
Capitolo 1

Tecniche di Omogeneizzazione

Nel presente capitolo vengono brevemente presentate le diverse tecniche di omogeneizzazione utilizzate al fine di valutare le proprietà meccaniche effettive di materiali con microstruttura eterogenea. In particolare, si porrà l'attenzione sulle due principali teorie micromeccaniche presenti in letteratura: la *Teoria dei Campi Medi* e la *Teoria dell'Omogeneizzazione*.

Seppur basati su concetti e modellazioni differenti, si osserverà come tali due approcci possano condurre ad un'analogia valutazione dei moduli macroscopici.

1.1 Introduzione

Con il sempre crescente impiego dei materiali compositi come materiali da costruzione nei diversi ambiti dell'ingegneria, acquista un ruolo sempre più importante la previsione delle proprietà macroscopiche di tali materiali nonché il loro comportamento meccanico microscopico [Wang W.X. et al., 2006].

D'altro canto, tenere in conto nelle applicazioni progettuali le complesse eterogeneità, a livello microscopico, di un composito richiederebbe un costo computazionale notevole. A tal fine l'attenzione dei ricercatori del settore è stata indirizzata, negli ultimi anni, verso l'individuazione di metodi di analisi approssimati asintoticamente esatti, tali da consentire un'efficace valutazione delle proprietà effettive dei materiali eterogenei.

Sforzo principale della Micromeccanica è appunto la valutazione dei moduli effettivi di un composito eterogeneo mediante un'attenta analisi della microstruttura, al fine di utilizzare poi tali proprietà meccaniche macroscopiche nel progetto di elementi strutturali realizzati mediante tali materiali.

Oltre alle notevoli soluzioni analitiche presenti in letteratura [Halpin JC, Kardos JL, 1976; Mori T., Tanaka K., 1973], valide sotto ipotesi semplificative quali bassi valori

delle frazioni di volume delle inclusioni, è possibile individuare due metodologie di base per la valutazione della risposta macroscopica di compositi multi-fase: la *Teoria dei Campi Medi* e la *Teoria dell'Omogeneizzazione* [Hori M., Nemat-Nasser S., 1999].

In particolare, il primo approccio, di tipo fisico, si basa sull'evidenza che le proprietà meccaniche effettive valutate nelle sperimentazioni risultano essere delle relazioni tra i campi medi di deformazione e tensione, valutati su volumi microscopici eterogenei. I macrocampi sono definiti, quindi, come valori medi sul volume dei microcampi. Il secondo approccio invece, di tipo matematico, stabilisce un legame tra micro e macrocampi mediante l'utilizzo delle tecniche di perturbazione multi-scala, utilizzando una microstruttura di tipo periodico. I due approcci risultano, quindi, sostanzialmente differenti, in virtù anche delle diverse ipotesi sulla configurazione della microstruttura. In particolare, la teoria dei Campi Medi utilizza una tipologia di microstruttura molto semplice, come ad esempio un'inclusione isolata all'interno di un continuo illimitato. La teoria dell'Omogeneizzazione, basandosi invece su una microstruttura di tipo periodico, risulta applicabile a compositi con un arrangiamento microscopico sufficientemente regolare.

I due metodi possono produrre le stesse proprietà effettive quando la teoria dell'Omogeneizzazione viene formulata sotto particolari condizioni, ed entrambi vengono utilizzate spesso con l'ausilio del metodo FE.

1.2 Aspetti fondamentali del problema

I materiali compositi sono frequentemente adoperati per la fabbricazione di parti mediamente grandi di strutture, la cui risposta sotto carico dipende fortemente dalla microstruttura di tali materiali [Hollister S.J., Kikuchi N., 1992]. Analizzare, tuttavia, una struttura di dimensioni sufficientemente ampie a livello microscopico risulta essere un problema di difficile risoluzione, dato l'elevatissimo onere computazionale richiesto.

A tal riguardo consideriamo per semplicità un corpo linearmente elastico di volume B , i cui componenti abbiano un comportamento largamente eterogeneo. Si indichino con D e d rispettivamente le dimensioni caratteristiche della macro e della micro-scala,

come mostrato nella Fig.1.1 in cui vengono evidenziate le diverse eterogeneità che caratterizzano la microstruttura del materiale.

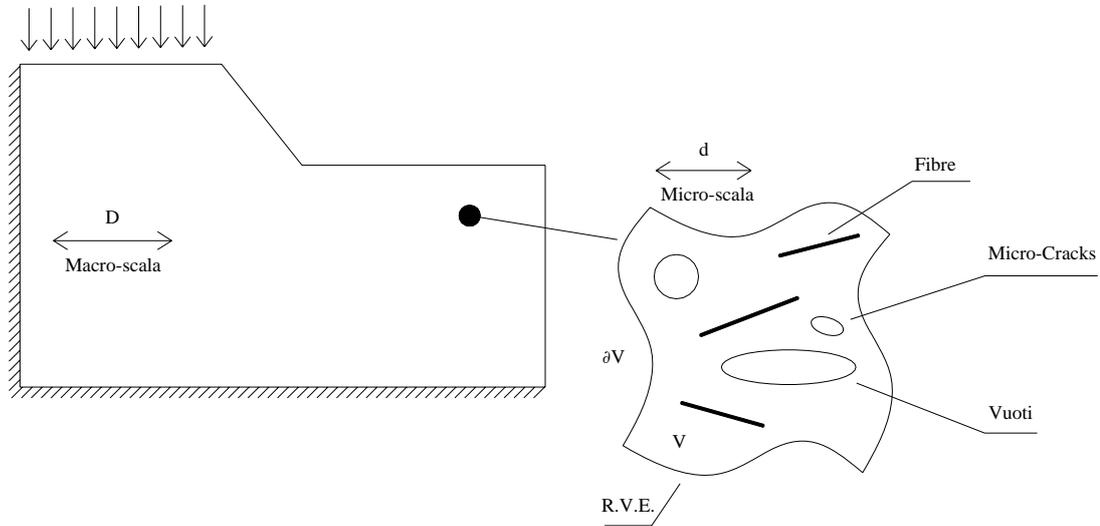


Figura 1.1. Corpo elastico lineare con microstruttura fortemente eterogenea.

Al fine di generalizzare l'analisi, viene considerata la possibilità che all'interno della sua microstruttura siano presenti vuoti, inclusioni, fibre o micro-cracks.

Indicando con D la dimensione caratteristica di un campione del materiale eterogeneo analizzato, con d quella relativa ad una delle possibili eterogeneità presenti al suo interno e con ε il rapporto tra le due, si assuma che:

$$\varepsilon = \frac{d}{D} \ll 1 \quad (1.1)$$

All'interno del corpo di volume B il tensore di elasticità varia rapidamente con la posizione spaziale occupata da un punto materiale, indicata mediante il vettore posizione macroscopico \mathbf{X} :

$$\mathbf{C}^\varepsilon = \mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{X}) \quad (1.2)$$

dove con l'apice ε si vuole evidenziare come la variazione del tensore di elasticità viene misurata a livello della microscala.

