insieme $\boldsymbol{\varepsilon}$ dei tensori elastici, ammissibili di cedevolezza si può definire in due modi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \{ & \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; B_{ij} = B_{ji}; \mathbf{B}_{\underline{\mathbf{x}}} : \underline{\mathbf{x}} \geq \alpha |\underline{\mathbf{x}}|^2, \alpha > 0 \forall \underline{\mathbf{x}}; \\ & \mathbf{B}_{\underline{\mathbf{x}}} : \underline{\mathbf{y}} \leq M |\underline{\mathbf{x}}| |\underline{\mathbf{y}}|, M > 0 \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \} \end{aligned} \quad (2.54a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \{ & B_{ij} \text{ lineari a tratti}; B_{ij} = B_{ji}; \mathbf{B}_{\underline{\mathbf{x}}} : \underline{\mathbf{x}} \geq \alpha |\underline{\mathbf{x}}|^2, \alpha > 0 \forall \underline{\mathbf{x}}; \\ & \mathbf{B}_{\underline{\mathbf{x}}} : \underline{\mathbf{y}} \leq M |\underline{\mathbf{x}}| |\underline{\mathbf{y}}|, M > 0 \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \}, \end{aligned} \quad (2.54b)$$

anche se la definizione più generale è la seguente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \{ & \mathbf{B} \in [L^\infty(\Omega)]^{3 \times 3}; B_{ij} = B_{ji}; \mathbf{B}_{\underline{x}} : \underline{x} \geq \alpha |\underline{x}|^2, \alpha > 0 \forall \underline{x}; \\ & \mathbf{B}_{\underline{x}} : \underline{y} \leq M |\underline{x}| |\underline{y}|, M > 0 \forall \underline{x}, \underline{y} \}. \end{aligned}$$

Avendo introdotto i campi tensionali ammissibili, si definisce il seguente funzionale $F : \sum_{adm} \times \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{B}^{-1} : \boldsymbol{\tau} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) d\Omega, \quad (2.55)$$

per il quale vale la *Proposizione 1*, dimostrata in [Geymonat and Pagano, 2003], e riportata di seguito.

Proposizione 1. *Per il funzionale F risultano vere le proprietà seguenti:*

1. $F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) \geq 0 \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) \in \sum_{adm} \times \varepsilon$
2. $F(\boldsymbol{\tau}^*, \mathbf{B}^*) = 0 \iff \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{B}^* \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)$
3. *Il funzionale F è separatamente convesso su $\sum_{adm} \times \varepsilon$*

Dimostrazione. Riscrivendo il funzionale F nel seguente modo:

$$F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)) : \mathbf{B}^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)) d\Omega,$$

si dimostrano le prime due asserzioni della *Proposizione 1*, poichè $\mathbf{B} \in \varepsilon_3$.

Per provare la convessità separata di F è sufficiente dimostrare che la funzione $\varphi_1(\mathbf{B}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*) : \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)$ è convessa su ε_3 , e che la funzione $\varphi_2(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{B} \boldsymbol{\tau}$ è separatamente convessa su $\sum_{adm} \times \varepsilon$. Per la funzione φ_1 si può calcolare la derivata seconda, ed osservare che:

$$\begin{aligned} \varphi_1''(\mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{C}) &= (\mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)) : \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)), \\ \varphi_1''(\mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{C}) &\geq \alpha |\mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)|^2. \end{aligned}$$

Infine la funzione φ_2 , essendo non negativa per definizione, è sempre separatamente convessa. □

Avendo dimostrato che il funzionale (2.55) è separatamente convesso rispetto ai campi ammissibili di tensione e di deformazione, è possibile calcolare la matrice associata al tensore di elasticità \mathbf{A}_a^S e lo stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$, associato, tramite il legame costitutivo, allo stato di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$, e rispettoso delle condizioni di equilibrio (2.49),

(2.51). Il calcolo è eseguito attraverso un algoritmo che attraversa due fasi di minimizzazione separate del funzionale F , sfruttandone la convessità separata rispetto a $\sum_{adm} \times \varepsilon$. I passi dell'algoritmo sono ripetuti iterativamente per ogni step di carico della fase elastica. Una volta soddisfatta la condizione di uscita, si ottengono le proprietà materiali corrispondenti alle varie configurazioni attraversate durante la fase elastica.

Si indica con \mathbf{A}^0 la matrice di primo tentativo, assegnata arbitrariamente, al tensore di elasticità. I passi iterativi dell'algoritmo sono riportati di seguito:

- inizializzazione arbitraria della matrice \mathbf{A}^0 ;
- minimizzazione del funzionale F attraverso due passi distinti:
 1. $\boldsymbol{\sigma}^1 = \text{Argmin } F(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}^0)$;
 2. $\mathbf{A}^1 = \text{Argmin } F(\boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{B})$
- iterazione della procedura fino ad ottenere lo stato tensionale equilibrato ($\boldsymbol{\sigma}^n$ e la matrice elastica iniziale del materiale \mathbf{A}^n).

La matrice \mathbf{A}^0 è una matrice di primo tentativo. Essa viene inserita all'interno del funzionale F , permettendo di calcolare lo stato tensionale ammissibile $\boldsymbol{\sigma}^1$ come soluzione di minimo del funzionale F fra tutti i campi di tensione staticamente ammissibili. Tale campo tensionale $\boldsymbol{\sigma}^1$ è utilizzato nel secondo passo dell'algoritmo, per calcolare una matrice di elasticità di secondo tentativo \mathbf{A}^1 , che indicheremo con $\mathbf{B}(E, \nu)$. Fra tutti i tensori di rigidità ammissibili $\mathbf{B}(E, \nu)$ rende minimo il funzionale F . I due passi della procedura descritta devono essere ripetuti iterativamente finché la differenza tra i parametri elastici, calcolati tra due step successivi, rimane al di sotto di una tolleranza prefissata. Il modulo di Young E ed il coefficiente di Poisson ν devono rispettare ad ogni passo le disequazioni (2.57).

$$\begin{cases} 0 < \nu < 0.5 \\ E > 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

La prima minimizzazione del funzionale F deve garantire una soluzione che soddisfi le equazioni di equilibrio (2.49), (2.51). Per verificare questa circostanza si definisce il nuovo funzionale (G), all'interno del quale le equazioni di equilibrio sono soddisfatte per mezzo della coppia di moltiplicatori di Lagrange (λ, γ_1):

$$G(\boldsymbol{\tau}, \lambda, \gamma) = F(\boldsymbol{\tau}) + \int_{\Omega} \lambda \text{div}(\boldsymbol{\tau}) d\Omega + \gamma_i \left(\int_{\Gamma_i} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}} - \underline{\mathbf{R}}) d\Gamma \right) \quad (2.58)$$

Si supponga di conoscere a priori i dati meccanici del materiale sottoposto a prova sperimentale, e di costruire un problema diretto occupante le stesse condizioni geometriche e al contorno del problema inverso studiato. In tal modo il metodo degli elementi finiti permette di calcolare la soluzione in termini di spostamento (\underline{v}_C), ed in termini di deformazioni ($\underline{\varepsilon}(\underline{v}_C)$). Alla matrice elastica \mathbf{A}^{n-1} , riferita al generico passo $n - 1$, corrisponde attraverso il calcolo diretto, lo stato tensionale ammissibile $\underline{\tau} = \mathbf{A}^{n-1} \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C)$. Il funzionale F è riscrivibile in funzione della differenza tra i dati di spostamento calcolati con la tecnica di correlazione delle immagini digitali (\underline{u}^m), e i dati di spostamento calcolati con il metodo diretto (\underline{v}_C):

$$\bar{F}(\underline{v}_C, \mathbf{A}^{n-1}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C - \underline{u}^m) : \mathbf{B} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C - \underline{u}^m) d\Omega, \quad (2.59)$$

Indichiamo con \mathbf{B} la matrice \mathbf{A}^{n-1} , per comodità di scrittura. In maniera analoga alla (2.58) si definisce un funzionale \bar{G} che, per mezzo di opportuni moltiplicatori di Lagrange, imponga al funzionale \bar{F} il rispetto delle equazioni di equilibrio (2.60).

$$\begin{aligned} \bar{G}(\underline{v}_C, \mathbf{A}^{n-1}, \lambda, \gamma_i) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C - \underline{u}^m) : \mathbf{A}^{n-1} : \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C - \underline{u}^m) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda \cdot \text{div}(\mathbf{A}^{n-1} \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C)) d\Omega + \gamma_i \left(\int_{\Gamma_i} (\mathbf{A}^{n-1} \underline{\varepsilon}(\underline{v}_C) \cdot \underline{n} - \underline{R}) d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

In forma discreta il funzionale (2.60) è utilizzabile nell'ambito del metodo degli elementi finiti, e diventa:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{V}_C - \mathbf{U}^m)[\mathbf{K}(E^{n-1}, \nu^{n-1})](\mathbf{V}_C - \mathbf{U}^m) + \lambda^T([\mathbf{K}]\mathbf{V}_C - \mathbf{F}) + \gamma_j^T \left(\sum_{i \in \Gamma_j} \mathbf{F}_i - \mathbf{R}_j \right). \quad (2.61)$$

Nella (2.61) sono stati introdotti i vettori delle quantità nodali \mathbf{V}_C e \mathbf{U}^m , mentre E^{n-1} e ν^{n-1} rappresentano rispettivamente il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson identificati in corrispondenza dell'iterazione $n - 1$. In questo caso le incognite del problema sono: i moltiplicatori di Lagrange λ e γ , la risultante dei carichi esterni \mathbf{F} applicati sul bordo, e l'array degli spostamenti nodali \mathbf{V}_C , provenienti da un calcolo diretto agli elementi finiti.

L'equazione che governa un problema diretto (2.24) con il metodo degli elementi finiti è del tipo $[\mathbf{K}]\mathbf{V}_C = \mathbf{F}$. Il problema di identificazione trattato permette di determinare le costanti elastiche di una lastra sottoposta a carico assiale di trazione, e lo stato tensionale durante la fase elastica. In un problema di questo tipo il vettore dei carichi esterni \mathbf{F} non è noto a priori. Infatti, pur sapendo che $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in Ω , su Γ_1 e su Γ_3 , non si conosce la distribuzione delle forze sui bordi Γ_2 e Γ_4 . Infatti su

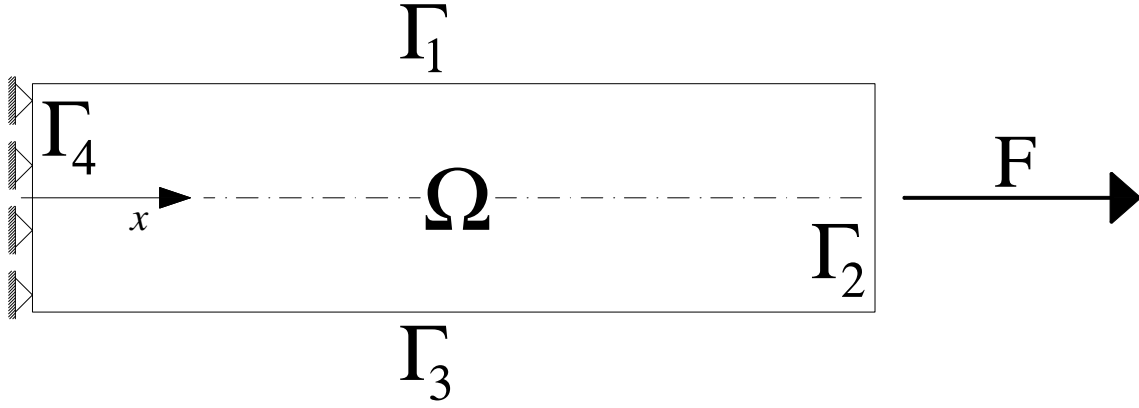


Figura 2.1: *Dominio materiale utilizzato per il metodo di inverso identificazione.*

questi ultimi due è nota soltanto la risultante (\mathbf{R}) agente al generico passo di carico. Il funzionale discreto (2.61), scritto con riferimento al lato Γ_2 del dominio piano 2.1, assume la forma seguente:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_C - \mathbf{U}^m)^T [\mathbf{K}](\mathbf{V}_C - \mathbf{U}^m) + \boldsymbol{\lambda}^T ([\mathbf{K}]\mathbf{V}_C - \mathbf{F}) + \gamma_2 \left(\sum_{i \in \Gamma_2} \mathbf{F}_i - \mathbf{R}_2 \right). \quad (2.62)$$

In esso le incognite sono $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{F} , $\gamma_2 e \mathbf{V}_C$.

Si osserva che i vettori spostamento \mathbf{V}_C e \mathbf{U}^m sono da considerare dei campi di spostamento continui e che il vettore \mathbf{F} possiede questa forma:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \underline{0} & in & \Omega \\ \underline{0} & su & \Gamma_1 \\ \underline{0} & su & \Gamma_3 \\ \neq \underline{0} & su & \Gamma_2 \\ \neq \underline{0} & su & \Gamma_4 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Al fine di ottenere un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, il funzionale H è derivato rispetto ad ognuna delle quattro incognite:

$$\begin{cases} [\mathbf{K}](\mathbf{V}_C - \mathbf{U}^m) + [\mathbf{K}]\boldsymbol{\lambda} = \underline{0}; \\ [\mathbf{K}](\mathbf{V}_C) = \mathbf{F}; \\ \sum_{i \in \Gamma_2} \mathbf{F}_i = \mathbf{R}_2; \\ \lambda_j = \gamma_2 \quad j \in \Gamma_2; \end{cases} \quad (2.64)$$

da esso si ottiene:

$$\begin{cases} [\mathbf{K}]\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{K}]\mathbf{U}^m - \mathbf{F}; \\ \sum_{i \in \Gamma_2} \mathbf{F}_i = \mathbf{R}_2; \\ \lambda_j = \gamma_2 \quad j \in \Gamma_2; \end{cases} \quad (2.65)$$

Dalla terza equazione del sistema (2.65) si osserva che λ_j è costante su Γ_2 . Analogamente il moltiplicatore di Lagrange è costante sul bordo Γ_4 . Inoltre è necessario che risulti $\gamma_2 \neq \gamma_4$, al fine di evitare dei campi rigidi di spostamento. La possibilità di avere un moltiplicatore di Lagrange costante su Γ_2 è un risultato importante, che permette di imporre $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in tutti i punti del bordo Γ_2 , tranne che in un unico punto, nel quale si considera applicata la risultante ($\bar{\mathbf{R}}$) agente al generico passo di carico. Ricordando che il vettore dei carichi nodali è nullo all'interno del dominio ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$ in Ω):

$$\begin{cases} [\mathbf{K}]\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{K}]\mathbf{U}^m - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{R}} \end{pmatrix} \\ \lambda_j = \text{cost} \quad \text{su } \Gamma_2; \end{cases} \quad (2.66)$$

Il sistema (2.66) consente di calcolare il vettore dei moltiplicatori $\boldsymbol{\lambda}$, mentre il moltiplicatore γ è banalmente ottenibile dalla terza equazione del sistema (2.65). A questo punto è possibile risolvere l'equazione seguente, da cui si ottiene il campo di spostamenti nodali \mathbf{V}_C in funzione degli spostamenti \mathbf{U}^m misurati con la D.I.C..

$$[\mathbf{K}]\mathbf{V}_C = [\mathbf{K}](\mathbf{U}^m - \boldsymbol{\lambda}) \Rightarrow \mathbf{V}_C = \mathbf{U}^m - \boldsymbol{\lambda}, \quad (2.67)$$

essa è valida a meno di moti rigidi del corpo. Considerando i soli moltiplicatori che escludono moti rigidi, la soluzione diventa:

$$\mathbf{U}_C^m = \mathbf{U}^m - \bar{\boldsymbol{\lambda}} \quad (2.68)$$

ed il corrispondente stato tensionale equilibrato, corrispondente alla generica iterazione $n - 1$ vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^{n-1} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}_C^m). \quad (2.69)$$

La seconda minimizzazione del funzionale F permette di calcolare le proprietà materiali, imponendo la stazionarietà del funzionale stesso rispetto alle componenti del tensore di elasticità. In uno stato piano di tensione, in cui le componenti piane di tensione e di deformazione sono rispettivamente $[\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$ $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T$, la legge

costitutiva $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}$ prende la forma:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{e1} & b_{e2} & 0 \\ b_{e2} & b_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

In particolare se il materiale è elastico ed isotropo: $b_{e1} = E(1 - \nu)/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$, $b_{e2} = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$, $b_{e3} = E/(2 + 2\nu)$. Il tensore di elasticità può essere convenientemente diagonalizzato, e scritto nella base dei tensori principali:

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{D}^T \mathbf{B} \mathbf{D}, \quad (2.71)$$

insieme alle deformazioni e alle tensioni:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.72)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\tau}, \quad (2.73)$$

in cui si è utilizzato

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

In questo caso la relazione costitutiva tra le deformazioni e le tensioni assume una forma più semplice:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tilde{\tau}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \tilde{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

All'interno del dominio di osservazione Ω il funzionale (2.55) si riscrive come segue:

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{b}_{e1}(\tilde{\varepsilon}_1^2 + \tilde{\varepsilon}_3^2) + \tilde{b}_{e2}\tilde{\varepsilon}_2^2 + \frac{1}{\tilde{b}_{e1}}(\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_3^2) + \frac{1}{\tilde{b}_{e2}}\tilde{\tau}_2^2) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega, \quad (2.76)$$

imponendone la stazionarietà rispetto alle componenti del tensore di elasticità si perviene ad un sistema di due equazioni in due incognite, che permette di risalire ai valori del modulo di Young e del coefficiente di Poisson:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \tilde{b}_{e1}^{(i)}} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \tilde{b}_{e2}^{(i)}} = 0 \end{cases} \Rightarrow [\tilde{b}_{e1}^{(i)}, \tilde{b}_{e2}^{(i)}] \Rightarrow (E^i, \nu^i). \quad (2.77)$$

Il procedimento iterativo appena esposto permette di calcolare il valore del modulo di Young (E) e del coefficiente di Poisson (ν) in corrispondenza di ogni passo di carico della fase elastica del materiale. La procedura iterativa viene fermata quando la differenza tra i parametri materiali, calcolati in corrispondenza di due iterazioni successive, soddisfa una prefissata tolleranza.

La possibilità di stimare i parametri materiali in corrispondenza di diversi step di carico consente una valutazione del danneggiamento d . Esso si esprime come perdita di rigidità del materiale tra il generico istante di carico e l'istante iniziale:

$$d = 1 - \frac{\tilde{E}}{E_0}. \quad (2.78)$$

2.5.1 Robustezza del metodo e scelta dei parametri di filtraggio

È stato già osservato che i dati acquisiti per mezzo della camera C.C.D. sono affetti da rumore elettronico. Tale circostanza ha richiesto un'indagine specifica, al fine di valutare la robustezza e l'attendibilità del metodo inverso utilizzato e decidere, nel contempo, i valori da assegnare ai parametri di filtering, per ottenere risultati accurati.

A questo scopo sono state condotte due tipi di analisi numeriche su modelli con caratteristiche geometriche uguali a quelle dei provini testati in laboratorio.

Utilizzando il codice di calcolo agli elementi finiti Cast3M[®] è stata eseguita dapprima un'analisi diretta, simulando una prova in stato piano di tensione su una lastra rettangolare di caratteristiche materiali note. Un lato minore della lastra è stato vincolato agli spostamenti orizzontali, mentre un lato maggiore è stato vincolato agli spostamenti verticali. Sul secondo lato minore è stata sottoposta ad una storia evolutiva di spostamenti di trazione assegnati. Il lato maggiore della lastra è stato discretizzato in 60 elementi finiti. Ad ogni passo dell'analisi sono stati valutati gli spostamenti nodali e le risultanti delle reazioni vincolari orizzontali. Attraverso questi dati è stata applicata l'analisi inversa, e sono stati valutati i parametri materiali corrispondenti a ciascun passo di carico. In questo modo è stata apprezzata l'affidabilità del metodo.

Per tali simulazioni numeriche è stato previsto un materiale omogeneo, elastico e danneggiabile, afferente al modello di *Mazars*. Secondo tale modello ad ogni passo di carico il materiale subisce un danneggiamento espresso dalla formula seguente:

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1 - A)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A}{\exp[B(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})]}. \quad (2.79)$$

In essa A e B sono due parametri che dipendono dal materiale utilizzato, ε_{D0} rappresenta la deformazione in corrispondenza della quale il materiale comincia a deformarsi, ed $\tilde{\varepsilon}$ è la deformazione equivalente. Essa è calcolata come segue:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_i^3 \left(\frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2} \right)^2}, \quad (2.80)$$

in cui le ε_i rappresentano le componenti principali di deformazione.

Le analisi del primo tipo hanno permesso di stimare gli effetti del rumore sulla valutazione del modulo di Young del materiale. Un rumore random con distribuzione Gaussiana è stato generato numericamente, ed i suoi valori sono stati sommati ai valori di spostamento afferenti a ciascun passo di carico. Con il metodo inverso è stato calcolato il modulo di Young in ciascun nodo della mesh, e ne è stata osservata la variazione nel corso dei vari passi di carico. Il rumore random è stato generato per valori della deviazione standard compresi tra 0.01 e 0.1. Le analisi sono state ripetute per ognuno di tali valori.

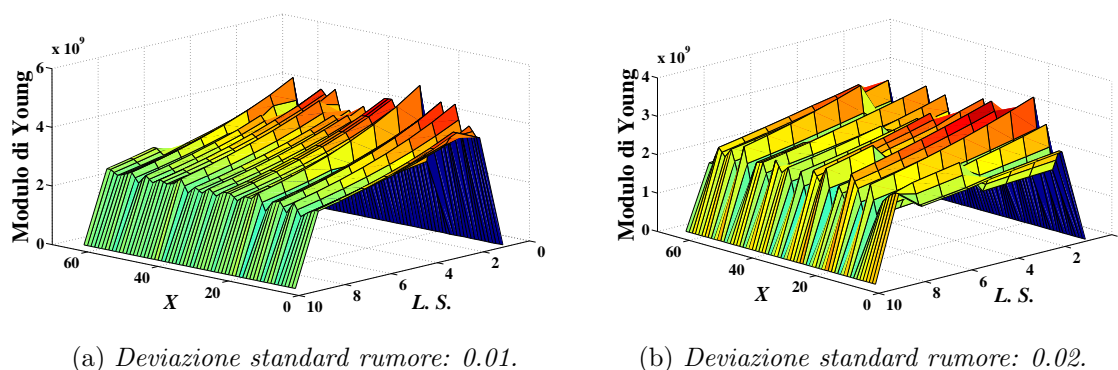


Figura 2.2: Evoluzione del modulo di Young per diversi valori del rumore sovrapposto.

Le figure 2.2, 2.3, 2.4 illustrano i risultati ottenuti. Per ogni deviazione standard del rumore considerata sono illustrati dei grafici tridimensionali, che riportano la stima del modulo di Young sull'asse verticale, i nodi sull'asse X della lastra, in corrispondenza dei quali è valutato il modulo di Young, ed i passi di carico sull'asse contrassegnato con $L.S.$. Pertanto ciascuna figura illustra, per un rumore di intensità assegnata, la variazione del modulo di Young all'aumentare degli spostamenti imposti sul bordo libero.

Osservando la figura 2.2 si constata che per un rumore sovrapposto molto basso le stime eseguite con il metodo inverso risultano accurate. Infatti, coerentemente

2.5 Scelta del modello e metodo di identificazione utilizzato

con l'ipotesi di materiale elastico, omogeneo e danneggiabile, si osserva la progressiva riduzione del modulo elastico al crescere degli spostamenti imposti. In corrispondenza degli steps finali di carico la stima del modulo di Young è pressochè simile per tutti i nodi dell'asse della lastra. In tale circostanza infatti l'ordine di grandezza degli spostamenti è maggiore di quello del rumore, e quest'ultimo risulta poco influente sul metodo inverso. Viceversa, in corrispondenza dei primi steps di carico, l'ordine di grandezza del rumore artificiale è uguale o addirittura maggiore degli spostamenti, che in questa fase sono esigui. In questa circostanza l'influenza del rumore rende poco accurato il metodo di identificazione, ed i risultati diventano molto diversi passando da un nodo all'altro dell'asse longitudinale del modello.

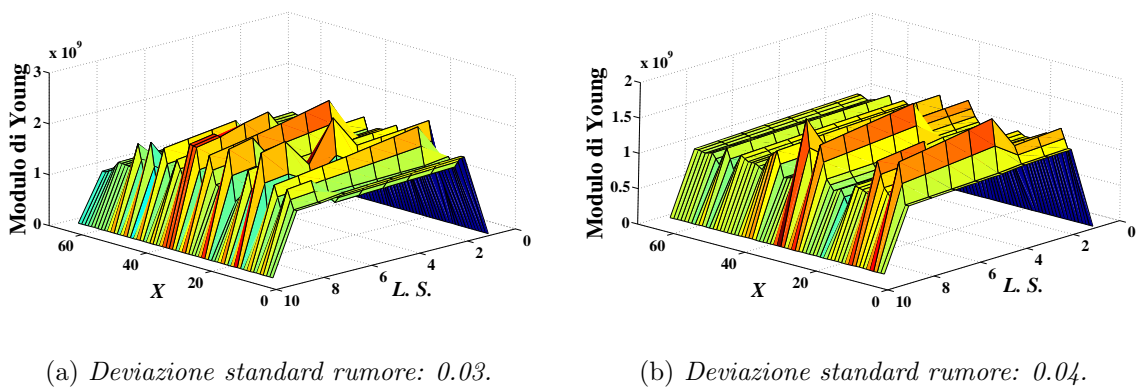
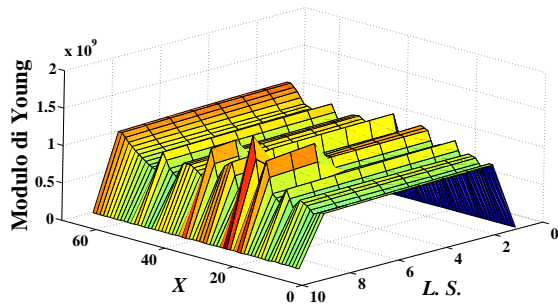
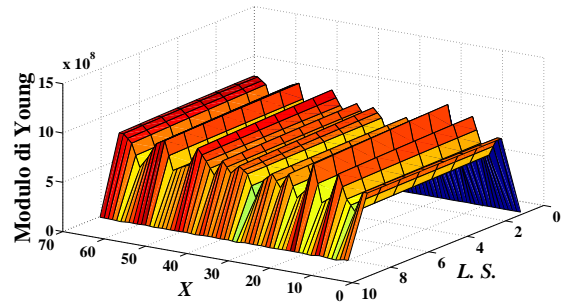


Figura 2.3: *Evoluzione del modulo di Young per diversi valori del rumore sovrapposto.*

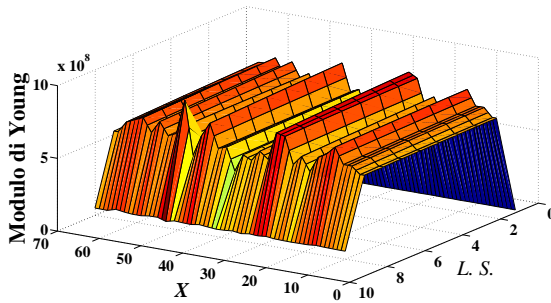
Attraverso la figura 2.3 si nota che, aumentando progressivamente l'intensità del rumore sovrapposto ai dati di spostamento, il metodo di identificazione non riesce più a cogliere la progressiva riduzione del modulo elastico per effetto del danneggiamento subito dal materiale. I grafici illustrati in figura 2.4 mettono in evidenza l'inaffidabilità dei risultati corrispondenti a valori elevati del rumore artificiale, sovrapposto ai dati di spostamento. In tali situazioni non è più possibile osservare l'effetto del danneggiamento, e la stima del modulo di Young tra nodi attigui risulta incoerente. Questa circostanza svavorevole si verifica tanto negli steps iniziali di carico quanto in quelli finali, a riprova che il rapporto segnale-rumore artificiale si mantiene sempre basso. Si osserva infine che i dati numericamente più attendibili sono quelli corrispondenti ad un rumore sovrapposto con deviazione standard minore. In questi casi è stimato un modulo di Young iniziale pari a circa $4 \cdot 10^9$ MPA, che si riduce per effetto del danneggiamento fino ad un valore prossimo a $2 \cdot 10^9$ MPA. Invece, quando il rumore sovrapposto ai dati di spostamento è elevato, le stime offerte dal meto-



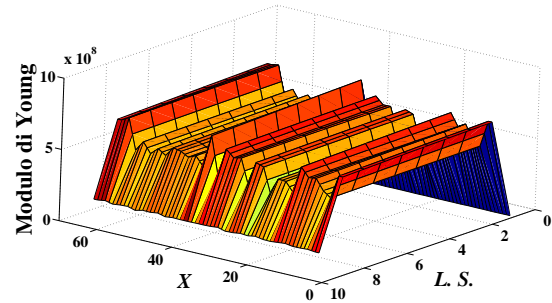
(a) Deviazione standard rumore: 0.05.



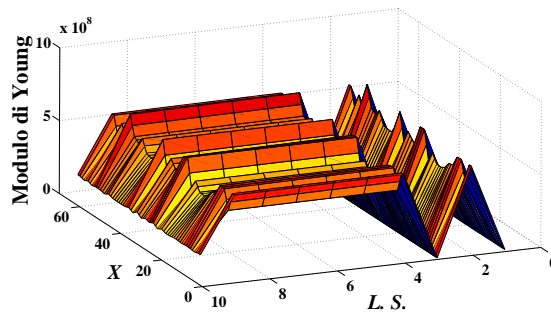
(b) Deviazione standard rumore: 0.06.



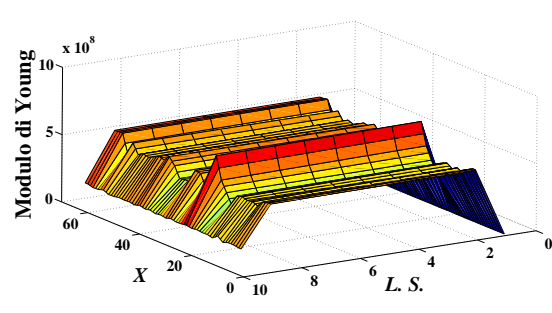
(c) Deviazione standard rumore: 0.07.



(d) Deviazione standard rumore: 0.08.



(e) Deviazione standard rumore: 0.09.



(f) Deviazione standard rumore: 0.1.

Figura 2.4: Evoluzione del modulo di Young per diversi valori del rumore sovrapposto.

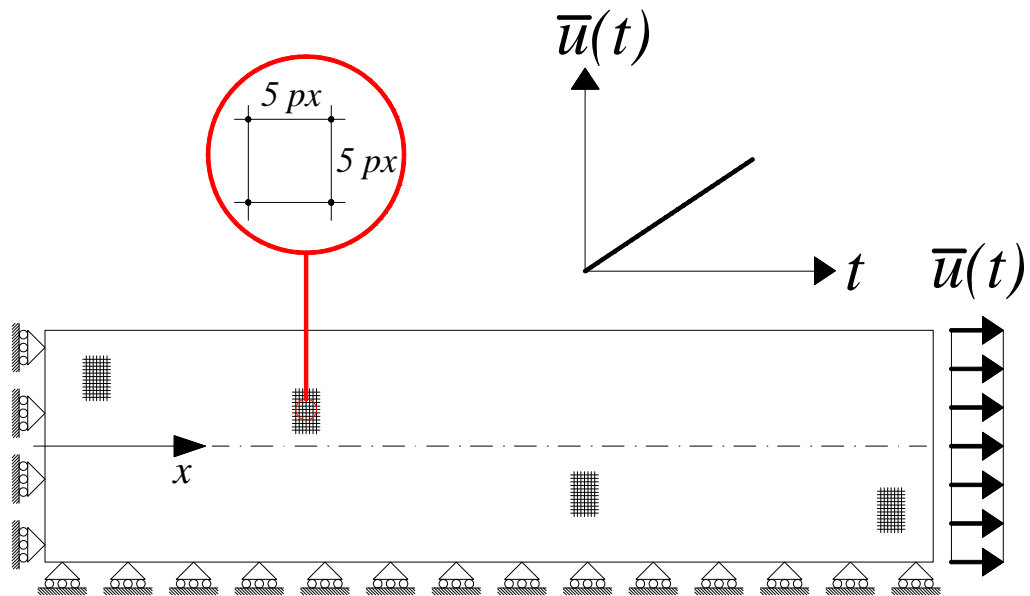


Figura 2.5: *Lastra elasto-danneggiabile caricata nel piano.*

do di identificazione inverso prevedono un valore del modulo di Young prossimo ai $5 \cdot 10^5$ MPA, rivelando l'inaccuratezza del metodo in presenza di rumore elevato.

Dalle precedenti osservazioni è risultato evidente che la possibilità di applicare il metodo inverso a casi sperimentali reali non può prescindere da un adeguato filtraggio dei dati, preventivo all'applicazione del metodo stesso.

Le analisi di robustezza del secondo tipo, discusse di seguito, hanno avuto l'obiettivo di individuare i parametri di filtering ottimali per un'adeguata identificazione dei parametri materiali anche in presenza di rumore impegnativo.

Utilizzando ancora il codice agli elementi finiti Cast3M[®], è stato realizzato un modello numerico di lastra in stato piano di tensione caricata nel piano. Le condizioni al contorno, imposte al modello sono riportate in figura 2.5. Sul bordo libero è applicato uno spostamento temporale evolutivo, costituito da 30 steps di carico. Il materiale previsto per il modello è stato un materiale omogeneo, elastico e danneggiabile. I parametri materiali utilizzati sono stati: un modulo di Young iniziale pari a $5.832 N/px^2$, corrispondente a circa 7800 MPa, un modulo di Poisson pari a 0.2 . Inoltre, coerentemente con il modello di danneggiamento di Mazars, sono stati adottati i seguenti parametri materiali: $A = 0.8$ e $B = 120$, mentre per la deformazione di primo danneggiamento è stato previsto un valore di $\varepsilon_{D0} = 3.0 \cdot 10^{-5}$. Il modello geometrico è stato discretizzato in 524 elementi finiti sul lato lungo e 61 elementi finiti sul bordo corto. Tale scelta non è stata casuale, ma corrispondente al

numero di punti di misura elaborati con la tecnica della D.I.C.. In questo modo ad ogni elemento finito è stata attribuita una forma quadrata con lato di lunghezza pari a 5 pixels (figura 2.5). In questo modo è stata simulata in maniera molto accurata una prova sperimentale. Le analisi hanno riguardato inizialmente un calcolo diretto, con il quale sono stati valutati gli spostamenti corrispondenti ad ogni step dell'analisi al passo e la risultante delle reazioni vincolari ul lato corto del modello. Utilizzando questi dati, è stato successivamente applicato il metodo di identificazione inverso, che ha consentito una stima dell'evoluzione del danneggiamento omogeneo subito dal modello numerico, implementato per spostamenti imposti crescenti sul bordo libero. I risultati sono illustrati in figura 2.6 e si riferiscono a dati privi di rumore artificiale sovrapposto.

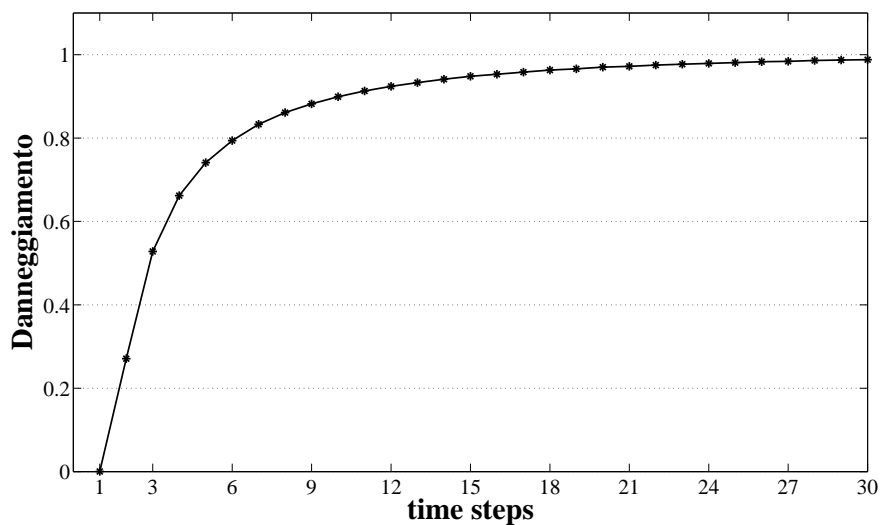


Figura 2.6: *Evoluzione del danneggiamento in funzione dei time steps.*

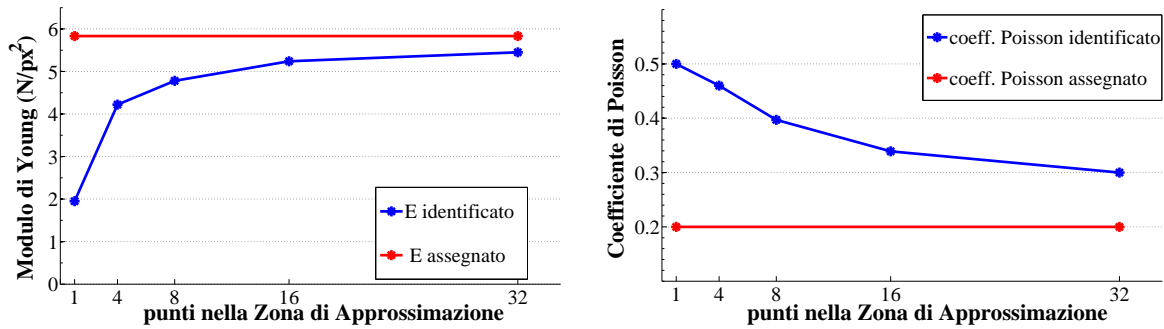
Come illustrato in figura 2.6 il modello numerico esibisce un incremento lineare del danneggiamento fino ad un massimo di circa 0.5, poi la successiva degradazione del materiale avviene secondo una legge di ordine superiore al primo.

Lo studio condotto in questa fase ha permesso di scegliere il valore ottimale da assegnare alla zona di approssimazione per avere dei risultati accurati nella stima dei parametri materiali e del danneggiamento.

Ai dati di spostamento ottenuti con la prima analisi diretta è stato sovrapposto un rumore random a distribuzione Gaussiana con valore medio nullo e deviazione standard di 0.02. I dati rumorosi così ottenuti sono stati filtrati per diversi valori della zona di approssimazione, e per ogni gruppo di dati è stato applicato il metodo di identifi-

2.5 Scelta del modello e metodo di identificazione utilizzato

cazione inverso. I calcoli di filtering sono stati ripetuti per zone di approssimazione formate da 1, 4, 8, 16 e 32 punti. Dopodichè i dati sono stati preparati per l'applicazione del metodo inverso, prevedendo una discretizzazione del modello geometrico più rada rispetto a quella utilizzata nel calcolo diretto. Pertanto in questa fase gli elementi finiti utilizzati sono stati 60 nella direzione del lato maggiore della lastra e 12 nella direzione del lato minore. Si sintetizzano di seguito i risultati ottenuti.



(a) Identificazione del modulo elastico iniziale.

(b) Identificazione del coefficiente di contrazione iniziale.

Figura 2.7: Stima dei parametri elastici iniziali.

La figura 2.7 mette in evidenza come, al crescere del numero dei punti all'interno della zona di approssimazione, l'identificazione dei parametri elastici per materiale privo di danneggiamento converge verso i valori esatti. In particolare, utilizzando 32 punti all'interno della zona di approssimazione, si ottiene un'identificazione accurata del Modulo di Young iniziale. La valutazione del coefficiente di Poisson risulta convergente verso il valore esatto, tuttavia una sua stima più accurata richiederebbe una zona di approssimazione più ampia.

Il numero dei punti contenuti nella zona di approssimazione risulta determinante anche nell'identificazione del danneggiamento. In figura 2.8 sono state riportate le curve di evoluzione del danneggiamento esatto e del danneggiamento stimato utilizzando un numero crescente di punti all'interno della zona di approssimazione. Si osserva la convergenza dei dati verso i valori teorici al crescere del parametro di filtering. Una zona di approssimazione formata da 32 punti garantisce i risultati più accettabili.

Infine si discutono alcune considerazioni sugli errori introdotti dalla procedura di identificazione nel calcolo dei parametri materiali e del danneggiamento. A tal

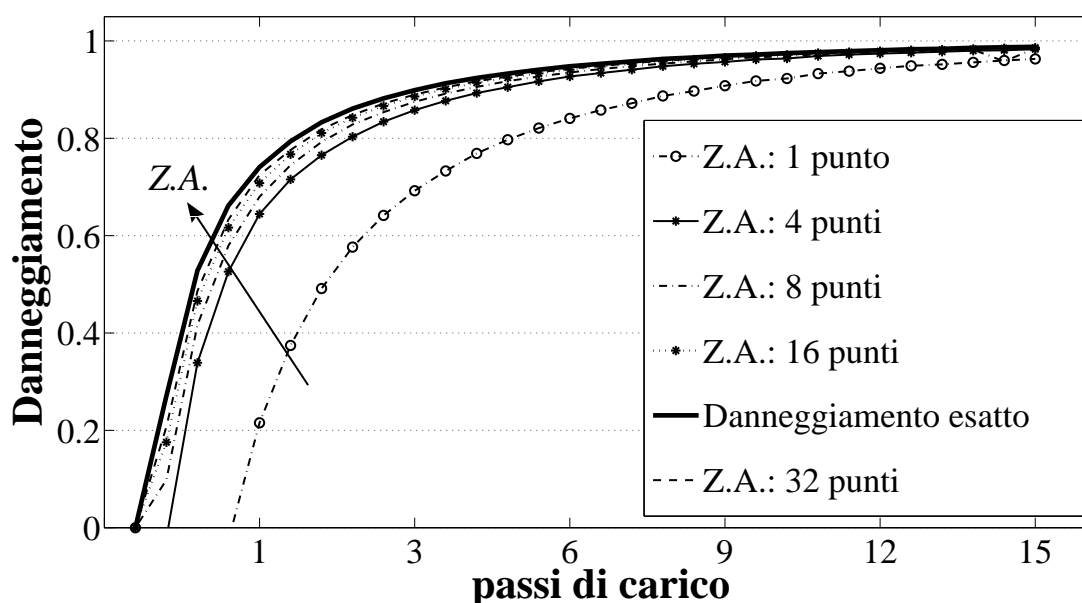


Figura 2.8: Valutazione del danneggiamento in funzione del numero di punti della Zona di Approssimazione.

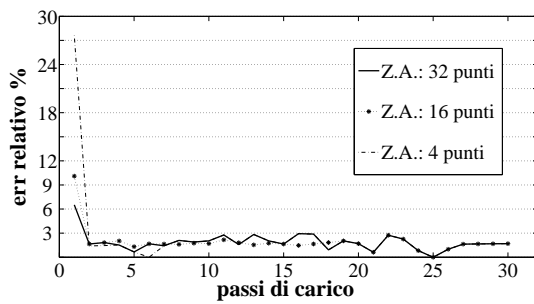
fine in figura 2.9 si confrontano gli errori percentuali, relativi ed assoluti, introdotti utilizzando una zona di approssimazione di dimensione crescente.

Ai fini dell'identificazione del modulo elastico iniziale del materiale si osserva che, una zona di approssimazione di 32 punti permette un abbattimento dell'errore relativo e di quello assoluto. Nei passi di carico successivi a quello iniziale l'errore assoluto si mantiene prossimo allo 0% indipendentemente dalla zona di approssimazione usata. Considerazioni simili valgono per l'errore relativo, che si conserva inferiore al 3% durante tutta la storia di carico del materiale.

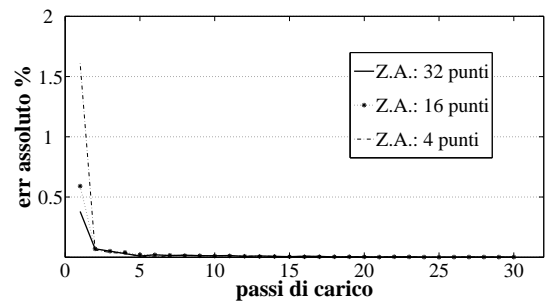
Anche nella stima del coefficiente di Poisson si osserva che la precisione migliore è garantita da una zona di approssimazione formata da 32 punti soltanto in corrispondenza dell'identificazione iniziale, per la quale, passando da una zona di approssimazione formata da 4 punti ad una di 32 punti, l'errore relativo si riduce di circa il 100%, mentre quello assoluto si riduce di oltre la metà. Nei passi di carico successivi, pur incrementando la dimensione della zona di approssimazione, gli errori introdotti si mantengono sempre dell'ordine dello 0%.

Gli errori introdotti nella stima del danneggiamento, dimostrano con migliore chiarezza l'esigenza di una zona di approssimazione più ampia. infatti, si può osservare che la curva dell'errore relativo tende più rapidamente a zero al crescere dei punti

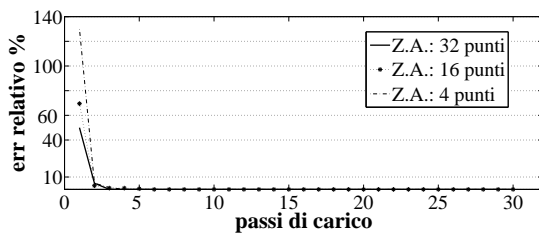
2.5 Scelta del modello e metodo di identificazione utilizzato



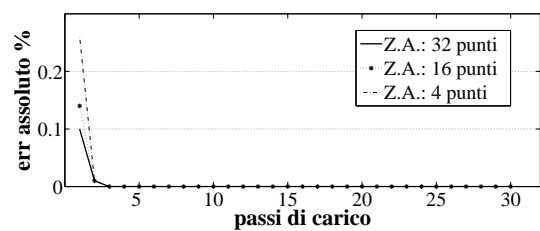
(a) *Errore relativo nella stima del modulo di Young.*



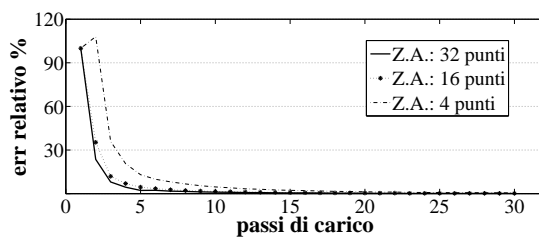
(b) *Errore assoluto nella stima del modulo di Young.*



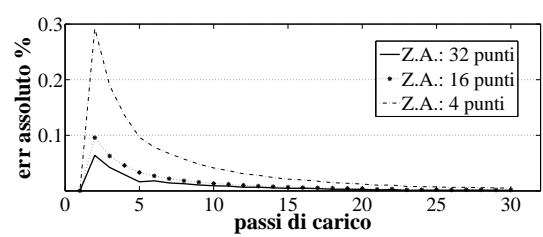
(c) *Errore relativo nella stima del coefficiente di Poisson.*



(d) *Errore assoluto nella stima del coefficiente di Poisson.*



(e) *Errore relativo nella stima del danneggiamento.*



(f) *Errore assoluto nella stima del danneggiamento.*

Figura 2.9: *Evoluzione degli errori nella procedura di identificazione.*

impiegati per la zona di approssimazione. In corrispondenza del primo step di carico, l'errore relativo introdotto è sempre del 100%, tuttavia questo valore è trascurabile, perchè nel passo di carico iniziale il materiale è da considerarsi integro. Una dipendenza più chiara dalla zona di approssimazione è messa in evidenza dal grafico afferente all'errore assoluto. In tal caso si osserva un abbattimento della curva dell'errore portando la zona di approssimazione da 4 a 32 punti. Gli ordini di grandezza degli errori appena descritti hanno reso accettabili i risultati ottenuti. Pertanto nell'applicazione del metodo di identificazione inverso alle analisi sperimentali, che saranno descritte e discusse nel capitolo quinto, la procedura di filtering dei dati di spostamento è stata eseguita utilizzando una zona di approssimazione formata da 32 punti.

Capitolo 3

Meccanica del danneggiamento continuo

3.1 Principi generali

Ogni materiale strutturale è dotato di proprietà fisico - meccaniche riferite alla sua condizione iniziale di materiale vergine. Quando il materiale è sottoposto ad una certa storia di carico, tali proprietà si riducono, ed il materiale si definisce “danneggiato”. I meccanismi di danneggiamento non sono uguali per tutti i materiali, ma dipendono dalla loro microstruttura interna, in particolare, la distribuzione interna dei vuoti e delle microfratture, nonché la loro crescita ed enucleazione sono responsabili delle varie condizioni di degradazione di tipo locale e/o globale. L’evoluzione del danneggiamento è studiata monitorando tutti i processi che causano la progressiva degradazione del materiale [Murakami, 1987], [Chaboche, 1982], [Barbero and Lonetti, 2002]. Tipicamente il danneggiamento si può manifestare secondo i seguenti meccanismi:

- danneggiamento fragile o duttile;
- danneggiamento e plasticità;
- danneggiamento e fatica.

Con la *Meccanica del Danneggiamento Continuo* i fenomeni di degradazione sono associati a variabili macroscopiche definite su configurazioni al continuo. Purtroppo le semplici osservazioni di carattere macroscopico non sempre permettono di

comprendere se lo stato attuale di un materiale risulta danneggiato. Pertanto la caratterizzazione del danneggiamento attraverso variabili macroscopiche risulta molto complessa. Di conseguenza occorre sapere a priori quali effetti del danneggiamento studiare, e su quale scala di lavoro tali effetti siano valutabili, in modo tale da scegliere adeguatamente le variabili da monitorare. Infatti tali fenomeni di degradazione sono associati ad alcuni parametri semplici, come le proprietà elastiche del materiale, le deformazioni plastiche e i valori di resistenza.

I modelli di danneggiamento presenti in letteratura sono formulati su quattro scale di lavoro: la scala atomica, la microscala, la mesoscala e la macroscale.

Nella scala atomica il materiale è studiato come un sistema di atomi o molecole disposti in un reticolo a struttura periodica, nel quale le particelle elementari sono tenute unite da forze interatomiche. In questo caso lo stato di danneggiamento è legato alla rigidità e alla resistenza dei legami atomici, la cui rottura o ripristino influenza l'evoluzione dei processi dissipativi.

Nella microscala il materiale è rappresentato come un sistema eterogeneo, nel quale gli effetti del danneggiamento sono valutati sui singoli costituenti. L'indagine è eseguita su un volume rappresentativo di materiale (RVE), per il quale la forma ed il numero di microfratture caratterizzano lo stato di danneggiamento. In questo contesto anche le equazioni costitutive si riferiscono ai singoli costituenti, che nel caso dei materiali compositi sono le fibre e la matrice.

Nella mesoscala il materiale si considera omogeneo, ed i meccanismi di danneggiamento sono descritti tramite variabili opportune.

La macroscale è definita assumendo come dominio rappresentativo l'intera struttura. Su tale scala il danneggiamento è influenzato da tutte le variabili, pertanto i modelli risultano molto laboriosi e poco efficienti.

L'ipotesi alla base della Meccanica del Danneggiamento Continuo assume che il danneggiamento sia uniformemente distribuito all'interno del materiale [*Kachanov*, 1958], [*Rabotnov*, 1969], [*Chaboche J.L.*, 1981a], [*Krajcinovic and Fonseka*, 1981], [*Krajcinovic D.*, 1983], [*Murakami*, 1987], e che possa essere descritto da una funzione continua di tipo scalare o tensoriale e a valori strettamente positivi.

Nell'ambito dei materiali compositi esistono modelli più generali, nei quali i processi di degradazione sono descritti attraverso fenomeni accoppiati di danneggiamento e di plasticità. Queste teorie si basano su un approccio termodinamico in accordo con "il metodo delle variabili interne", e introducono una serie di parametri nelle equazioni generali del problema, che simulano i processi di dissipazione del materiale.

L'introduzione delle variabili interne ha permesso di definire una formulazione termodinamicamente consistente sia nell'ambito della Meccanica del Danneggiamento

to Continuo, che nell'ambito della Teoria Classica della Plasticità [Simo and Ortis, 1987], [Simo and J.W., 1987], [Ju, 1989], [Voyiadjis and Guelzim, 1996]. Con le variabili interne è possibile simulare il progressivo danneggiamento del materiale e l'incremento delle deformazioni permanenti. Questo metodo permette di formulare le equazioni costitutive all'interno della configurazione effettiva, nella quale il materiale si assume, idealmente, privo di vuoti e fessure, presentando nel contempo le caratteristiche meccaniche del materiale danneggiato. Nella configurazione effettiva le variabili di stato e le quantità osservabili sono descritte da funzioni continue.

In letteratura sono presenti formulazioni che utilizzano variabili di danneggiamento scalari, vettoriali, o tensoriali. I valori attuali delle variabili di danneggiamento influenzano la rigidità e la flessibilità del materiale danneggiato attraverso un approccio accoppiato, con il quale l'evoluzione del danneggiamento coinvolge sia le deformazioni, che le proprietà elastiche del materiale [Cordebois and Sidoroff, 1979], [Simo and J.W., 1987], [Barbero and Lonetti, 2002].

Di seguito viene descritto il processo di degradazione di un materiale per effetto di microfratture e vuoti attraverso la formulazione di Kachanov all'interno di uno spazio di riferimento con direzioni principali x, y, z . Si consideri un elemento di volume di materiale danneggiato, contenente una superficie di normale uscente \underline{n} , e sia $\underline{r}(x, y, z)$ il vettore posizione del generico punto P appartenente alla superficie di normale uscente \underline{n} . Lo stato di danneggiamento nel punto P si esprime in funzione della *variabile di danneggiamento* D , definita come

$$D(P, \underline{n}) = \frac{\delta \tilde{A}_D}{\delta A} \quad (3.1)$$

nella quale $\delta \tilde{A}_D$ è l'area delle imperfezioni, costituita da vuoti, cavità, microfratture, e così via, mentre δA rappresenta l'area totale dell'elemento di superficie, considerato al netto delle imperfezioni. La variabile D è una funzione continua all'interno del materiale, e costituisce una misura del danneggiamento locale del materiale; essa può assumere valori compresi tra zero, che corrisponde allo stato di materiale non danneggiato ed uno, che corrisponde allo stato di materiale completamente danneggiato. In quest'ultimo caso l'area totale delle imperfezioni è uguale all'area totale dell'elemento di superficie: $\delta \tilde{A}_D = \delta A$.

La necessità di semplificare le simulazioni connesse ai diversi meccanismi di danneggiamento, interagenti tra loro, ha portato alla definizione della “*configurazione fittizia*” \tilde{C}_F . Ad essa è richiesto di essere meccanicamente equivalente alla configurazione danneggiata del materiale ed idealmente priva di imperfezioni. Tale condizione si ritiene necessaria nella formulazione analitica delle equazioni del problema, poiché le variabili del modello possono essere definite su un dominio idealmente continuo.

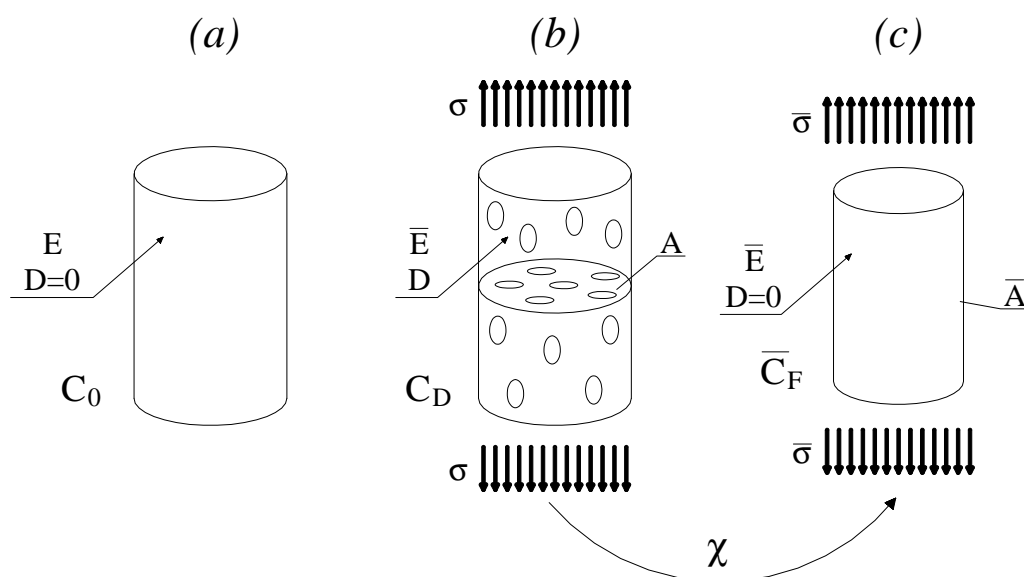


Figura 3.1: *Danneggiamento per uno stato tensionale monodimensionale: a) configurazione iniziale, b) configurazione danneggiata, c) configurazione fittizia.*

Pertanto nella Meccanica del Danneggiamento Continuo sono utilizzate tre configurazioni materiali: la configurazione iniziale C_0 , la configurazione reale (o danneggiata) C_D e la configurazione fittizia (o effettiva) \bar{C}_F ; in figura 3.1 sono illustrate le tre configurazioni anzidette on riferimento ad uno stato tensionale monodimensionale. Da tale figura si osserva che, nella configurazione non danneggiata (C_0) le grandezze tipiche sono: uno stato di danneggiamento pari a zero ($D = 0$), ed un modulo di Young uguale a quello del materiale vergine E . In un generico istante della storia di carico, cui è sottoposto il materiale, la distribuzione uniforme di tensioni uniassiali σ in equilibrio con il carico esterno, determina uno stato di danneggiamento all'interno del materiale, che risulta evidente dalla formazione di vuoti e microfratture, che fanno assumere alla variabile di danneggiamento D un valore non nullo. Tale distribuzione di microfratture e vuoti fa sì che nella configurazione danneggiata C_D il modulo di Young sia inevitabilmente ridotto rispetto alla configurazione iniziale C_0 , in cui il materiale è non danneggiato. Per definizione la configurazione fittizia è meccanicamente equivalente alla configurazione attuale, pertanto in essa il modulo di Young del materiale vale E , mentre la variabile di danneggiamento D assume valore nullo. Per effetto dei vuoti e delle microfratture indotti dalla distribuzione di tensioni normali σ all'interno della configurazione attuale, una parte dell'area trasversale dell'elemento

3.1 Principi generali

di volume di riferimento non contribuisce più alla resistenza del materiale. Pertanto la configurazione fittizia è caratterizzata da una superficie resistente (\bar{A}) ridotta rispetto all'area nella configurazione attuale (A):

$$\bar{A} < A, \quad (3.2)$$

e poichè il carico si ripartisce su un'area minore, la tensione agente nella configurazione effettiva è maggiore rispetto a quella agente nella configurazione attuale. Nel caso di stato tensionale uniassiale la variabile di danneggiamento si esprime come:

$$\frac{\bar{A}}{A} = 1 - D. \quad (3.3)$$

Di conseguenza la tensione normale effettiva e la tensione normale nella configurazione attuale possono essere messe in relazione attraverso la variabile di danneggiamento D , per mezzo della seguente espressione:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad \Rightarrow \quad \sigma = (1 - D)\bar{\sigma}. \quad (3.4)$$

Merita di essere osservato che la Meccanica del Danneggiamento Continuo con la sola variabile di danneggiamento (D) non tiene conto dell'interazione delle imperfezioni locali e della loro orientazione nel volume del campione osservato.

In generale, è possibile definire un operatore tensoriale χ , che permetta il passaggio dalla configurazione attuale C_D alla configurazione effettiva \bar{C}_F di qualsiasi grandezza che descriva un dato aspetto del danneggiamento (Fig. 3.2).

La Meccanica del Danneggiamento Continuo è generalizzabile ad una distribuzione tridimensionale di microfratture e vuoti all'interno del materiale. L'ipotesi fondamentale è che gli stati tensionali e deformativi siano uniformi nel materiale, mentre le configurazioni di riferimento rimangono ancora la configurazione iniziale, la configurazione danneggiata e la configurazione fittizia. Il passaggio ad una descrizione tridimensionale del danneggiamento richiede che le superfici interessate dai vuoti e dalle microfratture interne siano caratterizzate dalla propria normale, la cui orientazione cambia durante la progressione del danneggiamento. Si consideri un materiale non danneggiato nella configurazione iniziale C_0 , e siano $d\mathbf{x}_0$ e $d\mathbf{y}_0$ i lati di una generica superficie, la cui normale sia identificata dal vettore $\nu_0 d\mathbf{A}_0$. Il passaggio dalla configurazione iniziale alla configurazione danneggiata avviene tramite l'operatore tensoriale \mathbf{F} , mentre l'operatore tensoriale χ definisce il passaggio dalla configurazione danneggiata C_D alla configurazione fittizia \bar{C}_F . In particolare:

$$d\bar{\mathbf{x}} = \chi d\mathbf{x} \quad (3.5)$$

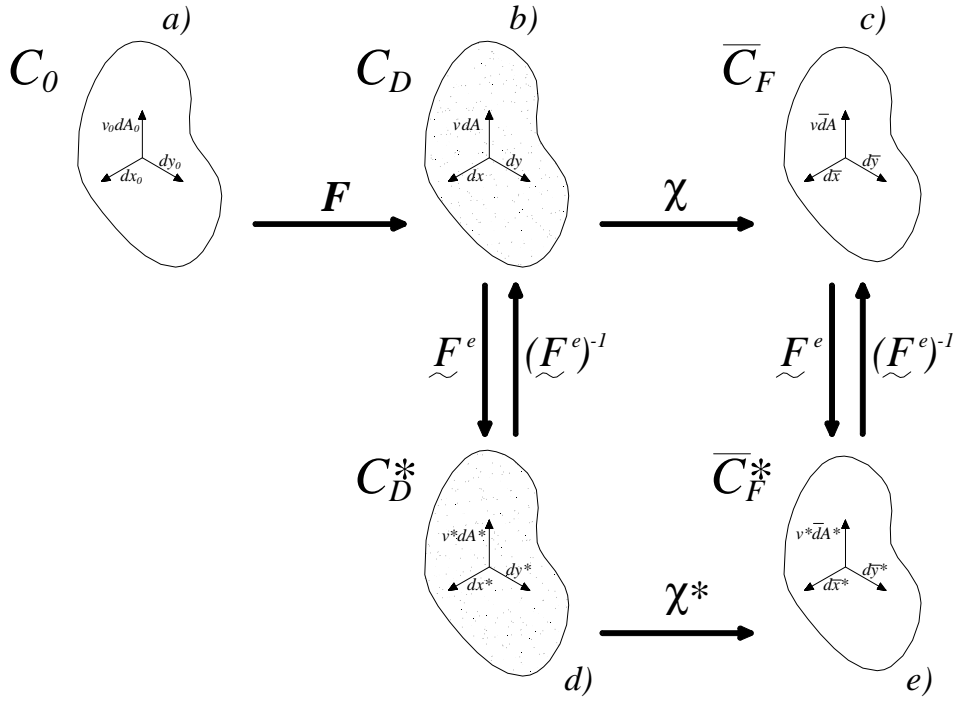


Figura 3.2: Configurazioni di danneggiamento per stati tridimensionali: a) iniziale, b) danneggiata, c) effettiva, d) danneggiata priva di deformazioni elastiche, e) effettiva priva di deformazioni elastiche.

$$d\bar{y} = \chi dy. \quad (3.6)$$

La formula di Nanson [Ogden, 1983] permette il passaggio di configurazione analogo per i vettori di area:

$$\bar{n}dA = \frac{1}{2}d\bar{x} \wedge d\bar{y} = \frac{1}{2}(\chi dx) \wedge (\chi dy) = \det[\chi] \cdot (\chi^{-1})^T n dA. \quad (3.7)$$

Anche nel caso pluriassiale la variabile di danneggiamento si può esprimere come rapporto di riduzione in termini di area:

$$\bar{n}dA = (\det[\chi] \cdot (\chi^{-1})^T) n dA = [\bar{\mathbb{I}} - \bar{\mathbb{D}}] n dA \quad (3.8)$$

dalla quale consegue l'espressione della variabile di danneggiamento, che questa volta assume una forma tensoriale:

$$\bar{\mathbb{D}} = (\bar{\mathbb{I}} - \det[\chi] \cdot (\chi^{-1})^T). \quad (3.9)$$

La variabile di danneggiamento $\bar{\mathbb{D}}$ simula la formazione e l'evoluzione delle imperfezioni interne al materiale. Essa corrisponde ad un tensore del secondo ordine,

3.1 Principi generali

che nello spazio tridimensionale rappresenta i rapporti di riduzione in termini di area secondo diverse orientazioni del sistema di riferimento esterno.

Accanto alla configurazione attuale C_D è possibile definire una configurazione danneggiata priva di deformazioni elastiche C_D^* . L'operatore \underline{F}^e , di cui si ammette l'esistenza dell'inverso $(\underline{F}^e)^{-1}$, permette il passaggio dalla configurazione C_D alla configurazione C_D^* . Lo stesso operatore \underline{F}^e permette di operare anche le trasformazioni tra la configurazione effettiva \bar{C}_F e la configurazione effettiva priva di deformazioni elastiche \bar{C}_F^* .

Analogamente si può introdurre il tensore di trasformazione $\underline{\chi}^* : C_D^* \rightarrow \bar{C}_F^*$ e ricavare le equazioni che correlano le grandezze fra loro analoghe nelle configurazioni C_D e C_F . In particolare, passando da una configurazione all'altra, i vettori si trasformano secondo le relazioni seguenti:

$$d\underline{\bar{x}}^* = \underline{\chi}^* d\underline{x}^* \quad (3.10)$$

$$d\underline{\bar{y}}^* = \underline{\chi}^* d\underline{y}^*, \quad (3.11)$$

mentre la trasformazione dei vettori area avviene utilizzando ancora la formula di Nanson:

$$\bar{\underline{n}}^* dA^* = \frac{1}{2} d\underline{\bar{x}}^* \wedge d\underline{\bar{y}}^* = \frac{1}{2} (\underline{\chi}^* d\underline{x}^*) \wedge (\underline{\chi}^* d\underline{y}^*) = \det[\underline{\chi}^*] \cdot ((\underline{\chi}^*)^{-1})^T \underline{n}^* dA^*. \quad (3.12)$$

Tramite la (3.12) si introduce il tensore $\bar{\underline{D}}$, che definisce il rapporto di riduzione in termini di area tra le configurazioni C_D^* e \bar{C}_F^* , e pertanto deve soddisfare la relazione:

$$\bar{\underline{n}}^* dA^* = (\underline{\mathbb{I}} - \bar{\underline{D}}) \cdot \underline{n}^* dA^*, \quad (3.13)$$

dalla quale consegue che

$$\bar{\underline{D}} = \left(\underline{\mathbb{I}} - \det[\underline{\chi}^*] \cdot ((\underline{\chi}^*)^{-1})^T \right). \quad (3.14)$$

Il tensore $\bar{\underline{D}}$ è definito come *tensore di danneggiamento con deformazioni elastiche nulle*, ed esprime il danneggiamento come rapporto di riduzione in termini di area per deformazioni elastiche nulle, esso risulta indipendente dall'operatore \underline{F}^e , e pertanto costituisce una misura consistente dei fenomeni di danneggiamento.

Tra i tensori \underline{D} e $\bar{\underline{D}}$ sussiste la seguente relazione:

$$\bar{\underline{D}} = (\underline{F}^e)^T : \underline{D} : (\underline{F}^e)^{-T} \quad (3.15)$$

La descrizione più accurata del danneggiamento è fornita dal tensore $\bar{\underline{D}}$, in quanto tiene in conto dei valori attuali di degradazione indipendentemente dalla presenza

di deformazioni elastiche. Tuttavia quando la parte elastica \mathbb{F}^e del gradiente della deformazione \mathbb{F} risulta trascurabile, le differenze tra i due tensori $\bar{\mathbb{D}}$ e \mathbb{D} risultano inconsistenti.

Le coppie (\bar{n}_i, \bar{d}_i) e (n_i, d_i) definiscono le autosoluzioni all'interno del riferimento principale dei tensori $\bar{\mathbb{D}}$ e \mathbb{D} rispettivamente. La loro esistenza è provata dalle relazioni:

$$\begin{aligned} (\bar{D}_i - \bar{d}_i I) \bar{n}_i &= 0 \\ (D_i - d_i I) n_i &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Le (3.16) garantiscono che qualunque superficie, orientata secondo una direzione principale di danneggiamento \bar{n}_i ovvero n_i , danneggiandosi non determina alcuna degradazione alle superfici orientate secondo altre direzioni.

Il danneggiamento dei materiali è un fenomeno irreversibile, pertanto deve essere affrontato secondo un approccio termodinamicamente consistente. La condizione di irreversibilità del danneggiamento è matematicamente espressa attraverso delle opportune condizioni al contorno. In particolare, passando dalla configurazione C_D^* alla configurazione \bar{C}_F^* l'area finale al netto dei vuoti interni deve ammettere un valore strettamente positivo e le normali a superfici corrispondenti possono risultare al massimo ortogonali:

$$(\underline{n}^* dA^*) \cdot (\underline{n}^* dA^*) > 0 \quad \forall \underline{n}^* dA^* \in C_D^*. \tag{3.17}$$

Inoltre si osserva banalmente che il tensore $(\mathbb{I} - \bar{\mathbb{D}})$ è definito positivo. Infatti poichè

$$(\underline{n}^* dA^*) = (\mathbb{I} - \bar{\mathbb{D}}) \cdot (\underline{n}^* dA^*) \tag{3.18}$$

risulta che

$$(\mathbb{I} - \bar{\mathbb{D}})(\underline{n}^* dA^*) \cdot (\underline{n}^* dA^*) > 0 \quad \forall \underline{n}^* dA^* \in C_D^*. \tag{3.19}$$

La valutazione dello stato tensionale agente nelle varie configurazioni di riferimento richiede ulteriori equazioni. A tal fine si consideri un tetraedro di riferimento. La risultante $\underline{t}dA$, applicata alla superficie di normale $\underline{n}dA$ nella configurazione danneggiata C_D , provoca una tensione $\boldsymbol{\sigma}$, che nella configurazione effettiva \bar{C}_F assume un valore $|\bar{\boldsymbol{\sigma}}| > |\boldsymbol{\sigma}|$, perchè in tale configurazione la risultante $\underline{t}dA$ si ripartisce su una superficie minore, in quanto depurata delle imperfezioni. Considerando ancora il tensore $\boldsymbol{\chi}^* : C_D^* \rightarrow \bar{C}_F^*$, si può definire la seguente relazione tra i tensori $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\det \boldsymbol{\chi}]^{-1} \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\sigma} \tag{3.20}$$

e poichè dall'espressione (3.9) si ricava che:

$$\boldsymbol{\chi} = [\det\boldsymbol{\chi}] \cdot (\mathbb{I} - \mathbb{D})^{-T}, \quad (3.21)$$

il legame tra le tensioni $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ si può scrivere come:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [\det\boldsymbol{\chi}]^{-1} \cdot [\det\boldsymbol{\chi}] \cdot (\mathbb{I} - \mathbb{D})^{-T} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.22)$$

L'espressione (3.22) può essere generalizzata, introducendo un tensore del quarto ordine \mathbb{M} , noto come *tensore di danneggiamento effettivo*. Tale tensore è una funzione dello stato di danneggiamento del materiale e la sua forma dipende dalla descrizione adottata per il danneggiamento. L'utilità del tensore di danneggiamento effettivo consiste nella possibilità di creare un legame tra gli stati tensionali delle configurazioni effettiva e danneggiata:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{M} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.23)$$

Lo stato tensionale $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, definito all'interno della configurazione effettiva, risulta, in generale, non simmetrico. Di conseguenza, per semplificare la formulazione teorica del modello, è necessario ricorrere ad una tecnica di simmetrizzazione. In particolare con la tecnica della *simmetrizzazione effettiva* i due stati tensionali $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono legati attraverso la seguente espressione:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} : (\mathbb{I} - \mathbb{D}). \quad (3.24)$$

In definitiva, la formulazione adottata permette di descrivere lo stato di danneggiamento per mezzo della relazione (3.9), dalla quale risulta chiaramente la dipendenza della variabile di danneggiamento \mathbb{D} dall'operatore $\boldsymbol{\chi}$. Tuttavia quest'ultimo dipende da un numero molto alto di fattori, che rendono il legame analitico (3.9) molto complesso. Pertanto risulta conveniente introdurre dei principi di equivalenza, che definiscano il legame tra le configurazioni attuali e danneggiate, uguagliando soltanto variabili macroscopiche, cioè quelle variabili osservabili tramite misure dirette sul materiale.

3.2 Principio di equivalenza della deformazione

Il principio di equivalenza della deformazione [Lemaitre, 1971], [Simo and Ortis, 1987], [Ju, 1989] postula che: *“La deformazione associata ad uno stato di danneggiamento soggetto ad una tensione applicata $\boldsymbol{\sigma}$ è equivalente ad uno stato privo di danneggiamento, e sottoposto alla tensione effettiva $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ”*:

$$\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, D) = \bar{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, 0). \quad (3.25)$$

I due stati di deformazione nella (3.25) si riferiscono a due configurazioni distinte. Eguagliando la forza agente nelle due configurazioni si ottiene:

$$\frac{\bar{\mathbb{E}}}{\underline{\mathbb{E}}} = \frac{\bar{A}}{A} = (\underline{\mathbb{I}} - \underline{\mathbb{D}}), \quad (3.26)$$

pertanto il tensore di elasticità danneggiato $\bar{\mathbb{E}}$ si può scrivere come:

$$\bar{\mathbb{E}} = (\underline{\mathbb{I}} - \underline{\mathbb{D}})\underline{\mathbb{E}}. \quad (3.27)$$

Grazie alle ipotesi, introdotte con il principio di equivalenza della deformazione, la variabile di danneggiamento $\underline{\mathbb{D}}$ assume una forma semplificata, che dipende dal prodotto tra il tensore di elasticità danneggiato ed il tensore di elasticità effettivo:

$$\underline{\mathbb{D}} = \underline{\mathbb{I}} - \bar{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{E}}^{-1}. \quad (3.28)$$

Di seguito si riportano le equazioni di legame nelle configurazioni danneggiata ed effettiva:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \underline{\mathbb{E}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \\ \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbb{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Banalmente le corrispondenti equazioni per le deformazioni sono:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e &= \underline{\mathbb{E}}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \bar{\mathbb{E}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

esse devono rispettare la condizione di congruenza (3.31) tra le due configurazioni

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (3.31)$$

La (3.31) permette le seguenti equazioni di legame, più immediate, tra le tensioni nelle configurazioni effettiva e reale:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathbb{E}}\bar{\mathbb{E}}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.32)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\underline{\mathbb{I}} - \underline{\mathbb{D}}) : \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.33)$$

La (3.33) esprime una dipendenza lineare tra le variabili $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e D . Inoltre essa esprime la tensione che dovrebbe essere applicata al materiale nella configurazione effettiva, per avere in quest'ultima lo stesso stato deformativo del materiale nella configurazione danneggiata.

3.3 Principio di equivalenza della tensione

Il principio di equivalenza della tensione postula che: *“La tensione associata ad uno stato di danneggiamento sotto una deformazione applicata ε è equivalente ad uno stato privo di danneggiamento, e soggetto alla deformazione effettiva $\bar{\varepsilon}$ ”*:

$$\sigma(\varepsilon, D) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}, 0). \quad (3.34)$$

Le formule di legame sono analoghe a quelle ottenute con il principio di equivalenza della deformazione

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \underline{\mathbb{E}} : \bar{\varepsilon} \\ \sigma &= \bar{\underline{\mathbb{E}}} : \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Imponendo una condizione di equilibrio tra le tensioni si perviene all’espressione che correla le deformazioni tra le configurazioni danneggiata ed effettiva:

$$\bar{\varepsilon} = \underline{\mathbb{E}}^{-1} \bar{\underline{\mathbb{E}}} : \varepsilon = (\underline{\mathbb{I}} - \underline{\mathbb{D}}) : \varepsilon. \quad (3.36)$$

3.4 Principio di equivalenza dell’energia elastica

Passando dalla configurazione effettiva a quella danneggiata, i precedenti due principi di equivalenza postulano ognuno la conservazione di una diversa variabile osservabile. Invece il principio di equivalenza dell’energia elastica considera l’eguaglianza in termini energetici, che interessa contemporaneamente gli stati di tensione e di deformazione. Tale condizione risulta molto realistica dal punto di vista fisico. Questo principio postula che: *“L’energia elastica complementare associata ad uno stato di danneggiamento soggetto alla tensione σ e alla deformazione applicata ε è equivalente all’energia elastica complementare associata ad uno stato privo di danneggiamento e sottoposto alla tensione effettiva $\bar{\sigma}$ e alla deformazione effettiva $\bar{\varepsilon}$ ”* [Cordebois and Sidoroff, 1979]:

$$\phi(\sigma, D) = \bar{\phi}(\bar{\sigma}, 0). \quad (3.37)$$

L’espressione dell’energia elastica nella configurazione effettiva è ottenuta considerando il materiale privo di danneggiamento, e sostituendo le variabili attuali (ε, σ) con le corrispondenti quantità della configurazione effettiva $(\bar{\varepsilon}, \bar{\sigma})$:

$$\phi(\sigma, D) = \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon^e = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}^e = \bar{\phi}(\bar{\sigma}, 0). \quad (3.38)$$

Le equazioni costitutive e di legame tra le due configurazioni sono le seguenti:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbb{E}}(\mathbb{D}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbb{E}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (3.39)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{M} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.40)$$

In esse \mathbb{M} rappresenta il tensore di danneggiamento effettivo. Le (3.39), (3.40) permettono di esprimere l'energia elastica nella configurazione effettiva come segue:

$$\bar{\phi}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, 0) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : [\bar{\mathbb{E}}_{D=0}]^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M}^{-T} : [\bar{\mathbb{E}}_{D=0}]^{-1} : \mathbb{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{D}). \quad (3.41)$$

Dualmente l'energia complementare nella configurazione attuale è la seguente:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbb{D}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\mathbb{E}}(\mathbb{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.42)$$

da cui:

$$\bar{\mathbb{E}}^{-1} = \mathbb{M}^{-T} : \bar{\mathbb{E}}_{D=0} : \mathbb{M}^{-1} \quad (3.43)$$

$$\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{M}^T : \bar{\mathbb{E}}_{D=0} : \mathbb{M} \quad (3.44)$$

Il legame tra il tensore di elasticità danneggiato $\bar{\mathbb{E}}$ ed il tensore di danneggiamento \mathbb{D} è di grado superiore al primo, infatti considerando per \mathbb{M} la seguente espressione:

$$\mathbb{M} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) \quad (3.45)$$

si ha che:

$$\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{I} - \bar{\mathbb{E}}^{\frac{1}{2}} : \bar{\mathbb{E}}_{D=0}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

$$\bar{\mathbb{E}} = (\mathbb{I} - \mathbb{D})^T : \bar{\mathbb{E}}_{D=0} : (\mathbb{I} - \mathbb{D}). \quad (3.47)$$

3.5 Alcuni richiami di termodinamica

I materiali sottoposti a storie di carico evolutive sono sottoposti agli effetti contemporanei del danneggiamento e della plasticità. Pertanto sono state sviluppate delle formulazioni teoriche in grado di simulare il comportamento dei materiali attraverso l'interazione tra i due fenomeni.

I fenomeni di danneggiamento e di plasticità, che interessano i materiali, sono sempre irreversibili, essi modificano la struttura interna del materiale, la quale nel corso della sua evoluzione attraverso consecutive configurazioni di equilibrio, rispettando sempre i primi due principi della termodinamica.

3.5 Alcuni richiami di termodinamica

Nel seguito del paragrafo si farà implicitamente riferimento al materiale di un corpo B , che occupa un volume V dello spazio.

Con il primo principio della termodinamica si postula la conservazione dell'energia. Esso richiede che ogni elemento infinitesimo di volume rispetti l'equazione seguente:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \operatorname{div} \mathbf{q}, \quad (3.48)$$

nella quale ρ è la densità per unità di volume del corpo in esame, u è l'energia specifica interna, r è l'energia di radiazione per unità di volume, \mathbf{q} è la quantità di calore per unità di superficie che attraversa il contorno del corpo che evolve in senso termodinamico, $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore di Cauchy, ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il tensore delle deformazioni.

Il secondo principio della termodinamica impone l'accrescimento di entropia per unità di temperatura. La sua formulazione è la seguente:

$$\rho \left(T \cdot \frac{ds}{dt} - \dot{u} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.49)$$

nella quale T è la temperatura del sistema, ed s è l'entropia specifica per unità di massa. Sovente il secondo principio della termodinamica viene espresso nella forma più comune della *diseguaglianza di Clausius-Duhem*:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\frac{d\psi}{dt} + s \cdot \frac{dT}{dt} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.50)$$

in cui figura l'energia libera specifica ψ . L'espressione di Clausius-Duhem nel caso di piccole deformazioni assume la forma seguente:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\dot{\psi} + s \cdot \dot{T} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0. \quad (3.51)$$

Si osserva che lo stato termodinamico di un materiale in un qualsiasi suo punto, e in un qualsiasi istante dell'evoluzione del sistema in studio, dipende univocamente dai valori numerici di un certo numero di variabili, che prendono il nome di “*variabili di stato*” o “*variabili termodinamicamente indipendenti*”. La precisione, con la quale il fenomeno è descritto, dipende dalla scelta di tali variabili, e il processo di trasformazione modellato si dice termodinamicamente consistente se in qualsiasi istante dell'evoluzione del materiale la disuguaglianza di Clausius-Duhem risulta soddisfatta. Sono considerate variabili di stato sia le variabili osservabili, e quindi direttamente misurabili, che le variabili interne.

3.5.1 Le variabili interne

Mentre nei fenomeni reversibili lo stato attuale del materiale dipende unicamente dalle variabili osservabili, nei fenomeni irreversibili le variabili osservabili non risultano più sufficienti per una modellazione accurata. In questo caso le imperfezioni presenti allo stato attuale dipendono dalle condizioni di carico e di autotensione che in passato hanno interessato il materiale del corpo in studio. Per mettere in conto la dipendenza dalla storia dei fenomeni irreversibili si introducono “*le variabili interne*”, delle quali bisogna conoscere il valore numerico in ciascun istante della trasformazione del materiale.

Nella plasticità e nella viscoplasticità le deformazioni devono essere comprensive delle deformazioni plastiche o viscoplastiche. In particolare, nel caso di piccole deformazioni si può porre:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3.52)$$

nella quale per ogni istante della trasformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta la deformazione totale, che è somma delle due aliquote $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, che rappresentano rispettivamente la deformazione elastica completamente recuperabile allo scarico, e la deformazione plastica non recuperabile allo scarico.

Lo studio del danneggiamento dei materiali richiede l'introduzione di variabili interne che, pur non essendo misurabili direttamente, rappresentano adeguatamente tutte le caratteristiche dello stato interno del materiale come le dislocazioni e le cavità. La scelta delle variabili interne, da introdurre nella formulazione, dipende dal fenomeno che si vuole modellare. Esse possono essere di natura scalare o tensoriale e solitamente sono indicate con V_1, V_2, \dots, V_k .

3.5.2 Il potenziale termodinamico

I fenomeni irreversibili presenti in natura provocano delle trasformazioni che, modificando per sempre la struttura interna del materiale interessato, lo fanno passare attraverso successive configurazioni di equilibrio termodinamico, in ciascuna delle quali devono essere soddisfatte le leggi fondamentali.

L'esigenza di formulare adeguate leggi di stato sui materiali sottoposti a fenomeni dissipativi richiede di postulare l'esistenza di un potenziale termodinamico, dal quale le leggi di stato sono ricavate attraverso variabili termodinamicamente indipendenti. L'esistenza del potenziale termodinamico è postulata grazie al soddisfacimento di alcune ipotesi essenziali. Tra queste ipotesi è di fondamentale importanza la disuguaglianza di Clausius-Duhem. Essa rappresenta una condizione di stabilità termodi-

namica, che deve essere soddisfatta per ogni configurazione intermedia, di equilibrio, di qualsiasi corpo, che evolve in senso termodinamico. Per soddisfare la condizione di stabilità termodinamica viene definita una funzione a valori scalari, concava rispetto alla temperatura, e convessa rispetto alle altre variabili. Tale funzione è l'*energia potenziale specifica libera* ψ , che è funzione di tutte le variabili osservabili ed interne del sistema.