All'interno del volume possono poi definirsi rispettivamente i campi di spostamento, deformazione e tensione, variabili con il punto e valutati anch'essi a livello della scala microscopica:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{X}) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (1.3)$$

Assumendo l'assenza di forze di volume, come è lecito ipotizzare data l'elevata differenza di scala tra macro e microstruttura, tali campi devono soddisfare le classiche equazioni indefinite di equilibrio, le relazioni di congruenza nonché le equazioni di legame macroscopico:

$$\begin{cases} \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{X})) = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \text{sym}\{\nabla\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})\} \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{X})\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (1.4)$$

Dove con $\text{sym}\{\nabla\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X})\}$ si intende la parte simmetrica del gradiente del campo di spostamento. Nel caso in cui sulla superficie esterna del volume B sia applicato un campo di spostamenti assegnato $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$ su ∂B si ottiene un classico problema di equilibrio elastico con condizioni al contorno sugli spostamenti:

$$\begin{cases} \text{Div}(\mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{X})(\nabla\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}))) = 0 & \text{in } B \\ \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) & \text{in } \partial B \end{cases} \quad (1.5)$$

Tale problema non può essere risolto in questa forma a causa della rapida variazione puntuale del tensore di elasticità che avviene a livello della microscala di lunghezza caratteristica d , richiedendo uno sforzo notevole. Al fine di risolvere tale difficoltà operative occorre ricorrere, perciò, ad una teoria micromeccanica, in maniera tale da

operare in termini di campi di tensione e deformazione definiti a livello della macroscale di lunghezza caratteristica D , che definiremo, a tal riguardo, macrocampi.

1.3 Teoria dei Campi Medi

La teoria dei Campi Medi, come già osservato, è un approccio di tipo fisico per risolvere il problema della valutazione delle proprietà effettive di un materiale con microstruttura fortemente eterogenea come quello preso in considerazione. Essa trae spunto dal concetto di RVE (Representative Volume Element), che rappresenta un elemento di volume V isolato all'interno della microstruttura, rappresentativo delle proprietà microscopiche del materiale eterogeneo considerato, mediante il quale è possibile ottenere le proprietà omogeneizzate del materiale stesso [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993]. Esso può anche essere considerato come un campione di materiale da utilizzarsi per determinare le proprietà effettive sperimentalmente. Al fine di essere realmente rappresentativo delle proprietà del materiale circostante, l'RVE dovrà contenere tutte le eterogeneità che caratterizzano il materiale analizzato (Fig.1.2).

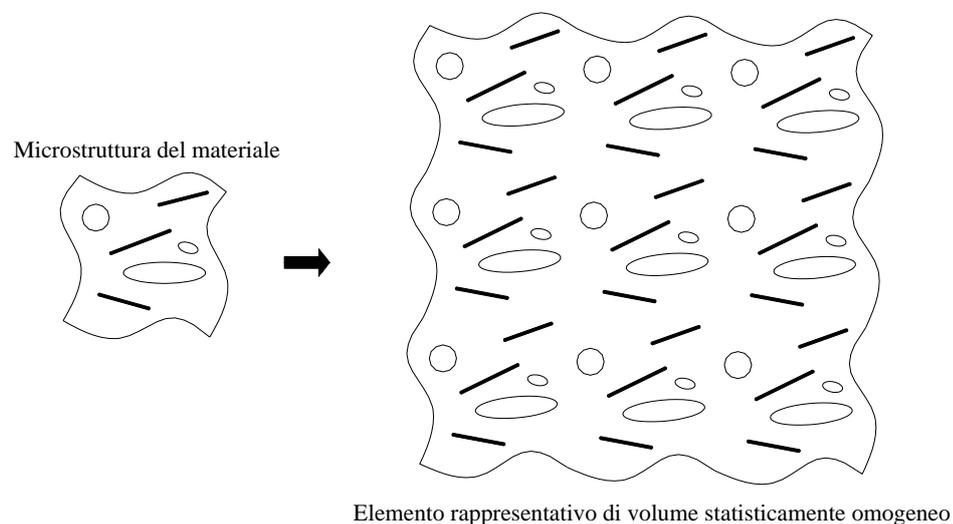


Figura 1.2 RVE come modello della microstruttura del materiale eterogeneo.

Nell'ambito dell'approccio in questione, le proprietà macroscopiche sono ottenute tramite relazioni tra i campi di deformazione e tensione valutati proprio sull'RVE, meglio noti come microcampi.

In particolare ci si riferisce ai valori delle macrodeformazioni e delle macrotensioni, misurati mediante gli spostamenti e le tensioni sul contorno dell'RVE, che tramite l'applicazione dell'integrazione per parti e del teorema di Gauss assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \frac{1}{2} [(\mathbf{u} \otimes \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u})] dS \Rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] dV \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS \Rightarrow \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove $\langle \cdot \rangle_V$ indica il valore medio sul volume dell'RVE, \mathbf{n} rappresenta la normale esterna al contorno ∂V , mentre \mathbf{u} e \mathbf{t} rappresentano rispettivamente gli spostamenti ed il vettore tensione sul contorno stesso, corrispondenti ai campi di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ e di tensione $\boldsymbol{\sigma}$. Si osserva come la seconda relazione delle (1.6) sia stata ottenuta sotto l'ipotesi di campo tensionale a divergenza nulla sul volume V , mentre la prima è valida in assenza di microvuoti e microfratture all'interno dell'RVE.

1.3.1 Macrocampi per la teoria dei Campi Medi

Partendo dalle relazioni (1.6) la teoria dei Campi Medi valuta i macrocampi come valori medi dei corrispondenti microcampi valutati sull'elemento di volume rappresentativo. Si introduce a tal riguardo una funzione peso $\phi_V = \phi_V(\mathbf{x})$, che assume un valore costante pari ad $1/V$ all'interno del volume, ad eccezione della zona nei pressi del contorno ∂V dove decade in maniera regolare a zero:

$$\begin{aligned} \int \phi_V dV &= 1 \\ \phi_V &= \begin{cases} 1/V & \text{in } V \\ 0 & \text{in prossimità di } \partial V \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

I campi macroscopici di spostamento, deformazione e tensione possono quindi essere ricavati, rispettivamente, come:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) \\ \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{X}) \\ \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon(\mathbf{X}) \end{Bmatrix} = \int_B \phi_V(\mathbf{X}-\mathbf{Y}) \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \\ \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \end{Bmatrix} dV_Y \quad (1.8)$$

L'utilizzo della funzione peso ϕ_V consente di evitare le possibili elevate oscillazioni dei campi di spostamento, deformazione e tensione che possono verificarsi a livello della microscala.

I macrocampi ottenuti devono soddisfare le classiche le relazioni di congruenza e le equazioni indefinite di equilibrio all'interno del volume B :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \text{sym}\{\nabla \mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{X})\} \\ \text{Div}(\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon(\mathbf{X})) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Di conseguenza, ottenuto un tensore di elasticità effettivo per il materiale omogeneizzato, per il quale vale il macrolegame costitutivo $\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{X})$, è possibile ottenere il seguente problema elastico con condizioni al contorno nelle variabili $\mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{X})$, detto macroproblema, valido all'interno del volume B :

$$\begin{cases} \text{Div}(\bar{\mathbf{C}}(\nabla \mathbf{U}^\varepsilon(\mathbf{X}))) = 0 & \text{in } B \\ \mathbf{U}^\varepsilon = \mathbf{u}^0 & \text{in } \partial B \end{cases} \quad (1.10)$$

In tali equazioni di governo compare, quindi, il tensore di elasticità effettivo $\bar{\mathbf{C}}$, che lega i valori medi delle micro-deformazioni a quelli delle micro-tensioni.