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\varepsilon}^p, V_k) \quad (3.53)$$

Tenendo conto che le deformazioni totali si possono esprimere come somma delle deformazioni elastiche e delle deformazioni plastiche, l'energia potenziale specifica libera si può scrivere come:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, V_k) \quad (3.54)$$

per cui

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (3.55)$$

Quest'ultima permette di riscrivere la disuguaglianza di Clausius-Duhem nel modo seguente:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p - \varrho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \cdot \dot{T} - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla \underline{T} \geq 0. \quad (3.56)$$

Considerando per un generico materiale, all'interno del suo dominio, un campo di deformazioni elastiche a temperatura costante ed uniforme, per il quale siano costanti anche le deformazioni plastiche e le variabili interne, la (3.56) permette di scrivere la seguente equazione:

$$\boldsymbol{\sigma} - \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = 0, \quad (3.57)$$

che per la (3.55) diventa

$$\boldsymbol{\sigma} = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}. \quad (3.58)$$

Quest'ultima permette di osservare che la tensione $\boldsymbol{\sigma}$ è una variabile associata in maniera indipendente alla deformazione elastica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, alla deformazione totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, e alla deformazione plastica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Analogamente si possono definire le forze termodinamiche associate alle variabili interne attraverso la seguente espressione:

$$A_k = \varrho \left(\frac{\partial \psi}{\partial V_k} \right) \quad k = 1, \dots, n \quad (3.59)$$

Variabili come la tensione $\boldsymbol{\sigma}$ e le forze termodinamiche A_k costituiscono le variabili associate. Il vettore, che ha per componenti le variabili associate, è il gradiente della

funzione ψ nello spazio delle variabili interne. Tale vettore è normale alla superficie $\psi = \text{cost}$.

La descrizione dell'evoluzione dissipativa del materiale e della variazione delle variabili interne richiede un formalismo matematico complementare. Tale formalismo è ottenibile per mezzo del potenziale di dissipazione.

Considerando una deformazione termica a deformazione plastica e variabili interne costanti, e temperatura uniforme, dalla (3.55) e per l'arbitrarietà della temperatura consegue:

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}. \quad (3.60)$$

In tal caso la disuguaglianza di Clausius Duhem si scrive come:

$$\phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{T}}} \geq 0, \quad (3.61)$$

essa esprime l'incremento di dissipazione come somma di due termini

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (3.62)$$

Il primo termine

$$\phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k \quad (3.63)$$

è chiamato *dissipazione intrinseca*, e consiste nella somma della dissipazione plastica e della dissipazione associata all'evoluzione delle variabili interne V_k . Il secondo termine

$$\phi_2 = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{T}}} \quad (3.64)$$

rappresenta la dissipazione termica dovuta alla conduzione del calore.

3.5.3 Il potenziale di dissipazione e le leggi di stato

Il potenziale di dissipazione è una funzione scalare, continua e convessa delle variabili di flusso:

$$\phi\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\mathbf{q}}{T}\right). \quad (3.65)$$

Utilizzando la proprietà di normalità, esso permette di definire tre leggi complementari di dissipazione. Tali leggi sono riportate di seguito:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}, \quad (3.66a)$$

$$A_k = -\frac{\partial\phi}{\partial\dot{V}_k}, \quad (3.66b)$$

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{T}}} = -\frac{\partial\phi}{\partial\frac{\mathbf{q}}{T}}. \quad (3.66c)$$

3.5 Alcuni richiami di termodinamica

Applicando la trasformata di *Legendre - Frenchel* si ottiene il potenziale di dissipazione $\phi^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k, \nabla\mathbb{T})$, duale di $\phi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\mathbf{q}}{T})$.

Se la funzione ϕ^* è differenziabile, la proprietà di normalità si conserva per le variabili $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, $-\dot{V}_k$, $-\frac{\mathbf{q}}{T}$, e le leggi complementari di evoluzione si possono scrivere come segue:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\partial\phi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{legge di plasticità} \quad (3.67a)$$

$$\dot{V}_k = -\frac{\partial\phi^*}{\partial A_k} \quad \text{legge di evoluzione delle variabili interne} \quad (3.67b)$$

$$\frac{\mathbf{q}}{T} = -\frac{\partial\phi^*}{\partial\nabla\mathbb{T}} \quad \text{legge di Fourier della termostatica.} \quad (3.67c)$$

Affinchè i potenziali ϕ e ϕ^* soddisfino il secondo principio della termodinamica, devono anche essere funzioni convesse non negative e nulle all'origine.

I materiali che soddisfano la seguente legge:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{\partial\phi^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.68)$$

si definiscono *materiali standard*. Per questi materiali la condizione di normalità è sufficiente a soddisfare il secondo principio della termodinamica.

La determinazione di adeguate espressioni analitiche per il potenziale energetico ψ , e per i potenziali di dissipazione ϕ e ϕ^* richiede due semplificazioni. La prima consiste nell'adottare le relazioni di simmetria di *Onsagen*, con le quali la funzione ϕ^* , ad esempio, assume una forma quadratica in termini di variabili duali, e definita positiva:

$$\phi^* = \frac{1}{2} \cdot C_{\alpha\beta}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e, T, V_k) \cdot A_\alpha \cdot A_\beta \quad (C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}). \quad (3.69)$$

La seconda semplificazione consiste nell'assumere un disaccoppiamento tra le dissipazioni intrinseca e termica. In questo modo il potenziale di dissipazione si studia come la somma di due termini, uno dipendente dalle variabili $\boldsymbol{\sigma}$ e A_k , e l'altro dalla variabile $\nabla\mathbb{T}$:

$$\phi^* = \phi_1^*(\boldsymbol{\sigma}, A_k) + \phi_2^+(\nabla\mathbb{T}). \quad (3.70)$$

L'equazione (3.70) garantisce il soddisfacimento del secondo principio della termodinamica attraverso le seguenti due disuguaglianze:

$$\phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - A_k \dot{V}_k = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial\phi_1^*}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + A_k : \frac{\partial\phi_1^*}{\partial A_k} \geq 0 \quad (3.71a)$$

$$\phi_2 = -\nabla\mathbb{T} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} = -\nabla\mathbb{T} \cdot \frac{\partial\phi_2^*}{\partial(\nabla\mathbb{T})} \geq 0. \quad (3.71b)$$

3.6 Variabili di danneggiamento e plasticità

I materiali compositi a matrice polimerica esibiscono un comportamento meccanico di tipo quasi fragile. Coerentemente con la definizione di danneggiamento dovuta a Kachanov-Robotnov si assume che la densità locale dei difetti sia uniformemente distribuita all'interno di un elemento rappresentativo di volume. In un processo di carico del materiale composito l'energia totale è dissipata nella formazione di superfici di rottura interne e nella evoluzione di microfratture esistenti, che avvengono in prossimità delle zone di concentrazione delle tensioni, dove si osserva un incremento delle microfratture esistenti ed una riduzione dell'area resistente del materiale. In particolare nel caso dei materiali compositi a fibra corta una parte dell'energia è spesa nel distacco della fibre dalla matrice e quindi nella perdita di adesione all'interfaccia tra i due materiali. Tale perdita di adesione provoca la formazione di vuoti, con conseguente concentrazione delle tensioni e successiva enucleazione del difetto.

La formazione e la crescita dei difetti interni dipendono dalle proprietà meccaniche del materiale composito. Da un punto di vista meramente matematico tali proprietà sono caratterizzate dalle variabili di stato interne, la cui scelta e i cui valori numerici dipendono dal materiale e dai fenomeni dissipativi che si intende descrivere.

Nell'ambito del presente lavoro di tesi, per via delle caratteristiche dei materiali compositi a fibra corta, è stato privilegiato un modello di comportamento di tipo isotropo. Per la descrizione del danneggiamento le variabili impiegate sono:

- una variabile scalare D , rappresentativa di uno stato isotropo di danneggiamento, e dell'incremento dei difetti per unità di volume del materiale;
- uno scalare δ , che definisce l'ampiezza e l'evoluzione del dominio di danneggiamento.

Coerentemente con il modello isotropo, l'evoluzione del danneggiamento all'interno di una lamina a fibre corte può considerarsi uguale in tutte le direzioni all'interno del piano stesso della lamina. La variabile di danneggiamento D assume valore compreso tra zero ed uno. In tale ambito il tensore di danneggiamento effettivo degenera in uno scalare:

$$M(D) = \frac{1}{1 - D}. \quad (3.72)$$

Esso assume valore 1 nel caso di materiale privo di danneggiamento, e tende asintoticamente ad infinito man mano che la variabile D tende verso l'unità. Il passaggio dallo stato tensionale nella configurazione danneggiata a quello nella configurazione

effettiva si esprime pertanto come:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (3.73)$$

La rigidezza di un materiale sottoposto a danneggiamento non si mantiene costante, ma cambia durante la degradazione dello stesso materiale. In generale il legame forza-spostamento di un materiale sottoposto a danneggiamento presenta un limite lineare. Per passi di carico successivi i valori di rigidezza tendono a diminuire. La rigidezza attuale di un materiale sottoposto a danneggiamento è matematicamente esprimibile per mezzo del principio di equivalenza elastica. I due membri dell'equazione (3.37) devono essere esplicitati in funzione delle tensioni e del tensore di elasticità relativi alla configurazione danneggiata e vergine:

$$\phi(\sigma, D) = \frac{1}{2} \sigma : (\bar{\mathbb{E}})^{-1} : \sigma \quad (3.74a)$$

$$\bar{\phi}(\bar{\sigma}, 0) = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : (\mathbb{E})^{-1} : \bar{\sigma}. \quad (3.74b)$$

Utilizzando le (3.74a), (3.74b) la (3.37) diventa dunque:

$$\frac{1}{2} \sigma : (\bar{\mathbb{E}})^{-1} : \sigma = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : (\mathbb{E})^{-1} : \bar{\sigma}, \quad (3.75)$$

che per la (3.23) assume la forma generale seguente:

$$(\bar{\mathbb{E}})^{-1} = \mathbb{M}^{-T} : (\mathbb{E})^{-1} : \mathbb{M}^{-1}, \quad (3.76)$$

dalla quale si ricave in maniera immediata l'espressione del *tensore attuale di elasticità danneggiato* $\bar{\mathbb{E}}$:

$$\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{M}^T : \mathbb{E} : \mathbb{M}. \quad (3.77)$$

In particolare utilizzando il modello di danneggiamento scalare, isotropo l'equazione (3.77) diventa:

$$\bar{\mathbb{E}} = (1 - D)^2 \cdot \mathbb{E}. \quad (3.78)$$

Si osserva quindi che l'espressione del tensore di elasticità danneggiato dipende dalla variabile di danneggiamento D . Pertanto, nel corso della storia evolutiva della degradazione del materiale, una qualsiasi variazione della variabile scalare di danneggiamento modifica la rigidezza attuale del materiale. La dipendenza del tensore attuale di elasticità danneggiato $\bar{\mathbb{E}}$ dal danneggiamento D è di tipo quadratico, pertanto l'evoluzione del danneggiamento causa una forte variazione della rigidezza del materiale.

Nella descrizione del comportamento plastico del materiale le variabili utilizzate sono:

- un tensore simmetrico del secondo ordine $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, che tiene conto delle deformazioni plastiche irreversibili, accumulate durante il processo di carico;
- un parametro scalare p , che rappresenta la deformazione irreversibile dovuta all'incrudimento del materiale, e che definisce l'ampiezza e l'evoluzione del dominio plastico.

Esprimendo il principio di deformazione dell'energia elastica in funzione delle variabili di deformazione, si risale alla relazione esistente tra i tensori di deformazione nelle configurazioni effettiva e danneggiata. In particolare enunciando il principio di equivalenza dell'energia elastica nel modo seguente:

“l'energia elastica del materiale danneggiato ψ è uguale a quella di un materiale vergine $\bar{\psi}$, se si sostituisce la deformazione elastica, agente nella configurazione danneggiata, con la corrispondente quantità agente nella configurazione effettiva.”

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \underline{\mathbb{D}}) = \bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, 0), \quad (3.79)$$

i due membri della (3.79) diventano:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \underline{\mathbb{D}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \underline{\mathbb{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.80a)$$

$$\bar{\psi}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, 0) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underline{\mathbb{E}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e. \quad (3.80b)$$

Riscrivendo l'uguaglianza (3.37) in virtù delle espressioni (3.80a), (3.80b) e tenendo conto della (3.77) all'interno della (3.80a) si ottiene l'uguaglianza seguente:

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (\underline{\mathbb{M}}^T : \underline{\mathbb{E}} : \underline{\mathbb{M}}) : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : \underline{\mathbb{E}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \quad (3.81)$$

che per la simmetria del tensore delle deformazioni elastiche implica:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \underline{\mathbb{M}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (3.82)$$

Infine la decomposizione (3.52), possibile nell'ipotesi di piccole deformazioni, consente, attraverso la (3.82), le seguenti espressioni di legame tra le deformazioni totali e plastiche nelle configurazioni danneggiata ed effettiva:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbb{M}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.83a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \underline{\mathbb{M}} : \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (3.83b)$$

3.7 Modello Costitutivo

Il modello costitutivo utilizzato nel presente lavoro è un modello anelastico, coerente con la teoria del danneggiamento accoppiata ai fenomeni elastoplastici.

Il processo anelastico è modellato attraverso un insieme di variabili interne, rappresentative del danneggiamento e del comportamento plastico irreversibile. Si ipotizza che il processo evolutivo del materiale sia di tipo stazionario, e che la soluzione termodinamica possa essere ottenuta per mezzo del funzionale dell'energia libera di Helmholtz. Si postula che l'energia libera di Helmholtz sia somma di due termini, l'energia di deformazione $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, D)$ e l'energia di dissipazione $\pi(p, \delta)$:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, D, \delta) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, D) + \pi(p, \delta). \quad (3.84)$$

Per l'energia di deformazione si assume l'espressione:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, D) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \bar{\mathbb{E}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (3.85)$$

mentre l'energia di dissipazione $\pi(p, \delta)$ è separato in due termini rappresentativi rispettivamente dell'evoluzione della superficie di danneggiamento e di plasticità:

$$\pi(p, \delta) = \gamma(\delta) + R(p). \quad (3.86)$$

Nell'ambito di questo lavoro di tesi sono state postulate le espressioni seguenti per i termini additivi dell'energia di dissipazione:

$$\gamma(\delta) = K_d \cdot \delta \quad (3.87a)$$

$$R(p) = K_p \cdot p, \quad (3.87b)$$

nelle quali K_d e K_p sono dei parametri materiali. Le forze coniugate in senso termodinamico, associate alle variabili cinematiche $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, D, \delta)$ sono:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbb{E}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.88a)$$

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \frac{\partial \bar{\mathbb{E}}}{\partial D} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.88b)$$

$$R = -\frac{\partial \psi}{\partial p} = K_p \cdot p \quad (3.88c)$$

$$\gamma = -\frac{\partial \psi}{\partial \delta} = K_d \cdot \delta \quad (3.88d)$$

Considerando il principio della massima entropia, ed utilizzando il metodo di minimizzazione di Lagrange si definiscono le equazioni di evoluzione come segue:

$$\begin{aligned}\bar{\dot{\epsilon}}^p &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}}; & \dot{p} &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial g^p}{\partial R}; \\ \dot{D} &= \dot{\lambda}^d \frac{\partial g^d}{\partial Y}; & \dot{\delta} &= \dot{\lambda}^d \frac{\partial g^d}{\partial \gamma}.\end{aligned}\tag{3.89}$$

In esse $\dot{\lambda}^d$ e $\dot{\lambda}^p$ sono rispettivamente i moltiplicatori del danneggiamento e delle deformazioni irreversibili, mentre g^d e g^p sono le superfici di danneggiamento e di plasticità. Alle equazioni di evoluzione è richiesto il rispetto, in ogni istante del processo evolutivo, delle condizioni di Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^p &\geq 0; & \dot{\lambda}^d &\geq 0; \\ g^p &\leq 0; & g^d &\leq 0; \\ g^p \cdot \dot{\lambda}^p &= 0; & g^d \cdot \dot{\lambda}^d &= 0.\end{aligned}\tag{3.90}$$

3.8 Superficie di danneggiamento

Per ogni materiale è possibile definire un dominio di danneggiamento, che separa la parte elastica dalla parte anelastica. Quando il materiale si trova all'interno di tale dominio, rimane nella condizione iniziale di danneggiamento, mentre quando, superato un certo livello di carico, il suo stato termodinamico è esterno a tale dominio, subisce una variazione delle proprietà elastiche.

Il dominio di danneggiamento g^d è rappresentato con una superficie convessa nello spazio delle variabili termodinamiche Y e γ duali, in senso termodinamico, alle variabili di danneggiamento D e δ :

$$g^d = \{Y, \gamma : g^d(Y, \gamma) \leq 0\}.\tag{3.91}$$

Il dominio di danneggiamento g^d dipende dalle caratteristiche proprie del materiale, e dalla sua funzione di incrudimento, che definisce l'ampiezza e l'evoluzione del danneggiamento.

La condizione iniziale di g^d è proporzionale alla soglia di danneggiamento γ_0 , al di sotto della quale la crescita delle microfratture interne al materiale è trascurabile. La superficie di danneggiamento $g^d = 0$ separa la parte elastica dalla parte anelastica $g^d > 0$, nella quale il materiale è interessato da una evoluzione del danneggiamento.

Analiticamente il presente modello fa riferimento alla teoria dei funzionali convessi, pertanto la funzione g^d è convessa nello spazio definito dalle forze termodinamiche, e

la sua espressione è la seguente:

$$g^d = Y - (\gamma + \gamma_0), \quad (3.92)$$

nella quale l'espressione di γ è la (3.88d), ed il termine di incrudimento $(\gamma + \gamma_0)$ definisce l'evoluzione del dominio di danneggiamento. Quando il suo valore è pari ad uno il materiale si trova nella condizione di completo danneggiamento. Si assume inoltre che la variazione delle variabili cinematiche \dot{D} e $\dot{\delta}$ avvenga lungo la direzione normale ad un generico punto del dominio di danneggiamento.

3.9 Superficie di plasticità

Il dominio di plasticità è espresso nella configurazione effettiva del materiale e denota una dipendenza dalla variabile di danneggiamento, che mostra come i due fenomeni dissipativi risultino inevitabilmente accoppiati.

Il dominio plastico g^p è rappresentato da una superficie convessa nello spazio delle variabili effettive:

$$g^p = \{\bar{\sigma}, R : g^p(\bar{\sigma}, R) \leq 0\}. \quad (3.93)$$

Nella condizione iniziale l'ampiezza di g^p è proporzionale ad R_0 , che rappresenta la soglia al di sotto della quale le deformazioni irreversibili sono trascurabili. La superficie di plasticità $g^p = 0$ separa la parte elastica dalla parte anelastica $g^p > 0$, nella quale il materiale è interessato da un incrudimento plastico.

L'espressione analitica, adottata per g^p , fa riferimento al criterio di Hill nello spazio delle tensioni effettive:

$$g^p = g(\bar{\sigma}) - (R + R_0), \quad (3.94)$$

nella quale g è l'espressione di Hill nello spazio delle tensioni effettive, ed R è la funzione di incrudimento plastico, che definisce la variazione del dominio di plasticità. L'espressione esplicita della funzione g della (3.94) è la seguente:

$$g(\bar{\sigma}) = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{F_1^2} - \frac{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2}{F_1^2} + \frac{\bar{\sigma}_2^2}{F_2^2} + \frac{\bar{\sigma}_{12}^2}{F_{12}^2}. \quad (3.95)$$

I parametri F_1 , F_2 , F_{12} dipendono dalle proprietà meccaniche del materiale e dai valori di resistenza al limite elastico di una singola lamina nelle direzioni longitudinali, trasversale e tagliante. Tali valori sono reperibili in letteratura, oppure si possono determinare attraverso procedure sperimentali o analitiche.

L'accoppiamento tra danneggiamento e plasticità, in senso termodinamico, può essere simulato considerando le variabili di rappresentazione nel riferimento effettivo del materiale. Nell'evoluzione dei fenomeni anelastici la funzione di dissipazione coincide con la funzione di plasticità g^p , che risulta convessa nello spazio delle variabili effettive. Analogamente a quanto descritto per l'evoluzione dei fenomeni di danneggiamento, il flusso delle variabili cinematiche, associate ai fenomeni plastici irreversibili, è orientato secondo il vettore normale ad un punto del contorno di g^p .

L'evoluzione delle superfici di danneggiamento g^d e di plasticità g^p deve risultare sempre consistente con le condizioni al contorno di Kuhn-Tucker (3.90).

Capitolo 4

Algoritmo di soluzione ed implementazione agli EF del modello

4.1 Metodi numerici nello studio del danneggiamento

NELLA maggior parte dei casi il danneggiamento non si verifica indipendentemente dagli altri aspetti fenomenologici che riguardano il comportamento di un materiale. In particolare nello studio dei materiali compositi il danneggiamento è accompagnato da effetti viscosi e plastici, pertanto le indagini numeriche devono seguire un approccio accoppiato. Sia il danneggiamento che le manifestazioni visco-plastiche sono fenomeni non lineari. Pertanto le equazioni, che in generale governano un problema accoppiato, sono affette da elevate non linearità. Problemi di questo tipo ammettono soluzioni in forma chiusa soltanto in molto particolari, che prevedono drastiche approssimazioni, necessarie per semplificare il problema. Pertanto la previsione degli effetti accoppiati del danneggiamento e dei fenomeni plastici e/o viscosi richiede il ricorso a tecniche di soluzioni numeriche. In tale ambito il metodo degli elementi finiti fornisce uno strumento potente per risolvere secondo un approccio variazionale equazioni differenziali anche di tipo non-lineare.

In generale il metodo degli elementi finiti consiste nella discretizzazione della geometria del modello studiato attraverso una mesh di sottodomini, noti come *elementi finiti*. La mesh deve essere consistente con le funzioni di forma utilizzate nelle

approssimazioni del campo di spostamenti, nonchè con i di libertà del modello stesso.

Nel metodo degli elementi finiti lo spostamento di un qualsiasi nodo della mesh è un'approssimazione della soluzione reale, che scaturisce dalla seguente espressione generale:

$$\{u\} = [N]\{U^e\}. \quad (4.1)$$

Nella (4.1) $\{u\}$ consiste nel vettore delle componenti di spostamento dei nodi, $[N]$ è la matrice delle funzioni di forma, ed $\{U^e\}$ rappresenta il vettore degli spostamenti incogniti relativi ad un solo elemento finito. Il vettore degli spostamenti nodali $\{U\}$ dell'intera struttura assembla i vettori $\{U^e\}$ di tutti gli elementi finiti costituenti la mesh. Nei problemi bidimensionali ad n nodi le componenti del vettore $\{U^e\}$ sono $2n$, mentre diventano $3n$ nei problemi tridimensionali. Gli spostamenti nodali permettono di risalire alle componenti di deformazioni ($\{\varepsilon\}$), calcolate applicando la matrice degli operatori differenziali $[D]$ e passando per le funzioni di forma:

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U^e\}, \quad (4.2)$$

mentre le corrispondenti tensioni ($\{\sigma\}$) sono legate alle deformazioni dalla matrice di legame ($[C]$):

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}. \quad (4.3)$$

È importante notare che, nell'ambito delle teorie del danneggiamento, la matrice di legame ($[C]$) è strettamente dipendente dallo stato attuale del materiale e quindi dal campo degli spostamenti $\{u\}$.

La forma matriciale, globale delle equazioni di equilibrio, scaturisce dal principio dei lavori virtuali, ed ha la forma riportata di seguito:

$$\sum_{\text{elementi}} \int_{V^e} [N]^T [D]^T [C] [D] [N] \{U^e\} = \{F\}, \quad (4.4)$$

nella quale $\{F\}$ è il vettore dei carichi nodali applicati alla struttura. Pertanto con il metodo degli elementi finiti sono possibili soluzioni numeriche in termini di spostamenti, ottenibili attraverso l'equazione di equilibrio globale (4.4) unitamente alle condizioni iniziali e al contorno. L'equazione di compatibilità (4.2) permette la valutazione dello stato di deformazione, e l'equazione costitutiva (4.3) consente il calcolo dello stato tensionale su ciascun elemento finito.

Essenzialmente in letteratura esistono due approcci allo studio del danneggiamento, che consentono altrettanti tipi di modellazioni numeriche:

- le analisi disaccoppiate;
- le analisi accoppiate.

4.1.1 Approccio disaccoppiato

Con l'approccio disaccoppiato il calcolo prevede un'analisi strutturale classica, nella quale la valutazione del danneggiamento non risulta contestuale al calcolo delle deformazioni, ma avviene in fase di post-processing, e dipende dai risultati dell'analisi.

Verosimilmente a valle di un classico calcolo elastico, elasto-plastico o elasto-visco-plastico, sono valutate le quantità specifiche per il postprocessing, come l'energia di deformazione, l'energia di rilascio e le deformazioni plastiche al variare del tempo. Successivamente la legge di evoluzione del danneggiamento è valutata attraverso un'integrazione nel tempo, che consente di stimare anche l'istante ed il carico corrispondenti al danneggiamento critico. Questo metodo è applicabile sia in condizioni di carico monotone che cicliche. Varianti di tale approccio consentano l'integrazione della funzione di danneggiamento nel tempo per modelli di danneggiamento isotropo ed anisotropo. Inoltre la possibilità di valutare separatamente l'energia di deformazione, in funzione degli stati tensionali di trazione e di compressione, permette l'integrazione della legge di degradazione tenendo conto anche degli effetti di chiusura dei microdifetti.

Nelle analisi disaccoppiate in ambito elasto-plastico o elasto-visco-plastico classico, l'integrazione della legge di danneggiamento è espressa in funzione delle deformazioni plastiche totali o del numero di cicli di carico nel caso delle applicazioni riguardanti la fatica. In questo caso le possibili scelte per l'integrazione sono due. Per rendere il calcolo veloce si può effettuare la stima del danneggiamento soltanto nel punto in cui agisce il carico massimo. In questo caso si ammette implicitamente che il danneggiamento più elevato si verifica in corrispondenza del punto di applicazione del carico massimo. La seconda possibilità permette di estendere la procedura a tutti i punti di Gauss della struttura. In questo caso esiste il vantaggio di ottenere una mappa del campo di danneggiamento, e contestualmente lo svantaggio dovuto a tempi di calcolo molto lunghi.

I metodi afferenti all'approccio disaccoppiato si possono applicare addirittura ai casi di plasticità localizzata. In questo ambito le tensioni e le deformazioni dell'intera struttura sono calcolati nel post-processing di un'analisi elastica. I benefici di questa procedura permettono una riduzione dei tempi di calcolo nonché la possibilità di utilizzare i legami lineari per ottenere i campi di tensione a partire dalle deformazioni relative a varie condizioni di carico. In questo caso, essendo l'analisi eseguita in ambito elastico i risultati dipendono dal modulo di Young e del coefficiente di Poisson. Anche le quantità necessarie all'integrazione della legge temporale del danneggiamento sono valutate in fase di post-processing. In particolare alcune quantità tipiche di un'analisi

in ambito plastico, come la deformazione plastica totale, derivano da un'equivalenza energetica effettuata nei punti di concentrazione delle tensioni. Il danneggiamento valutato in fase di post-processing di un'analisi elastica risulta parzialmente governato da stati di tensione triassiali, che vengono valutati differentemente, utilizzando procedimenti noti in funzione del problema in esame.

Algoritmi specifici permettono di estendere la procedura disaccoppiata ai casi di analisi in presenza di fatica. In questo caso, un calcolo al passo per carichi periodici richiederebbe tempi di analisi proibitivi. Pertanto si adottano metodi semplificati, che permettono di saltare un certo numero di cicli. I calcoli prevedono l'esecuzione di analisi iterative fino alla formazione del primo danneggiamento. Per ognuna di queste analisi si calcola il ciclo di stabilizzazione, in corrispondenza del quale sono valutati i parametri necessari all'iterazione successiva. Nell'istante in cui si verifica il danneggiamento i parametri sono calcolati iterativamente, considerando il valore del danneggiamento costante per ogni ciclo di stabilizzazione.

4.1.2 Approccio accoppiato

Quando sono richieste analisi accurate, nonché in presenza di forti accoppiamenti tra deformazioni e danneggiamento, si rendono necessarie le analisi accoppiate, che consentono una stima accurata degli effetti viscosi, plastici, e del danneggiamento. In questi casi, per effetto dei fenomeni di redistribuzione, i valori delle tensioni crescono rapidamente e contestualmente al danneggiamento, accelerando la crisi progressiva del materiale e quindi della struttura. Il problema si affronta con codici di calcolo numerico avanzati, e le forti non linearità richiedono l'uso di algoritmi specifici, che risultano computazionalmente onerosi, e i risultati dipendono dalla mesh utilizzata. In questi casi le procedure di soluzione richiedono metodi iterativi, come quello di Newton-Raphson, nel quali si fa uso del concetto di matrice di rigidezza tangente, rappresentabile come degradazione della matrice elastica iniziale. Le procedure iterative consistono nella risoluzione delle equazioni di equilibrio in ciascun istante di riferimento pseudotemporale. Si ricava inizialmente la soluzione elastica del problema, utilizzando come matrice tangente consistente la matrice di rigidezza elastica effettiva. Successivamente si tiene conto delle leggi di stato e delle leggi di evoluzione attraverso un opportuno fattore correttivo, che viene applicato iterativamente fino al raggiungimento di una condizione di convergenza assegnata. Dopo ogni iterazione vengono aggiornati lo stato di deformazione totale, le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche, lo stato tensionale, le variabili termodinamiche interne, il danneggiamento e la matrice di rigidezza tangente. Le equazioni costitutive sono

integrate attraverso una procedura locale in corrispondenza dei punti di Gauss della struttura. Inoltre le leggi di evoluzione delle variabili interne sono derivate applicando la regola di normalità al potenziale totale, che deve tenere conto del criterio di snervamento, dell'hardening cinematico e dell'evoluzione del danneggiamento. In presenza di matrici di rigidezza tangenti non simmetriche la soluzione si ottiene con solutori specifici. In generale la complessità dei calcoli, afferenti ad un approccio accoppiato, richiede l'implementazione di opportune subroutine di personalizzazione, realizzate all'interno di codici di calcolo dall'architettura estendibile.

I fenomeni di instabilità numerica, dovuti al comportamento fortemente non lineare di alcuni materiali richiedono il ricorso agli schemi impliciti. I modelli impliciti permettono, ad esempio, di scambiare i modelli plastici, usati per simulazioni in presenza di basse temperature, con i modelli viscoplastici, utilizzati invece nelle simulazioni di condizioni di temperatura elevate. I modelli impliciti prevedono la risoluzione di un sistema di equazioni non lineari, accoppiate nelle variabili interne del problema. Sistemi di equazioni di questo tipo sono discretizzati nel tempo, e risolvibili con il cosiddetto metodo ϑ , che prevede una soluzione parametrizzata per valori del tempo compresi in un dato intervallo discreto.

Soluzioni specifiche per gli approcci accoppiati tengono conto degli effetti di chiusura di microdifetti. In tal caso un opportuno parametro materiale contribuisce a separare gli stati tensionali di trazione dagli stati tensionali di compressione. Anche nel caso di approcci accoppiati è utilizzabile il metodo ϑ per le procedure di integrazione.

I risultati di un'analisi accoppiata consentono di risalire ai valori di spostamento nodale per ciascun incremento di carico, mentre in corrispondenza di ogni punto di Gauss sono valutate le tensioni, e le variabili di stato interne, tra cui il danneggiamento. In generale il processo di fessurazione inizia quando il danneggiamento raggiunge il valore critico D_c , a partire dal quale le analisi sono conducibili in vari modi. I calcoli possono essere interrotti in corrispondenza dei punti di localizzazione del danneggiamento, oppure le analisi possono proseguire, utilizzando una mesh con dimensione degli elementi finiti particolareggiata per la zona di localizzazione. In questo caso sono possibili informazioni riguardanti la progressione della frattura in corrispondenza delle fasi di carico successive. Soluzioni di questo tipo dipendono fortemente dalla particolare mesh utilizzata e richiedono analisi di convergenza. Classi particolari di elementi finiti, arricchiti da funzioni, che tengono conto di discontinuità negli spostamenti, sono utilizzabili per rendere la direzione di propagazione della frattura indipendente dalla mesh utilizzata.

4.2 Algoritmo di soluzione

La procedura di soluzione, adottata nel modello agli elementi finiti implementato nell'ambito di questa tesi, fa uso delle equazioni costitutive ed evolutive, già discusse nel capitolo 3, basandosi sull'approccio accoppiato tra danneggiamento e plasticità. Le equazioni costitutive utilizzate sono richiamate di seguito:

EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbb{E}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p); \quad (4.5a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{M} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)}; \quad (4.5b)$$

$$Y = -\frac{\partial\psi}{\partial D} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \frac{\partial\bar{\mathbb{E}}}{\partial D} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p); \quad (4.5c)$$

$$R = -\frac{\partial\psi}{\partial p} = K_p \cdot p; \quad (4.5d)$$

$$\gamma = -\frac{\partial\psi}{\partial\delta} = K_d \cdot \delta. \quad (4.5e)$$

DOMINIO DI DANNEGGIAMENTO E PLASTICITA'

$$g^d = Y - (\gamma + \gamma_0); \quad (4.6a)$$

$$g^p = \frac{\bar{\sigma}_1^2}{F_1^2} - \frac{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2}{F_1^2} + \frac{\bar{\sigma}_2^2}{F_2^2} + \frac{\bar{\sigma}_{12}^2}{F_{12}^2} - (R + R_0). \quad (4.6b)$$

Nelle (4.6a), (4.6b) le espressioni di γ ed R sono espresse rispettivamente dalle equazioni (4.5e), (4.5d).

LEGGI DI EVOLUZIONE

$$\dot{\delta} = \dot{\lambda}^d \frac{\partial g^d}{\partial \gamma}; \quad \dot{D} = \dot{\lambda}^d \frac{\partial g^d}{\partial Y}; \quad (4.7a)$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g^p}{\partial R}; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}. \quad (4.7b)$$

Il modello utilizzato, per ogni incremento di carico, segue una procedura di integrazione locale delle equazioni differenziali, facendo uso di un algoritmo che, attraverso le condizioni di consistenza e la regola di normalità, consente di scrivere un sistema di equazioni nelle incognite $\dot{\lambda}^d$, $\dot{\lambda}^p$. Successivamente, le equazioni di evoluzione hanno consentito di aggiornare le variabili cinematiche di danneggiamento e di plasticità.

La soluzione delle equazioni (4.5) - (4.7) per un dato valore di deformazione totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ dipende dai valori attuali ed incrementali delle variabili di stato. Partendo da uno stato termodinamico equilibrato, si suppone che l'incremento di deformazione sia puramente elastico. Le condizioni di consistenza sono scritte considerando la variazioni dei domini di danneggiamento e di plasticità in funzione delle forze coniugate, associate alle variabili cinematiche. Successivamente l'incremento di deformazione totale è diviso in una parte elastica ed una plastica e la rigidità è ridotta in funzione dei contributi di danneggiamento e di plasticità. In particolare partendo da uno stato equilibrato generico n , che soddisfa le equazioni:

$$g_n^d(Y, \gamma) \leq 0 \quad g_n^p(\boldsymbol{\sigma}, R) \leq 0, \quad (4.8)$$

la soluzione termodinamica, al passo successivo $n + 1$, è ottenuta considerando l'intero incremento di deformazione $d\boldsymbol{\varepsilon}$ puramente elastico. Le corrispondenti equazioni evolutive del problema, in funzione della soluzione equilibrata al passo n , assumono la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + d\boldsymbol{\varepsilon}; \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + d\boldsymbol{\varepsilon}; \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \bar{\mathbb{E}} : d\boldsymbol{\varepsilon}; \quad (4.11)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{(1 - D_n)}; \quad (4.12)$$

$$Y_{n+1} = f(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, D_n); \quad (4.13)$$

$$\gamma_{n+1} = f(\delta_n); \quad (4.14)$$

$$R_{n+1} = f(p_n); \quad (4.15)$$

$$D_{n+1} = D_n; \quad (4.16)$$

$$\delta_{n+1}^p = \delta_n^p; \quad (4.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p; \quad (4.18)$$

$$p_{n+1} = p_n; \quad (4.19)$$

In generale si possono verificare quattro diverse condizioni:

$$g^d \geq 0; \quad g^p \geq 0; \quad (4.20)$$

$$g^d < 0; \quad g^p \geq 0; \quad (4.21)$$

$$g^d \geq 0; \quad g^p < 0; \quad (4.22)$$

$$g^d < 0; \quad g^p < 0, \quad (4.23)$$

corrispondenti ad altrettante diverse situazioni di espansione contemporanea o individuale dei domini di danneggiamento e plasticità. Con il verificarsi della (4.23) il materiale non subisce gli effetti del danneggiamento e della plasticità, ma rimane all'interno di uno stato puramente elastico. Lo stato finale del materiale deve, necessariamente, soddisfare le seguenti condizioni al contorno di evoluzione:

$$\dot{\lambda}^d \geq 0 \quad \dot{\lambda}^d \cdot g^d(Y_{n+1}, \gamma_{n+1}) \leq 0 \quad g^d(Y_{n+1}, \gamma_{n+1}) \leq 0; \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}^p \geq 0 \quad \dot{\lambda}^p \cdot g^p(\bar{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}) \leq 0 \quad g^p(\bar{\sigma}_{n+1}, R_{n+1}) \leq 0. \quad (4.25)$$

Per ciascun incremento di deformazione sono calcolati i moltiplicatori Lagrangiani $\dot{\lambda}^d$ e $\dot{\lambda}^p$ attraverso un'approssimazione al primo ordine delle funzioni g^d e g^p , che permette di scrivere le condizioni di consistenza $\dot{\lambda}^d = \dot{\lambda}^p = 0$ relative alla condizione di equilibrio $n + 1$:

$$g_{n+1}^d = \frac{\partial g^d}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial g^d}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = 0; \quad (4.26)$$

$$g_{n+1}^p = \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial g^p}{\partial R} \dot{R} = 0. \quad (4.27)$$

Gli incrementi delle forze termodinamiche ($Y, \gamma, \bar{\sigma}, R$) si possono esprimere in modo univoco attraverso i moltiplicatori di danneggiamento e di plasticità $\dot{\lambda}^d$ e $\dot{\lambda}^p$. In particolare, partendo da uno stato equilibrato n , ed utilizzando le equazioni costitutive (4.5) e le leggi di evoluzione (4.7), gli incrementi $\dot{Y}, \dot{\gamma}, \dot{\bar{\sigma}}, \dot{R}$ si esprimono come:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \frac{\partial Y}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial Y}{\partial \epsilon^p} \dot{\epsilon}^p \\ &= \frac{\partial Y}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{1}{1-D} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\lambda}^p; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial \delta} \frac{\partial g^d}{\partial \gamma} \dot{\lambda}^d; \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\sigma}} &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial D} \dot{D} \\ &= \frac{1}{1-D} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{1}{(1-D)^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\lambda}^p + \frac{\partial}{\partial} \left(\frac{\sigma}{1-D} \right) \frac{\partial g^d}{\partial Y} \dot{\lambda}^d;\end{aligned}\quad (4.30)$$

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial g^p}{\partial R} \dot{\lambda}^p. \quad (4.31)$$

Attraverso le condizioni di consistenza le equazioni (4.28) - (4.31) permettono di calcolare i moltiplicatori lagrangiani $\dot{\lambda}^d$, $\dot{\lambda}^p$ per mezzo di un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}^d \\ \dot{\lambda}^p \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{11} \\ -b_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

I termini della (4.32) sono i seguenti:

$$a_{11} = \frac{\partial g^d}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D} \frac{\partial g^d}{\partial Y} + \frac{\partial g^d}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \delta} \frac{\partial g^d}{\partial \gamma} \quad (4.33a)$$

$$a_{12} = \frac{1}{(1-D)} \frac{\partial g^d}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \quad (4.33b)$$

$$b_{11} = g_0^d + \frac{\partial g^d}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (4.33c)$$

$$a_{21} = \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{\sigma}{1-D} \right) \frac{\partial g^d}{\partial Y} \quad (4.33d)$$

$$a_{22} = \frac{1}{(1-D)^2} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial g^p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial g^p}{\partial R} \quad (4.33e)$$

$$b_{22} = g_0^p + \frac{1}{(1-D)} \frac{\partial g^p}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \quad (4.33f)$$

Il termine Δ rappresenta il determinante della matrice dei coefficienti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \quad (4.34)$$

La soluzione (4.32) corrisponde ad una espansione contemporanea dei domini di danneggiamento e di plasticità. Come casi particolari si possono verificare situazioni in cui l'espansione dei suddetti domini avviene in maniera disaccoppiata. Verosimilmente qualora ad un generico passo di carico l'incremento di deformazione totale determini l'espansione del solo dominio di danneggiamento, la soluzione locale, espressa in termini dei moltiplicatori lagrangiani è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^d &= \frac{-b_{11}}{a_{11}} \\ \dot{\lambda}^p &= 0.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Qualora, invece l'incremento di deformazione totale determini l'espansione del solo dominio di plasticità, la soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^d &= 0 \\ \dot{\lambda}^p &= \frac{-b_{22}}{a_{22}}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Le soluzioni (4.32), (4.35), (4.36) rappresentano un ritorno in fase elastica nella direzione normale al punto considerato, e descritta dal vettore gradiente corrispondente ai potenziali di evoluzione.

4.3 Implementazione agli elementi finiti

Le simulazioni numeriche hanno richiesto l'implementazione delle equazioni descritte nel paragrafo precedente per mezzo delle subroutines di customizzazione di un software commerciale agli elementi finiti. Tutte le simulazioni sono state eseguite utilizzando il codice agli elementi finiti ANSYS 10.0. Il software ANSYS possiede un'architettura aperta, che permette ampie estensioni e personalizzazioni, attraverso la creazione e l'implementazione di elementi finiti particolarizzati e modelli di comportamento dei materiali specifici. Per le implementazioni il linguaggio di programmazione richiesto è stato il FORTRAN, anche se alcuni pacchetti speciali consentono di creare un link con ambienti di sviluppo che lavorano nel linguaggio C++.

I numerosi operatori differenziali, nonché i prodotti scalari ed i prodotti tra matrici e vettori nelle equazioni del modello (4.5) - (4.33) hanno richiesto un'implementazione indiretta. In particolare con il software MAPLE sono state effettuate tutte le operazioni matematiche necessarie per esplicitare le equazioni del modello (4.5) - (4.33). Un'utilissima caratteristica di MAPLE, sfruttata in questo contesto, è stata la possibilità di esportare i risultati delle operazioni nella sintassi del linguaggio FORTRAN, per poi utilizzarle nelle istruzioni richieste dalle procedure proprie di ANSYS.

L'algoritmo di soluzione è risultato costituito da un codice principale (main) e da un certo numero di subroutines, chiamate di volta in volta attraverso le istruzioni del main. Il diagramma di flusso, riportato in figura 4.1, schematizza il codice principale dell'algoritmo.

Le analisi sono state eseguite utilizzando uno schema di soluzione che per ogni istante di riferimento pseudotemporale ha previsto un incremento di deformazione coerente con le condizioni al contorno del modello. Per ognuno di tali incrementi di deformazione sono stati eseguiti i passi previsti dall'algoritmo.

La prima parte delle istruzioni ha consistito nella dichiarazione di tutte le variabili necessarie, utilizzando la sintassi del FORTRAN. A seconda delle esigenze, le variabili sono state opportunamente definite come interi, reali o come array ad una o più dimensioni. I parametri materiali, il valore numerico del danneggiamento critico, ed i parametri necessari a definire le superfici di danneggiamento e di plasticità sono stati assegnati da un file di input esterno, pertanto la loro dichiarazione ha osservato la sintassi necessaria per il collegamento con l'input. Mediante opportune assegnazioni, le variabili interne sono state allocate nelle celle di memoria riservate da ANSYS alle variabili di stato. Coerentemente con l'ipotesi di stato piano di tensione, ed utilizzando una rappresentazione in forma contratta all'interno della procedura implementata in MAPLE, sono state definite le matrici associate al tensore di elasticità iniziale ed al tensore di elasticità danneggiato. Alla fase iniziale del codice hanno appartenuto anche le istruzioni di aggiornamento delle componenti di tensione attuale attraverso i valori correnti della matrice di elasticità danneggiata e dell'incremento di deformazione totale.

Dopo avere definito l'incremento di deformazione totale, sono stati calcolati i valori attuali delle superfici di danneggiamento e di plasticità. Le equazioni utilizzate sono state le (4.6), nelle quali i termini Y , γ , R e le componenti della tensione equivalente sono stati calcolati assegnando per valore tutti i parametri necessari a delle subroutine esterne al main. La condizione di espansione attuale è stata riconosciuta per mezzo di un gruppo di tre istruzioni condizionali, afferenti alle disequazioni (4.20) - (4.23). La condizione di uscita affermativa dalla prima istruzione condizionale corrisponde ad una espansione contemporanea dei domini di danneggiamento e di plasticità. Essa richiede il calcolo dei coefficienti (4.33) e la soluzione, in termini dei moltiplicatori di Lagrange, del sistema (4.32). Entrambi i passaggi sono stati eseguiti per mezzo di opportune subroutine.

I casi particolari di espansione individuale dei domini di danneggiamento o di plasticità si sono verificati come condizione di uscita positiva da altrettante istruzioni condizionali. Le espressioni (4.35), (4.36) hanno consentito di calcolare le corrispondenti soluzioni.

La condizione di uscita finale dal gruppo di istruzioni condizionali, coerentemente con le due disequazioni (4.23), è stata quella afferente ad una soluzione locale interna ai domini di danneggiamento e di plasticità, per la quale il materiale non subisce deformazioni permanenti né degradazioni.

Nel caso di espansioni positive i risultati relativi ai moltiplicatori di Lagrange sono stati utilizzati per aggiornare le variabili di stato, alle quali sono stati sommati gli incrementi (4.28) - (4.31). Il valore limite superiore del danneggiamento è stato

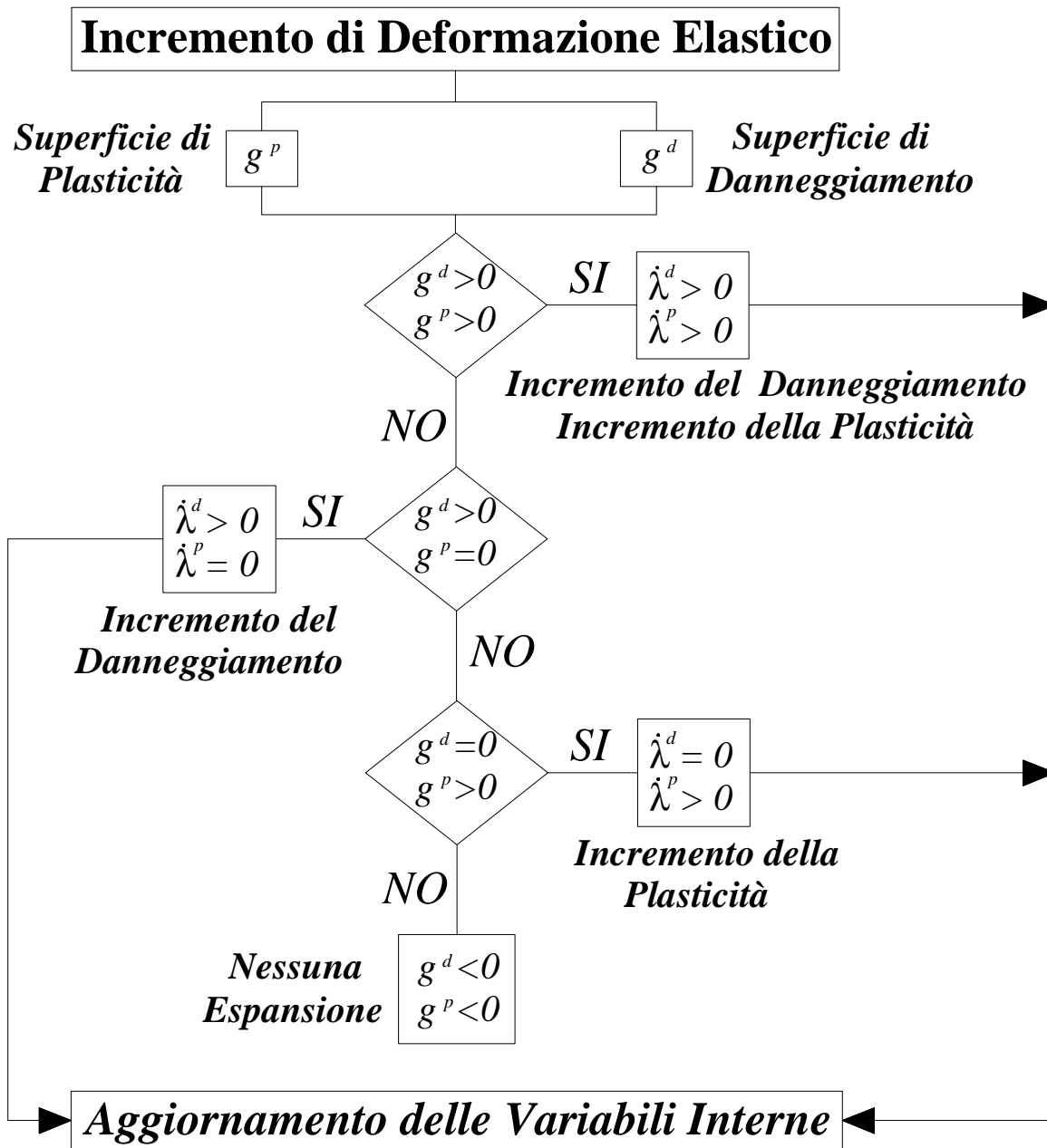


Figura 4.1: Diagramma di flusso dell'algoritmo di soluzione.

assunto pari al danneggiamento critico.

Le ultime operazioni previste per ciascun incremento di deformazione sono state l'allocazione dei valori delle variabili di stato nella struttura interna di ANSYS e l'aggiornamento della matrice di rigidezza tangente attraverso la matrice di elasticità danneggiata.

Tutte le simulazioni sono state eseguite su un modello di lastra bidimensionale, utilizzando come elemento finito utilizzato lo SHELL181, estratto dalla libreria di ANSYS.

SHELL181 è un elemento finito bidimensionale, adatto per l'analisi di piastre sottili o di moderato spessore, che si presta bene alla modellazione delle sezioni di lamine in materiale composito. Si tratta di un elemento finito impiegabile nelle analisi elastica lineare, elastoplastica e non lineare, ammette proprietà di materiale iperelastico e grandi deformazioni. Nell'analisi elastica lineare il materiale è impiegabile come isotropo, anisotropo ed elastico lineare ortotropo.

SHELL181 è un elemento finito bidimensionale a quattro nodi con sei gradi di libertà per ciascun nodo: traslazioni e rotazioni nelle tre direzioni dello spazio. La matrice di rigidezza dell'elemento è ottenuta attraverso una formulazione variazionale governata dalla teoria della deformabilità a taglio del primo ordine.

Nel dominio dell'elemento sono ammessi sia l'integrazione esatta che l'integrazione ridotta ai punti di Gauss.

Inoltre attivando un'opzione specifica lo SHELL181 può essere utilizzato per condurre analisi su membrane. In questa circostanza, che è quella utilizzata nell'ambito di questo lavoro, l'elemento non presenta rigidezza flessionale nè gradi di libertà rotazionali. Per di più in questo caso si utilizza soltanto un punto di integrazione nella direzione dello spessore. La scelta dell'elemento finito è ricaduta sullo SHELL181 in vista della possibilità di estendere il modello a casi di analisi più complessi, con carichi agenti in direzione perpendicolare al piano medio della lamina.

Capitolo 5

Applicazioni e Risultati

5.1 Introduzione

NELLA prima parte di questo capitolo sono illustrati e discussi i risultati delle prove sperimentali realizzate in laboratorio. Opportune prove meccaniche sono state eseguite su campioni di materiale composito PA66, ed i relativi dati sono stati successivamente elaborati con la tecnica della correlazione delle immagini digitali. Vengono esposti i risultati afferenti ai fenomeni di localizzazione ed alla misura delle principali grandezze cinematiche sul dominio monitorato. Nella prima parte sono altresì illustrati e discussi i risultati afferenti all'applicazione del metodo inverso, illustrato nel capitolo 2. In tale ambito si è ipotizzato un comportamento isotropo da parte del materiale PA66, pertanto viene discussa l'identificazione del modulo di Young e del coefficiente di Poisson iniziali del materiale. Nello stesso contesto è stato stimato il danneggiamento subito dal materiale. Questa prima parte del lavoro è stata svolta in Francia presso il gruppo di ricerca di *Thermomécanique des Matériaux* del *Laboratoire de Mécanique et Génie Civil* dell'Università di Montpellier II. Tale équipe di ricerca appartiene al gruppo di ricerca francese in "*Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides*" e si occupa da diversi anni dell'identificazione dei parametri costitutivi termomeccanici dei materiali.

Nella seconda parte del capitolo sono illustrati e discussi i risultati relativi alla convalidazione del metodo numerico implementato nell'ambito di un contesto agli elementi finiti. In questo ambito i risultati numerici sono stati confrontati con quelli provenienti dalle prove sperimentali.

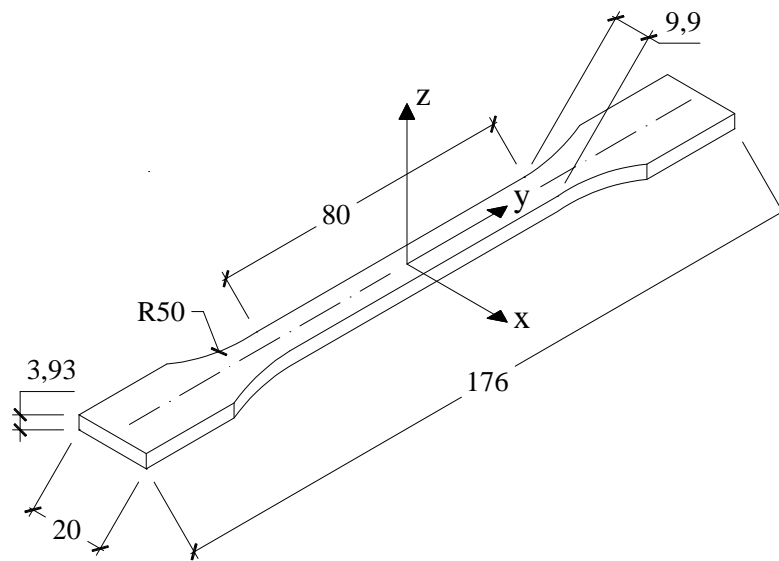


Figura 5.1: Geometria e dimensioni in millimetri dei provini.

5.2 Applicazioni sperimentali

Le prove sperimentali sono state realizzate in condizioni standard. Gli strumenti utilizzati sono stati: una macchina servoidraulica per prove di trazione ed una camera C.C.D.. La macchina servoidraulica ha applicato i carichi in condizioni quasi statiche, ed a velocità di deformazione costante sui provini in materiale composito PA66. In figura 5.1 sono riportate la forma geometrica e le dimensioni dei provini testati, si osservano le due estremità rialzate ed una fascia centrale più sottile, di dimensioni pari a 9.99 mm per 80 mm . I rialzi estremi sono stati raccordati alla zona centrale con degli archi di cerchio, che hanno permesso una ripartizione continua degli sforzi. Le due zone di estremità sono state ammorsate all'interno delle mordacchie della macchina servoidraulica, per l'applicazione dei carichi. Le superfici dei provini sono state preventivamente trattate, per produrre le immagini granulari. A tal fine su un primo strato uniforme di vernice nera è stato applicato un secondo strato irregolare e non uniforme di vernice bianca. La camera C.C.D., dotata di microscopio a lunga distanza ha monitorato i cambiamenti di configurazione su una superficie lievemente ridotta della zona centrale.

Le condizioni di carico, realizzate nel corso delle prove, sono state di trazione uniassiale. Questo tipo di prova è la più semplice e tecnicamente preferibile per la valutazione delle caratteristiche meccaniche e di resistenza. I provini sono stati portati a rottura attraverso due tipi di prove:

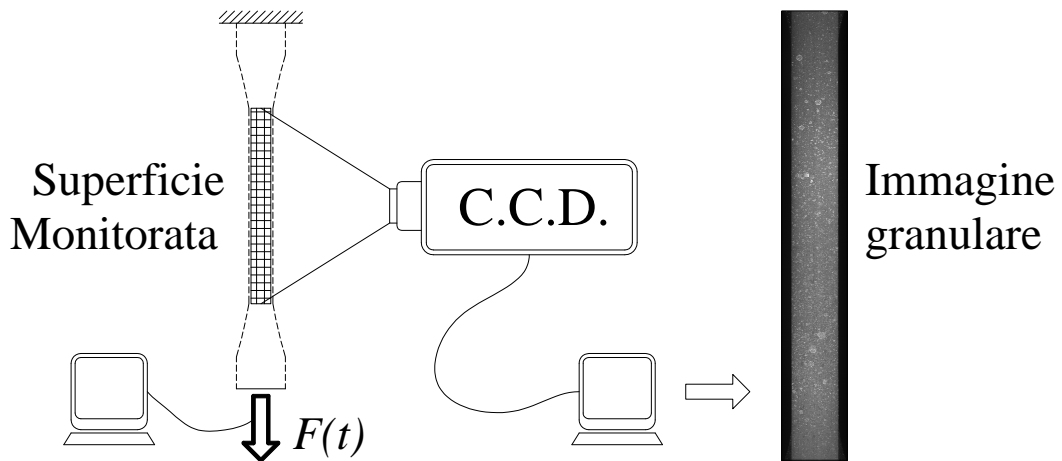


Figura 5.2: *Acquisizione dei dati durante le prove.*

- *prova di trazione monotona,*
- *prova ciclica uniassiale.*

In entrambe le prove lo spostamento della traversa mobile è avvenuto alla velocità costante di $v_T = 0.04 \text{ mm/sec}$. Le immagini acquisite hanno monitorato i cambiamenti di configurazione dei provini a partire dal primo istante di applicazione del carico, e fino alla completa rottura del provino stesso. In particolare, durante la prova monotona sono state acquisite 413 immagini con una frequenza di 2 sec^{-1} , mentre nel corso della prova ciclica sono state registrate 570 immagini con una frequenza di 1 sec^{-1} .

In figura 5.2 si riporta schematicamente il sistema di acquisizione dei dati utilizzato per le prove di laboratorio. Le prove sono state pilotate da due calcolatori esterni appositamente programmati. Il primo dei due, collegato alla macchina servoidraulica, ha gestito l'esecuzione e la registrazione dei dati di carico con una frequenza di 10 sec^{-1} . Il secondo calcolatore ha registrato i dati acquisiti dalla camera C.C.D..

Di seguito si illustrano i risultati ottenuti in termini di diagramma tensione-deformazione, cercando di discutere le condizioni che si verificano su tali diagrammi in corrispondenza dei fenomeni di localizzazione. In questo modo si ipotizza, implicitamente, che i meccanismi di localizzazione siano riconoscibili anche attraverso il diagramma tensione-deformazione. Alcune grandezze cinematiche verranno illustrate e discusse in corrispondenza delle zone di localizzazione. Inoltre con il metodo di correlazione sulle immagini granulari verranno distinte le zone caratterizzate da deboli o accentuate eterogeneità.

Le curve trazione tensione-deformazione sono state tracciate utilizzando i dati di

carico, trasmessi dalla macchina da prova, nonchè i dati di spostamento, ottenuti per correlazione. Con questi dati sono state calcolate le grandezze utili a rappresentare la risposta macroscopica del provino in corrispondenza di diverse zone di osservazione. Le curve tensione deformazione sono state espresse in termini della deformazione longitudinale di Hencky e della tensione longitudinale di Kirchhoff (equazione (1.29)):

$$\begin{cases} J T_Y &= \frac{F(t)}{S_0} \exp^{\varepsilon_{LH}} \\ \varepsilon_{LH} &= \ln\left(\frac{\Delta L}{L_0^{gauge}}\right). \end{cases} \quad (5.1)$$

Nella (5.1) L_0^{gauge} rappresenta la lunghezza iniziale di una estensometro ottico, ΔL è l'allungamento subito dall'estensometro, ed $F(t)$ è il carico applicato dalla macchina, la cui intensità è funzione del tempo t . La tecnica di correlazione delle immagini digitali, applicata nell'ambito di questo lavoro, ha permesso di misurare i campi di deformazione su tutte le parti utili del provino. Pertanto se la deformazione è supposta omogenea su una sezione, e se lo stato di tensione è uniassiale, si possono tracciare le evoluzioni della tensione e della deformazione su tutta la lunghezza del provino. Inoltre per uno stesso campione si possono tracciare tante curve di trazione quanti sono i punti di misura. Ad esempio, in figura 5.3 è stato messo in evidenza un punto M , disposto sull'asse del provino, per tale punto sono misurate le deformazioni nei vari istanti di tempo di durata della prova, e le corrispondenti tensioni sono calcolate attraverso la prima equazione delle (5.1). Diventa pertanto possibile tracciare la curva

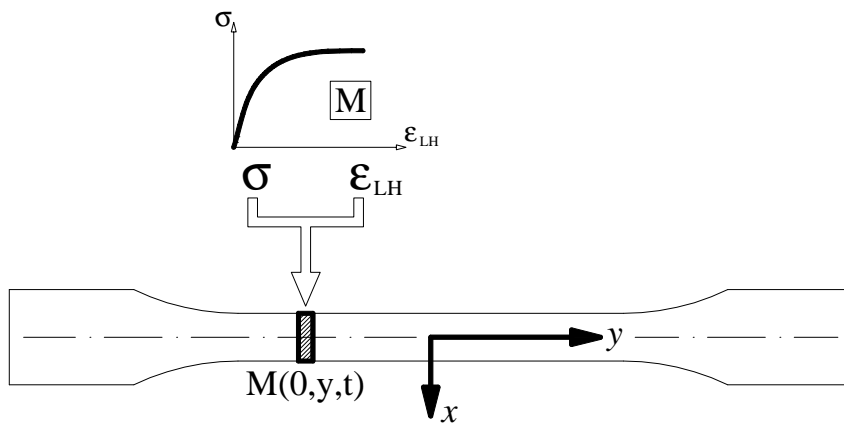


Figura 5.3: *Diagrammi locali tensione-deformazione.*

locale tensione deformazione. Questo procedimento può essere eseguito per ciascun punto arbitrario dell'asse del provino.

Nel capitolo 1 abbiamo già osservato che la tecnica di correlazione delle immagini digitali fornisce una grande quantità di informazioni utili. Una possibilità di illustrare i dati in maniera concisa è quella di illustrare l'evoluzione temporale dei profili scalari afferenti all'asse longitudinale del provino. Tali quantità scalari possono anche essere le componenti di un tensore. Sui grafici, che verranno di seguito presentati, è sovrapposto il classico diagramma tensione convenzionale - deformazione convenzionale. In questo modo i risultati dispongono di un utile riferimento per la lettura dei dati, che risultano correlati punto per punto al carico agente. La tensione convenzionale è definita come:

$$\sigma_C = \frac{F(t)}{S_0}, \quad (5.2)$$

in cui $F(t)$ è il carico agente nell'istante di tempo t , ed S_0 è l'area della sezione trasversale iniziale del provino. Inoltre, indicando con L ed L_0 rispettivamente le lunghezze iniziale e corrente dell'estensometro ottico virtuale, la deformazione convenzionale si può scrivere come:

$$\varepsilon_C = \frac{L - L_0}{L_0}. \quad (5.3)$$

5.2.1 Costruzione dello stato di tensione locale

Lo stato tensionale locale è stato costruito utilizzando le equazioni indefinite di equilibrio della statica dei corpi continui.

È stato verificato che l'ordine di grandezza dell'intensità delle accelerazioni è trascurabile rispetto all'accelerazione di gravità g [Chrysochoos *et al.*, 2000], che è classicamente trascurata nelle prove di trazione quasi-statiche. La figura 5.4 mostra la distribuzione spazio - temporale della componente di accelerazione nella direzione longitudinale del provino (γ_x). Osservando la figura 5.4 si nota che la prova viene eseguita in condizioni quasi statiche per tutta la sua durata. Valori localizzati di accelerazioni positive si osservano nei primi istanti di applicazione del carico, nei quali è possibile un iniziale scivolamento dell'estremità del provino dalla mordacchia superiore. La sezione di rottura è caratterizzata da un'accelerazione nulla. Negli ultimi istanti la parte del provino sottostante la sezione di rottura è caratterizzata da accelerazioni positive, sintomatiche dell'inizio della frattura. Il valore massimo di accelerazione misurato è prossimo a $0.03 \text{ pixels/sec}^2$, che corrisponde a $7.8 \cdot 10^{-4} \text{ mm/sec}^2$, e che giustifica l'ipotesi di staticità della prova.

La scrittura delle equazioni indefinite di equilibrio è stata semplificata dall'ipotesi di stato piano di tensione. All'interno di un sistema di riferimento Euleriano la

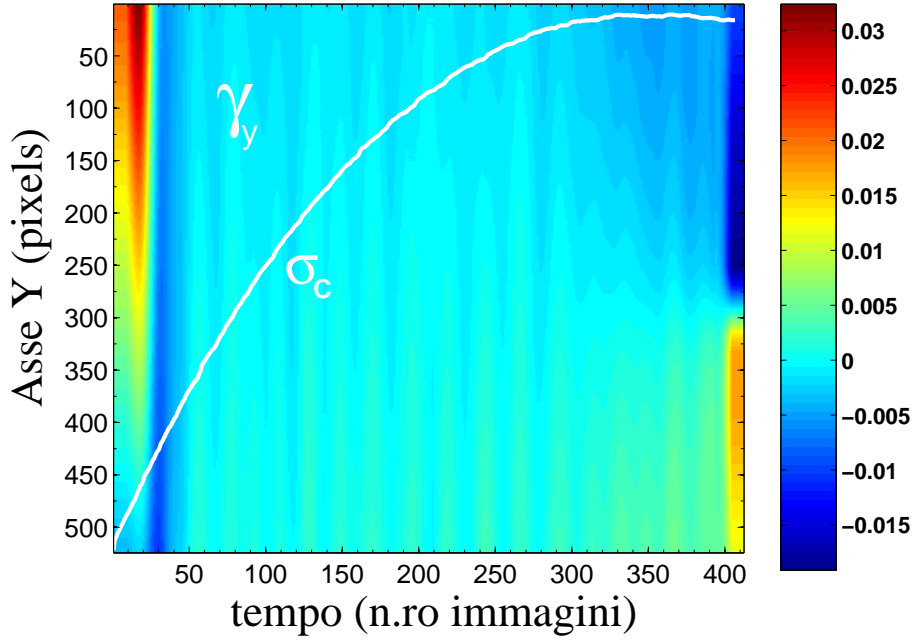


Figura 5.4: Evoluzione spazio-temporale di $\gamma_x(0, y, t)$.

scrittura delle equazioni di equilibrio è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}(x, y, t)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y, t)}{\partial y} = 0 \end{array} \right. , \quad (5.4)$$

in esso le variabili indipendenti x ed y sono le coordinate del sistema di riferimento piano, e la variabile t indica la dipendenza dal tempo delle componenti di tensione.

Prima di discutere l'integrazione del sistema (5.4) bisogna fare due ipotesi. Con la prima ipotesi si ammette che in ogni sezione trasversale dell'asse y del provino la distribuzione delle componenti di tensione σ_{yy} sia uniforme lungo x . In seconda istanza, assumendo che il materiale sia danneggiabile occorre mettere in conto le variazioni di volume subite nel corso della trasformazione. A tal fine il determinante del gradiente della trasformazione si può esprimere in funzione del tensore delle deformazioni di Hencky:

$$J = \frac{dv}{dV} = \exp^{tr\varepsilon}, \quad (5.5)$$

nella quale dv e dV indicano rispettivamente il volume occupato da una quantità infinitesima di materia nella configurazione corrente e di riferimento, mentre il termine

5.2 Applicazioni sperimentali

$tr\boldsymbol{\varepsilon}$ rappresenta la traccia del tensore delle deformazioni. Ricordando che la tecnica di correlazione delle immagini digitali fornisce soltanto le componenti di spostamento e di deformazione all'interno di un piano, non abbiamo avuto informazioni riguardanti la componente di deformazione ε_{zz} . Tuttavia, osservando la forma della sezione di rottura del provino in materiale PA66, è stata ritenuta ipotizzabile una componente di deformazione nella direzione dello spessore uguale alla componente trasversale ($\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx}$), che permette di riscrivere l'equazione (5.5) come:

$$J = \frac{dv}{dV} = \exp^{(\varepsilon_{yy} + 2\varepsilon_{xx})}. \quad (5.6)$$

Sotto queste due ipotesi l'equazione (1.27) diventa:

$$\sigma_{yy}(y, t) = \frac{F(t)}{S_0} \cdot \exp^{-2\varepsilon_{xx}(y, t)}. \quad (5.7)$$

Nell'equazione (5.7) scompare la dipendenza dalla variabile x perchè, come verrà illustrato di seguito, la componente di deformazione ε_{xx} è approssimativamente indipendente da x . Integrando la seconda equazione del sistema (5.4) si ottiene:

$$\sigma_{xy}(x, y, t) = 2\sigma_{yy}(y, t) \frac{\partial \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y} x + b(y, t), \quad (5.8)$$

in cui $b(y, t)$ è una costante di integrazione. Ad eccezione delle sezioni prossime alla frattura, le componenti di deformazione ε_{xx} sono simmetriche rispetto all'asse del provino. Per forze di taglio pari a zero su ogni sezione trasversale del provino, la costante $b(y, t)$ si annulla, e la componente mista di tensione diventa:

$$\sigma_{xy}(x, y, t) = 2\sigma_{yy}(y, t) \frac{\partial \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y} x. \quad (5.9)$$

Integrando la prima equazione del sistema (5.4) si perviene ad una distribuzione parabolica delle componenti di tensione σ_{xx} :

$$\sigma_{xx}(x, y, t) = \sigma_{yy}(y, t) \left(2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y^2} \right) \cdot x^2 + c(x, t). \quad (5.10)$$

Inoltre poichè il provino è scarico sulle superfici laterali ($x = \pm l(y, t)/2$), la componente di tensione σ_{xx} è pari a zero, pertanto

$$n_x \cdot \sigma(\pm l/2, y, t) n_x = \sigma_{xx}(\pm l/2, y, t) = 0, \quad (5.11)$$

in cui n_x è la normale unitaria in direzione trasversale. Pertanto l'equazione (5.10) diventa:

$$\sigma_{xx}(x, y, t) = \sigma_{yy}(y, t) \left(2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}(y, t)}{\partial y^2} \right) \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right). \quad (5.12)$$

Le tre equazioni (5.7), (5.9), (5.12) sono state utilizzate per stimare numericamente il campo di tensione in ciascun punto della griglia virtuale in cui è nota una misura di deformazione. Il calcolo puntuale dello stato tensionale attraverso le equazioni (5.7), (5.9), (5.12) è stato eseguito per mezzo di routine personalizzate, implementate in ambiente MatLAB.

5.2.2 Prova monotona di trazione

Curve di legame

In figura 5.5 si illustrano alcune curve tensione-deformazione afferenti alla prova monotona di trazione. Le curve sono sovrapposte e si riferiscono a zone di osservazione diverse tra loro. In particolare la curva M rappresenta la curva di legame convenzionale costruita a livello della macroscale. Essa è messa a confronto con tre curve riferite a zone ridotte dell'asse del provino, che rappresentano i legami tensioni di Cauchy - deformazioni di Hencky. Le curve A e C sono riferite ai punti estremi del dominio, mentre la curva B si riferisce al punto sulla sezione di rottura.

Riportando tutte le curve sullo stesso grafico, si osserva che la prova si è rivelata sensibilmente eterogenea. Infatti le curve sono risultate sovrapponibili soltanto fino ad un livello di tensione inferiore a 40 MPa.

Non appena la risposta del materiale diventa eterogenea nella direzione dell'asse, i legami tensione - deformazione diventano distinguibili tra loro, tuttavia le curve B e C si conservano sempre sovrapposte. Le tre curve puntuali A , B e C raggiungono lo stesso valore della tensione massima, con deformazione maggiore sulla sezione di rottura del provino ($\varepsilon \approx 5.2 \cdot 10^{-2}$). Le tre curve locali A , B e C raggiungono lo stesso livello di massima tensione, pari a circa 150 MPa, mentre la curva M , afferente al legame convenzionale, raggiunge una tensione massima di 143 MPa. È interessante osservare che, in corrispondenza della tensione massima, tutte le curve si attestano su una tangente orizzontale, che si conserva fino alla rottura del provino. L'assenza di un ramo decrescente in corrispondenza della rottura è sintomatico dell'assenza di una strizione significativa nella sezione trasversale. Complessivamente le quattro curve indicano un comportamento fragile del materiale. Tale prova è stata eseguita imponendo un incremento di deformazione imposto pari a $\dot{\varepsilon}_{imposto} \approx 6.1 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

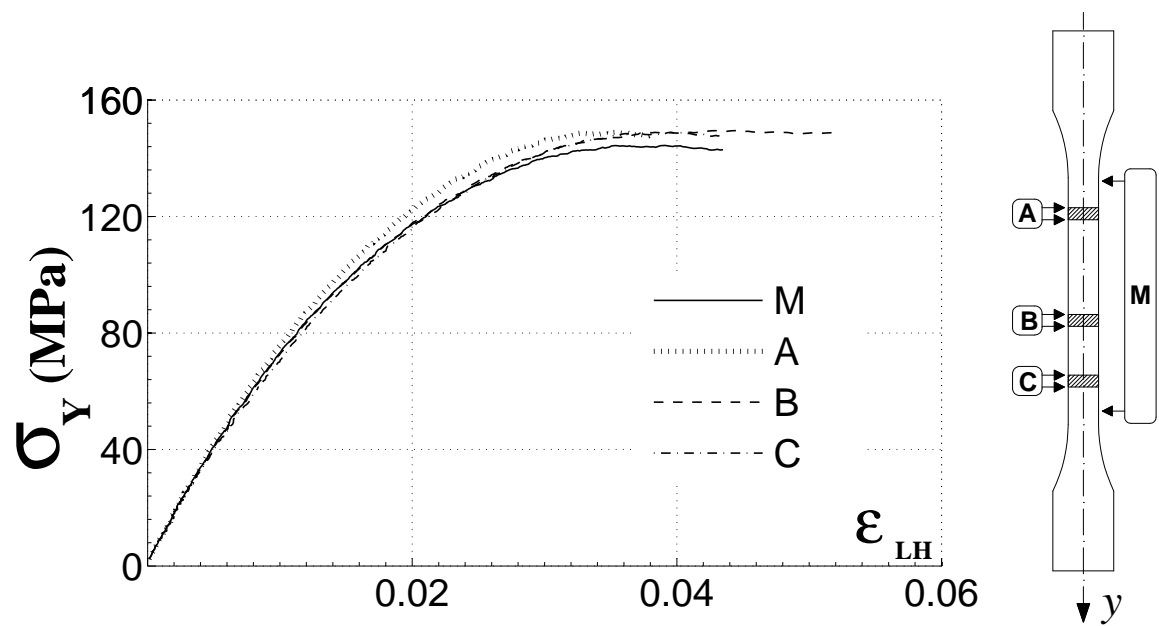


Figura 5.5: Curve tensione-deformazione su diverse zone di osservazione.

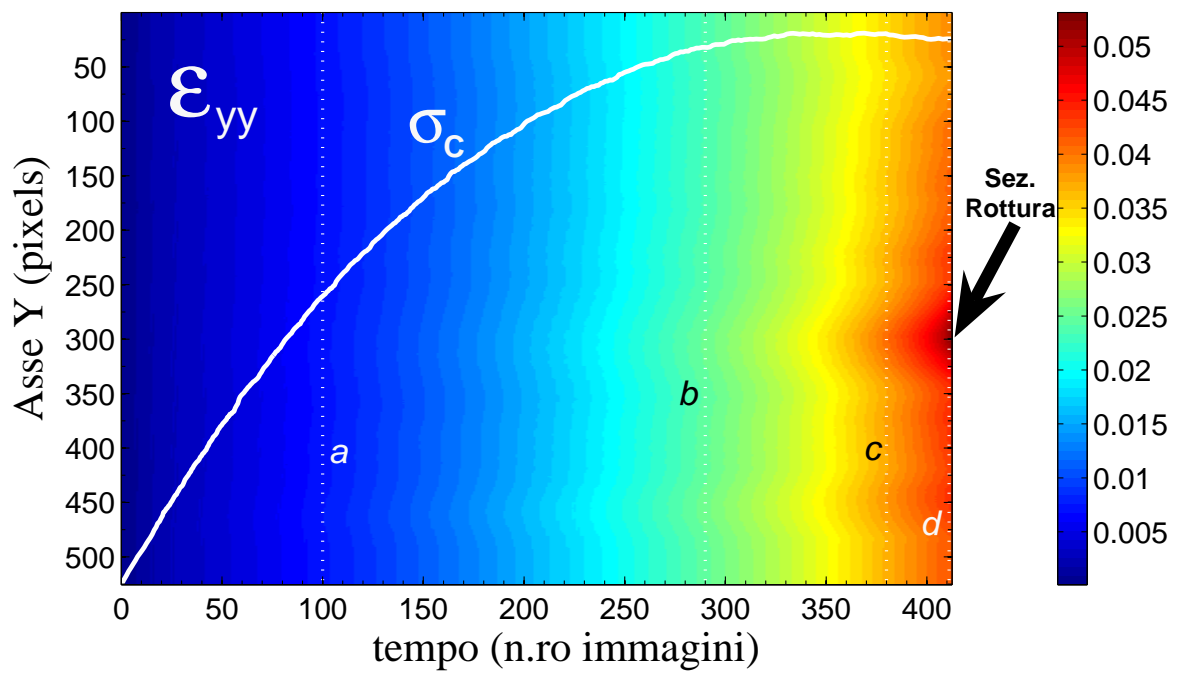


Figura 5.6: Evoluzione spazio-temporale della deformazione di Hencky ϵ_{yy} .

Analisi dello stato di deformazione

In figura 5.6 si illustra l'evoluzione temporale della distribuzione del profilo longitudinale della deformazione di Hencky.

Il grafico riporta in ascissa la numerazione sequenziale degli istanti di acquisizione dei dati per mezzo della C.C.D., ed in ordinata la posizione, espressa in pixels, sull'asse del provino. Il generico punto di coordinate (t, p_y) del grafico in figura 5.6 indica il valore della componente di deformazione ε_{yy} nell'istante t della prova, e nel punto p_y dell'asse longitudinale. La scala dei colori riportata sulla destra è un riferimento nella lettura delle deformazioni. Nel grafico è sovrapposta la curva di legame convenzionale tensione - deformazione, che consente di individuare il livello di tensione applicato in ciascun istante di acquisizione. Le deformazioni nella direzione dell'asse sono omogenee nelle prime trecento immagini acquisite, successivamente comincia a formarsi una localizzazione in corrispondenza della sezione di rottura, con picco di deformazione maggiore di 0.05. La sezione di rottura è indicata dalla freccia in nero, ed è ubicata ad una distanza di 300 pixels dall'estremità superiore del provino.

La figura 5.6 richiama l'attenzione sugli istanti di acquisizione a, b, c, d , corrispondenti alle deformazioni convenzionali 0.71%, 2.45%, 3.75% e 4.35% rispettivamente. Negli istanti anzidetti è stata calcolata e riportata la distribuzione delle componenti del tensore di deformazione piano di Hencky sul dominio tratteggiato in rosso in figura 5.7. I risultati sono riportati nelle figure 5.8, 5.9, 5.10, 5.11. Si osserva che, in

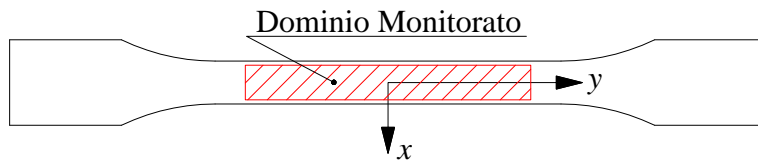


Figura 5.7: *Dominio monitorato sul provino.*

ognuno degli istanti monitorati, le componenti ε_{xx} e ε_{yy} sono all'incirca costanti lungo la direzione della larghezza del provino. La componente di deformazione ε_{xy} rimane sempre molto piccola rispetto alle componenti ε_{xx} ed ε_{yy} , pertanto gli assi principali I e II del tensore di Hencky cambiano di poco durante la trasformazione, e possono considerarsi coincidenti con gli assi del sistema di riferimento illustrati in figura 5.7.

La figura 5.11 corrisponde ad una deformazione convenzionale del 4.35% e mostra la formazione di una localizzazione della componente ε_{yy} in corrispondenza della sezione di rottura.

L'esame delle componenti ε_{xx} dimostra quanto anticipato nel paragrafo preceden-

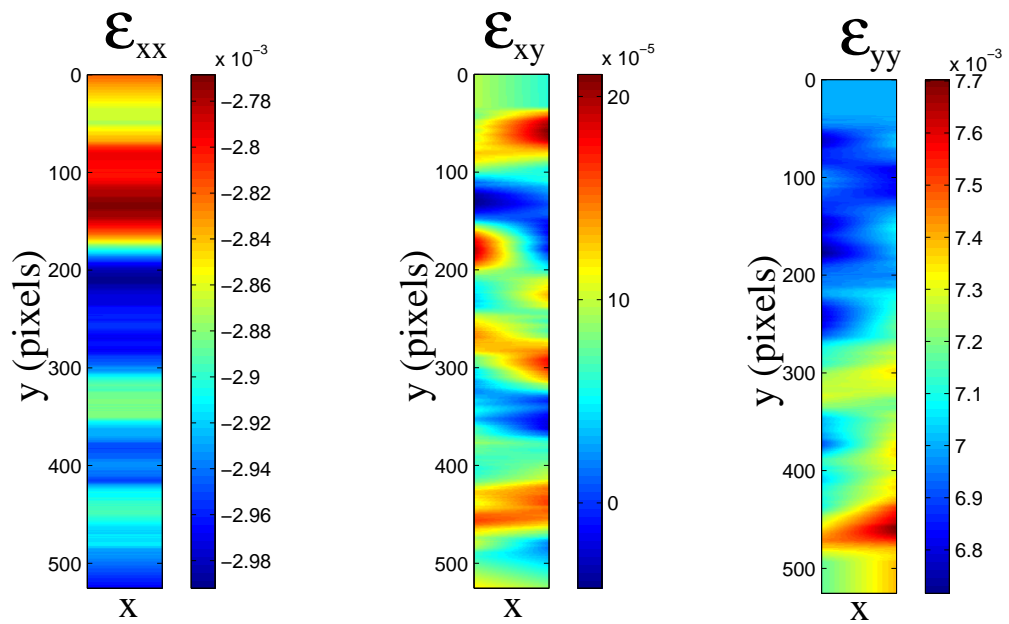


Figura 5.8: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\epsilon_C = 0.71\%$.