E' possibile valutare tali proprietà globali per il materiale omogeneizzato ad esempio considerando, per semplicità, un composito a due fasi omogenee, caratterizzato da un'inclusione isolata all'interno di una matrice illimitata. A tal proposito è utile introdurre il cosiddetto *tensore di concentrazione delle deformazioni*, che consente di valutare i campi medi delle deformazioni per l'inclusione (indicata con I) e per la matrice (indicata con M), rispettivamente:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I = \mathbf{A} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \quad (1.11)$$

Nella (1.11) $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I$ rappresenta la deformazione media all'interno dell'inclusione, legata a quella del composito mediante il tensore di concentrazione \mathbf{A} . Se f è la frazione di volume dell'inclusione è possibile scrivere la seguente uguaglianza mediante la quale si può risalire al tensore di elasticità globale:

$$\bar{\mathbf{C}} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = (1-f) \mathbf{C}^M \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_M + f \mathbf{C}^I \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I \quad (1.12)$$

dove \mathbf{C}^M e \mathbf{C}^I rappresentano rispettivamente il tensore di elasticità relativo alla matrice e quello relativo all'inclusione. Sostituendo nella (1.12) l'espressione ottenuta per la deformazione media nell'inclusione, nella quale compare la matrice di concentrazione delle deformazioni, si ottiene:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^M + f(\mathbf{C}^I - \mathbf{C}^M) \mathbf{A} \quad (1.13)$$

1.3.2 Materiale statisticamente omogeneo

Il materiale eterogeneo deve risultare *statisticamente omogeneo* affinché il tensore di elasticità effettivo sia rappresentativo per tutti i punti del dominio B . Un materiale statisticamente omogeneo risulta essere caratterizzato dal fatto che la probabilità di incontrare in un punto di esso una determinata fase non dipende dal punto stesso.

Definito il tensore di elasticità effettivo $\bar{\mathbf{C}}$ tramite il legame tra macro-deformazioni e macro-tensioni, risulta necessario fornire una relazione tra la media dell'energia di deformazione e la media del campo di deformazione:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{X}) \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{E}^\varepsilon(\mathbf{X}) = \int_B \phi_V(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon(\mathbf{Y}) \right) dV_Y \quad (1.14)$$

Affinché la (1.14) sia valida è necessario applicare il teorema della media per l'energia di deformazione [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993]:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u}) dV = \frac{1}{V} \int_V \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{u}) dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS \quad (1.15)$$

dove si è sfruttata l'ipotesi di campo tensionale a divergenza nulla. Sfruttando la (1.15) si ottiene la seguente uguaglianza fondamentale [Hill, 1963]:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_V - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{t} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \mathbf{n}) dS \quad (1.16)$$

la cui validità può essere dimostrata sviluppando il membro di destra, i cui singoli termini rispettano le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\partial V} -\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} dS &= -\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} -\mathbf{u} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \mathbf{n} dS &= -\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \mathbf{x} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \mathbf{n} dS &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dS &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \end{aligned} \quad (1.17)$$

Tale relazione di carattere generale mostra, quindi, come la (1.14) risulti essere valida solo nel caso in cui il secondo membro della (1.16) tenda a zero. Ciò si verifica quando V , che rappresenta il volume occupato dall'RVE, assume valori sufficientemente grandi all'interno del composito con microstruttura statisticamente omogenea.

Tuttavia, imponendo le condizioni di *spostamenti lineari o trazioni uniformi* sul contorno dell'elemento rappresentativo, il secondo membro della (1.16) tende a zero anche nel caso in cui il sottodominio V non è di tipo statisticamente omogeneo. Tali condizioni al contorno sono rappresentate mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{x} \Rightarrow & \text{Spostamenti lineari} \\ \mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n} \Rightarrow & \text{Trazioni uniformi} \end{cases} \quad (1.18)$$

L'imposizione di differenti condizioni al contorno conduce, tuttavia, ad una differente valutazione dei campi di deformazione e tensione sull'RVE. Ciò comporta che le proprietà meccaniche effettive per il materiale eterogeneo possono assumere valori differenti al variare delle condizioni al contorno imposte su ∂V .

Si perviene, quindi, alla *disuguaglianza universale* per l'energia di deformazione [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993]:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\Sigma} \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{\Sigma} \rangle_V \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}^G \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^G \rangle_V \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}^E \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^E \rangle_V \quad (1.19)$$

Dove con $\boldsymbol{\varepsilon}^{\Sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ ed $\boldsymbol{\varepsilon}^G$ sono stati indicati rispettivamente i campi medi di deformazione valutati nel caso di *Trazioni uniformi*, *Spostamenti lineari* o condizioni di tipo *generale* sul contorno dell'RVE, come mostrato anche nella Fig.1.3.

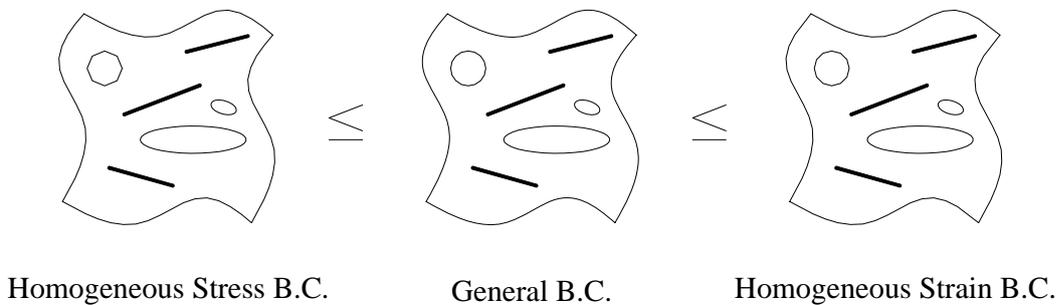


Figura 1.3 Disuguaglianza universale (Nemat-Nasser e Hori, 1993).

Al fine di ottenere univocamente un tensore di elasticità effettivo per il materiale circostante occorre scegliere l'elemento di volume rappresentativo in modo tale che valga:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{\Sigma} \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^{\Sigma} \rangle_V - \langle \boldsymbol{\varepsilon}^E \cdot \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^E \rangle_V \rightarrow 0 \quad (1.20)$$

1.4 Teoria dell'Omogeneizzazione

La teoria dell'Omogeneizzazione, che trae spunto da un approccio di tipo matematico, rappresenta una valida alternativa alla Teoria dei Campi Medi per la risoluzione del problema della valutazione del tensore di elasticità effettivo per un materiale eterogeneo. Partendo dalle equazioni di equilibrio per il corpo di volume B mostrate nelle (1.5) nelle variabili \mathbf{u}^ε , al fine di tenere in conto la rapida variazione a livello della microscala delle proprietà meccaniche del materiale, si opera la seguente posizione:

$$\mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{X}) \approx \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad (1.21)$$

dove \mathbf{x} rappresenta la coordinata caratteristica del punto a livello microscopico legata a quella macroscopica \mathbf{X} mediante:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}}{\varepsilon} \quad (1.22)$$

Solitamente si assume che $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ abbia un comportamento spazialmente periodico, e viene assunto un comportamento periodico della microstruttura come mostrato nella Fig.1.4.