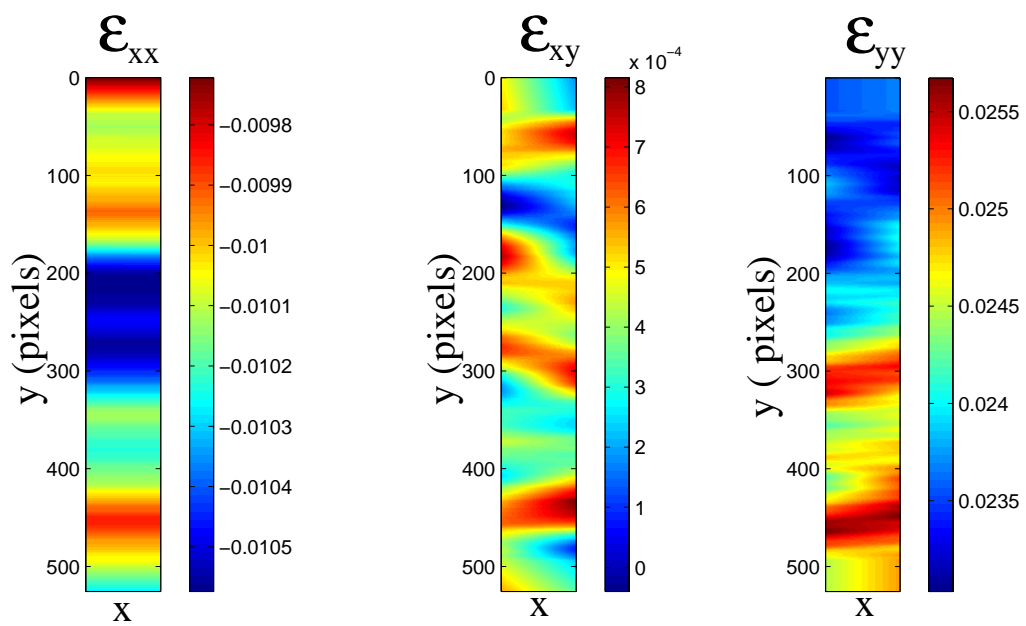


Figura 5.9: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\epsilon_C = 2.45\%$.

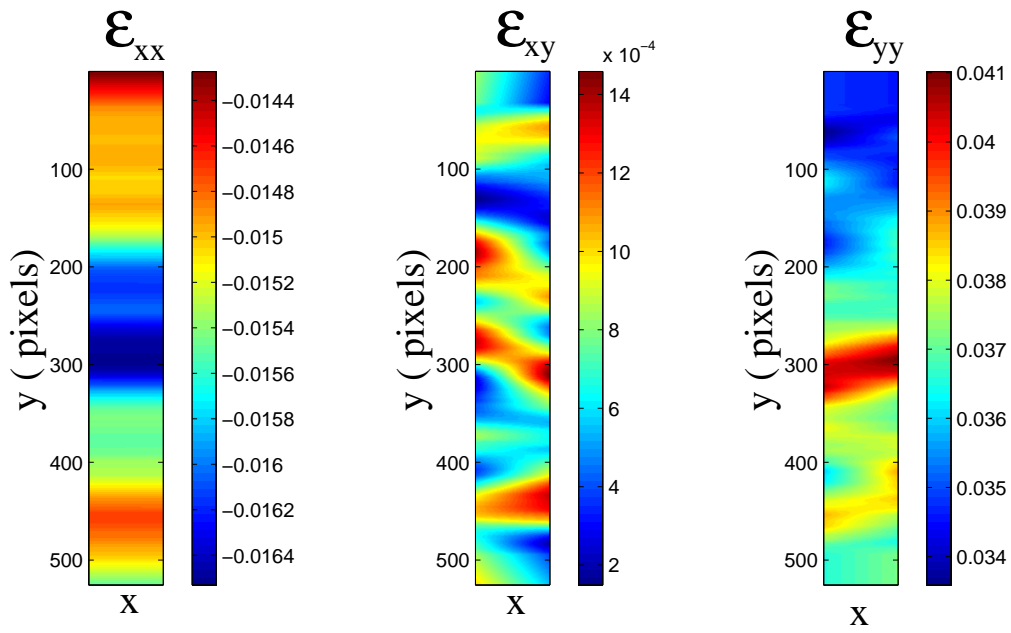


Figura 5.10: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\epsilon_C = 3.75\%$.

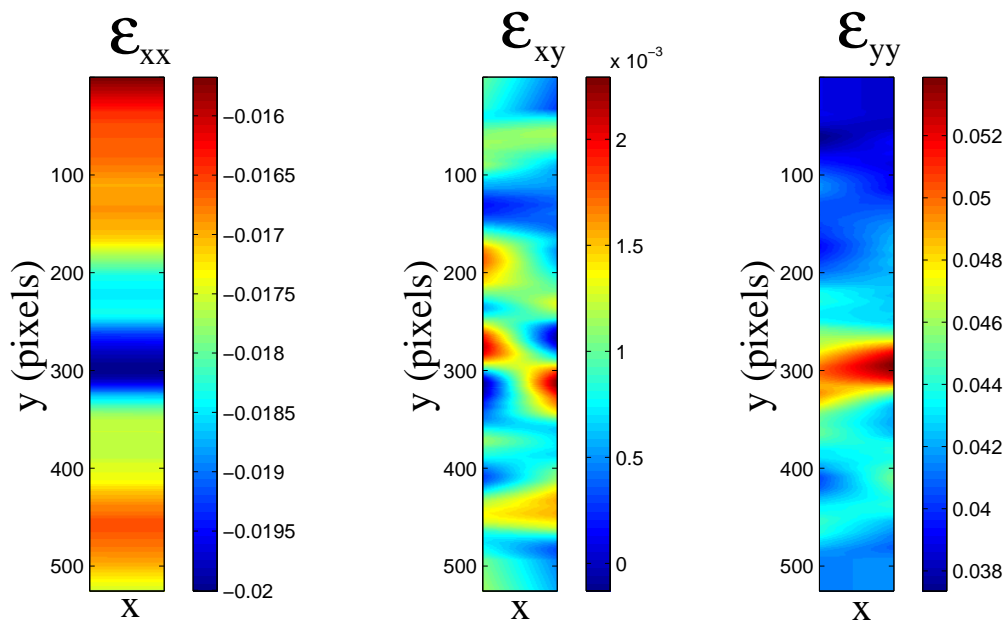


Figura 5.11: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\epsilon_C = 4.35\%$.

5.2 Applicazioni sperimentali

te: la componente ε_{xx} del tensore delle deformazioni di Hencky risulta indipendente dalla coordinata cartesiana di riferimento x , rispetto alla quale assume valore costante in ogni sezione del provino. Tale osservazione ha permesso di semplificare l'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio. Le distribuzioni dei rapporti di

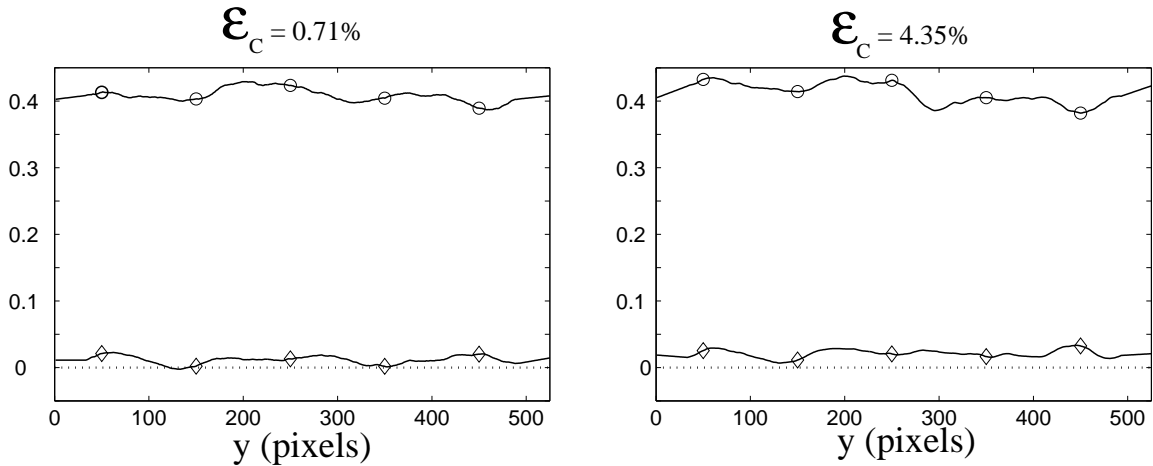


Figura 5.12: Evoluzione dei rapporti $-\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}$ (\circ) e $\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{yy}$ (\diamond) lungo l'asse del provino per due distinti valori della deformazione convenzionale.

contrazione $-\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}$ e $-\varepsilon_{xy}/\varepsilon_{yy}$ lungo l'asse del provino sono illustrate in figura 5.12 relativamente a due diversi valori del carico applicato. Il rapporto $-\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}$ si può assumere uguale a circa 0.4. Tale rapporto verrà confermato calcolando il coefficiente di Poisson attraverso il metodo inverso.

Nell'ambito della stessa prova sperimentale sono state indagate le distribuzioni nel tempo delle componenti di deformazione di Hencky ε_{xx} e ε_{xy} afferenti all'asse longitudinale del provino, i cui risultati sono riportati nelle figure 5.13 e 5.14.

La distribuzione spazio - temporale della ε_{xx} si è rivelata, al pari della ε_{yy} omogenea in ogni istante della prova. Tutte le sezioni d'asse subiscono una contrazione trasversale, dovuta all'effetto Poisson e rilevata dal valore negativo dei dati di deformazione. Negli ultimi istanti della prova si è riscontrata la formazione di una zona eterogenea, che si è progressivamente localizzata nella sezione di rottura del campione. L'ordine di grandezza delle deformazioni trasversali è risultato basso e pari, in valore assoluto, a meno di un ventesimo della massima deformazione longitudinale ε_{yy} .

L'analoga distribuzione, afferente alla componente di deformazione ε_{xy} , è riportata in figura 5.14. Tale risultato mette in evidenza gli effetti della presenza delle

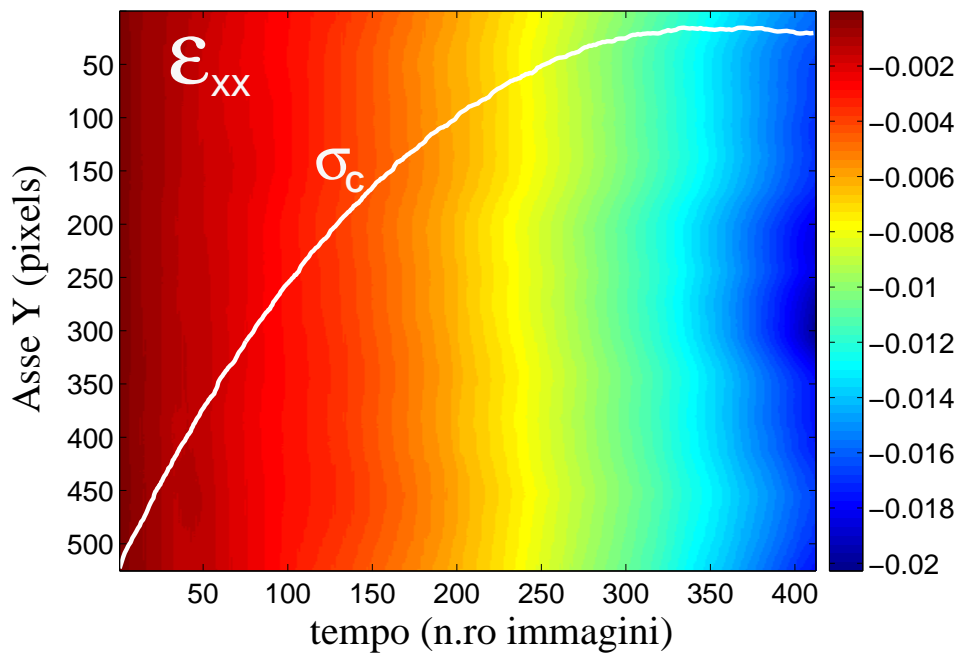


Figura 5.13: Evoluzione spazio-temporale della deformazione di Hencky ϵ_{xx} .

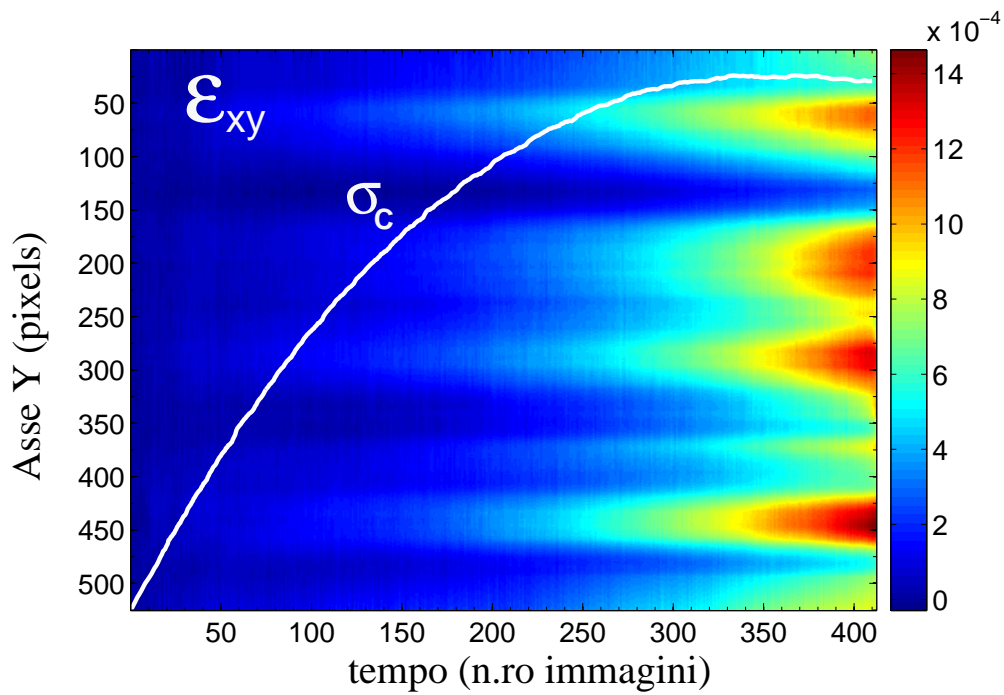


Figura 5.14: Evoluzione spazio-temporale della deformazione di Hencky ϵ_{xy} .

5.2 Applicazioni sperimentali

fibre corte all'interno del materiale. I valori della ε_{xy} rimangono praticamente nulli per oltre metà della durata della prova. In corrispondenza dell'istante finale si verificano più localizzazioni concentrate in punti distinti dell'asse. Le zone a maggiore concentrazione di fibre non risentono di alcun incremento di deformazione trasversale. L'ordine di grandezza massimo delle ε_{xy} è di 10^{-4} , e quindi risulta trascurabile rispetto alle altre due componenti di deformazione.

In definitiva, l'analisi del campo di deformazioni ha messo in luce che la rottura del provino è avvenuta per allungamento. La contrazione trasversale è risultata omogenea nella direzione dell'asse, e non si sono verificate strizioni localizzate o fenomeni di necking. Gli assi principali di deformazione non hanno mutato la loro posizione nel corso della prova.

Analisi dello stato di tensione

In questa sezione si illustrano alcune stime dello stato tensionale, realizzate per mezzo delle equazioni (5.7), (5.9), (5.12).

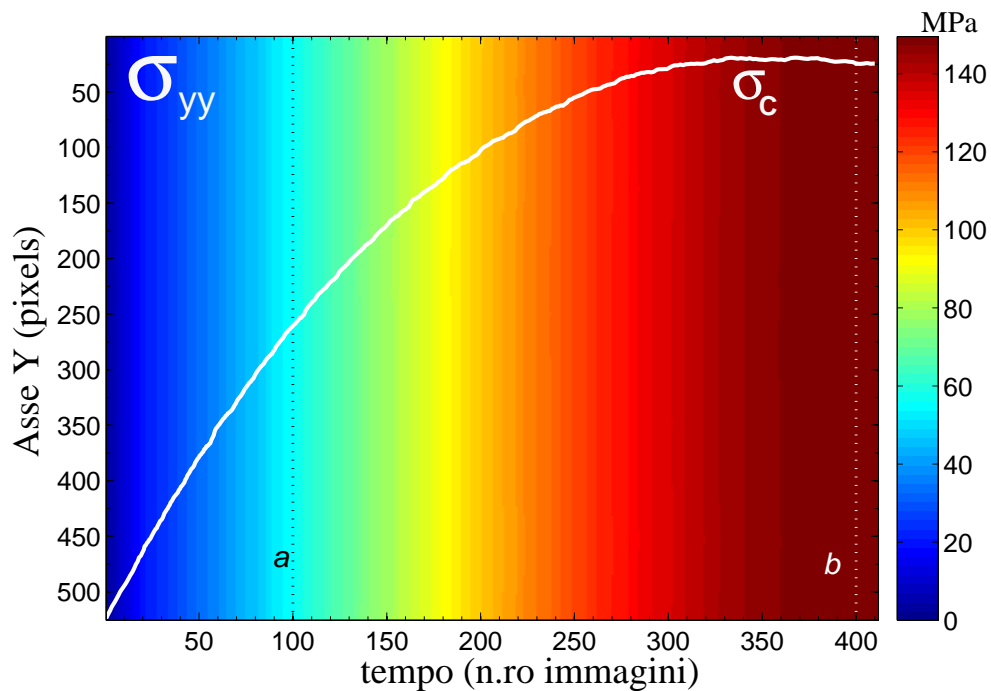


Figura 5.15: *Evoluzione spatio-temporale della tensione di Cauchy σ_{yy} sull'asse del provino.*

Il primo grafico è riportato in figura 5.15 ed illustra l'evoluzione temporale della componente di tensione di Cauchy σ_{yy} sull'asse del provino. Si constata immedia-

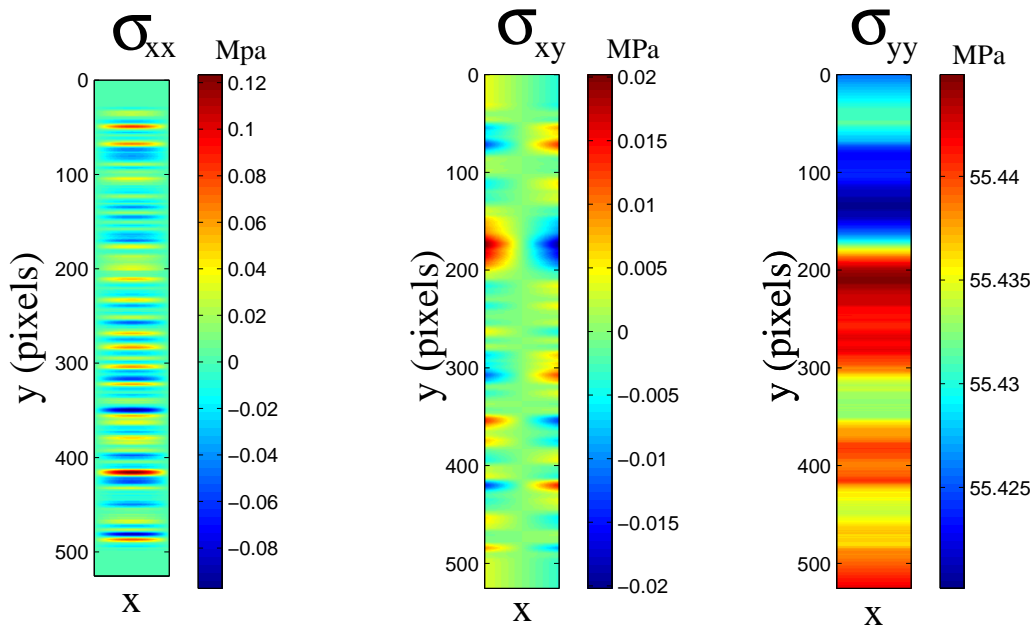


Figura 5.16: Componenti del tensore di tensione di Cauchy per $\varepsilon_C = 0.71\%$.

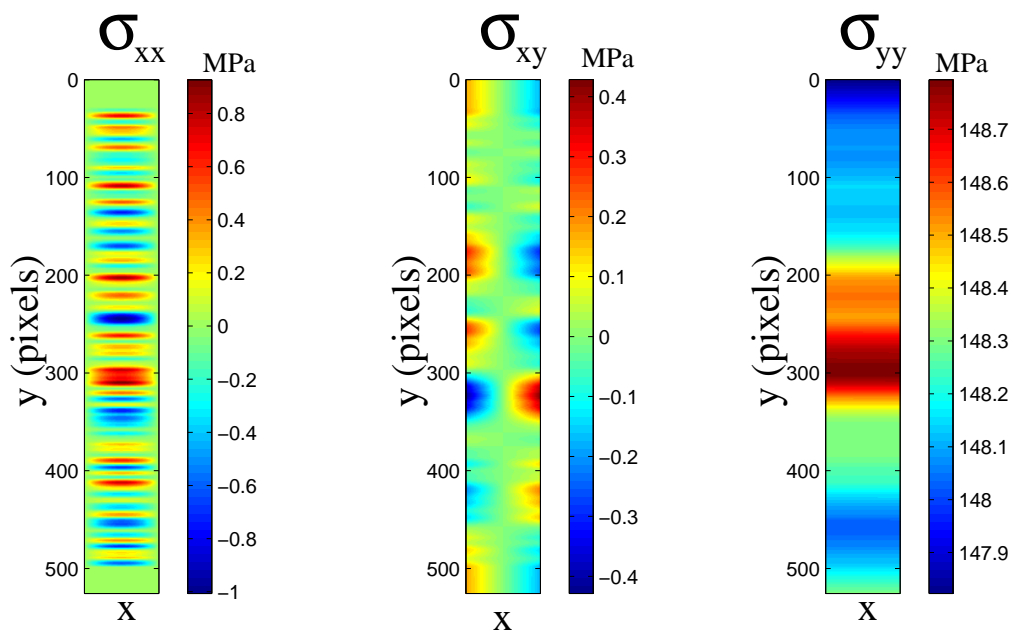


Figura 5.17: Componenti del tensore di tensione di Cauchy per $\varepsilon_C = 4.12\%$.

tamente che, per ciascun istante della prova, tale componente di tensione è costante lungo l'asse. Gli incrementi di tensione sono regolari con gli steps di carico e raggiungono un valore massimo dell'ordine dei 145 MPa in corrispondenza dell'istante di rottura. Ulteriori grafici sono riportati nelle figure 5.16, 5.17. Essi mettono in evidenza la distribuzione delle componenti di tensione σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} di Cauchy sulla superficie monitorata, e si riferiscono a due diversi istanti di carico. In particolare i risultati delle figure 5.16, 5.17 afferiscono a valori della deformazione convenzionale pari rispettivamente allo 0.71% ed al 4.12%. Si nota che le tensioni tangenziali σ_{xy} sono approssimativamente dello stesso ordine delle tensioni orizzontali σ_{xx} , e che entrambe tali componenti rimangono piccole rispetto alla tensione longitudinale σ_{yy} . Per ogni sezione dell'asse le componenti σ_{xx} e σ_{yy} sono costanti lungo la larghezza del provino. In corrispondenza di una deformazione convenzionale del 4.12% si osservano localizzazioni diffuse di tensioni tangenziali sui bordi del provino. Tali concentrazioni sono dovute alla geometria del provino e non sono direttamente connesse a deformazioni localizzate.

Analisi della velocità di deformazione

La tecnica di correlazione delle immagini digitali fornisce un ricco volume di dati, che adeguatamente rappresentati, forniscono una visione d'insieme su dati cinematici di ardua determinazione con tecniche sperimentali classiche. Di seguito si propongono alcuni risultati sul calcolo della velocità di deformazione di Lagrange. Per concentrare in una sola figura i dati a disposizione, e renderli chiari e leggibili, viene innanzitutto presentata l'evoluzione temporale della componente di velocità di deformazione sull'asse y del provino: $\dot{E}_{yy}(0, y, t)$. Tale risultato è proposto nell'immagine a sinistra di figura 5.18, in cui l'asse orizzontale rappresenta il tempo e l'asse verticale rappresenta i punti della generatrice del provino, nei quali sono state misurate le velocità di deformazione. La scala dei colori, riportata sul lato della figura, permette di individuare i valori numerici della velocità in ogni punto dell'asse e per qualsiasi istante della prova. La lettura è ulteriormente semplificata dalla sovrapposizione della curva tensione - deformazione convenzionali, che permette un riferimento immediato allo step di carico corrente. Nell'immagine a destra, della stessa figura, è rappresentato il profilo delle velocità di deformazione dell'asse del provino, in corrispondenza di una deformazione convenzionale pari al 4.12% e di una tensione convenzionale di circa 143 MPa. La traccia di tale profilo è indicata con a sull'immagine afferente all'evoluzione temporale della velocità di deformazione, e corrisponde all'immagine di acquisizione numero 400. Il profilo a mette alla luce la posizione precisa della sezione

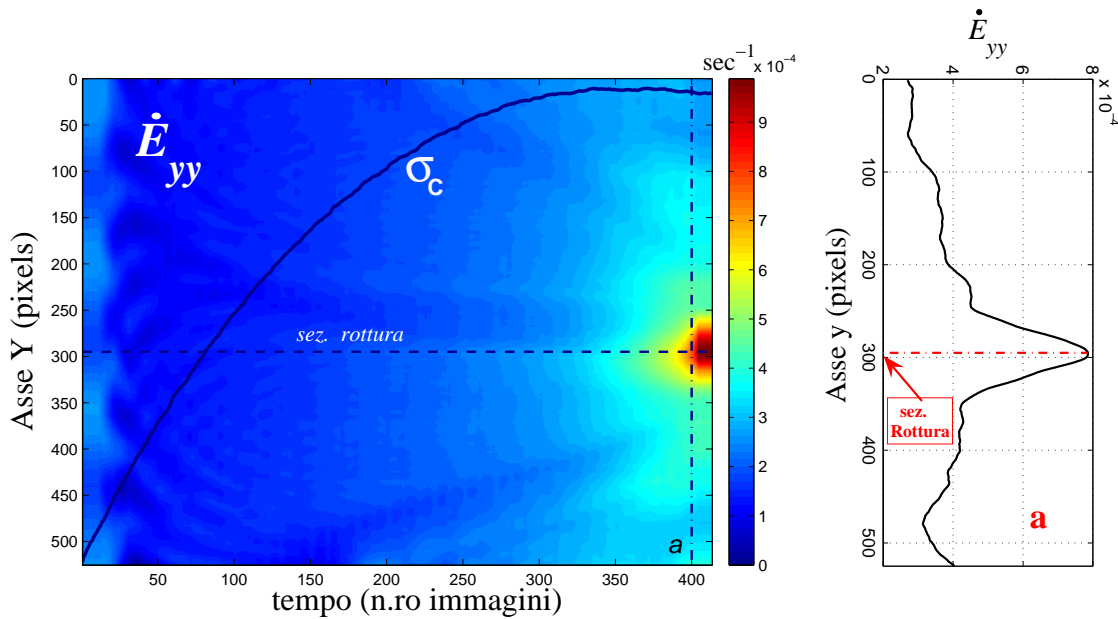


Figura 5.18: Evoluzione della velocità di deformazione \dot{E}_{yy} in sec^{-1} .

di rottura, che corrisponde a 295 pixels di distanza dal bordo superiore del dominio osservato, e che corrisponde all'incirca alla mezzeria d'asse del provino.

Si osserva che, a valori di velocità di deformazione $\dot{E}_{yy}(0, y, t)$ minori di $4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, e quindi più piccoli della deformazione imposta di $6.1 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ corrisponde una prova omogenea e priva di localizzazioni. Inoltre è possibile notare come lo sviluppo della localizzazione avvenga negli istanti finali della prova, mentre i primi incrementi significativi di velocità di deformazione si verificano negli istanti intermedi.

Un'ulteriore, utile rappresentazione dei risultati relativi alle velocità di deformazione, è quella riportata in figura 5.19. I dati ottenuti sono esposti attraverso delle curve di livello, dalle quali si evincono ulteriori aspetti della risposta meccanica del materiale composito PA66. Durante la fase elastica si osserva la formazione di piccole superfici a velocità di deformazione costante. Esse si espandono fino al raggiungimento del limite lineare sulla curva tensioni - deformazioni convenzionali. A partire da tale limite si formano delle zone omogenee a tratti, nelle quali la componente di velocità di deformazione \dot{E}_{yy} è parallela alla generatrice del provino. A partire da un valore di $1.27 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ si formano delle zone di espansione che, per incrementi di carico crescenti, convergono verso la sezione di innesco della frattura. Esse giacciono sulla direzione indicata dalla freccia rossa in figura 5.19. In corrispondenza del picco tensionale la velocità di deformazione raggiunge i $2.87 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, e la risposta del ma-

5.2 Applicazioni sperimentali

teriale diventa eterogenea fino al collasso. Una volta raggiunta la tensione convenzionale massima comincia un breve tratto discendente della curva tensioni-deformazioni convenzionali. Durante questa fase si realizza la concentrazione delle curve di livello verso la sezione di localizzazione. Nell'istante in cui si verifica la rottura del provino l'incremento di deformazione raggiunge il picco massimo di $9.56 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

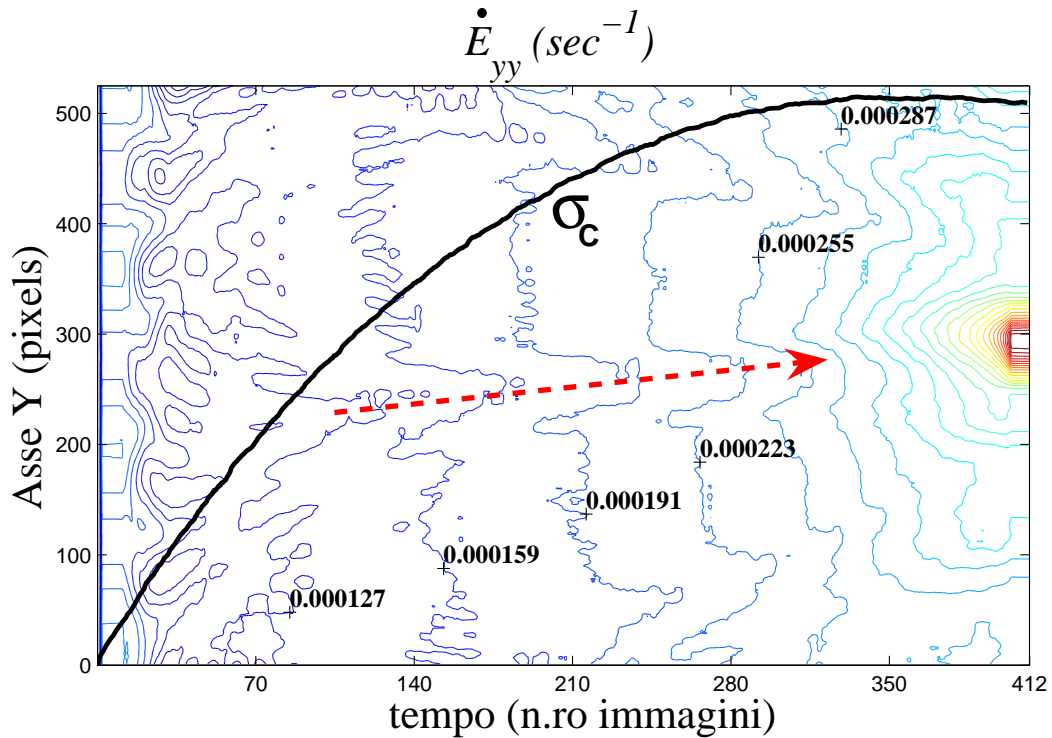


Figura 5.19: Curve di livello sull'evoluzione temporale di \dot{E}_{yy} .

Con le figure 5.20, 5.21, 5.22 si presentano le distribuzioni, sulla superficie del provino, delle componenti di velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} riferite rispettivamente a deformazioni convenzionali dello 0.39%, 2.00% e 4.10%. Si osserva che in corrispondenza di una deformazione convenzionale dello 0.39% la componente di trazione è fortemente eterogenea nella direzione longitudinale del provino. In corrispondenza della deformazione convenzionale del 2.00% le prime concentrazioni in direzione longitudinale appaiono in una zona circostante la mezzeria del provino e si localizzano progressivamente verso la sezione di rottura in corrispondenza per un valore della deformazione convenzionale uguale al 4.10%. La distribuzione nel piano della \dot{E}_{yy} , illustrata in figura 5.22, mette in evidenza la formazione di una sezione di rottura ortogonale all'asse longitudinale del provino.

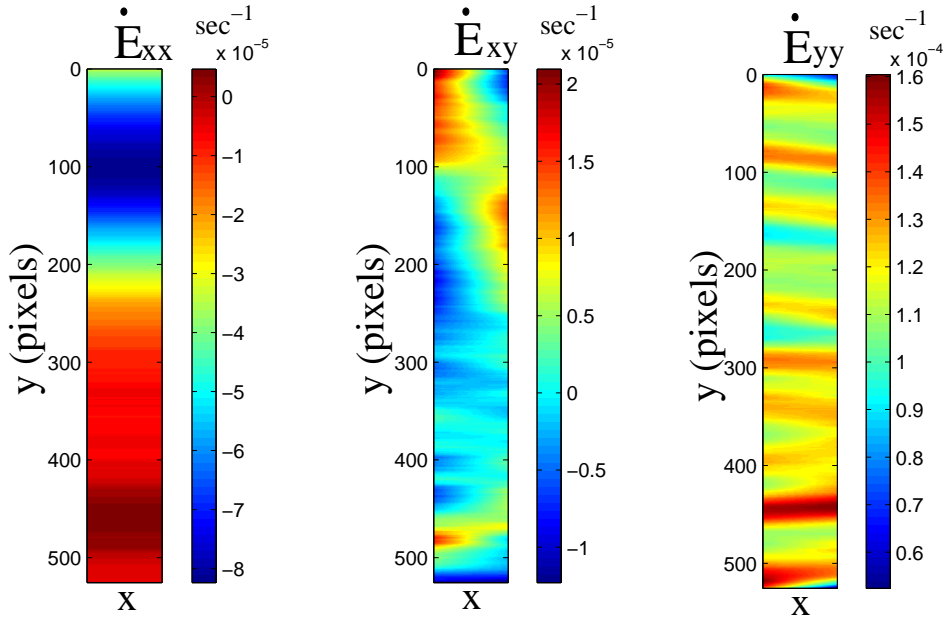


Figura 5.20: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 0.39\%$.

Si osserva, inoltre, che per ognuno dei livelli di sollecitazione monitorati, e per ciascuna posizione sull'asse la componente trasversale è costante in direzione x . La componente \dot{E}_{xx} cresce meno rapidamente di quella longitudinale. Il rapporto tra i valori assoluti $|\dot{E}_{yy}|/|\dot{E}_{xx}|$ cresce dal valore 2 per $\varepsilon_C = 0.39\%$ ad un valore superiore a 4 in corrispondenza di $\varepsilon_C = 4.10\%$. La componente mista \dot{E}_{xy} è sempre di un ordine di grandezza inferiore alle altre e la sua distribuzione è tutt'al più omogenea nella direzione dell'asse del provino.

I risultati afferenti al calcolo della velocità di deformazione e dello stato tensionale sono stati utilizzati per calcolare la velocità di energia di deformazione sull'asse del provino in vari istanti della prova. Ferma restando l'ipotesi di stato piano di tensione, la velocità locale dell'energia di deformazione è stata calcolata come:

$$\dot{w}_{def} = \sigma_{xx} \dot{E}_{xx} + 2\sigma_{xy} \dot{E}_{xy} + \sigma_{yy} \dot{E}_{yy}. \quad (5.13)$$

In figura 5.23 si presenta la distribuzione spazio - temporale dell'incremento di energia di deformazione per ciascun istante della prova. Le curve di livello, osservabili in figura 5.23, rivelano ancora una volta il progressivo sviluppo della localizzazione, espresso, questa volta, in termini di energia di deformazione.

L'ultimo risultato, riportato in questo paragrafo, riguarda la stima del modulo di Young a livello della macroscale, e quindi all'origine della curva tensione - deforma-

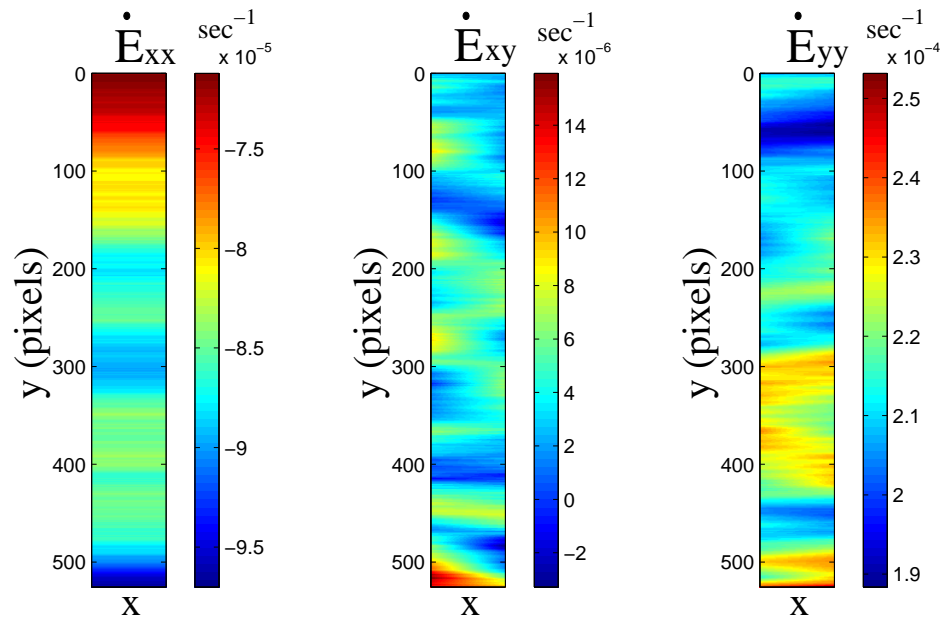


Figura 5.21: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 2.00\%$.

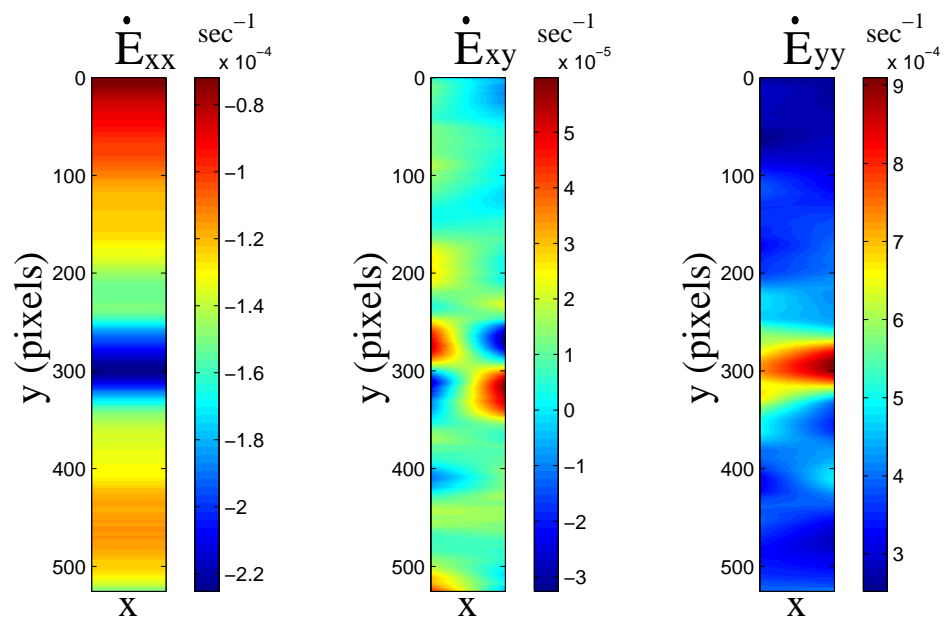


Figura 5.22: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 4.10\%$.

zioni convenzionali. Il modulo elastico all'origine è stato determinato per mezzo di una regressione lineare sui moduli tangenti misurati nel dominio elastico del materiale. Tale grandezza è stata calcolata utilizzando i risultati ottenuti dallo studio dei fenomeni di localizzazione ed elaborandoli per interpolazione ai minimi quadrati nel piano cartesiano, utilizzando un numero di punti crescenti a partire dall'origine. Il risultato ottenuto è stato il modulo di Young medio per il materiale. Successivamente verranno esposti i risultati ottenuti per applicazione del metodo di identificazione inverso, e verrà dimostrata la non omogeneità del materiale e la dipendenza del modulo di Young dal punto di osservazione considerato.

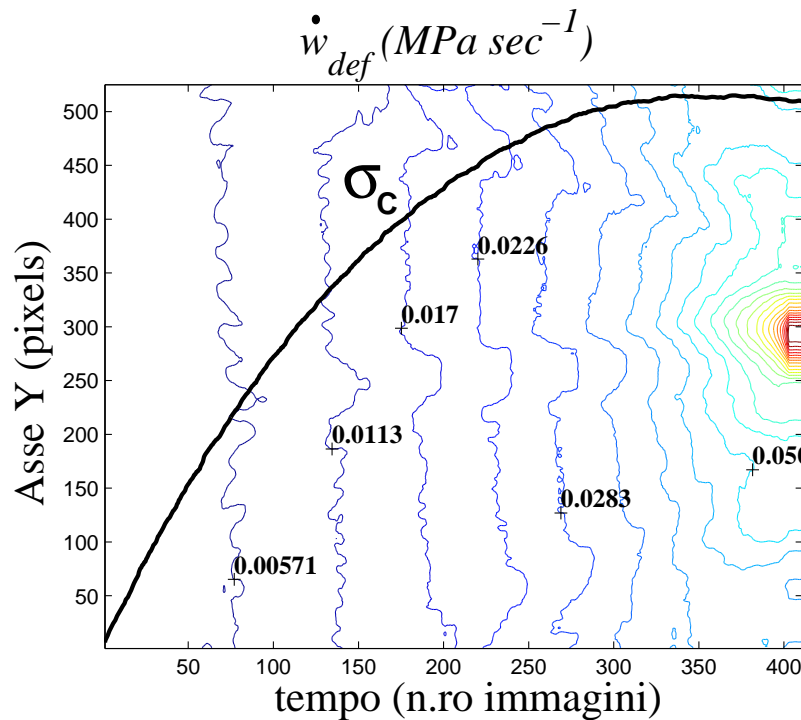


Figura 5.23: Curve di livello sull'evoluzione temporale di \dot{w}_{def} .