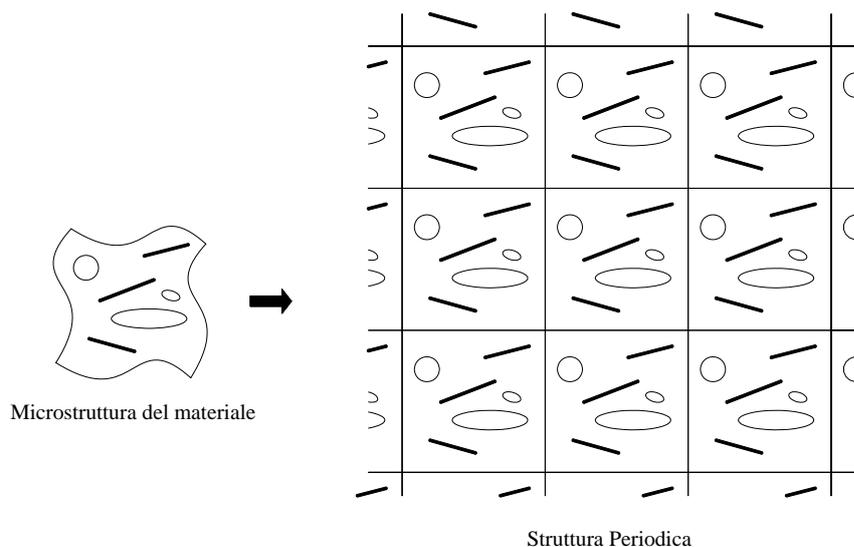


Figura 1.4 Microstruttura periodica per il materiale eterogeneo.

Le dimensioni della cella unitaria U sono dello stesso ordine di grandezza della lunghezza caratteristica della macroscale D .

1.4.1 Espansione asintotica per la teoria dell'Omogeneizzazione

La teoria dell'Omogeneizzazione trae spunto dalla cosiddetta tecnica di perturbazione multi-scala, assumendo la seguente espansione asintotica per il campo di spostamenti:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{X}) \approx \sum_{n=0} \varepsilon^n \mathbf{u}^n(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \quad (1.23)$$

dove la componente di ordine n presenta la medesima periodicità del tensore di elasticità $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ rispetto ad \mathbf{x} . Introducendo il cambiamento di variabili (1.22), il gradiente rispetto ad \mathbf{X} può essere espresso mediante la regola di derivazione di funzioni composte (chain rule):

$$\frac{d\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{d\mathbf{X}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \quad (1.24)$$

Ossia in termini simbolici:

$$\nabla(\circ) = \nabla_{\mathbf{X}}(\circ) + \varepsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{x}}(\circ) \quad (1.25)$$

Adottando la nuova espressione per il campo di spostamenti nonché il cambio di variabile per l'operatore differenziale, si ottengono le nuove equazioni di governo nelle variabili \mathbf{u}^n :

$$(\nabla_{\mathbf{X}} + \varepsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{C}(\mathbf{x}) ((\nabla_{\mathbf{X}} + \varepsilon^{-1} \nabla_{\mathbf{x}}) \sum_{n=0} \varepsilon^n \mathbf{u}^n(\mathbf{X}, \mathbf{x}))) = 0 \quad (1.26)$$

Manipolando la (1.26) si perviene alla formulazione estesa del problema:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-2} \left\{ \text{Div}_x (\mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}))) \right\} + \varepsilon^{-1} \left\{ \text{Div}_x (\mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}))) \right. \\
& + \text{Div}_x \mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \left. \right\} + \\
& + \sum_{n=0} \varepsilon^n \left\{ \text{Div}_x (\mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^n(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}, \mathbf{x}))) \right\} + \\
& + \text{Div}_x (\mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{u}^{n+2}(\mathbf{X}, \mathbf{x}))) \left. \right\} = 0
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Al fine di risolvere il problema, la teoria dell'Omogeneizzazione assume che la variabile di spostamento \mathbf{u}^0 sia funzione della sola coordinata caratteristica della macroscale \mathbf{X} , mentre per la \mathbf{u}^1 viene assunto un comportamento periodico all'interno della microscale di coordinata \mathbf{x} :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) \\ \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \chi^1(\mathbf{x})(\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \Rightarrow u_i^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \chi_i^{1,pq}(\mathbf{x}) u_{p,q}^0(\mathbf{X}) \end{cases} \tag{1.28}$$

dove la periodicit  di \mathbf{u}^1   garantita dalla presenza del tensore del terzo ordine, periodico rispetto ad \mathbf{x} , χ^1 , il quale pu  essere inteso anche come un tensore simmetrico del secondo ordine, tale che $\chi_i^{1,pq} = \chi_i^{1,qp}$ per ogni i ($i=1,2,3$).

Mediante tale posizione i termini di $O(\varepsilon^{-2})$ si annullano all'interno della (1.27), mentre quelli di $O(\varepsilon^{-1})$ divengono:

$$\text{Div}_x \left\{ \mathbf{C}(\mathbf{x}) \left[(\nabla_x \chi^1(\mathbf{x}) + \mathbf{I}^{(4s)}) (\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \right] \right\} \tag{1.29}$$

dove $\mathbf{I}^{(4s)}$ rappresenta il tensore identit  simmetrico del quarto ordine, il quale assume la forma $\mathbf{I}^{(4s)} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. Al fine di annullare anche i termini di tale ordine nell'equazione (1.27) occorre che χ^1 soddisfi le seguenti equazioni di governo con condizioni al contorno di tipo periodico:

$$\left\{ C_{ijpq} \chi_{p,q}^{1,kl} + C_{ijkl} \right\}_{,l} = 0 \quad (1.30)$$

Si può osservare come $\chi^I(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}))$ rappresenti un campo di spostamenti microscopico, il quale ha il compito di accomodare le tensioni non equilibrate $\mathbf{C}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}))$, associate al macrocampo di deformazione $Sym\{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})\}$. In particolare, le componenti $\chi_i^{1,pq}$ del tensore del terzo ordine simmetrico χ^I rappresentano gli spostamenti associati alle macrodeformazioni unitarie $\bar{\varepsilon}_{pq} = 1$. Determinato quindi il tensore periodico χ^I dalla risoluzione delle equazioni (1.30), nella (1.27) restano solo i termini di $O(\varepsilon^0)$ che hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} & Div_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \chi^I(\mathbf{x}) + \mathbf{I}^{(4s)})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \right\} + \\ & + Div_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^I(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, \mathbf{x})) \right\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Effettuando a questo punto la media sul volume della cella unitaria per la (1.31), i termini variabili a livello della microscala svaniscono restituendo l'equazione di governo nella variabile \mathbf{u}^0 :

$$Div_{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{C}}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}))) = 0 \quad \text{in } B \quad (1.32)$$

Aggiungendo la condizione sul contorno $\partial B \quad \mathbf{u}^0 \approx \mathbf{u}^\varepsilon$, si ottiene un problema con condizioni al contorno del tutto simile a quello ottenuto mediante la teoria dei Campi Medi. Il tensore di elasticità effettivo assume in questo caso il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \frac{1}{U} \int_U \mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \chi^I(\mathbf{x}) + \mathbf{I}^{(4s)}) dU \\ \Rightarrow \bar{C}_{ijkl} &= \frac{1}{U} \int_U (C_{ijpq} \chi_{p,q}^{1,kl} + C_{ijkl}) dU \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.4.2 Macrocampi per la teoria dell'Omogeneizzazione

Dipendendo il termine principale dell'espansione asintotica \mathbf{u}^0 solo da \mathbf{X} , esso corrisponde al macrocampo degli spostamenti valutato mediante la teoria dei Campi Medi. Il termine successivo, $\varepsilon \mathbf{u}^1$, apporta un contributo modesto rispetto al termine principale, annullandosi sulla cella unitaria, data la periodicit  di χ^1 , la deformazione media associata a $\mathbf{u}^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \chi^1(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X}))$. Tale termine rappresenta, quindi, il campo di fluttuazione per i microspostamenti, che la teoria dell'Omogeneizzazione assume periodico. Analogamente a quanto fatto per il campo di spostamenti, anche i campi deformativo e tensionale possono essere rappresentati mediante un'espansione asintotica:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\} \approx \sum_{n=0} \varepsilon^n \{\boldsymbol{\varepsilon}^n, \boldsymbol{\sigma}^n\} \quad (1.34)$$

Il primo termine di ciascuna espansione asintotica pu  essere espresso in funzione del primo termine di quella per il campo di spostamenti \mathbf{u}^0 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \text{sym}\{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})\} + \text{sym}\{\nabla_{\mathbf{x}} \chi^1(\mathbf{x})\}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \\ \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x})(\nabla_{\mathbf{x}} \chi^1(\mathbf{x}) + \mathbf{I}^{(4s)})(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})) \end{cases} \quad (1.35)$$

Essendo χ^1 periodico, il valore medio di tali campi, valutato sulla cella unitaria, assume il seguente aspetto:

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^0 \rangle_U(\mathbf{X}) = \text{sym}\{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^0(\mathbf{X})\} \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle_U(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{C}} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^0 \rangle_U(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (1.36)$$

Tali valori medi corrispondono alle macrodeformazioni e tensioni valutate mediante la teoria dei Campi Medi. Si pu  notare, quindi, come la teoria dell'Omogeneizzazione

definisce i macrocampi come i valori medi dei microcampi, rappresentati dai termini di $O(\varepsilon^0)$ delle espansioni asintotiche, esattamente come la teoria dei Campi Medi.

	TEORIA DEI CAMPI MEDI	TEORIA DELL'OMOGENEIZZ.
Micro-spost.	\mathbf{u}	$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \varepsilon \chi^1(\nabla_x \mathbf{u}^0)$
Micro-def.	$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}\{\nabla_x \mathbf{u}\}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = (\mathbf{I}^{(4s)} + \text{sym}\{\nabla_x \chi^1\}) \text{sym}\{\nabla_x \mathbf{u}^0\}$
Micro-tens.	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\nabla_x \mathbf{u})$	$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}(\nabla_x \chi^1 + \mathbf{I}^{(4s)})(\nabla_x \mathbf{u}^0)$
Macro-spost.	$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{U} = \int_B \phi_V \mathbf{u} dV$	\mathbf{u}^0
Macro-def.	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E} = \text{sym}\{\nabla_x \mathbf{U}\}$	$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^0 \rangle = \text{sym}\{\nabla_x \mathbf{u}^0\}$
Macro-ten.	$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Sigma} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{E} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\langle \boldsymbol{\sigma}^0 \rangle = \bar{\mathbf{C}}\langle \boldsymbol{\varepsilon}^0 \rangle$
Ten. di elas. Eff.	$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^M + f(\mathbf{C}^I - \mathbf{C}^M)\mathbf{A}$	$\bar{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C}(\nabla_x \chi^1 + \mathbf{I}^{(4s)}) \rangle$

Tabella 1.1 Confronto tra la teoria dei Campi Medi e la teoria dell'Omogeneizzazione.

1.5 Omogeneizzazione di un composito fibro-rinforzato con distribuzione statisticamente omogenea

Come detto il problema di un'accurata rappresentazione della microstruttura di un composito nella risoluzione di problemi pratici risulta essere di interesse comune, e notevoli sono gli sforzi dei ricercatori al riguardo. Il problema della valutazione delle proprietà meccaniche effettive di un materiale fortemente eterogeneo può essere affrontato, come visto, mediante un approccio di tipo fisico utilizzando la teoria dei Campi Medi, oppure mediante un approccio di tipo matematico riferendosi alla teoria dell'Omogeneizzazione. Da un punto di vista matematico, il problema dell'equilibrio di un composito multi-fase è governato da un set di equazioni che coinvolgono tutta una serie di parametri che variano molto rapidamente, a causa delle forti variazioni puntuali delle proprietà meccaniche del materiale. In compositi realizzati mediante l'accoppiamento tra due o più fasi, poi, deve essere tenuto in conto anche il problema dell'interazione tra le fasi stesse. Anche quando ciascun costituente presenta un

comportamento elastico lineare, infatti, la possibilità di un legame imperfetto tra le fasi conduce ad un comportamento effettivo fortemente non-lineare del materiale composito. Una perfetta adesione tra i costituenti si verifica, infatti, molto raramente e fenomeni di danneggiamento, alle interfacce tra la matrice e le varie inclusioni presenti, possono influenzare fortemente il comportamento del materiale.

1.5.1 Impostazione del problema

Si consideri un corpo di volume B realizzato mediante un composito fibro-rinforzato, caratterizzato da una distribuzione random delle fibre all'interno della matrice. Il problema dell'equilibrio del corpo in questione è governato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} Div\sigma + b = 0 & \text{in } B \\ \sigma n = t & \text{su } \partial B_t \\ u = u_0 & \text{su } \partial B_u \end{cases} \quad (1.37)$$

dove u , σ , b ed n rappresentano rispettivamente il campo di spostamento, il tensore delle tensioni, le forze di volume e la normale esterna al contorno del corpo, mentre t ed u_0 rappresentano, invece, le trazioni e gli spostamenti assegnati sulle porzioni di contorno ∂B_t e ∂B_u (Fig.1.5).

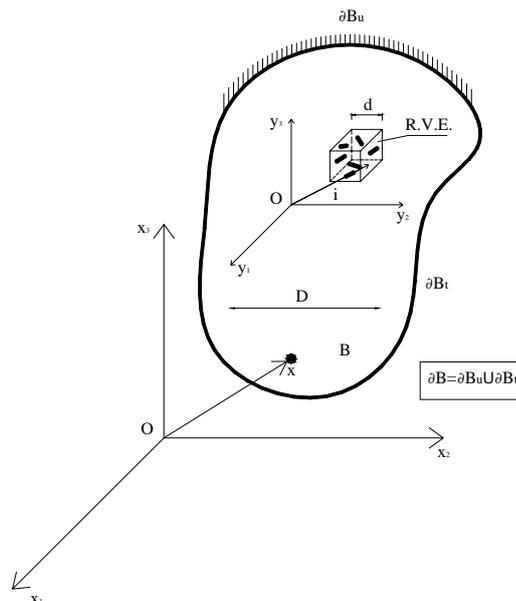


Figura 1.5 Corpo realizzato mediante un composito fibro-rinforzato.

Alle (1.37) vanno aggiunte, poi, le classiche relazioni di congruenza, che legano gli spostamenti alle deformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{Sym}(\text{grad } \mathbf{u}) = \text{Sym}[\nabla \mathbf{u}] = \frac{1}{2} [(\text{grad } \mathbf{u}) + (\text{grad } \mathbf{u})^T] \quad (1.38)$$

Al fine di legare, poi, le tensioni alle deformazioni possiamo introdurre le equazioni di legame elastico nella forma incrementale:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}(\mathbf{X})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}(\mathbf{X})[\text{Sym}(\text{grad } \dot{\mathbf{u}})] = \mathbf{C}(\mathbf{X})[\text{Sym}(\nabla \dot{\mathbf{u}})] \quad (1.39)$$

dove il punto indica l'incremento. Nella (1.39) compare il tensore di elasticità $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ che varia molto rapidamente all'interno del corpo con la coordinata rappresentativa della macroscale \mathbf{X} . Si ipotizza che il materiale eterogeneo sia composto da una fase fondamentale, rappresentata dalla matrice, e da q differenti fasi rappresentate dalla distribuzione random delle fibre. Si assume che le fibre appartenenti alla p -esima fase siano caratterizzate dalle medesime lunghezza e sezione trasversale, mentre l'orientazione del tutto casuale all'interno della matrice assicura che ciascuna direzione venga egualmente rappresentata.