Per un numero ridotto di punti il risultato dell'identificazione ha risentito dell'elevato rapporto rumore/segnale. Aumentando progressivamente il numero dei punti interpolati ai minimi quadrati l'effetto del rumore si è ridotto rispetto all'intensità del segnale utile. In figura 5.24 si illustra l'intervallo di stabilizzazione del rapporto segnale/rumore, cui corrisponde una stima del modulo di Young pari a:

$$E_{0_{medio}} = 7840 \text{ MPa.} \quad (5.14)$$

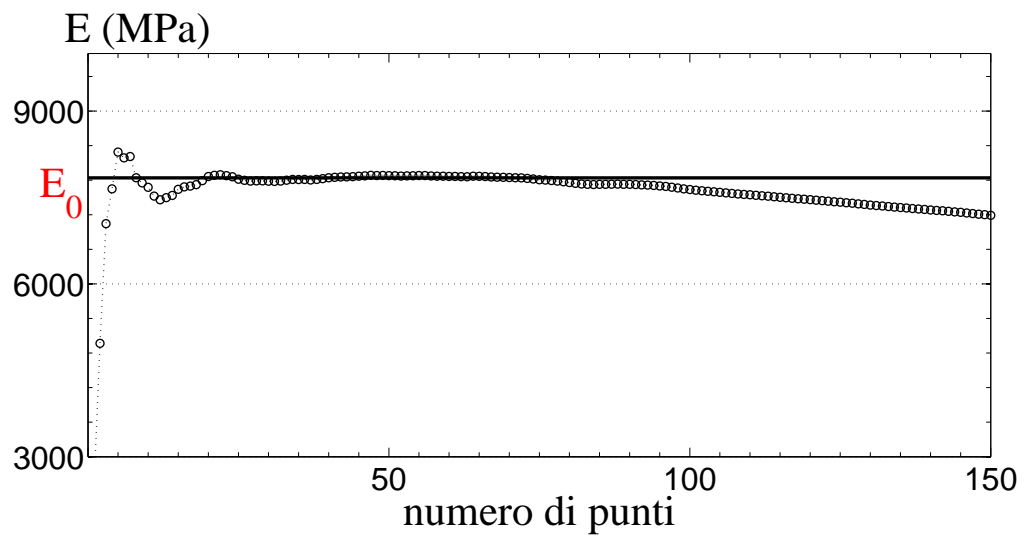


Figura 5.24: Stima del modulo di Young iniziale per regressione lineare.

5.2.3 Prova ciclica uniassiale

Curve di legame

Le indagini sperimentali sul materiale PA66 sono state approfondite sottoponendo un provino della stessa forma e dimensioni riportate in figura 5.1 ad una prova di carico e scarico uniassiale. Nel corso della prova i picchi di carico raggiunti sono aumentati

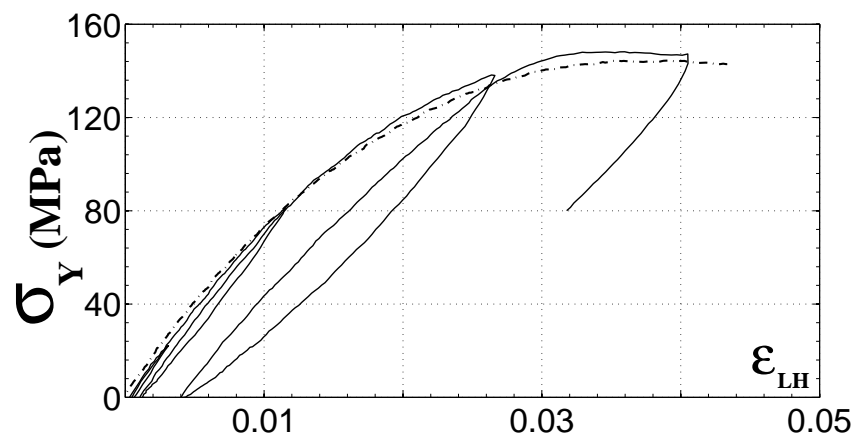


Figura 5.25: Confronto tra curve di legame delle prove monotona e ciclica.

passando da un ciclo al successivo, mentre allo scarico è stata raggiunta sempre una tensione pari a zero.

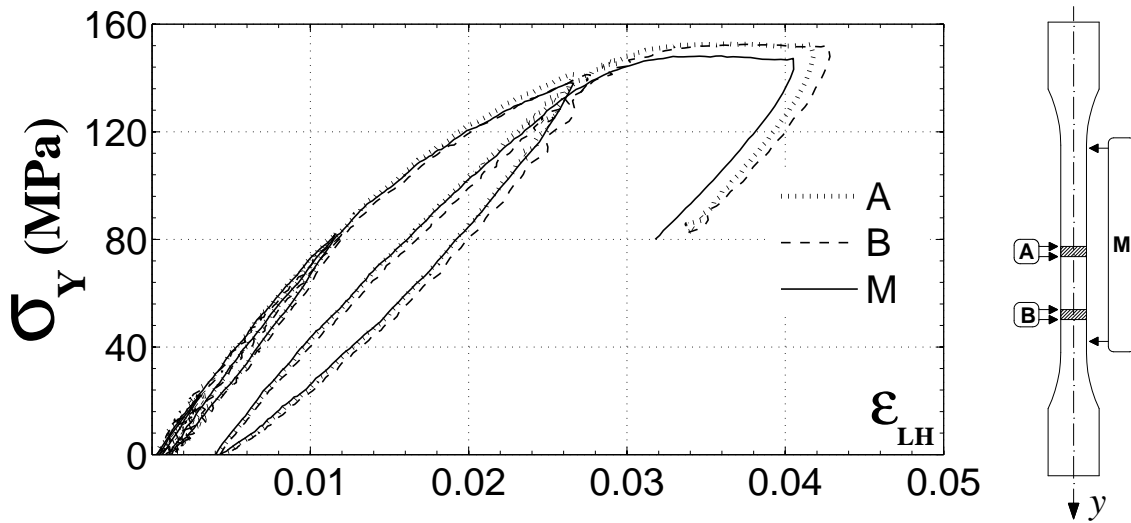


Figura 5.26: Curve tensione-deformazione su diverse zone di osservazione.

In figura 5.25 sono state confrontate le curve di legame convenzionale corrispondenti alle prove monotona e ciclica. Si osserva che la curva di legame monotona involupa con un adeguato grado di approssimazione la curva relativa al legame della prova ciclica. Quest'ultima raggiunge un picco tensionale lievemente maggiore della curva monotona, mentre dalla curva di carico monotona si evince in maniera più chiara il valore ultimo della deformazione subita dal materiale.

In figura 5.26 sono messe a confronto le curve di legame afferenti a due sezioni trasversali con la curva di legame tensione deformazione convenzionale M . Sul lato destro della stessa figura un disegno del provino indica la posizione degli estensometri ottici virtuali. Si osserva che la risposta del materiale è complessivamente più omogenea rispetto al caso della prova di trazione monotona. Dalla figura 5.26 si evince che le due curve locali, relative ai punti A e B , sono praticamente sovrapposte sui quattro rami di carico, mentre risultano lievemente distaccate sui rami discendenti di scarico. Le due curve locali sono inoltre sufficientemente in accordo con la curva relativa al legame convenzionale afferente alla macroscale. La rottura del provino è avvenuta dopo che la tensione ha raggiunto il valore massimo di 156 MPa.

È interessante osservare che i rami di carico non ripercorrono esattamente i percorsi di scarico; questo fenomeno è sintomatico di un comportamento viscoso del materiale PA66.

I picchi tensionali tra le curve di legame differiscono di una quantità esigua, dell'ordine degli 8 MPa circa, mentre le due curve locali raggiungono una deformazione

5.2 Applicazioni sperimentali

massima maggiore di 0.02 rispetto alla curva di legame convenzionale. Anche la prova ciclica, al pari della prova monotona, è stata eseguita imponendo un incremento di deformazione imposto pari a $\dot{\epsilon}_{imposto} \approx 6.1 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Sono state stimate le deformazioni plastiche residue dei rami di scarico relative alle curve riportate in figura 5.26. I relativi valori riportati di seguito:

primo ramo di scarico: $\epsilon_p^I = 4 \cdot 10^{-4}$;

secondo ramo di scarico: $\epsilon_p^{II} = 1 \cdot 10^{-3}$;

terzo ramo di scarico: $\epsilon_p^{III} = 4 \cdot 10^{-3}$.

Analisi dello stato di deformazione

I prossimi risultati illustrano i dati delle misure di deformazione calcolate nel corso della prova ciclica. Il primo grafico, riportato in 5.27, illustra lo sviluppo temporale della componente di deformazione ϵ_{yy} nei vari punti dell'asse del provino.

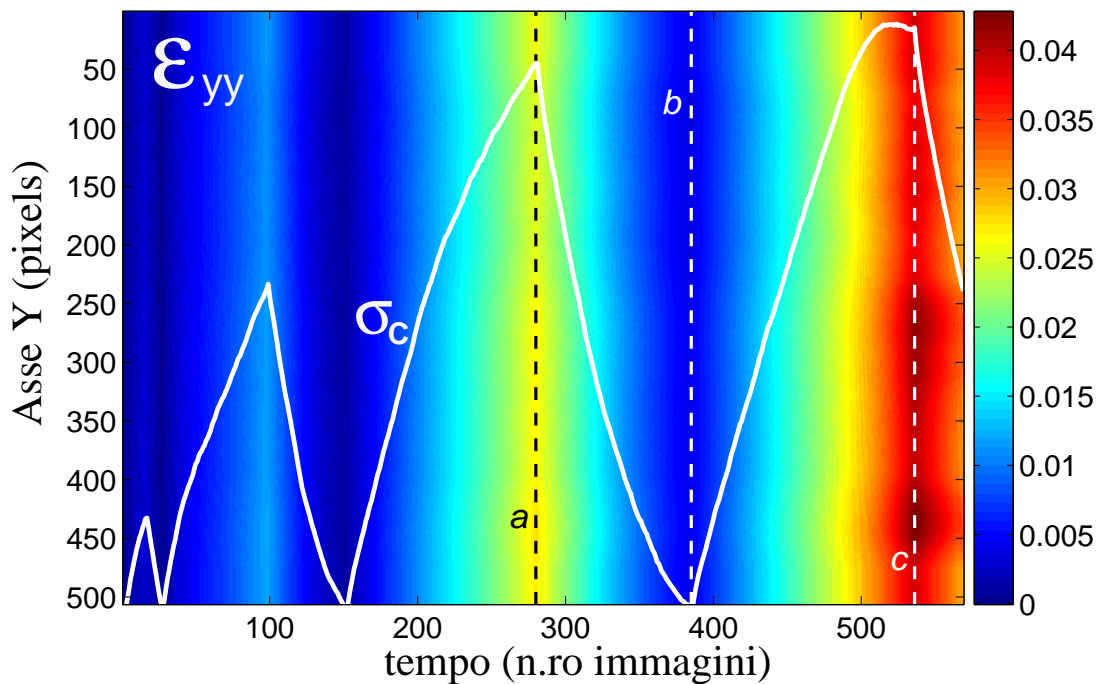


Figura 5.27: Evoluzione spazio-temporale della deformazione di Hencky ϵ_{yy} .

Trattandosi di una prova di carico ciclica, per avere un riferimento adeguato sul grafico, è stata sovrapposta la curva tensione convenzionale - tempo di acquisizione dei dati. La figura mostra gli incrementi di deformazione durante i quattro rami di

carico, e le corrispondenti riduzioni relative ai rami di scarico. Il filtering dei dati restituisce una risposta omogenea dei punti dell'asse del provino in ciascun istante di acquisizione. I valori di deformazione massima sono stati ottenuti in corrispondenza del picco dell'ultimo ramo di carico, dove si osserva l'acuirsi della deformazione in un numero finito di punti di localizzazione. La concentrazione delle localizzazioni è avvenuta durante una breve fase decrescente dell'ultimo ramo di carico, che indica una riduzione della sezione trasversale. Coerentemente con quanto riportato in figura 5.26 il valore di deformazione massimo raggiunto supera lo 0.04.

I segmenti di linea tratteggiati, ed indicati con rispettivamente con a , b e c , indicano tre istanti di acquisizione in corrispondenza dei quali è stata approfondita l'indagine sulle componenti piane di deformazione. I valori di deformazione convenzionale, corrispondenti ai segmenti a , b e c , sono rispettivamente del 2.66%, 0.40% e 4.05%. Le componenti di deformazione di Hencky sul dominio monitorato sono riportate nelle figure 5.28, 5.29, 5.30.

La figura 5.28 riporta i risultati afferenti al primo picco di carico, in corrispondenza del quale la deformazione convenzionale assume il valore del 2.66%. Si osserva che le

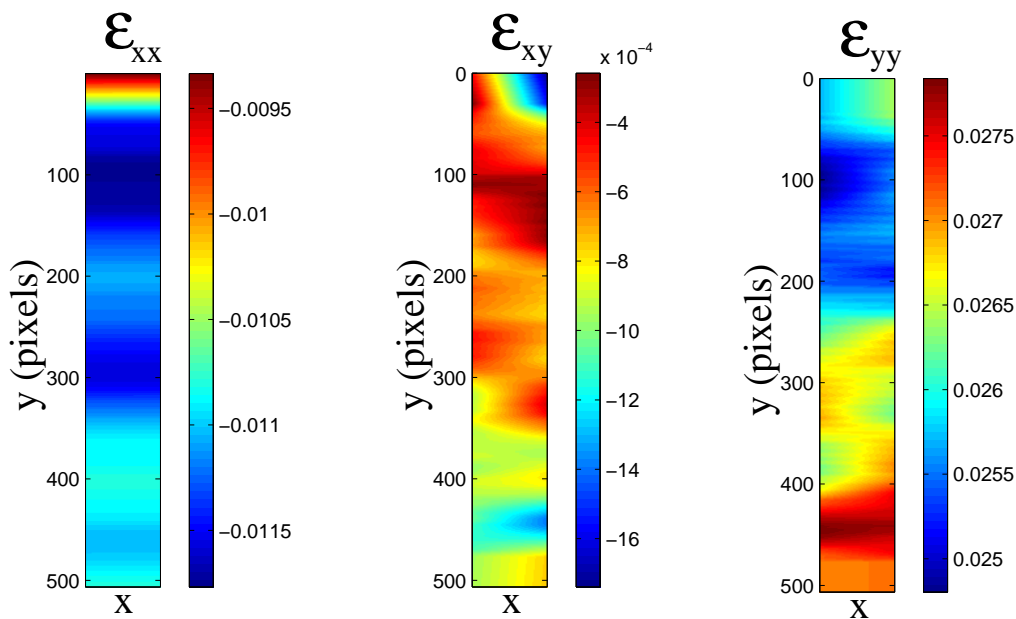


Figura 5.28: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\epsilon_C = 2.66\%$.

componenti di deformazione trasversale ϵ_{xx} e longitudinale ϵ_{yy} sono all'incirca costanti lungo la larghezza del provino. La componente di deformazione mista ϵ_{xy} è di un

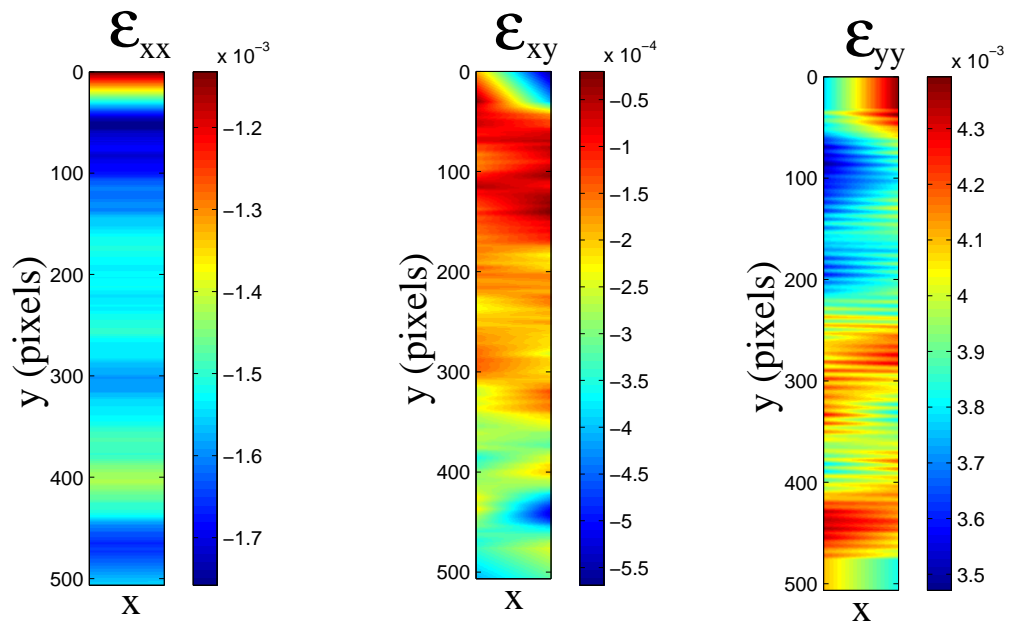


Figura 5.29: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\varepsilon_C = 0.40\%$.

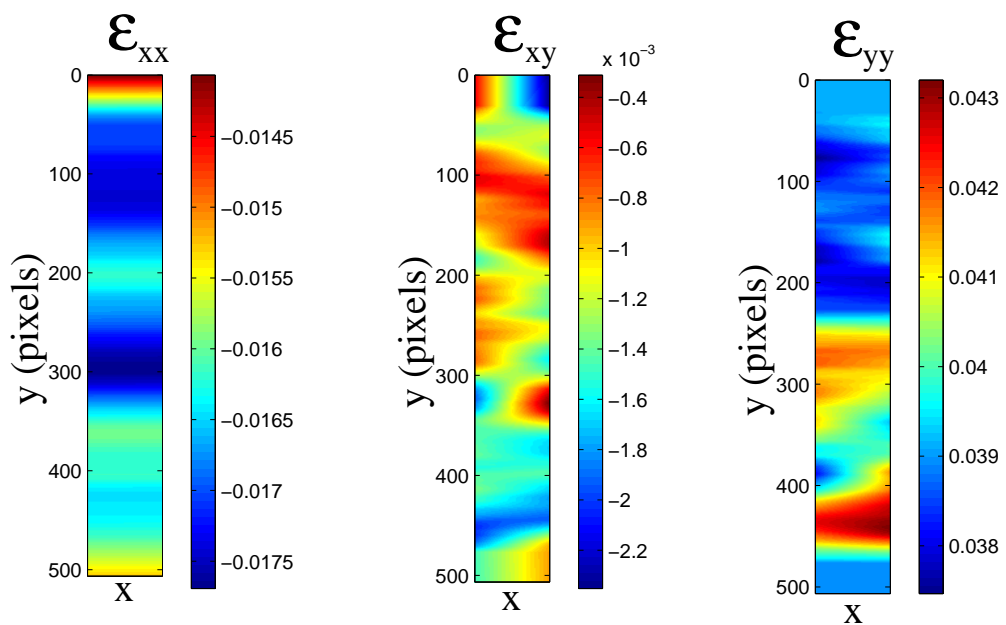


Figura 5.30: Componenti del tensore di deformazione di Hencky per $\varepsilon_C = 4.05\%$.

ordine di grandezza inferiore rispetto alle precedenti.

Le componenti di deformazione, riportate in figura 5.29, corrispondono ad una deformazione convenzionale $\varepsilon_C = 0.40\%$, ed illustrano le componenti di deformazioni plastica residua prima dell'ultimo ramo di carico. Le componenti miste di deformazione rimangono di un ordine di grandezza inferiore rispetto alle altre due. La distribuzione piana delle deformazioni ε_{yy} indica la concentrazione di deformazioni plastiche in corrispondenza delle zone di localizzazione. Le componenti ε_{xx} ed ε_{yy} rimangono costanti nella direzione trasversale del provino. Analoghe considerazioni valgono per l'istante di acquisizione relativo alla deformazione convenzionale del $\varepsilon_C = 4.05\%$, in cui si è raggiunto il picco dell'ultimo ramo di carico e si nota chiaramente la formazione delle zone di localizzazione.

Le componenti miste di deformazione rimangono sempre di un ordine di grandezza inferiore, pertanto gli assi principali di deformazione non cambiano nel corso di tutta la prova.

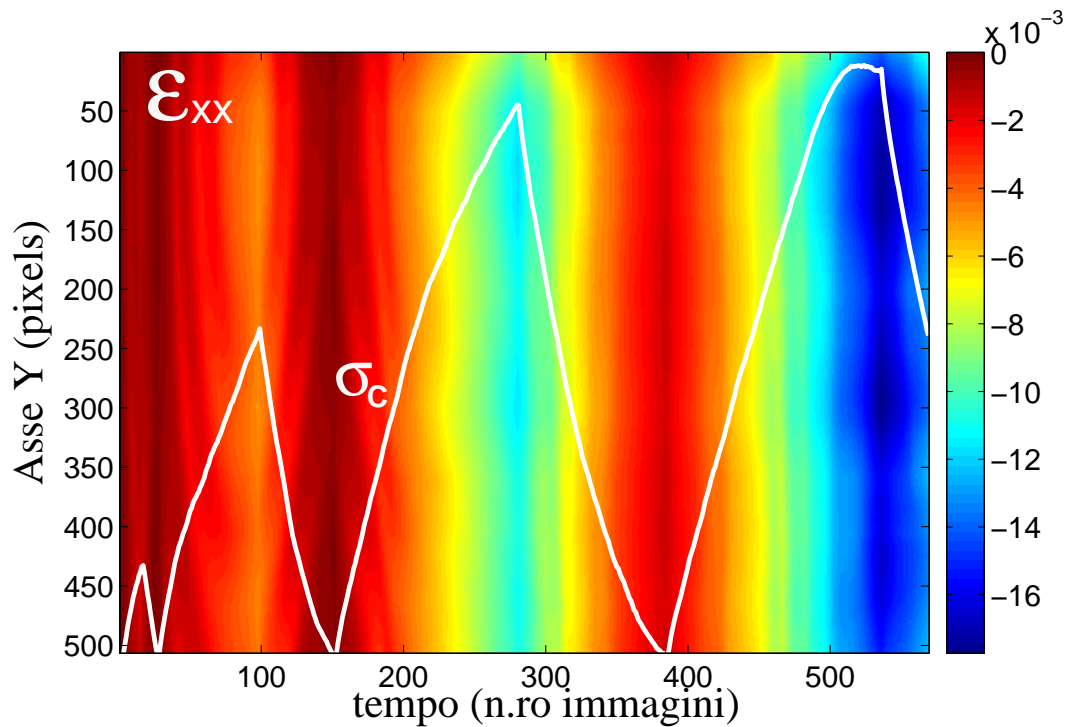


Figura 5.31: *Evoluzione spazio-temporale della deformazione di Hencky ε_{xx} .*

L'indagine sulle componenti di deformazione ha riguardato anche l'evoluzione temporale delle componenti di deformazione di Hencky ε_{xx} e ε_{xy} afferenti ai punti dell'asse del provino. I risultati sono riportati rispettivamente nelle figure 5.31 e 5.32. Dalla

5.2 Applicazioni sperimentali

figura 5.31 si osserva che, per ogni istante di acquisizione, la componente di deformazione ε_{xx} rimane omogenea lungo l'asse del provino, con la formazione di fenomeni di localizzazione in corrispondenza degli istanti immediatamente precedenti l'inizio dell'ultima fase di scarico. L'ordine massimo del valore assoluto delle deformazioni trasversali è dell'ordine del 40% delle deformazioni longitudinali.

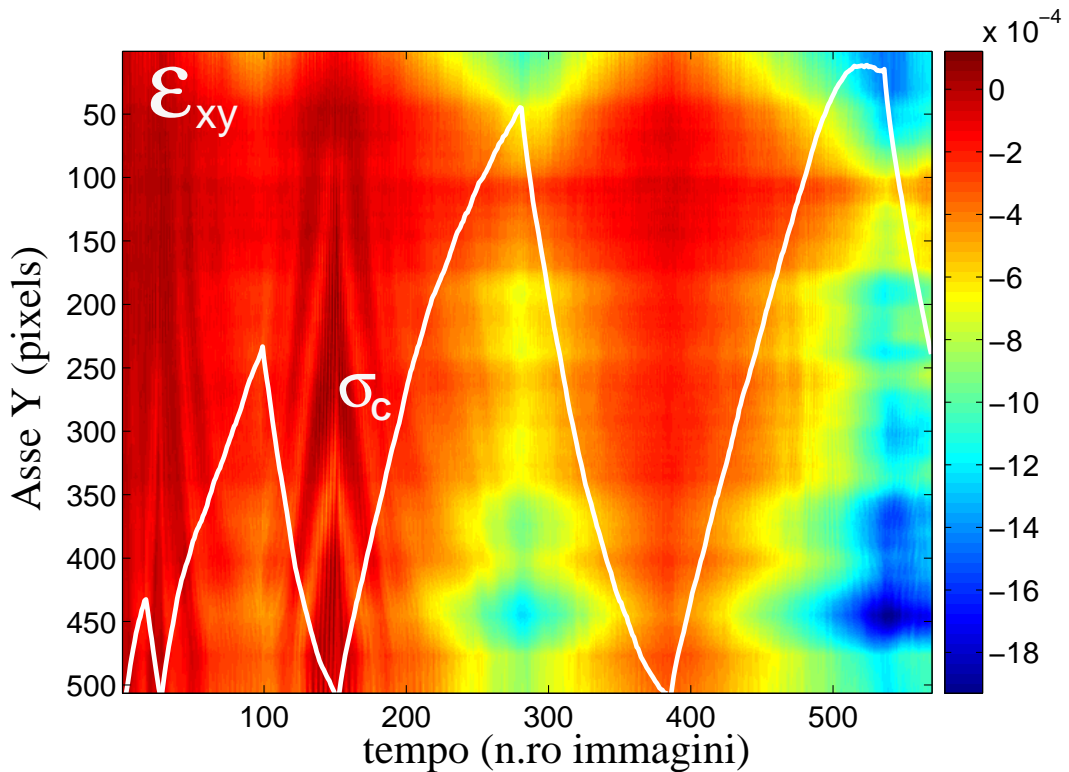


Figura 5.32: Evoluzione spatio-temporale della deformazione di Hencky ε_{xy} .

Infine in figura 5.32 si riporta la distribuzione temporale delle componenti di deformazione ε_{xy} . Tali deformazioni sono rimaste trascurabili per quasi tutta la durata della prova. I valori crescenti si sono avuti durante gli ultimi due rami di carico, durante i quali le deformazioni si sono distribuite in maniera eterogenea lungo l'asse del provino.

Anche nel caso della prova ciclica la rottura del provino è avvenuta per allungamento. In questo caso sono state osservate più localizzazioni distribuite lungo l'asse del provino, e quindi una risposta più uniforme del materiale. La posizione degli assi principali di deformazione non è cambiata nel corso della prova.

Analisi dello stato di tensione

Le componenti di tensione, relative ai vari istanti della prova ciclica, sono state calcolate in accordo con la costruzione dello stato di tensione locale discussa nel paragrafo 5.2.1.

In figura 5.33 è stata riportata l'evoluzione temporale della componente longitudinale della tensione di Cauchy σ_{yy} lungo l'asse del provino. Da tale figura emerge

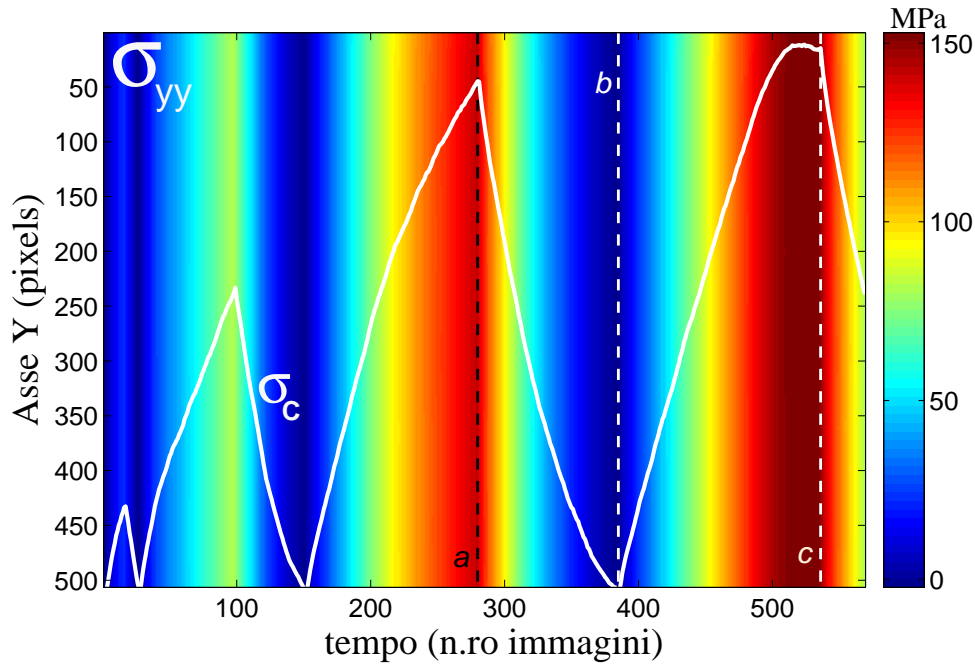


Figura 5.33: *Evoluzione spazio-temporale della tensione di Cauchy σ_{yy} sull'asse del provino.*

una distribuzione costante delle tensioni longitudinali in ogni istante della prova. Gli incrementi di tensione sono regolari con gli steps di carico e scarico. La tensione massima, dell'ordine dei 150 MPa, è stata raggiunta in corrispondenza del picco dell'ultimo ramo di carico, dopo il quale i valori delle tensioni longitudinali sono lievemente decresciute, prima che iniziasse l'ultimo ramo di scarico, a causa di una probabile lieve strizione trasversale.

Nella stessa figura sono riportate le tre rette a , b e c , che indicano altrettanti istanti di acquisizione, in cui sono state osservate le distribuzioni delle tre componenti di tensione σ_{xx} , σ_{xy} e σ_{yy} sul dominio osservato. Tali campi di tensione sono riportati nelle successive figure 5.34, 5.35, 5.36, e si riferiscono a deformazioni convenzionali del 2.66%, 0.40% e 4.05% rispettivamente. Mentre le tracce a e c si riferiscono ai picchi

degli ultimi due rami di carico, la traccia b corrisponde all'ultima fase del terzo ramo di scarico. Nei tre istanti di acquisizione osservati si constata che tanto le componenti di

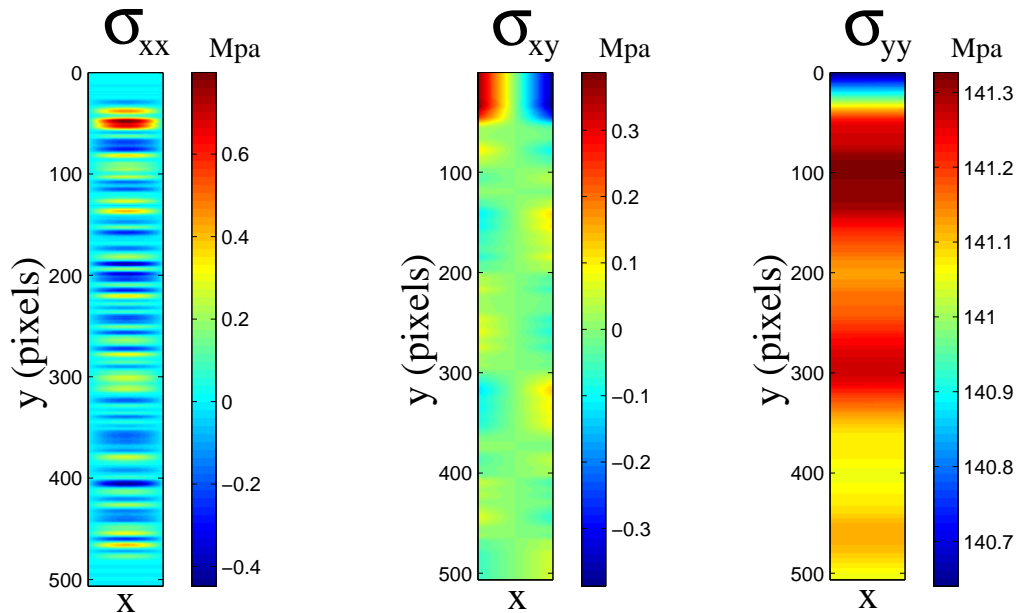


Figura 5.34: Componenti del tensore di tensione di Cauchy per $\varepsilon_C = 2.66\%$.

tensione trasversale σ_{xx} quanto quelle longitudinali rimangono costanti nella direzione della larghezza del provino. In corrispondenza del punto di scarico, per il quale la deformazione convenzionale è dello 0.40% , la componente di tensione longitudinale σ_{yy} è negativa, pertanto, durante lo scarico, il provino è stato sottoposto ad una lieve di compressione. Nel punto di scarico le tensioni tangenziali σ_{xy} sono di un ordine di grandezza inferiore rispetto alle componenti σ_{xx} , mentre negli altri due istanti di acquisizione le stesse σ_{xx} e σ_{xy} presentano lo stesso ordine di grandezza. Si osserva infine che le componenti di tensione σ_{xx} e σ_{yy} risultano simmetriche rispetto all'asse longitudinale del provino, mentre le componenti tangenziali σ_{xy} sono emisimmetriche.

Osservando la figura 5.36, relativa ad una deformazione convenzionale del 4.05% , si possono notare le sezioni d'asse in cui si sono formati i picchi della componente di tensione σ_{yy} .

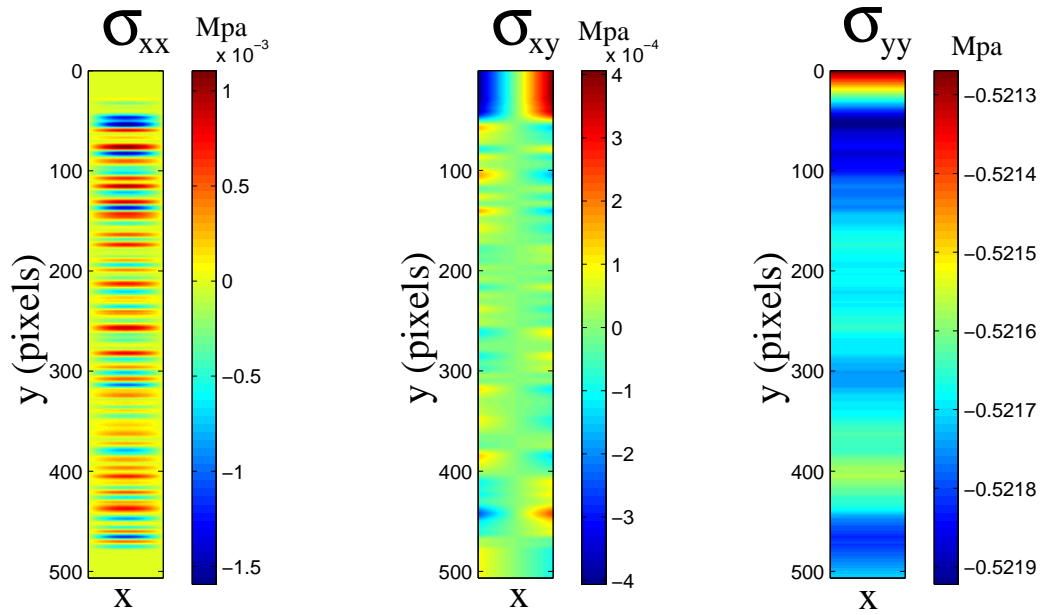


Figura 5.35: Componenti del tensore di tensione di Cauchy per $\epsilon_C = 0.40\%$.

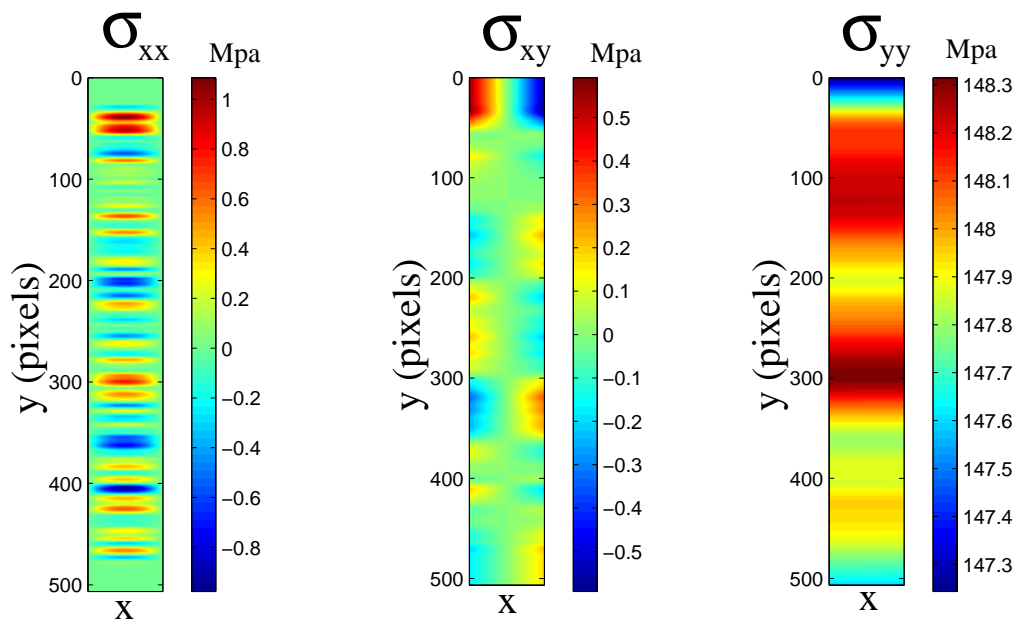


Figura 5.36: Componenti del tensore di tensione di Cauchy per $\epsilon_C = 4.05\%$.

Analisi della velocità di deformazione

I risultati illustrati nelle prossime figure si riferiscono al calcolo della velocità di deformazione di Lagrange. La presentazione dei risultati ripercorre lo schema seguito per la prova di trazione monotona.

L'evoluzione temporale $\dot{E}_{yy}(0, y, t)$ della componente di velocità di deformazione sull'asse y del provino è rappresentata contestualmente alla tensione convenzionale, acquisita nel tempo. Il grafico è riportato sulla parte sinistra della figura 5.37, in cui l'asse orizzontale rappresenta il tempo e l'asse verticale è l'insieme dei punti costituenti la generatrice del provino, nei quali sono state misurate le velocità di deformazione. Sulla parte destra della stessa figura è illustrato il profilo delle velocità di deformazione dell'asse del provino in corrispondenza dell'istante di picco massimo della tensione convenzionale. La traccia di tale profilo è indicata con a in figura 5.37. Dal profilo a si ricavano le posizioni delle sezioni di formazione delle localizzazioni, nonché la posizione precisa della sezione di rottura, che corrisponde a 270 pixels di distanza dal bordo superiore del dominio osservato. Dall'esame della figura 5.37 si evince che la prova risulta omogenea e priva di localizzazioni fino all'istante di acquisizione numero 500, in corrispondenza del quale la velocità di deformazione è ancora inferiore a $4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Le localizzazioni si formano nella fase finale dell'ultimo ramo di carico,

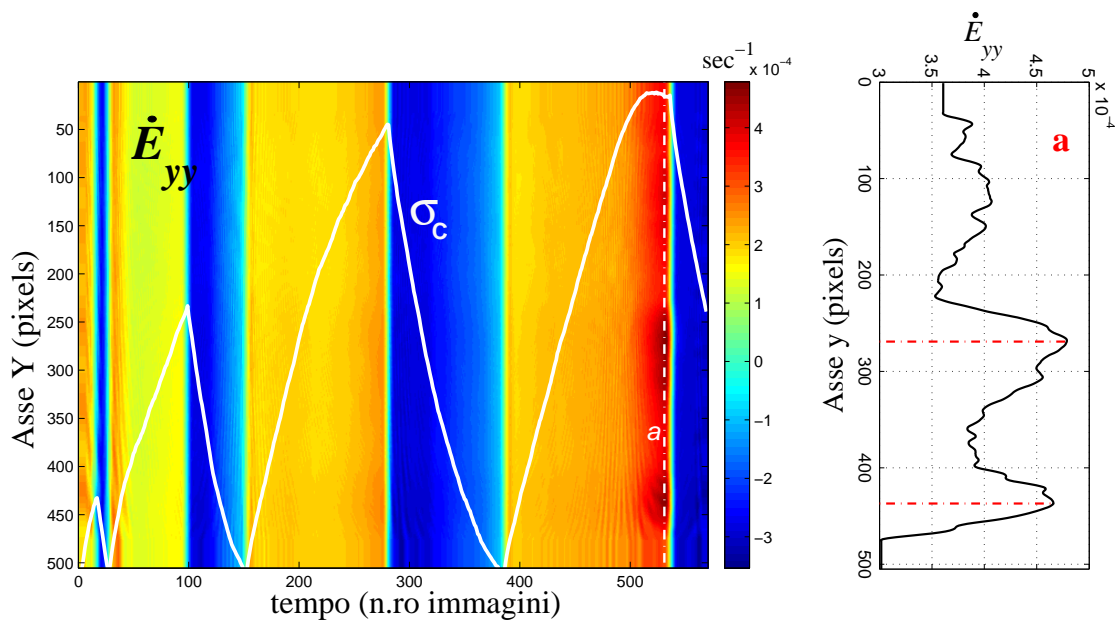


Figura 5.37: *Evoluzione della velocità di deformazione \dot{E}_{yy} in sec^{-1} .*

in corrispondenza della quale si registrano incrementi della velocità di deformazione dell'ordine di $5 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

I risultati dei calcoli afferenti alla velocità di deformazione sono riportati ancora nella figura 5.38 sotto forma di curve di livello. Dall'esame della figura si osserva che nei primi istanti della prova si formano piccole superfici a velocità di deformazione costante. Esse si espandono nel corso del primo ramo di carico, e si contraggono durante il primo ramo di scarico. Durante il secondo ramo di carico le superfici a velocità costante continuano ad espandersi progressivamente fino ad una velocità di deformazione di $1.22 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. In corrispondenza di tale incremento di deformazione la curva tensione convenzionale - tempo di acquisizione cambia pendenza, la risposta della prova diventa complessivamente omogenea, e la componente della velocità di deformazione \dot{E}_{yy} diviene parallela alla generatrice del provino.