L'assunzione di un distribuzione praticamente omogenea delle fibre all'interno della matrice rende, quindi, possibile la scelta di un RVE di lunghezza caratteristica d , che presenti la stessa composizione media e di conseguenza le stesse proprietà meccaniche del materiale composito analizzato. Assumendo ancora che la dimensione caratteristica della macroscale sia molto più grande di quella della microscale, e che valga quindi ancora $\varepsilon = d/D \ll 1$, possiamo definire le seguenti frazioni di volume che ciascun componente assume all'interno dell'RVE:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu = \frac{V_m}{V} & \text{Frazione di volume della Matrice} \\ \eta_p = \frac{V_{f,p}}{V} & \text{Frazione di volume della } p\text{-esima fibra} \end{array} \right. \quad (1.40)$$

dove V , V_m e $V_{f,p}$ rappresentano rispettivamente il volume dell'RVE, il volume occupato dalla matrice e quello occupato dalla p -esima fibra. Ovviamente deve valere:

$$\begin{aligned} V &= V_m + \sum_{p=1}^q V_{f,p} \\ 1 &= \mu + \sum_{p=1}^q \eta_p \end{aligned} \quad (1.41)$$

1.5.2 Materiale omogeneizzato equivalente

Le proprietà medie del materiale composito possono essere definite mediante un approccio di tipo fisico, applicando in particolare il *Principio delle Potenze virtuali*. Tale approccio consiste nell'assumere l'uguaglianza tra la potenza virtuale sviluppata dal materiale composito e quella prodotta dal materiale omogeneizzato [Brighenti R., 2004]. Si consideri un campo di spostamento virtuale e le corrispondenti deformazioni associate:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{Sym}(\text{grad } \tilde{\mathbf{u}}) = \text{Sym}[\nabla \tilde{\mathbf{u}}] \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \text{Sym}(\text{grad } \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) \end{cases} \quad (1.42)$$

La terza delle (1.42) rappresenta l'incremento del campo di deformazione virtuale. La relazione che lega le potenze virtuali riferite rispettivamente al composito ed al materiale omogeneizzato equivalente è la seguente:

$$\dot{w} = \underbrace{\int_V \kappa(\mathbf{X}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \sum_{p=1}^q \int_V \chi_p(\mathbf{X}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{f,p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{f,p} dV}_{\text{Potenza virtuale del Composito}} = \underbrace{\int_V \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{eq} dV}_{\text{Potenza virtuale del mat. Omogeneiz.}} \quad (1.43)$$

dove $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{f,p}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{f,p}$ rappresentano rispettivamente l'incremento di deformazione virtuale e lo stato tensionale nella generica p -esima fibra, mentre K e χ_p rappresentano delle funzioni scalari per la matrice e le fibre definite come:

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{X}) & \begin{cases} 1 & se(\mathbf{X}) \in V_m \\ 0 & se(\mathbf{X}) \notin V_m \end{cases} & \text{Matrice} \\ \chi_p(\mathbf{X}) & \begin{cases} 1 & se(\mathbf{X}) \in V_{f,p} \\ 0 & se(\mathbf{X}) \notin V_{f,p} \end{cases} & \text{Fibre} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Tali funzioni scalari vengono utilizzate al fine di annullare i termini che non entrano in gioco nell'espressione al variare della coordinata all'interno del volume.

Valutando le tensioni in corrispondenza della p -esima fibra mediante il singolo modulo elastico $E_{f,p}$ ed il tensore delle tensioni del materiale omogeneizzato mediante il tensore di elasticità effettivo e le reali deformazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_f = (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \boldsymbol{\sigma}_f = E_{f,p} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{eq} = \mathbf{C}_{eq} \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.45)$$

dove \mathbf{i} rappresenta il versore parallelo alla direzione della p -esima fibra. Effettuando quindi le dovute sostituzioni si perviene alla seguente espressione per la potenza virtuale:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \int_V \kappa(\mathbf{X}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathbf{C}_m(\mathbf{X}) \boldsymbol{\varepsilon} dV + \sum_{p=1}^q \int_V \chi_p(\mathbf{X}) (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot E_{f,p} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \boldsymbol{\varepsilon} dV = \\ &= \int_V \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\varepsilon} dV \end{aligned} \quad (1.46)$$

Tale espressione può essere compattata mettendo in evidenza i termini in comune ottenendo, così, la relazione seguente:

$$\int_V \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \left\{ \kappa(\mathbf{X}) \mathbf{C}_m(\mathbf{X}) + \sum_{p=1}^q \chi_p(\mathbf{X}) [E_{f,p} \boldsymbol{\mathcal{Q}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{Q}}] \right\} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (1.47)$$

dove è stato introdotto il tensore del secondo ordine $\mathbf{Q} = \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$. Divenendo il materiale, mediante tale posizione, macroscopicamente omogeneo nella scala relativa all'RVE, può assumersi che il tensore di elasticità effettivo sia costante al variare del vettore posizione \mathbf{X} . Comparando i due membri della (1.47) e mediando sul volume dell'RVE, può ricavarsi, allora, il tensore di elasticità tangente, assunto come detto costante al variare del punto:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_{eq} &= \frac{1}{V} \int_V \left\{ \kappa(\mathbf{X}) \mathbf{C}_m(\mathbf{X}) + \sum_{p=1}^q \chi_p(\mathbf{X}) [E_{f,p} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q}] \right\} dV = \\ &= \mu \mathbf{C}_m + \sum_{p=1}^q \eta_p E_{f,p} \int_V \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} dV \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dove sono state utilizzate le frazioni di volume della matrice e della p -esima fibra:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{V} \int_V \kappa(\mathbf{X}) dV = \frac{V_m}{V} \\ \eta_p &= \frac{1}{V} \int_V \chi_p(\mathbf{X}) dV = \frac{V_{f,p}}{V} \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.6 Omogeneizzazione di un composito con microstruttura periodica

Dalla crescente necessità di presentare tecniche di analisi accurate, che tenessero conto oltre che della risposta macroscopica di un materiale anche della sua complessa microstruttura, sono sorti, negli ultimi anni, numerosi studi teorici e sperimentali.

Numerose tecniche e metodologie sono state sviluppate, quindi, al fine di investigare in maniera accurata il comportamento microscopico di un materiale composito, per osservarne l'influenza sulle proprietà meccaniche effettive. Tutta una serie di soluzioni analitiche sono state quindi proposte, come le equazioni di Halpin-Tsai che rappresentano uno strumento atto a recuperare le proprietà globali di un materiale fibro-rinforzato, mediante i classici modelli self-consistent sviluppati da Hermans e Hill. In parallelo a tali complesse soluzioni analitiche, limitate negli usi a causa degli

elevati oneri computazionali che le caratterizzano, si affiancano differenti approcci basati sull'utilizzo degli elementi finiti (FEM). E' stata già fatta una classificazione di tali soluzioni numeriche, in particolare citando i due approcci fondamentali, quali la Teoria dei Campi Medi e la Teoria dell'Omogeneizzazione. Si è visto come entrambi i metodi siano in grado di predire non solo le caratteristiche meccaniche effettive del materiale investigato, ma anche di fornire un'attenta analisi del comportamento meccanico a livello della microscala con l'ausilio di complesse tecniche FE. Risulta, tuttavia, difficile imporre delle condizioni periodiche esatte sul contorno dell'RVE, caratterizzato da una complessa microstruttura, mediante l'utilizzo della Teoria dei Campi Medi [Xia Z. et al., 2003]. Mentre invece, utilizzando la Teoria dell'Omogeneizzazione, è possibile imporre in maniera esatta ed accurata le condizioni di periodicità sul contorno della cella unitaria, mediante l'utilizzo di un tensore del terzo ordine periodico a livello della microscala, che consente di legare macro e microspostamenti.

1.6.1 Equazioni base per la teoria dell'Omogeneizzazione

Consideriamo, al solito, un corpo con comportamento elastico lineare di volume B , caratterizzato dall'aver una microstruttura periodica (Fig.1.6).

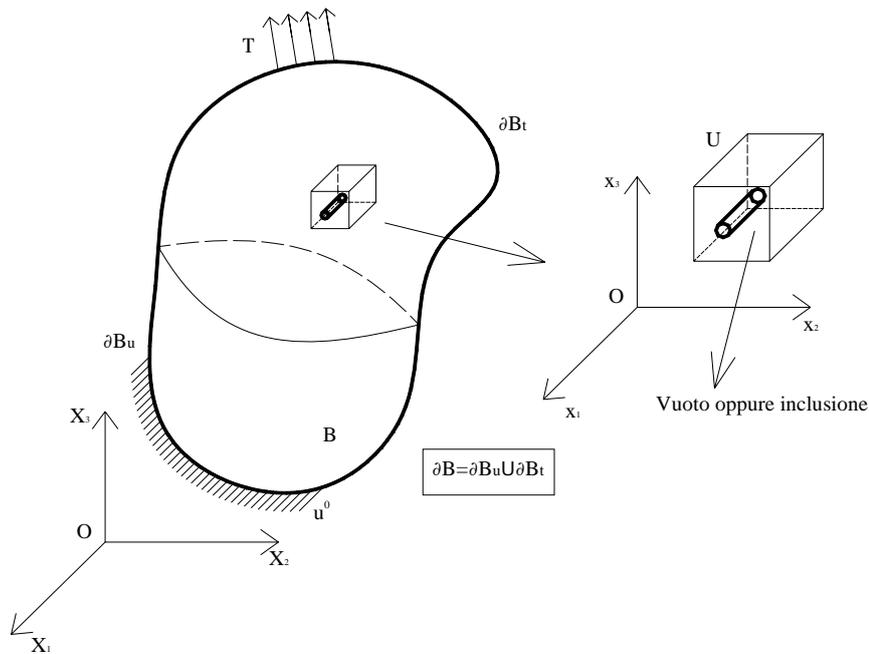


Figura 1.6 Problema elastico per un materiale con microstruttura periodica.

Dove ∂B rappresenta il contorno del volume B occupato dal corpo, mentre U rappresenta il volume occupato dalla cella unitaria (RVE). All'interno della cella unitaria si ipotizza sia presente un'inclusione, la quale può essere una fibra oppure un vuoto, rendendo il materiale nel primo caso fibro-rinforzato o poroso nel secondo. In particolare nel caso sia presente un vuoto all'interno dell'RVE, il contorno dell'inclusione rappresenta una regione libera da tensioni.

Come già osservato, tale problema varia rapidamente non solo a livello della macroscale, individuata dalla coordinata generalizzata \mathbf{X} , ma anche a livello della microscale, con coordinata \mathbf{x} .

Risulta, quindi, molto complicato risolvere tale problema mediante le tradizionali analisi agli elementi finiti, tenendo in conto la reale microstruttura del materiale considerato.

Occorre rivolgersi, quindi, ad una tecnica di omogeneizzazione al fine di ottenere un materiale equivalente da utilizzare nella risoluzione del problema con condizioni al contorno. In particolare, in tale problema, per il quale è richiesta un'adeguata rappresentazione della microstruttura con comportamento periodico, conviene utilizzare la Teoria dell'Omogeneizzazione, ed in particolare l'approccio matematico della perturbazione multi-scala.

In particolare, in accordo con quanto proposto da vari autori [Hassani B., Hinton E., 1998]-[Guedes JM, Kikuchi N., 1990], la Teoria dell'Omogeneizzazione assume per il campo di spostamenti un'espansione asintotica rispetto al parametro rappresentativo del rapporto tra la scala macroscopica e quella microscopica:

$$u_i(\mathbf{X}) \approx u_i^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \varepsilon u_i^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 u_i^2(\mathbf{X}, \mathbf{x}) + \dots \quad (1.50)$$

dove ε rappresenta il rapporto tra la coordinata macroscopica e quella microscopica, già visto nella relazione (1.1).

Al fine di risolvere il problema elastico mediante l'approccio del *Principio dei Lavori Virtuali*, è possibile dare la seguente espressione per i macrocampi di deformazione e tensione, variabili entrambi a livello della macro-scala, mediante le classiche relazioni di congruenza e le relazioni di legame elastico:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{cases} \quad (1.51)$$

A tali relazioni può essere applicato il cambiamento di variabile visto nella (1.24) ottenendo le seguenti relazioni differenziali alle derivate parziali:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^0}{\partial X_i} \right) + \left(\frac{\partial u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^1}{\partial x_i} \right) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial u_i^1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^1}{\partial X_i} \right) + \left(\frac{\partial u_i^2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^2}{\partial x_i} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\varepsilon} C_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \right) + \varepsilon E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial x_l} \right) + \dots$$

dove la prima delle (1.52) si riferisce al legame spostamenti-deformazioni, mentre la seconda al legame costitutivo macroscopico.

E' possibile a questo punto scrivere l'equazione generale dei lavori virtuali, utilizzando le espressioni per tensioni e deformazioni viste nelle (1.52):

$$\int_B C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dB = \int_B f_i v_i dB + \int_{\partial B_t} \bar{T}_i v_i dS \quad (1.53)$$

Dove ∂B_t rappresenta la porzione di contorno sulla quale sono applicate le trazioni \bar{T}_i , v_i sono gli spostamenti virtuali, nulli sulla porzione ∂B_u del contorno, mentre le f_i rappresentano le forze di volume. Applicando l'espansione asintotica (1.50) al campo di spostamenti, effettuando il cambio di variabile (1.24) ed eguagliando i termini con la stessa potenza per ε , si possono ottenere una serie di equazioni nelle variabili \mathbf{u}^0 , \mathbf{u}^1 ed \mathbf{u}^2 :

$$u_i^0(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = u_i^0(\mathbf{X}) \quad (1.54)$$

$$\int_U C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{X})}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial x_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dU = 0 \quad v_i \in U \quad (1.55)$$

$$\int_B \left[\frac{1}{U} \int_U C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{X})}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial x_l} \right) dU \right] \frac{\partial v_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} dB =$$

$$\int_B \left(\frac{1}{U} \int_U f_i v_i(\mathbf{X}) dU \right) dB + \int_{\partial B} \bar{T}_i v_i(\mathbf{X}) dS \quad v_i \in B \quad (1.56)$$

$$\int_U C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^2(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial x_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dU =$$

$$\int_U f_i v_i(\mathbf{x}) dU \quad v_i \in U \quad (1.57)$$

Teoricamente, risolvendo tutte le equazioni (1.54-1.57) con le opportune condizioni al contorno è possibile risalire alla soluzione completa per \mathbf{u}^0 , \mathbf{u}^1 ed \mathbf{u}^2 .