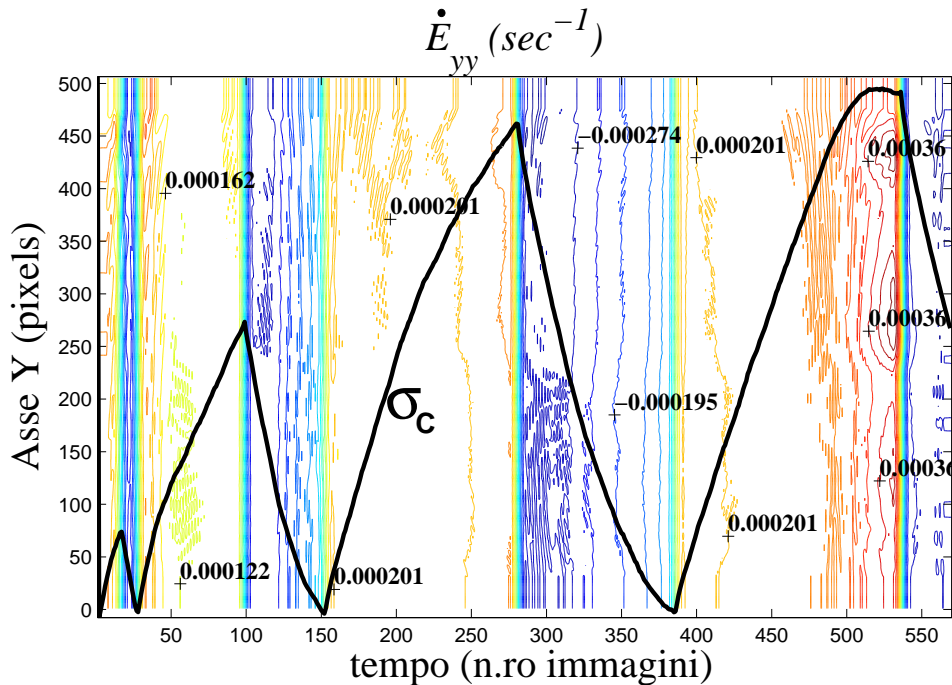


Figura 5.38: Curve di livello sull'evoluzione temporale di \dot{E}_{yy} .

Negli ultimi istanti del quarto ramo di carico si osserva la formazione di tre punti di localizzazione nei quali la velocità di deformazione supera il valore di $4 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, e la risposta del materiale diventa eterogenea. La concentrazione delle curve di livello verso le sezioni di localizzazione inizia a partire dal valore di picco della tensione convenzionale massima, dopo il quale la curva tensioni - deformazioni convenzionali

5.2 Applicazioni sperimentali

si adagia su un breve tratto a pendenza negativa, che precede l'ultimo ramo di scarico della prova ciclica.

Le successive figure 5.39, 5.40, 5.41 presentano le distribuzioni, sulla superficie monitorata del provino, delle componenti di velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} riferite alle deformazioni convenzionali dell'1.16%, 2.64% e 3.49% rispettivamente. Per

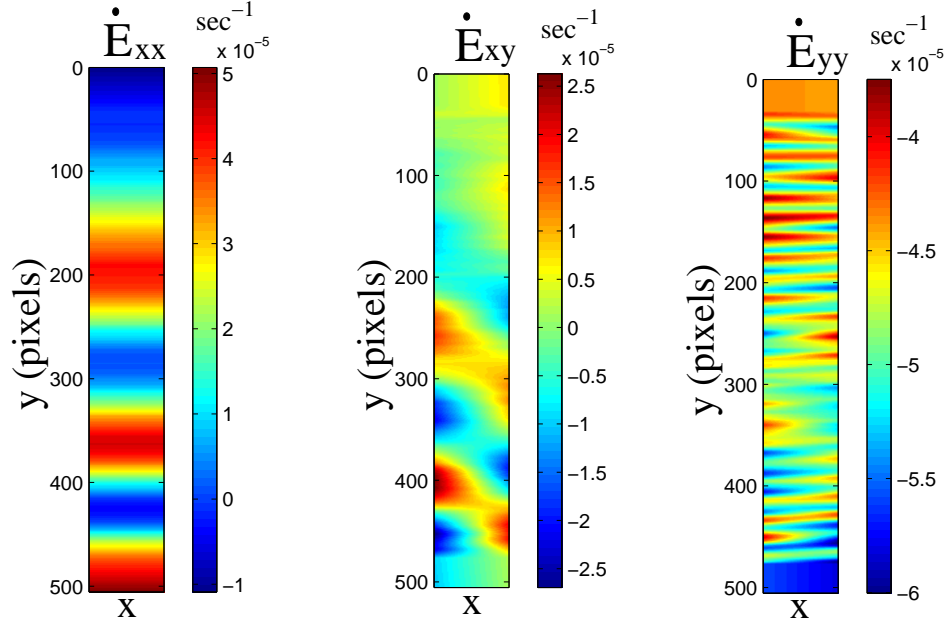


Figura 5.39: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 1.16\%$.

una deformazione convenzionale dell'1.16% la componente di trazione risulta sensibilmente eterogenea lungo l'asse del provino. Tale eterogeneità subisce una degradazione in corrispondenza della deformazione convenzionale del 2.64%, in cui cominciano a formarsi le zone di localizzazione. La sezione di formazione della rottura diventa evidente in corrispondenza della distribuzione di velocità afferente alla deformazione convenzionale del 3.49%, dove si osserva anche un'ulteriore sezione di localizzazione. La sezione di formazione della rottura è risultata ortogonale all'asse del provino.

Per ciascuno dei livelli di sollecitazione monitorati, e per ognuna delle posizioni sull'asse del provino la componente trasversale di velocità di deformazione è costante in direzione x . La componente \dot{E}_{xx} aumenta meno rapidamente rispetto alla componente longitudinale di velocità di deformazione. Il rapporto tra i valori assoluti $|\dot{E}_{yy}|/|\dot{E}_{xx}|$ passa dal valore 1.6 per $\varepsilon_C = 2.64\%$ ad un valore di 2.5 per $\varepsilon_C = 3.49\%$. La componente mista \dot{E}_{xy} si è rivelata sempre inferiore rispetto alle altre due compo-

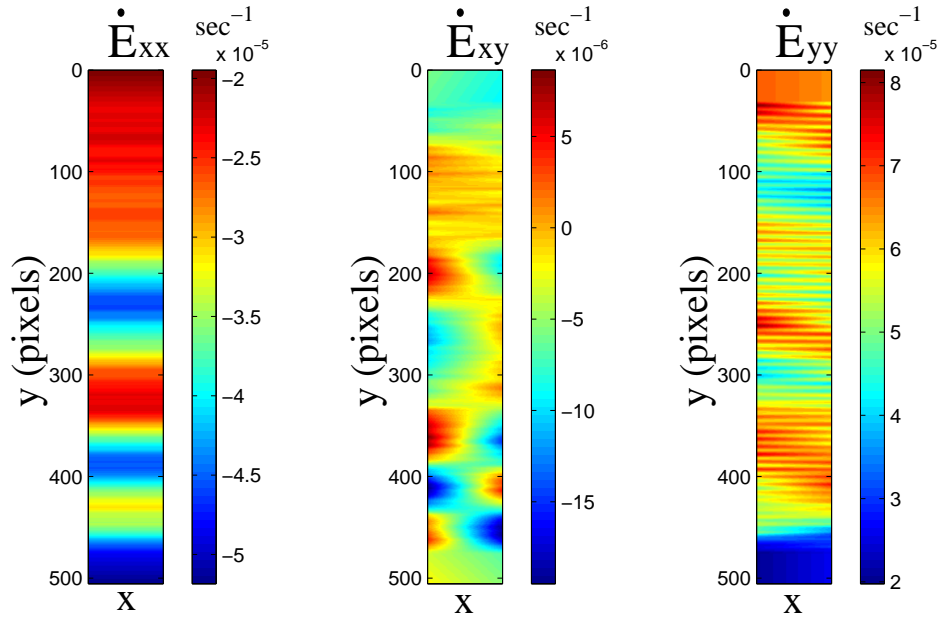


Figura 5.40: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 2.64\%$.

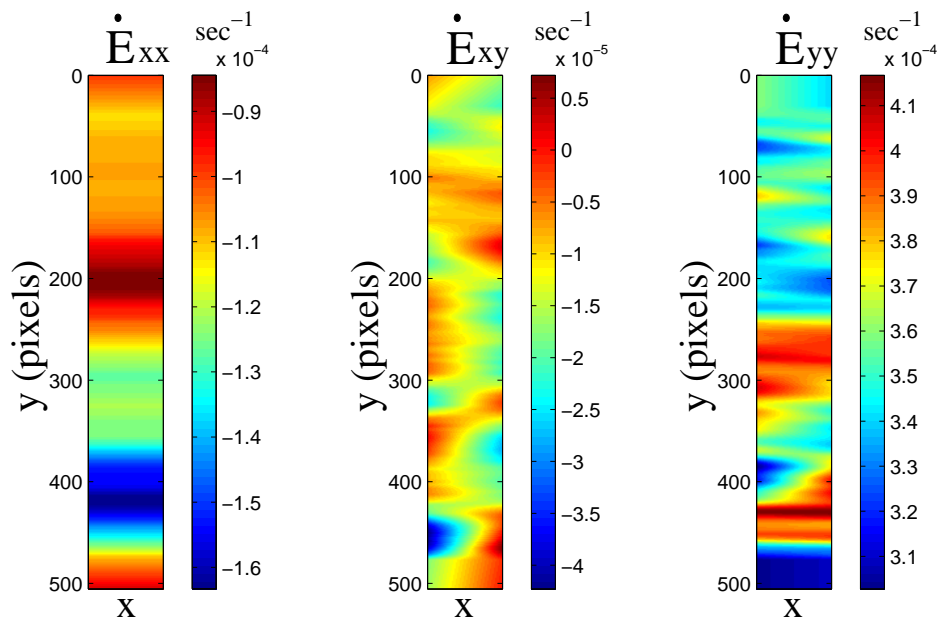


Figura 5.41: Velocità di deformazione \dot{E}_{xx} , \dot{E}_{xy} , \dot{E}_{yy} per $\varepsilon_C = 3.49\%$.

5.2 Applicazioni sperimentali

menti di velocità di deformazione, e la sua distribuzione è all'incirca omogenea nella direzione d'asse del provino.

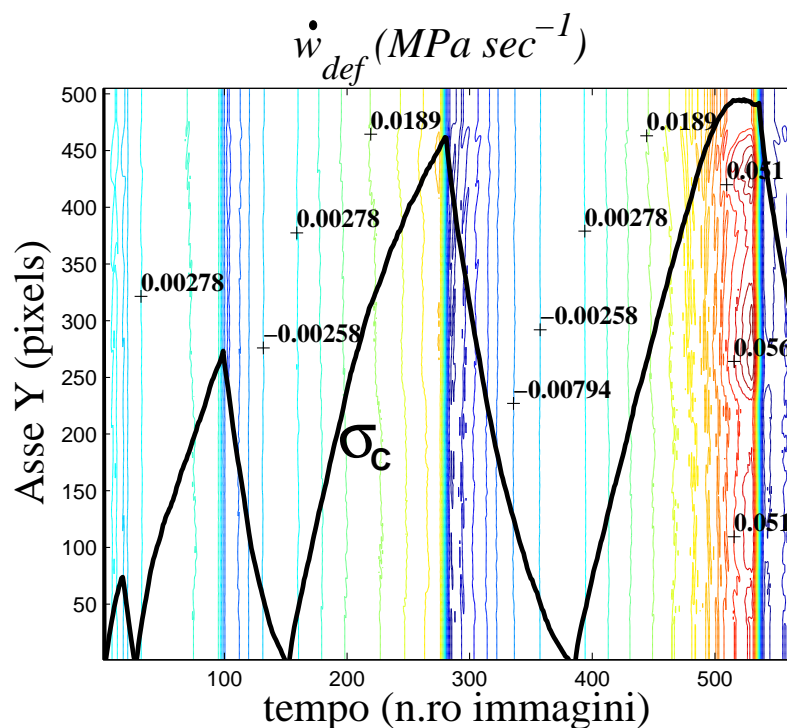


Figura 5.42: Curve di livello sull'evoluzione temporale di \dot{w}_{def} .

Anche per la prova ciclica di carico è stata stimata l'evoluzione temporale della velocità di energia di deformazione sull'asse del provino. I calcoli sono stati eseguiti utilizzando la formula (5.13). I risultati sono messi in evidenza dalle curve di livello illustrate in figura 5.42; tale figura conferma la risposta omogenea del materiale in condizione di carico ciclico, nonchè la formazione delle sezioni di concentrazione delle localizzazioni in corrispondenza degli istanti finali dell'ultimo ramo di carico.

5.2.4 Applicazione del metodo di identificazione inverso

In questo paragrafo vengono esposti e discussi i risultati ottenuti applicando il metodo di identificazione inverso presentato nel paragrafo 2.5. Tale metodo di identificazione è oggetto di una ricerca attualmente in corso presso l'LMGC di Montpellier, dove è coordinata da S. Pagano e B. Wattrisse.

Il metodo di identificazione inverso ha permesso di calcolare i parametri elastici ed il danneggiamento subito dal materiale composito PA66 durante la prova monoassiale di carico.

Poichè il materiale composito PA66 è un materiale a fibre corte con dispersione random nella matrice polimerica, in questa fase, è stato ipotizzato una risposta da materiale isotropo. Pertanto, ai fini della valutazione dei parametri elastici, le indagini sono state indirizzate al calcolo del modulo di Young e del coefficiente di Poisson in condizioni di materiale integro non danneggiato. Lo stesso metodo di identificazione ha permesso di stimare la degradazione del modulo di rigidezza secante subita dal materiale nel corso della prova di trazione monotona. Il danneggiamento è stato valutato utilizzando il rapporto tra il modulo di Young del materiale, valutato per ogni step della fase evolutiva del materiale, ed il modulo di Young iniziale.

I parametri di filtering, utilizzati nei calcoli, sono stati scelti in conformità con i risultati ottenuti nel paragrafo 2.5.1, che ha riguardato l'analisi di robustezza del metodo. La procedura di identificazione è stata implementata all'interno del software agli elementi finiti Cast3M[®]. Per le sue caratteristiche, tale software si è rivelato adatto al lavoro da eseguire; il software Cast3M[®] consente di calcolare agevolmente i moltiplicatori di Lagrange, nonché di sovrapporre due mesh di elementi finiti distinte, trasferendo facilmente i dati tra le due mesh.

La geometria e le dimensioni del modello implementato sono state quelle della superficie del provino monitorata attraverso la C.C.D. Un dominio rettangolare delle dimensioni di 9.0 mm di larghezza e di 63.0 mm di lunghezza è stato discretizzato utilizzando l'elemento finito QUA4, formulato in stato piano di tensione, ed estratto dalla libreria di Cast3M[®]. L'elemento finito QUA4 è un elemento finito quadrangolare a quattro nodi, che utilizza funzioni di forma lineari, ed è dotato dei gradi di libertà traslazionali UX ed UY per ciascun nodo.

Lo stesso dominio rettangolare è stato discretizzato con due mesh distinte e sovrapposte, che hanno avuto in comune i quattro vertici e le condizioni al contorno del problema.

La prima mesh, è stata formata da 60 elementi finiti lungo la lunghezza del rettangolo e da 12 elementi finiti nella direzione della larghezza. Ai nodi della prima mesh

5.2 Applicazioni sperimentali

sono stati assegnati i valori degli spostamenti calcolati con la tecnica di correlazione delle immagini digitali.

La seconda è stata una mesh più rada, formata da 30 elementi finiti lungo la lunghezza del rettangolo e da 1 solo elemento finito nella direzione della larghezza. Questa mesh è stata utilizzata per il calcolo diretto degli spostamenti nodali e dei moltiplicatori di Lagrange secondo le (2.66), (2.67). Il calcolo diretto è stato eseguito nell'ipotesi di materiale isotropo, ed utilizzando, nella matrice elastica di primo tentativo, i parametri ottenuti dai risultati esposti nel paragrafo 5.2.2: $E_0 = 7840$ MPa, $\nu = 0.4$. I risultati dell'identificazione sono stati ottenuti attraverso due minimizzazioni successive del funzionale (2.61).

I due grafici riportati di seguito illustrano rispettivamente le stime del modulo di Young e del coefficiente di Poisson in condizione di materiale integro non danneggiato. Tali risultati sono stati ottenuti utilizzando i dati di spostamento e di carico afferenti al primo istante di acquisizione del processo evolutivo monotono.

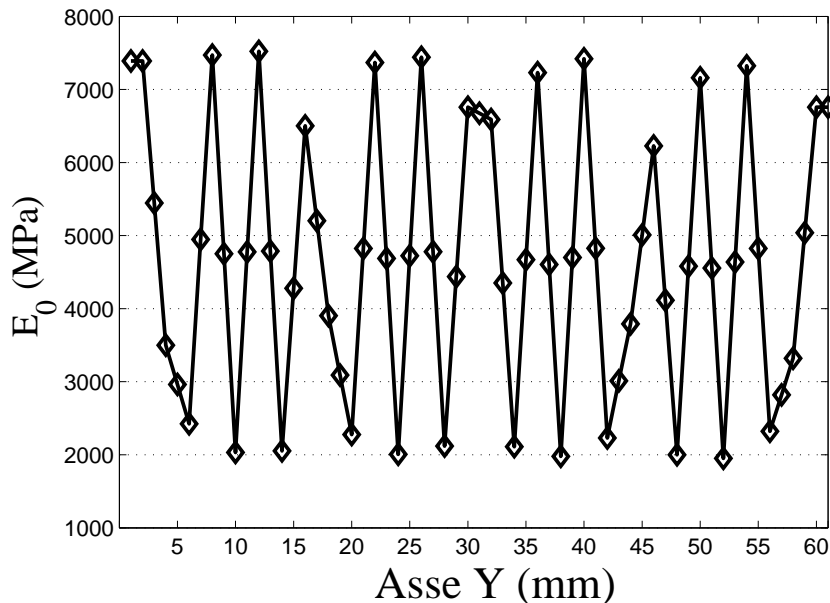


Figura 5.43: *Distribuzione del modulo di Young iniziale lungo l'asse del provino.*

La distribuzione del modulo di Young iniziale lungo l'asse del provino è riportata in figura 5.43. Da tali risultati si osserva che il materiale PA66 non è omogeneo e presenta una variabilità locale del modulo di Young compresa tra 2000 MPa e 7800 MPa. Tale variabilità è da attribuire alla distribuzione random delle fibre all'interno della matrice, e ad una loro concentrazione variabile all'interno del materiale. In corri-

spondenza delle posizioni d'asse in cui il modulo di Young è maggiore di 7000 MPa è da ipotizzare un'elevata concentrazione di fibre parallele alla direzione del carico. Viceversa in corrispondenza di un modulo elastico dell'ordine di 2000 MPa la risposta del materiale è dominata dalla matrice.

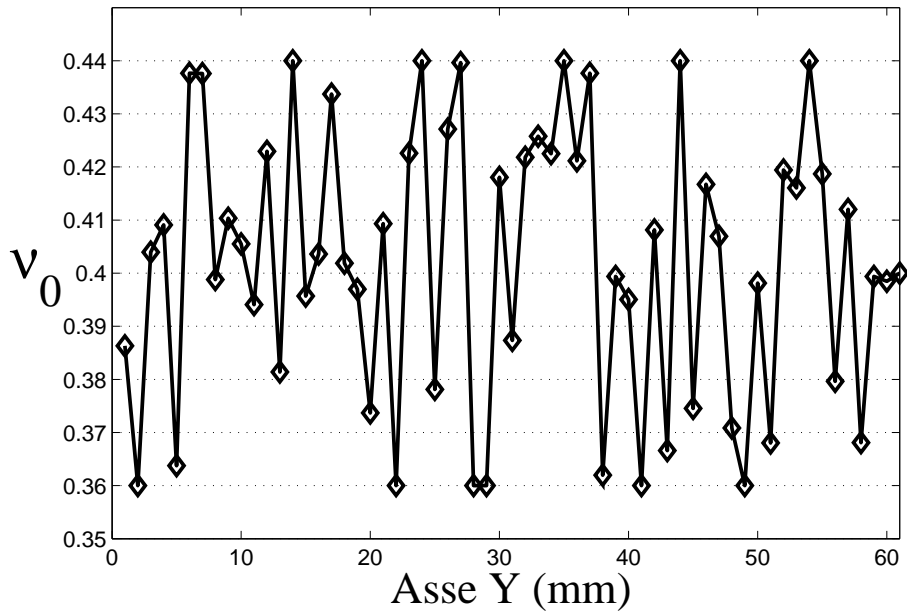


Figura 5.44: *Distribuzione del coefficiente di Poisson lungo l'asse del provino.*

Lo stesso metodo inverso di identificazione ha permesso di stimare la distribuzione del coefficiente di Poisson lungo l'asse del provino. I risultati confermano i dati già discussi nel paragrafo 5.2.2 e si distribuiscono attorno al valore 0.4, che rappresenta la stima del coefficiente di Poisson per il materiale composito PA66.

Il modulo elastico secante è stato stimato in ciascun istante di acquisizione, nel quale sono noti il campo di spostamenti piani, ed il carico applicato dalla macchina servoidraulica. Il danneggiamento è stato stimato in ciascun punto dell'asse del provino per mezzo attraverso la formula (2.78). Al solito, in figura 5.45, viene proposta una rappresentazione dei risultati sotto forma di evoluzione temporale. Sul grafico è riportata la curva delle tensioni convenzionali. Si osserva che il materiale composito PA66 subisce una riduzione relativa del modulo secante molto bassa soltanto nei primissimi istanti, mentre per quasi tutta la durata della prova il valore del danneggiamento è compreso tra i valori 0.4 e 0.8.

Sullo stesso grafico sono indicati i segmenti di retta *a*, *b* e *c*, posizionati in cor-

rispondenza di tre sezioni distinte dell'asse, sulle quali sono stati tracciati i profili riportati nelle figure successive.

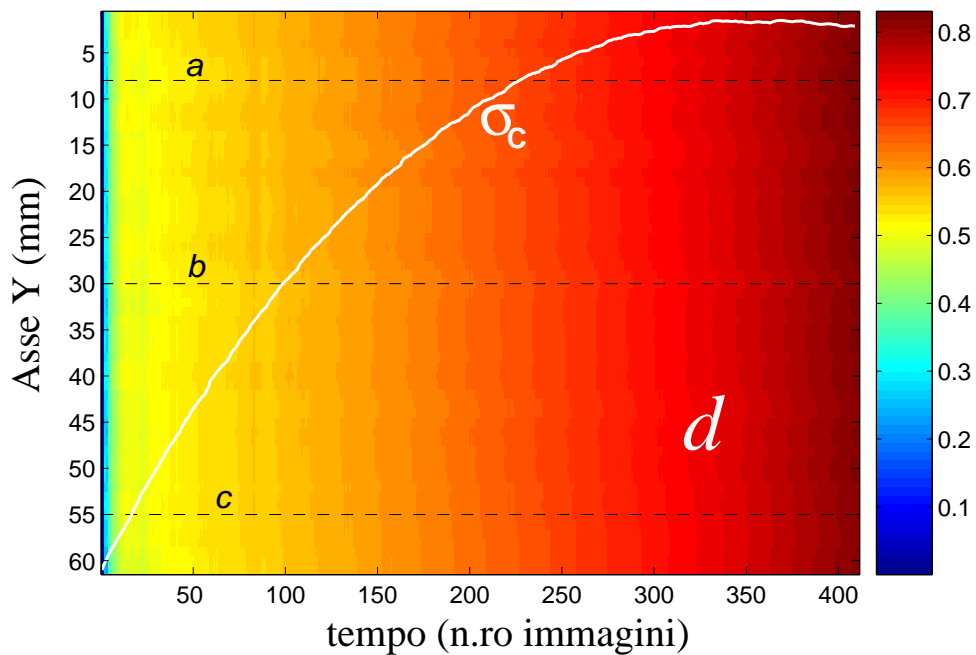


Figura 5.45: *Evoluzione temporale del danneggiamento nei punti d'asse del provino.*

Nelle figure 5.46, 5.47, 5.48 sono riportati tre gruppi di profili temporali, che rappresentano rispettivamente i profili del danneggiamento e del modulo di Young rispetto alla componente longitudinale della deformazione di Hencky ε_{yy} , ed i profili del modulo elastico rispetto alla componente longitudinale della tensione di Cauchy σ_{yy} . Dai risultati si osserva una perdita di rigidità repentina negli istanti iniziali della prova, durante i quali il materiale perde circa il 50% della sua rigidità. Nel rimanente tempo di prova la perdita di rigidità è più lenta e raggiunge l'80% del valore iniziale. Quest'ultima fase conferma il comportamento viscoso del materiale.

I profili, messi a confronto in figura 5.46, indicano una distribuzione uniforme del danneggiamento nei tre punti dell'asse del provino studiati.

Le figure 5.47, 5.48 indicano invece una dipendenza del cambiamento del modulo elastico tangente rispetto alla posizione lungo l'asse del provino. Tale dipendenza è dovuta, come è stato già osservato, ad una diversa disposizione delle fibre all'interno della matrice. Infine dalla figura 5.48 si riconosce la risposta plastica perfetta della matrice del PA66 negli ultimi istanti di osservazione, nei quali il modulo elastico si riduce progressivamente per una tensione costante pari a quella massima.

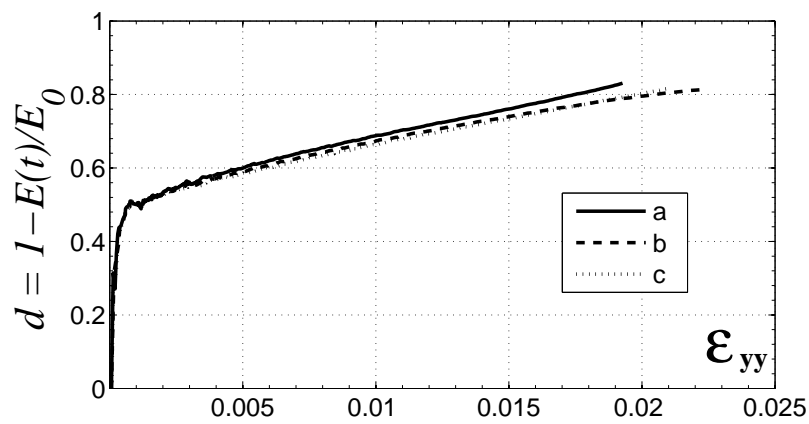


Figura 5.46: Profili temporali del danneggiamento rispetto alla deformazione longitudinale.

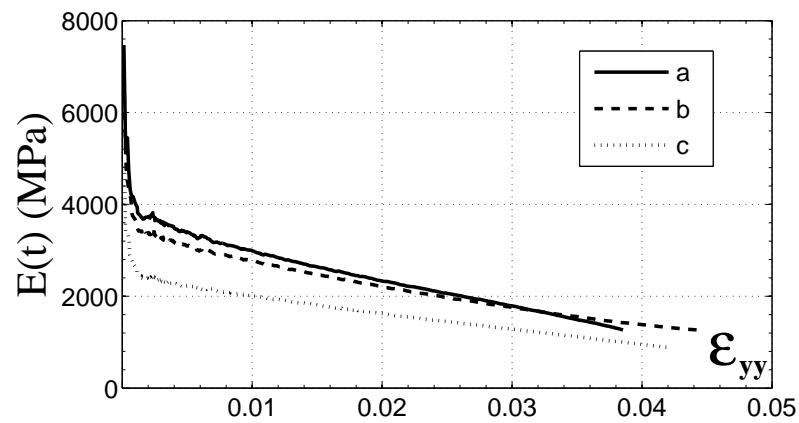


Figura 5.47: Profili temporali del modulo elastico rispetto alla deformazione longitudinale.

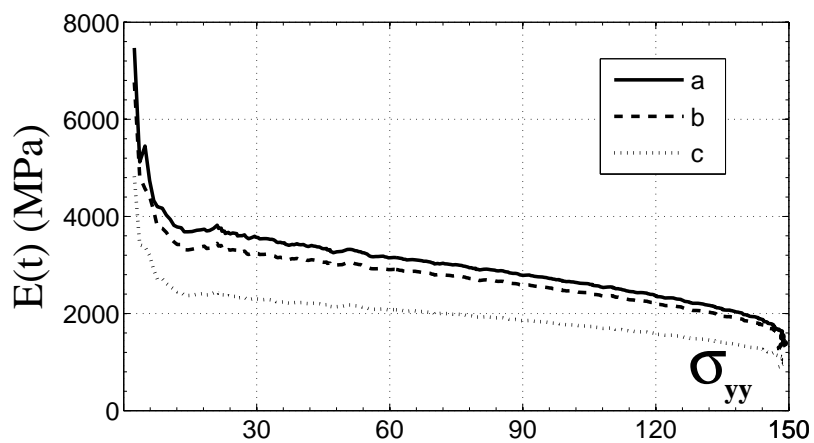


Figura 5.48: Profili temporali del modulo elastico rispetto alla tensione longitudinale.

5.3 Validazione del modello

Il modello di calcolo descritto nel capitolo 4 è stato applicato per l'analisi di problemi di danneggiamento intralaminare piani in piastre monostrato.

L'attenzione è stata rivolta all'implementazione di un modello di piastra in materiale isotropo, elasto-plastico danneggiabile. In alcuni punti della piastra implementata sono state calcolate le curve di legame tensione - deformazione totale e sono state stimate le deformazioni plastiche residue. L'obiettivo è stato quello di confrontare i risultati previsti dal modello di calcolo, proposto nel capitolo 4, con quelli ottenuti attraverso le prove sperimentali. Questi confronti hanno permesso di validare il modello e la sua efficacia nella stima delle componenti di tensione, di deformazione totale e di deformazione plastica.

Le analisi sono state condotte con riferimento ad una piastra rettangolare delle stesse dimensioni del dominio monitorato dalla C.C.D. nel corso delle prove di laboratorio. La piastra è stata vincolata agli spostamenti nel piano su uno dei due lati minori, mentre sull'altro lato minore è stata sottoposta ad una condizione di spostamento imposto uguale a quello applicato dalla macchina di prova al campione di materiale composito PA66. Per la particolare condizione di carico applicata il modello implementato si è ridotto ad una lastra caricata nel proprio piano.

La lastra, modellata all'interno del software agli elementi finiti Ansys 10.0 ha avuto le seguenti dimensioni lineari: $B = 9.0$ mm, $L = 63.0$ mm, $h = 3.93$ mm, dove h indica lo spessore della lastra. In figura 5.49 è illustrata una rappresentazione della geometria e della mesh utilizzati nelle analisi. Come materiale costituente la

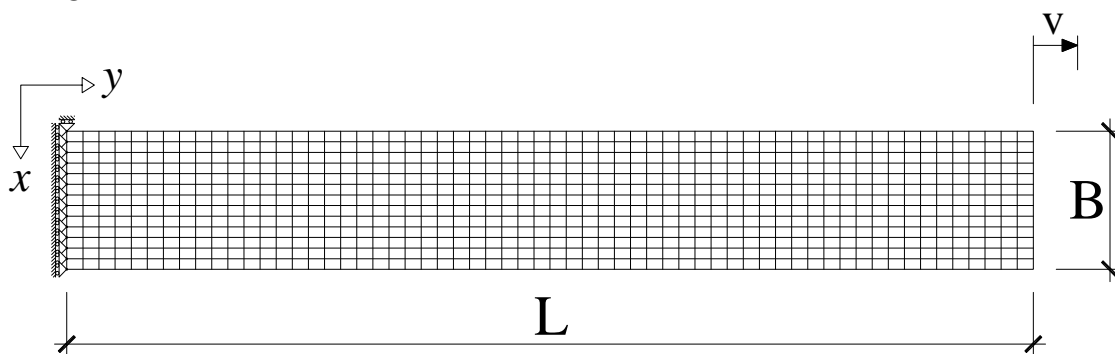


Figura 5.49: Vista della lastra e della mesh impiegate.

lastra è stato ipotizzato il composito PA66 con proprietà elastico lineare isotrope e caratteristiche meccaniche ricavate dai risultati ottenuti nel paragrafo 5.2.2:

$$E = 7840 \text{ MPa} \quad \nu = 0.4.$$

Inoltre le espressioni assunte per l'evoluzione della superficie di danneggiamento e di plasticità sono state rispettivamente le (5.15a) e (5.15b):

$$\gamma(\delta) = -3.7 \cdot \delta \quad (5.15a)$$

$$R(p) = -2.7 \cdot p, \quad (5.15b)$$

mentre i valori delle soglie di danneggiamento e di plasticità sono stati rispettivamente:

$$\gamma_0 = 0.01 \quad \text{ed} \quad R_0 = 3.8 \cdot 10^{-5}.$$

Per i parametri di resistenza al limite elastico nelle direzioni longitudinali, trasversale e tagliante sono stati utilizzati i valori riportati rispettivamente di seguito [Benabdallah, 1993]:

$$F_1 = 140 \text{ MPa}, \quad F_2 = 140 \text{ MPa}, \quad F_{12} = 70 \text{ MPa}.$$

È stato modellato il solo piano medio della lastra, che è stato discretizzato con una mesh uniforme, utilizzando elementi finiti di dimensioni con rapporti minimi tra i lati adiacenti non minori di 1/8. Gli stessi elementi finiti hanno avuto forma rettangolare e dimensioni 0.65 mm in direzione x ed 1.21 mm in direzione y . Tali dimensioni degli elementi finiti hanno permesso di confrontare i risultati numerici con quelli sperimentali.

Al lato minore della lastra, distante L dal lato vincolato è stato imposto uno spostamento in direzione \bar{U}_y di 5.9 mm, pari all'allungamento subito dal provino in composito PA66 al termine della prova sperimentale monotona.

Nelle figure 5.51, 5.52, 5.53 sono riportati i confronti tra i risultati sperimentali e numerici delle curve di legami tensione - deformazione totale afferenti a tre punti distinti del modello geometrico. I tre punti considerati per il confronto dei risultati si trovano sulle estremità ed in corrispondenza della sezione di localizzazione (figura 5.50).

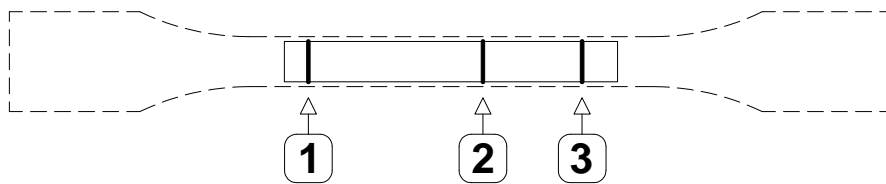


Figura 5.50: *Sezioni di confronto delle curve di legame.*

In figura 5.51 è riportato il confronto fra le curve di legame afferenti al punto di osservazione 1 in figura 5.50. Si osserva che la curva di legame, ottenuta dal

modello teorico approssima accettabilmente la curva di legame ricavata dalle misure sperimentali. Le due curve presentano la stessa pendenza all'origine, e la curva teorica sovrastima le tensioni in tutto l'intervallo di osservazione delle deformazioni. Inoltre in tale confronto la curva di legame numerica non coglie il comportamento perfettamente plastico del materiale per deformazioni superiori al 3%.

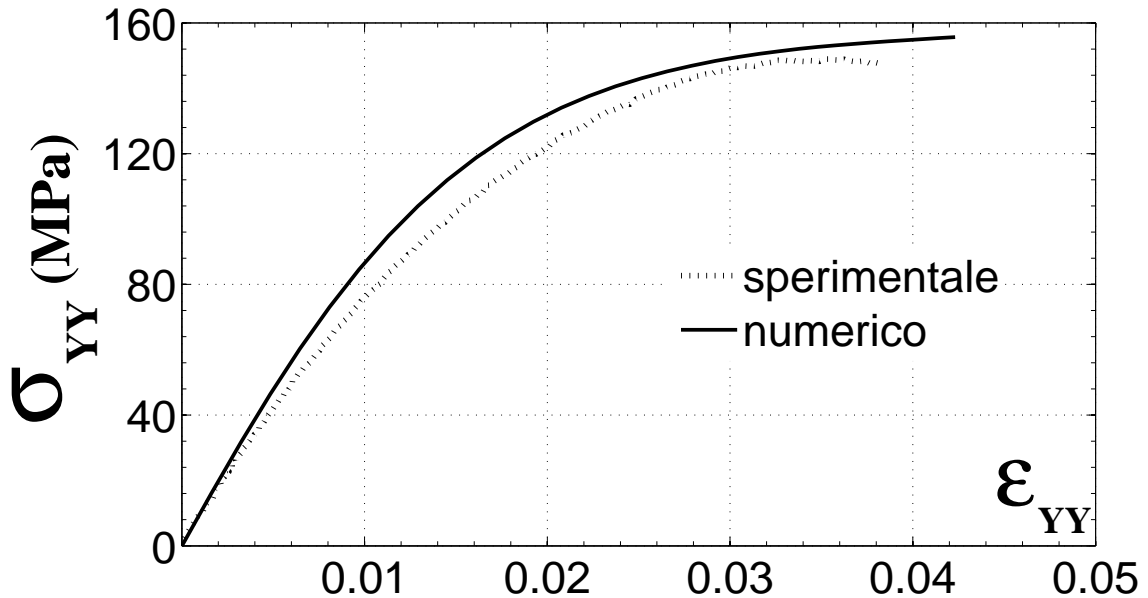


Figura 5.51: Confronto numerico-sperimentale nel punto di osservazione 1.

La successiva figura 5.52 illustra il confronto fra le curve di legame afferenti alla sezione di osservazione 2 in figura 5.50. Anche in questo esempio le due curve sono confrontabili con un margine di errore accettabile. Esse presentano la stessa pendenza all'origine ed in questo caso sono praticamente sovrapposte a partire dalla deformazione di 2.8% e per tutta la fase plastica del materiale. Le due curve stimano la stessa tensione massima. Una lieve differenza fra i due legami si può osservare nell'intervallo dei valori di deformazione compresi tra lo 0.25% ed il 2.8%, all'interno del quale la curva teorica sovrastima di poco il legame materiale.

Infine in figura 5.53 sono messi a confronti i legami tensione - deformazione relativi alla sezione di osservazione 3. Tale confronto conferma quanto già osservato per la sezione 2. Le due curve presentano una pendenza iniziale perfettamente coincidente, esse risultano sovrapponibili a partire dalla deformazione di 2.8% e per tutta la fase plastica del materiale. In questo esempio la tensione teorica massima è di poco inferiore alla tensione massima calcolata attraverso le misure di correlazione. Anche in

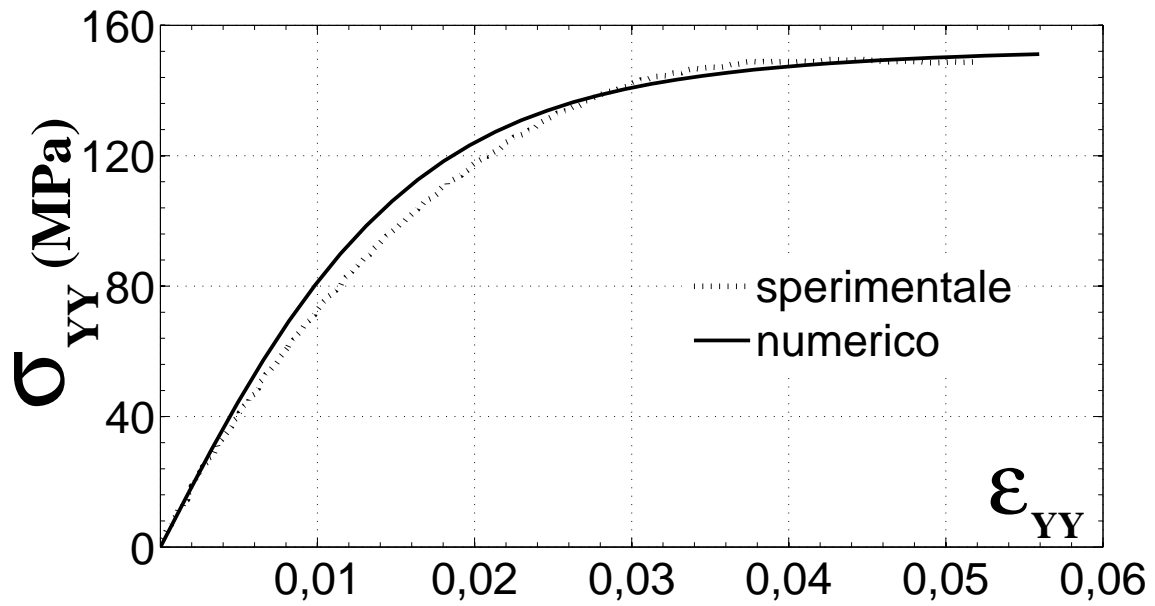


Figura 5.52: Confronto numerico-sperimentale nel punto di osservazione 2.

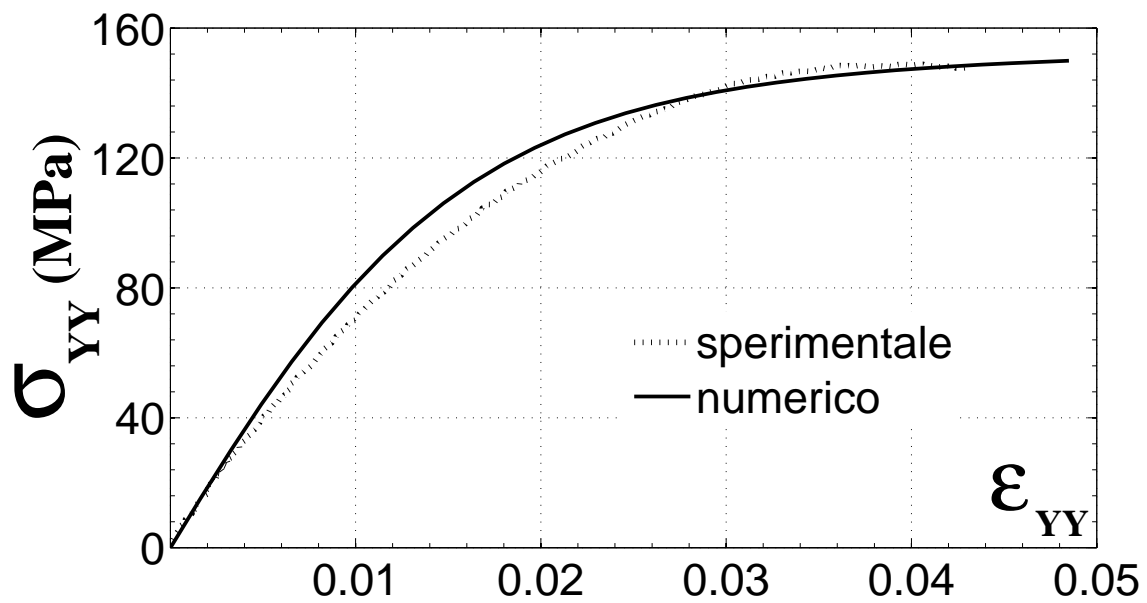


Figura 5.53: Confronto numerico-sperimentale nel punto di osservazione 3.

questo caso la curva teorica sovrastima il legame tensione - deformazione sperimentale nella fase elastoplastica del materiale.