Tuttavia, nelle applicazioni pratiche viene effettuata usualmente l'approssimazione al primo ordine per il campo di spostamenti $u_i(\mathbf{X})$. Effettuando tale approssimazione, risulta quindi necessario risolvere le sole equazioni (1.55) e (1.56) nelle variabili \mathbf{u}^0 ed \mathbf{u}^1 per risolvere il problema.

Nelle usuali applicazioni della teoria dell'Omogeneizzazione viene assunto, quindi, convenzionalmente:

$$u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \quad (1.58)$$

Dove χ_K^{pq} , nota come funzione caratteristica, risulta essere un tensore del terzo ordine periodico all'interno della cella unitaria. Assumendo tale posizione per il campo di spostamento è possibile effettuarne la sostituzione all'interno della (1.55), ottenendo:

$$\int_U \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{X})}{\partial X_l} + C_{ijkl} \frac{\partial \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dU = 0 \quad (1.59)$$

Ricordando tuttavia che u_p^0 non dipende da \mathbf{x} , come visto nella (1.54), e che χ_K^{pq} è dotato di simmetria scaturisce la relazione seguente:

$$\int_U C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}(\mathbf{X}, \mathbf{x})}{\partial x_q} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dU = - \int_U C_{ijkl} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} dU \quad (1.60)$$

L'equazione (1.60), affiancata alle condizioni di periodicità sulla cella unitaria per $u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})$, consente di ottenere l'espressione del tensore del terzo ordine χ_K^{pq} . Nel caso in cui, ad esempio, la cella unitaria sia rappresentata da un parallelepipedo di forma rettangolare, come mostrato nella seguente Fig.1.7:

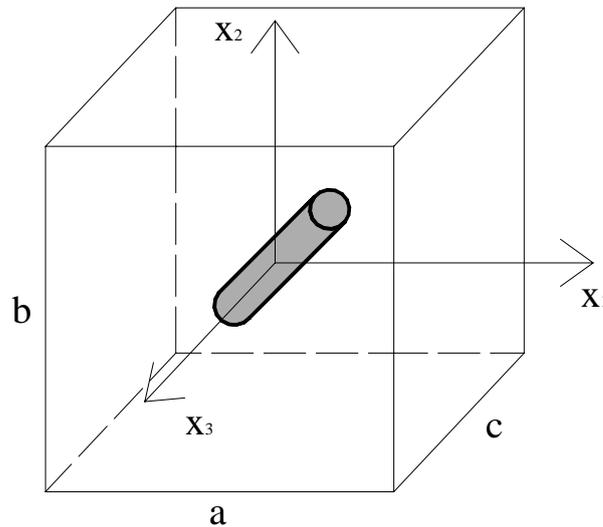


Figura 1.7 Cella unitaria: parallelepipedo di forma rettangolare.

Le sei facce del parallelepipedo possono essere rappresentate mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{\text{Faccia1} \\ \text{Faccia3}}} &= \left(\mp \frac{a}{2}, x_2, x_3 \right) \\
 (x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{\text{Faccia2} \\ \text{Faccia4}}} &= \left(x_1, \mp \frac{b}{2}, x_3 \right) \\
 (x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{\text{Faccia5} \\ \text{Faccia6}}} &= \left(x_1, x_2, \mp \frac{c}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Per cui le condizioni di periodicit  per $u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ possono essere espresse mediante le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia1}} &= u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia3}} \\
 u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia2}} &= u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia4}} \\
 u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia5}} &= u_k^1(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{\text{Faccia6}}
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Le quali possono essere espresse in funzione del tensore del terzo ordine χ_k^{pq} mediante la sostituzione della (1.58) all'interno delle (1.62):

$$\begin{aligned}
 \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia1}} &= \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia3}} \\
 \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia2}} &= \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia4}} \\
 \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia5}} &= \left[\chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \frac{\partial u_p^0(\mathbf{X})}{\partial X_q} + \tilde{u}_k^1(\mathbf{X}) \right] \Big|_{\text{Faccia6}}
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Ricordando, tuttavia, che $\tilde{u}_k^1(\mathbf{X})$ risulta essere indipendente da \mathbf{x} , mentre la macrodeformazione, espressa dalla seguente relazione (1.64), risulta essere uniforme ed arbitraria:

$$\varepsilon_{pq}^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_p^0(X)}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q^0(X)}{\partial X_p} \right] \quad (1.64)$$

Le (1.62) possono essere riscritte in funzione della sola funzione caratteristica:

$$\begin{aligned} \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia1} &= \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia3} \\ \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia2} &= \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia4} \\ \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia5} &= \chi_k^{pq}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \Big|_{Faccia6} \end{aligned} \quad (1.65)$$

In definitiva, saranno quindi le (1.65) le condizioni di periodicit  sul contorno della cella unitaria che, abbinate alla (1.60), consentono la valutazione del tensore del terzo ordine χ_k^{pq} .

D'altro canto, sostituendo la (1.58) all'interno dell'equazione (1.56),   possibile ottenere la seguente equazione di equilibrio macroscopico:

$$\begin{aligned} \int_B \bar{C}_{ijkl}(\mathbf{X}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{X})}{\partial X_l} \frac{\partial v_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} dB = \\ \int_B b_i(\mathbf{X}) v_i(\mathbf{X}) dB + \int_{\partial B} \bar{T}_i(\mathbf{X}) v_i(\mathbf{X}) dS \quad \mathbf{X} \in B \end{aligned} \quad (1.66)$$

dove

$$\bar{C}_{ijkl}(\mathbf{X}) = \frac{1}{U} \int_U \left(C_{ijkl} + C_{ijpq} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial x_q} \right) dU \quad (1.67)$$

Rappresenta il tensore di elasticit  omogeneizzato, contenente le costanti elastiche macroscopiche effettive.

All'interno della (1.66), inoltre, con $b_i(\mathbf{X})$   stato indicato il valore medio sulla cella unitaria delle forze di volume:

$$b_i(\mathbf{X}) = \frac{1}{U} \int_U f_i(\mathbf{X}, \mathbf{x}) dU \quad (1.68)$$

Per cui, le equazioni base del problema dell'Omogeneizzazione secondo l'approssimazione al primo ordine, si riassumono nella (1.60), soggetta alle condizioni periodiche al contorno (1.65), e nella (1.66), le cui condizioni al contorno sono di tipo generico sul campo di spostamenti macroscopici.

Le due equazioni integrali possono essere risolte entrambe separatamente mediante l'utilizzo del metodo FE. Ad esempio si potrebbe risolvere prima il problema della valutazione del tensore periodico del terzo ordine χ_K^{pq} , retto dall'equazione (1.60), per poi valutare il campo di spostamenti macroscopico $u_0^k(\mathbf{X})$ tramite l'equazione di equilibrio macroscopico (1.66).

Alternativamente, nel caso in cui si vogliano valutare solo i moduli del materiale omogeneizzato, si può risolvere la (1.67), una volta ottenuto χ_K^{pq} mediante la (1.60).

Appare, quindi, immediato come la risoluzione della (1.60) per la valutazione del tensore periodico del terzo ordine risulti essere uno step fondamentale nei problemi di omogeneizzazione di materiali eterogenei.

Si può osservare come la (1.60) abbia una forma paragonabile all'equazione dei lavori virtuali frequentemente utilizzata in elasticità, con una deformazione iniziale non nulla ed in assenza di forze di volume e di trazioni applicate sul contorno della cella unitaria, nel momento in cui le $\chi_i^{kl}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) (i=1,2,3)$ vengono considerate come componenti di spostamento generalizzate e $v_i(\mathbf{x})$ come i corrispondenti spostamenti virtuali.