Le figure 5.54 e 5.55 mettono a confronto le stime delle deformazioni plastiche residue all'interno del materiale rispettivamente nei punti di osservazione 2 e 3 di figura 5.50.

I grafici riportano in ascissa la deformazione totale, ed in ordinata i corrispondenti valori di deformazione plastica. Le curve mettono a confronto i risultati sperimentali ed i risultati del modello teorico. Ciascun punto dei dati sperimentali è stato ottenuto stimando le deformazioni residue allo scarico di ciascun ciclo della prova ciclica uniassiale. In corrispondenza della deformazione massima, raggiunta per ogni ramo di carico, sono state valutate le deformazioni plastiche previste dal modello teorico.

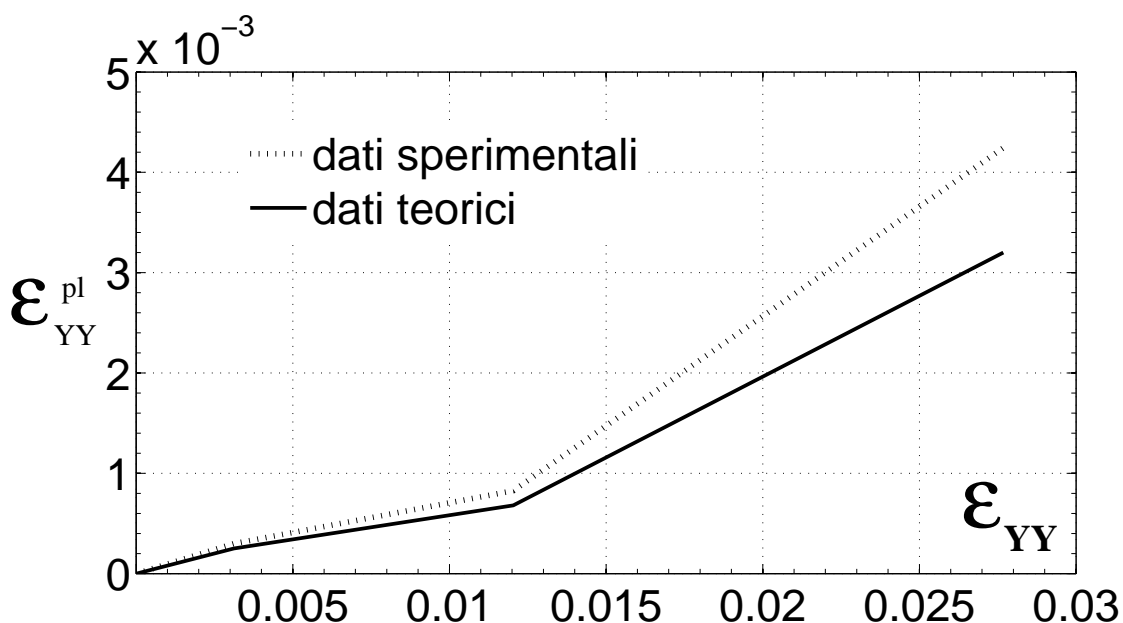


Figura 5.54: Confronto delle deformazioni plastiche stimate nel punto di osservazione 2.

In figura 5.54 sono illustrati i risultati afferenti alla sezione 2. Le due curve sono in buon accordo per deformazioni totali basse. A partire da valori della deformazione totale maggiori dell'1% i dati teorici sottostimano la deformazione plastica residua. Gli scostamenti tra le due curve sono risultati accettabili.

Considerazioni analoghe possono essere discusse per i risultati relativi alla sezione di osservazione 3, riportati in figura 5.55. In questo esempio le due curve sono risultate scostate anche per bassi valori delle deformazioni. In corrispondenza di ciascun valore

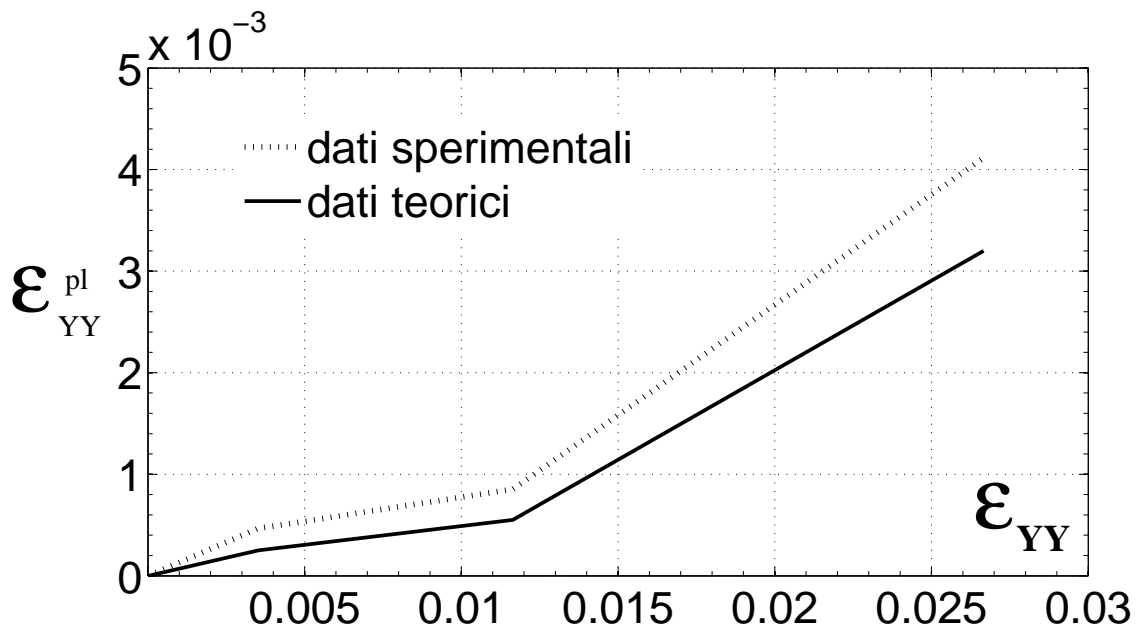


Figura 5.55: Confronto delle deformazioni plastiche stimate nel punto di osservazione 3.

residuo i risultati provenienti dall'applicazione del modello teorico hanno sottostimato le deformazioni plastiche residue misurate sperimentalmente.

I risultati illustrati in questo paragrafo hanno confermato un confronto accettabile fra i dati sperimentali e i dati ottenuti dal modello teorico.

Infine in figura 5.56 sono riportate le mappe del danneggiamento afferenti a tre diversi livelli di spostamento imposto. Esse, da sinistra verso destra, corrispondono rispettivamente al 10.2%, al 30% e al 100% dello spostamento finale.

Coerentemente con il modello implementato, si osserva una distribuzione isotropa del danneggiamento all'interno del dominio studiato. Le tre immagini illustrano un livello di degradazione crescente all'aumentare dello spostamento imposto. Le mappe illustrate riportano i valori del danneggiamento sul piano medio del modello numerico. Si osserva che, per uno spostamento imposto pari al 10.2% di quello finale, il modello è interessato da un danneggiamento compreso tra 0.13 e 0.13. Ad una percentuale del 30% dello spostamento finale imposto corrisponde un danneggiamento compreso tra 0.54 e 0.6. Infine in corrispondenza dello spostamento finale, il danneggiamento risulta compreso tra i valori 0.83 e 0.9.

Per ciascun livello di carico si osserva una distribuzione eterogenea degli effetti su una porzione finita di superficie, in prossimità del bordo vincolato. Su tale superficie il danneggiamento assume valori ridotti. Questa superficie si riduce man mano che

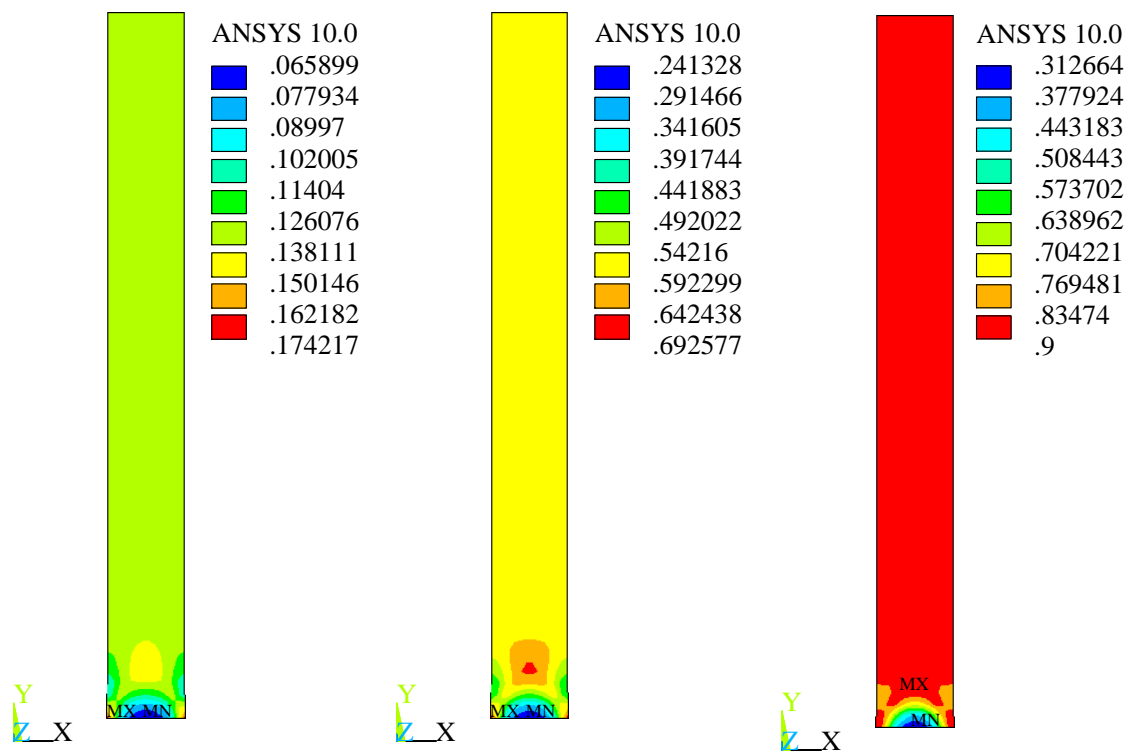


Figura 5.56: Mappe del danneggiamento per percentuali diverse dello spostamento imposto (\bar{U}_y). Da sinistra verso destra: 10.2%, 30% e 100% di \bar{U}_y .

lo spostamento imposto si avvicina al valore finale, in corrispondenza del quale gli effetti del danneggiamento risultano distribuiti su tutto il piano medio del modello.

Si propone un'analisi relativa ad un caso di carico e geometria più complesso. La geometria del modello implementato è riportata in figura 5.57 e prevede uno spessore costante pari a 0.15 mm e lati L_x ed L_y di lunghezza uguale a 10 mm. La piastra è incastrata in corrispondenza del lato AE, mentre al lato CD è applicato uno spostamento imposto \bar{U}_x pari a 0.5 mm. Per il materiale è stato previsto un comportamento isotropo, con proprietà meccaniche uguali a quelle stimate per il composito PA66:

$$E = 7840 \text{ MPa} \quad \nu = 0.4.$$

Le equazioni (5.15) sono state utilizzate per valutare l'evoluzione delle superfici di danneggiamento e di plasticità, per le cui soglie sono stati utilizzati i valori seguenti:

$$\gamma_0 = 0.01 \quad \text{ed} \quad R_0 = 3.8 \cdot 10^{-5}.$$

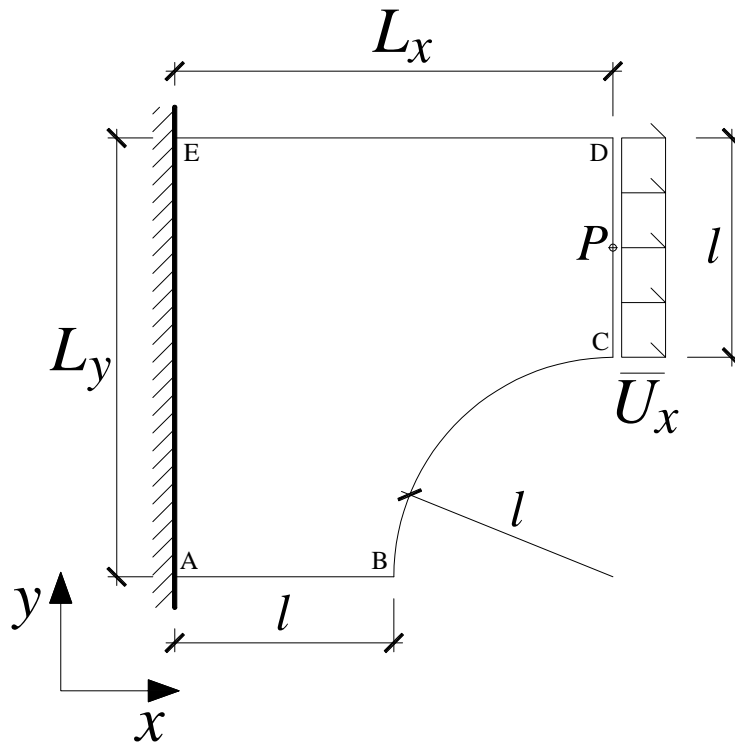


Figura 5.57: Settore di piastra sottoposto a spostamento imposto \bar{U}_x .

I calcoli sono stati effettuati attraverso un'analisi pseudotemporale, che per ciascun valore della variabile temporale prevede un incremento dello spostamento imposto ed un aggiornamento delle variabili interne. In figura 5.58 è stata riportata la curva carico-spostamento relativo al punto medio P del lato CD. Il grafico illustra una

curva normalizzata rispetto ai dati di carico e di spostamento; il suo andamento è inizialmente lineare fino ad un valore del carico prossimo al 40% del carico massimo. Successivamente il legame assume un andamento non lineare fino a raggiungere il picco di carico, a partire dal quale si osserva un'escursione dello spostamento in campo plastico per un valore pari a circa il 40% dello spostamento totale imposto.

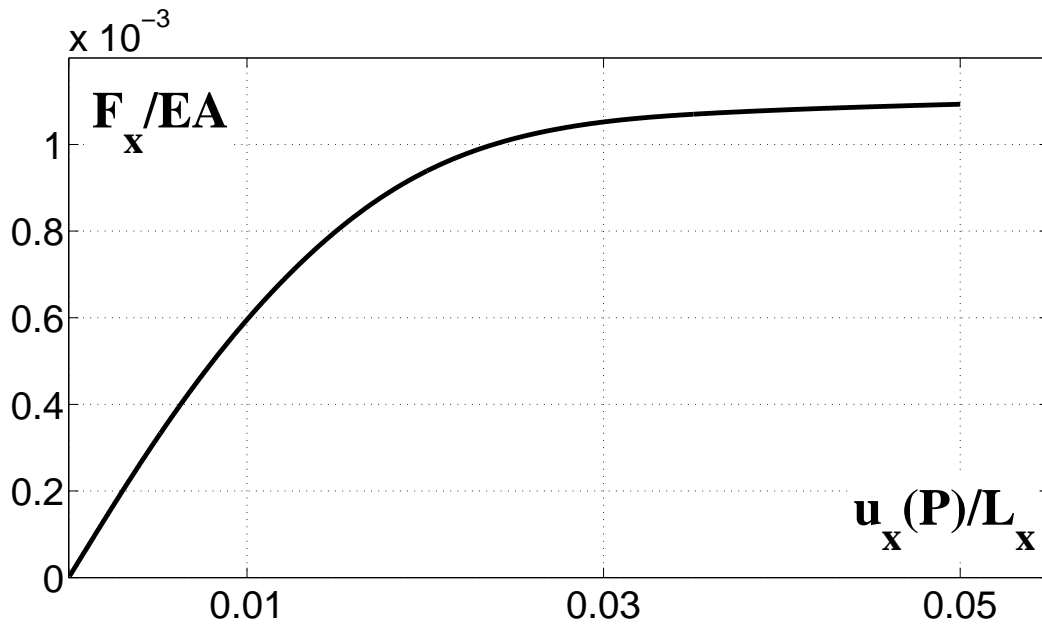


Figura 5.58: Curva carico-spostamento afferente al punto P del modello geometrico illustrato in fig. 5.57.

In figura 5.59 è stata riportata la mappa del danneggiamento diffuso sul modello implementato corrispondente ad un istante pseudotemporale in cui lo spostamento imposto sul lato CD della piastra è pari al 30% del valore finale \bar{U}_x . I risultati mettono in evidenza le zone di prima formazione del danneggiamento. In particolare, il danneggiamento si localizza in un intorno superficiale circostante il vertice C e tende ad espandersi attraverso una banda più ampia inclinata di 45 gradi. Il danneggiamento si riduce verso le zone più distanti, fino ad assumere valore nullo su un'ampia superficie circostante il lato AB. Le precedenti osservazioni sono confermate dall'esame della figura 5.60, che illustra la mappa del danneggiamento diffuso in corrispondenza dell'ultimo istante pseudotemporale in cui sul lato CD è imposto uno spostamento uguale al valore finale \bar{U}_x . In quest'ultima figura si nota chiaramente la formazione di una banda superficiale diagonale nella quale il danneggiamento ha un valore

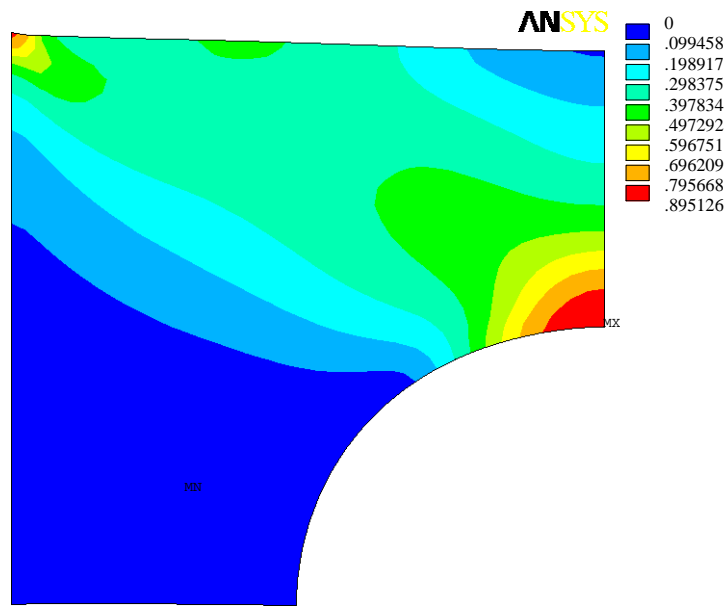


Figura 5.59: Mappa del danneggiamento diffuso per uno spostamento imposto pari al 30% di \bar{U}_x .

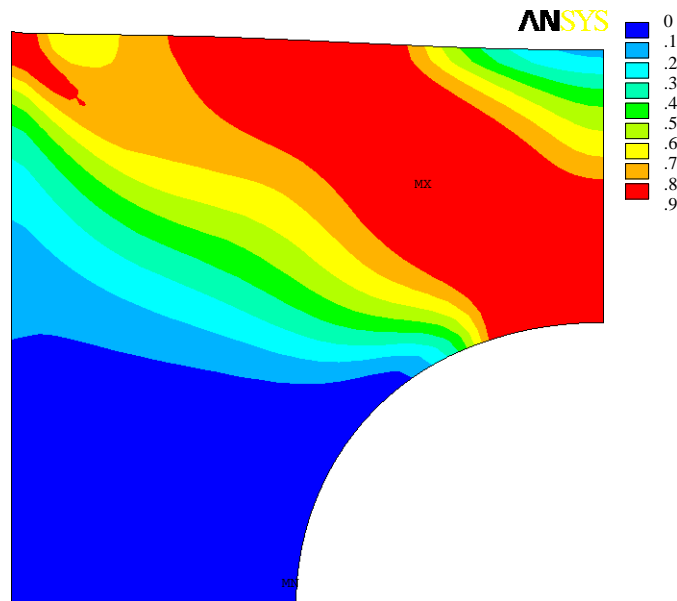


Figura 5.60: Mappa del danneggiamento diffuso per uno spostamento imposto uguale ad \bar{U}_x .

5.3 Validazione del modello

compreso tra 0.8 e 0.9. Tale banda si raccorda verso una zona a ridosso del vertice E, sul quale si forma un ulteriore picco di degradazione. Il danneggiamento si riduce progressivamente fino ad assumere valore nullo sul lato AB e sul vertice D della piastra.

Capitolo 6

Conclusioni

LA presente tesi di dottorato ha riguardato la problematica dei fenomeni di localizzazione relativi ad un particolare materiale composito a matrice polimerica, rinforzato con fibre corte di vetro a dispersione random. Lo studio di tale problematica è stato affrontato sia con una procedura sperimentale che con una teorica, confrontando i risultati ottenuti nei due ambiti di ricerca.

Le indagini sperimentali, svolte nel contesto di tale lavoro di tesi, sono state effettuate presso il “Laboratoire des Mécanique et Génie Civil” dell’Università di Montpellier II. Il crescente interesse delle industrie meccaniche, aeronautiche edili e civili verso i materiali compositi ha fatto progredire le collaborazioni fra le industrie produttrici del settore ed i centri di ricerca universitari, che studiano le proprietà dei materiali. Per tale motivo la scelta del materiale composito, indagato nel contesto di tale lavoro di tesi, è ricaduta sul “PA66”, verso il quale, da qualche anno a questa parte, si osserva un interesse crescente da parte del mercato dei materiali.

Nel corso delle prove di laboratorio alcuni campioni di materiale PA66 di spessore ridotto sono stati sottoposti a prove di trazione uniassiale monotona e ciclica. Entrambi i tipi di prova sono stati eseguiti in controllo di spostamento ed a velocità di deformazione costante. Con le indagini sperimentali è stata osservata la risposta meccanica del materiale in termini di misure cinematiche e di tensione. Uno specifico metodo di identificazione inverso ha permesso di stimare le proprietà elastiche iniziali del materiale. In particolare, valutando il modulo di Young in corrispondenza di ogni passo di carico è stata calcolata la degradazione del modulo elastico secante del materiale.

La tecnica sperimentale, utilizzata per l’analisi dei dati, provenienti dalle prove di laboratorio, è stata la correlazione delle immagini digitali (D.I.C.). Questa tec-

nica non perturba il campione sotto prova e non risente delle condizioni di prova (temperatura ambientale, frequenza ed entità del carico applicato), pertanto rende possibile un accurato monitoraggio del comportamento evolutivo del materiale fino ad una situazione ultima. La tecnica della correlazione delle immagini digitali fa uso di dispositivi sperimentali avanzati, che rilevano immagini granulari ad alta frequenza, e consentono una stima accurata delle componenti di spostamento nel piano di osservazione. Tali misure sono sempre, inevitabilmente inficiate dalla presenza del rumore elettronico, che causa una dispersione aleatoria dei dati in un intorno della soluzione reale. Gli effetti del rumore sono suscettibili di amplificazione durante le operazioni di derivazione, pertanto sono stati preventivamente abbattuti attraverso una procedura di filtering. Dopo il filtraggio dei dati specifiche procedure di derivazione numerica hanno permesso il calcolo delle componenti del tensore delle deformazioni e della velocità di deformazione.

La modalità di applicazione dei carichi durante le prove di laboratorio è stata di tipo quasi statica. Tale circostanza è stata confermata calcolando le accelerazioni subite dal materiale nel corso delle prove, e verificando la loro trascurabilità rispetto al campo gravitazionale. In questo modo è stato possibile integrare le equazioni indefinite di equilibrio di uno stato piano di tensione, e risalire alle componenti del tensore piano delle tensioni. La possibilità di utilizzare le componenti del tensore delle tensioni e della velocità di deformazione ha permesso di calcolare la velocità di energia di deformazione.

Il metodo di identificazione inverso, attraverso il quale sono state calcolate le proprietà elastiche del materiale, è integrato nel formalismo del “Metodo del GAP nelle equazioni costitutive” (Constitutive Equilibrium GAP Method). In questo contesto è definito un funzionale discreto che, facendo uso delle componenti di spostamento calcolate per mezzo della D.I.C., nonché di un campo di spostamenti ottenuti con il metodo diretto, attraverso due fasi di minimizzazione distinte, con le quali sono calcolate in maniera iterativa le proprietà elastiche del materiale ed uno stato tensionale equilibrato. L’applicabilità del metodo è stata verificata con uno studio di efficienza e di robustezza. Dopo avere elaborato un quadro teorico su cui basare gli algoritmi per l’elaborazione dei dati, sono stati generati dei campi numerici di spostamento, ai quali è stato aggiunto del rumore artificiale dalle caratteristiche compatibili con quello riscontrato durante alcuni test sperimentali. L’elaborazione dei dati così ottenuti ha permesso di calibrare i parametri di analisi delle immagini granulari. Il metodo inverso è stato implementato all’interno del programma Cast3M[®] attraverso delle macro di personalizzazione, per l’inserimento dei dati sperimentali ed il calcolo dei parametri materiali.

Il modello teorico è stato sviluppato mediante un approccio basato sulla Meccanica del Danneggiamento Continuo. In particolare, la formulazione è stata definita in coerenza con precedenti lavori [*Barbero and Lonetti, 2002*], che analizzano gli effetti del danneggiamento di tipo intralaminare accoppiato a fenomeni irreversibili. Si è, quindi, formulato un modello capace di valutare gli effetti combinati del danneggiamento e della plasticità, nonché la loro interazione durante la risposta di carico. Con la modalità di degradazione intralaminare sono stati analizzati i fenomeni di danneggiamento prodotti all'interno del materiale. L'irreversibilità del fenomeno ha richiesto che il problema venisse affrontato da un punto di vista termodinamico, formulando l'esistenza di un potenziale, che per piccole deformazioni è scomponibile in tre aliquote: la prima dipendente dai fenomeni elastici, la seconda aliquota dipendente dai fenomeni plastici e la terza dipendente dalle grandezze legate al danneggiamento. A partire dal potenziale termodinamico sono scaturite le leggi di evoluzione dei parametri interni, che hanno permesso uno studio dettagliato dei fenomeni irreversibili. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli provenienti dalle prove sperimentali.

Dai risultati ottenuti con le prove sperimentali e dall'applicazione del modello teorico si possono sintetizzare le seguenti conclusioni:

- I parametri elastici si sono rivelati localmente variabili, pertanto il materiale PA66 manifesta caratteristiche di materiale non omogeneo.
- L'analisi sperimentale delle proprietà cinematiche ha messo in evidenza una risposta omogenea del provino con fenomeni di localizzazione negli istanti finali delle prove.
- Nel corso della prova ciclica è stata osservata la formazione di più punti di localizzazione e dunque una migliore redistribuzione degli effetti.
- Gli assi principali di deformazione del provino non sono cambiati nel corso delle prove.
- Le componenti di tensione calcolate hanno messo in luce uno stato di tensione prevalentemente uniassiale, ed una distribuzione di tensioni trasversali che risente della distribuzione random delle fibre di vetro nella matrice polimerica.
- Il materiale composito PA66 è risultato danneggiabile a partire dai primi istanti della prova monotona. La sua risposta in termini di danneggiamento è stata inizialmente rigida, per effetto della reazione delle fibre, mentre per la durata maggiore della prova ha manifestato un comportamento tendenzialmente viscoso.

- Sono stati proposti dei confronti tra i risultati sperimentali e quelli previsti dal modello teorico. Le previsioni del modello teorico sono risultate attendibili ed in accordo con i risultati delle prove di laboratorio.

Il presente lavoro ha confermato l'importanza e l'affidabilità delle tecniche sperimentali avanzate nello studio della risposta meccanica dei materiali compositi e nell'identificazione dei fenomeni di localizzazione. Inoltre, i confronti tra i risultati sperimentali e quelli del modello proposto evidenziano un buon accordo nella valutazione della distribuzione del danneggiamento e della stima della capacità ultima del materiale.

Bibliografia

- Abdulkadir Gullu, Ahmet Ozdemir, and Emin Ozdemir.* **Experimental Investigation of the Effect of Glass Fibres on the Mechanical Properties of Polypropylene (PP) and Polyamide 6 (PA6) Plastics.** *Materials & Design*, 27(4):316–323, 2006.
- M. Akay and D.F. O'Regan.* **Fracture Behaviour of Glass Fibre Reinforced Polyamide Mouldings.** *Polymer Testing*, 14(2):149–162, 1995.
- L. Ascione and A. Grimaldi.* **Elementi di Meccanica dei Continui.** *Liguori Editore, Napoli*, 1989.
- S. Avril, M. Bonnet, A.S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron.* **Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements.** *Experimental Mechanics*, 48(4):381–402, 2008.
- Ba Nghiep Nguyen and Mohammad A. Khaleel.* **A Mechanistic Approach to Damage in Short-Fiber Composites Based on Micromechanical and Continuum Damage Mechanics Descriptions.** *Composites Science and Technology*, 64(5):607–617, 2004.
- E.J. Barbero and P. Lonetti.* **An Inelastic Damage Model for Fiber Reinforced Laminates.** *Journal of Composite Materials*, 36(8):941–962, 2002.
- S. H. Benabdallah.* **Shear strength resulting from static friction of some thermoplastics.** *Journal of Material Science*, 28(6):3149–3154, 1993.
- A. Bernasconi, P. Davoli, A. Basile, and Filippi A.* **Effect of Fibre Orientation on the Fatigue Behaviour of a Short Glass Fibre Reinforced Polyamide-6.** *International Journal of Fatigue*, 29(2):199–208, 2007a.

-
- A. Bernasconi, P. Davoli, D. Rossin, and C. Armani.* **Effect of Reprocessing on the Fatigue Strength of a Fibreglass Reinforced Polyamide.** *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(3):710–718, 2007b.
- A. Bernasconi, D. Rossin, and C. Armani.* **Analysis of the Effect of Mechanical Recycling Upon Tensile Strength of a Short Glass Fibre Reinforced Polyamide 6,6.** *Engineering Fracture Mechanics*, 74(4):627–641, 2007c.
- M. Bonnet and A. Constantinescu.* **Inverse Problems in Elasticity.** *Inverse Problems in Elasticity*, 21(2):R1–R50, 2005.
- M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Moliard, J.J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, and B. Wattrisse.* **Assessment of Digital Image Correlation Measurement Errors: Methodology and Results.** *Experimental Mechanics*, 49(3):353–370, 2009.
- J.L. Chaboche.* **Mechanical Behavior of Anisotropic Solids.** *Boehler, J.P., Martinus Nijhoff*, 1982.
- Chaboche J.L.* **Continuum Damage Mechanics - A Tool To Describe Phenomena Before Crack Initiation.** *Nucl. Eng. Des.*, 64(2):233–247, 1981a.
- Chaboche J.L.* **Continuum Damage Mechanics - A Tool To Describe Phenomena Before Crack Initiation.** *Nucl. Eng. Des.*, 64(2):233–247, 1981b.
- A. Chrysochoos.* **La Thermographie Infrarouge, un Outil en Puissance pour Etudier le Comportement des Matériaux.** *Mécanique & Industries*, 3(1):3–14, 2002.
- A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, and B. Wattrisse.* **Experimental Analysis of Strain and Damage Localization.** *Symposium on CONTINUOUS DAMAGE AND FRACTURE*, 1:41–51, 2000.
- J.P. Cordebois and F. Sidoroff.* **Damage Induced in Elastic Anisotropy.** *Coll. Euromech 115, Villard De Lans*, 1979.
- L. Corradi Dell'Acqua.* **Meccanica delle Strutture: Il Comportamento dei Mezzi Continui.** *McGraw-Hill, Milano*, 1992.
- L. Davison and A.L. Stevens.* **Thermodynamical Constitution of Spalling Elastic Bodies.** *Journal of Applied Physics*, 44(2):668, 1973.
-

- S.Y. Fu, B. Lauke, E. Mader, C.Y. Yue, and X. Hu.* **Tensile Properties of Short Glass Fiber and Short Carbon Fiber Reinforced Polypropylene Composites.** *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 31(10):1117–1125, 2000.
- M.G.D. Geers, R. de Borst, and T. Peijs.* **Mixed Numerical Experimental Identification of Non Local Characteristics of Random Fibre Reinforced Composites.** *Composites Science and Technology*, 59(10):1569–1578, 1999.
- G. Geymonat, F. Hild, and S. Pagano.* **Identification of Elastic Parameters by Displacement Field Measurement.** *Comptes rendus - Mécanique*, 330(6):403–408, 2002.
- G. Geymonat and S. Pagano.* **Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement: A Variational Approach.** *Meccanica*, 38(5):535–545, 2003.
- A. Godara and D. Raabe.* **Influence of Fiber Orientation on Global Mechanical Behavior and Mesoscale Strain Localization in a Short Glass Fiber Reinforced Epoxy Polymer Composite During Tensile Deformation Investigated Using Digital Image Correlation.** *Composites Science and Technology*, 67(11-12):2417–2427, 2007.
- L. Gorbatikh, D. Ivanov, S. Lomov, and I. Verpoest.* **On Modelling of Damage Evolution in Textile Composites on Meso Level via Property Degradation Approach.** *Composites: Part A*, 38(12):2433–2442, 2007.
- G. Guerrica-Echevarría, J.I. Eguiazàbal, and J. Nazàbal.* **Influence of the Preparation Method on the Mechanical Properties of a Thermotropic Liquid Crystalline Copolyester.** *Polymer Testing*, 20(4):403–408, 2001.
- S. Huguet, N. Godin, R. Gaertner, L. Salmon, and D. Villard.* **Use of Acoustic Emission to Identify Damage Modes in Glass Fibre Reinforced Polyester.** *Composites Science and Technology*, 62(10-11):1433–1444, 2002.
- V. Huon, B. Wattrisse, M.S. El Youssoufi, and A. Chrysochoos.* **Elastic behavior of anisotropic terra cotta ceramics determined by kinematic full-field measurements.** *Journal of European Ceramic Society*, 27(5):2303–2310, 2007.

-
- P. Iaccarino, A. Langella, and G. Caprino.* **A Simplified Model to Predict the Tensile and Shear Stress Strain Behaviour of Fibreglass aluminium Laminates.** *Composites Science and Technology*, 67(9):1784–1793, 2007.
- M. Johansson and K. Runesson.* **Viscoplastic with Dynamic Yield Surface Coupled with Damage.** *Computational Mechanics*, 20:53–59, 1997.
- J.U. Ju.* **On Energy Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects.** *International Journal of Solids and Structures*, 25:803–833, 1989.
- L.M. Kachanov.* **On The Creep Fracture Time.** *Izv. Akad Nauk Ussr Otd. Tekh.*, 8:26–31, 1958.
- D. Krajcinovic and G.U. Fonseka.* **The Continuous Damage Theory Of Brittle Materials - I, II.** *Journal of Applied Mechanics, Trans. Asme*, 48(809), 1981.
- Krajcinovic D.* **Constitutive Equation For Damaging Materials.** *Journal of Applied Mechanics, Trans. Asme*, 50(255), 1983.
- P. Ladeveze and E. Le Dantec.* **Damage Modelling of the Elementary Ply for Laminated Composites.** *Composites Science and Technology*, 43:257–267, 1992.
- A. Laksimi, L. Bounouas, S. Benmedakhene, Z. Azari, and A. Imad.* **Endommagement d'un Composite Polypropylène Renforcé par des Fibres de Verre Courtes: Approche Expérimentale.** *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(Série II b): 651–656, 2000.
- H.K. Lee, S. Simunovic, and D.K. Shin.* **A Computational Approach for Prediction of the Damage Evolution and Crushing Behavior of Chopped Random Fiber Composites.** *Computational Materials Science*, 29(4):459–474, 2004.
- J. Lemaitre.* **Evaluation of Dissipation and Damage in Metals,** volume 1. *Proc. I.C.M., Kyoto, Japan*, 1971.
- J. Lemaitre and J.L. Chaboche.* **Mechanics of Solid Materials.** *Cambridge, Uk*, 1990.
- J. Lemaitre and R. Desmorat.* **Engineering Damage Mechanics.** *Springer, Berlin Heidelberg*, 2005.
-

- J. Lemaitre and Chaboche J.L.* **Aspect Phenomenologique de la Rupture par Endommagement.** *Journal de Mecanique Applique*, 2:317–364, 1978.
- W. Lutz, Herrmann J., Kockelmann M., H.S. Hosseini, A. Jackel, S. Schmauder, S. Predak, and G. Busse.* **Damage Development in Short-Fiber Reinforced Injection Molded Composites.** *Computational Materials Science*, 45(3):698–708, 2009.
- L. McCuaig, L. Reginato, and K. Soudki.* **GFRP Retrofit for Façades in a Toronto School.** *Construction and Building Materials*, 22(2):61–69, 2008.
- F. Meraghni and Benzeggagh M.L.* **Micromechanical Modelling of Matrix Degradation in Randomly Oriented Discontinuous-Fibre Composites.** *Composites Science and Technology*, 55(2):171–186, 1995.
- Michael P. Wnuk.* **Constitutive Modeling of Damage Accumulation and Fracture in Multiphase Materials.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151(3-4):587–591, 1998.
- S. Moreau, A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, and B. Wattrisse.* **Analysis of Thermoelastic Effects Accompanying the Deformation of PMMA and PC polymers.** *Comptes rendus - Mécanique*, 333(8):648–653, 2005.
- B. Mouhmid, A. Imad, N. Benseddiq, S. Benmedakhène, and A. Maazouz.* **A Study of the Mechanical Behaviour of a Glass Fibre Reinforced Polyamide 6,6: Experimental Investigation.** *Polymer Testing*, 25(4):544–552, 2006.
- A. Mukherjee and S.J. Arwika.* **Performance of Externally Bonded GFRP Sheets on Concrete in Tropical Environments. Part I: Structural Scale Tests.** *Composite Structures*, 81(1):21–32, 2007.
- S. Murakami.* **On Constitutive Laws for Engineering Materials.** *Elsevier, Desai and Krempl*, 1987.
- R.W. Ogden.* **Non-Linear Elastic Deformations.** *Dover Publications, Inc., Mineola, New York*, 1983.
- R. Peyroux, A. Chrysochoos, C. Licht, and M. Löbel.* **Thermomechanical Coupling and Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys.** *International Journal of Engineering Science*, 36(4):489–509, 1998.

-
- J.N. Périé, S. Calloch, C. Cluzel, and F. Hild.* **Analysis of a Multiaxial Test on a C-C Composite by Using Digital Image Correlation and a Damage Model.** *Experimental Mechanics*, 42(3):318–328, 2002.
- J.N. Rabotnov.* **Creep Problems In Structural Members.** *Engl. Trans. By F.A. Leckie*, North-Holland, Amsterdam, 1969.
- S. Roux and F. Hild.* **From image analysis to damage constitutive law identification.** *NDT.net*, 11, 2006.
- J.C. Simo and Ju J.W.* **Strain-And Stress Based Continuum Damage Models - I, II.** *International Journal of Solids and Structures*, 23(7):821–869, 1987.
- J.C. Simo and M. Ortiz.* **A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations.** *Computational Mechanics Applied Mechanic Engineering*, 49:221–245, 1987.
- L.V. Smith and Y.J. Weitsman.* **Inelastic Behavior of Randomly Reinforced Polymeric Composites under Cyclic Loading.** *Mechanics of Time-Dependent Materials* 1, 1(3):293–305, 1997.
- H. Staudinger.* **From organic chemistry to macromolecules.** *Wiley-Interscience*, New York, 1970.
- G.X. Sui, Shing-Chung Wong, R. Yang, and C.Y. Yue.* **The Effect of Fiber Inclusions in Toughened Plastics - Part II: Ddetermination of Micro-mechanical Parameters.** *Composites Science and Technology*, 65(2):221–229, 2005.
- J.L. Thomason.* **Micromechanical Parameters from Macromechanical Measurements on Glass Reinforced Polyamide 6,6.** *Composites Science and Technology*, 61(14):2007–2016, 2001.
- J.L. Thomason.* **Interfacial Strength in Thermoplastic Composites - At Last an Industry Friendly Measurement Method?** *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 33(10):1283–1288, 2002.
- G.Z. Voyiadjis and B. Deliktas.* **A Coupled Anisotropic Damage Model for the Inelastic Response of Composite Materials.** *Computational Methods in Applied Mechanic Engineering*, 183:159–199, 2000.
-

- G.Z. Voyiadjis and Z. Guelzim. A Coupled Incremental Damage and Plasticity for Metal Matrix Composites.* Journal of Mechanic Behavior Material, 6: 193–219, 1996.
- B. Wattrisse, A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, and M. Némoz-Gaillard. Analysis of Strain Localization during Tensile Tests by Digital Image Corelation.* Experimental Mechanics, 41(1):29–39, 2001a.
- B. Wattrisse, A. Chrysochoos, J.-M. Muracciole, and M. Némoz-Gaillard. Kinematic Manifestations of Localisation Phenomena in Steels by Digital Image Correlation.* European Journal of Mechanics - A/Solids, 20(2):189–211, 2001b.
- Wattrisse Bertrand. Etude Cinematique des Phenomenes de Localisation dans des Aciers par Intercorrelation d’Image.* Université de MONTPELLIER II, Montpellier, 1999.
- Yi Pan, Lucian Iorga, and Assimina A. Pelegri. Numerical Generation of a Random Chopped Fiber Composite RVE and its Elastic Properties.* Composites Science and Technology, 68(13):2792–2798, 2008.
- Y. Zhang and T. Keller. Progressive Failure Process of Adhesively Bonded Joints Composed of Pultruded GFRP.* Composites Science and Technology, 68(2):461–470, 2008.