



Università della Calabria

DIPARTIMENTO DI DIFESA DEL SUOLO

Corso di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Idraulica per l'Ambiente e il Territorio

XXII Ciclo

Ottimizzazione della gestione di sistemi multi-invaso a scopo plurimo: il caso del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone

ICAR/02

Allievo:

Ing. Fabio Zimbo

Coordinatore del dottorato di ricerca:

Ch.mo Prof. Francesco Macchione

Supervisor:

Ch.mo Prof. Giuseppe Mendicino

Ch.mo Prof. Giancarlo Principato

Indice

1. Introduzione generale	pag. 4
2. La ricerca operativa nella gestione delle risorse idriche	pag. 9
3. Lineamenti teorici di alcuni modelli di Ricerca Operativa	pag. 13
3.1. La programmazione lineare	pag. 13
3.2. Convessità.....	pag. 15
3.2.1. Convessità (concavità) per funzione di una singola variabile	pag. 15
3.2.2. Convessità (concavità) per funzioni di più variabili.....	pag. 19
3.2.3. Insiemi convessi.....	pag. 21
3.3. La programmazione non lineare.....	pag. 22
3.3.1. Ottimizzazione non vincolata.....	pag. 23
3.3.1.1. Ottimizzazione non vincolata in una sola variabile: metodo di <i>Newton</i>	pag. 24
3.3.1.2. Ottimizzazione non vincolata in più variabili: metodo del gradiente, metodo di <i>Newton</i> in più variabili e metodo “ <i>Line search</i> ”	pag. 26
3.3.1.2.1. Metodo del gradiente	pag. 27
3.3.1.2.2. Metodo di <i>Newton</i> in più variabili e metodi “quasi- <i>Newton</i> ”	pag. 29
3.3.1.2.3. Metodo “ <i>Line-search</i> ”	pag. 31
3.3.2. Ottimizzazione vincolata.....	pag. 36
3.3.2.1. Posizione generale del problema.....	pag. 36
3.3.2.2. Classi di problemi di programmazione non lineare vincolata	pag. 38
3.3.2.3. Programmazione quadratica.....	pag. 42
3.3.2.3.1. Metodi “ <i>Active set</i> ”	pag. 44
3.3.2.4. Le tecniche numeriche per i problemi di ottimizzazione non lineare vincolata	pag. 49
3.3.2.4.1. Il metodo <i>Sequential Quadratic Programming (SQP)</i>	pag. 50
3.4. Reinforcement Learning	pag. 54
3.4.1. Generalità	pag. 54
3.4.2. Definizione di “ritorno atteso”	pag. 56
3.4.3. Il modello dell’ambiente come processo decisionale markoviano finito	pag. 58
3.4.4. Le “funzioni di valore” (<i>value functions</i>).....	pag. 60
3.4.5. Le funzioni di valore ottimali.....	pag. 64
3.4.6. Le funzioni di valore ottimali nel caso deterministico	pag. 66
3.4.7. Le funzioni di valore ottimali stagionali	pag. 67
3.5. Metodi approssimati di risoluzione delle equazioni di ottimalità di Bellman	pag. 69
3.6. Dynamic programming	pag. 70
3.6.1. Problema di <i>policy evaluation</i>	pag. 70
3.6.2. Problema di <i>policy improvement</i>	pag. 72
3.6.3. Determinazione della <i>policy</i> ottimale mediante algoritmi DP.....	pag. 74
3.6.3.1. <i>Policy iteration</i>	pag. 74
3.6.3.2. <i>Value Iteration</i>	pag. 75
3.6.4. La <i>Generalized Policy Iteration (GPI)</i>	pag. 76

3.7. Metodo Monte Carlo.....	pag. 76
3.7.1. La fase di evaluation di MC	pag. 77
3.7.1.1. Funzione valore $V^\pi(s)$	pag. 77
3.7.1.2. Funzione azione-valore $Q^\pi(s,a)$	pag. 78
3.7.2. La stima della <i>policy</i> ottimale con metodi MC	pag. 79
3.7.2.1. La rimozione dell'assunzione <i>exploring starts</i> nei metodi MC: metodi <i>on-policy</i> e <i>off-policy</i>	pag. 81
3.7.2.1.1. Metodi <i>on-policy</i>	pag. 81
3.7.2.1.2. Metodi <i>off-policy</i>	pag. 84
3.7.3. Formulazione “incrementale” dei metodi MC	pag. 86
3.7.3.1. Convergenza della formulazione incrementale	pag. 90
3.8. Algoritmi <i>temporal-difference</i> (TD)	pag. 90
3.8.1. Problema di <i>evaluation</i> mediante metodi TD.....	pag. 91
3.8.2. Gli algoritmi TD per la stima delle <i>policy</i> ottimali	pag. 93
3.8.2.1. Metodo TD <i>on-policy</i> : il <i>SARSA</i>	pag. 94
3.8.2.2. Metodo TD <i>off-policy</i> : il <i>Q-Learning</i>	pag. 95
3.9. Quadro riepilogativo degli algoritmi RL.....	pag. 96
3.10. Programmazione Multiobiettivo	pag. 97
3.10.1. Metodi di soluzione.....	pag. 103
3.10.1.1. Metodi A.O.F. e dei pesi	pag. 105
3.11. Come trattare le aleatorietà: approcci I.S.O. ed E.S.O.	pag. 107
3.11.1. Approccio I.S.O.	pag. 108
3.11.2. Approccio E.S.O.	pag. 109
4. Ottimizzazione della gestione del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone	pag. 112
4.1 Descrizione del sistema idroelettrico Ariamacina-Cecita	pag. 112
4.1.1 Premessa	pag. 112
4.1.2 Serbatoio di Ariamacina	pag. 114
4.1.3 Serbatoio di Cecita.....	pag. 118
4.1.4 Gli impianti idroelettrici di Vaccarizzo, Mucone I salto e Mucone II salto.....	pag. 127
4.1.4.1 Impianto di Vaccarizzo.....	pag. 128
4.1.4.2 Impianti Idroelettrici Mucone I salto e Mucone II salto	pag. 131
4.1.4.2a Impianto Mucone I Salto	pag. 132
4.1.4.2b Impianto Mucone II Salto.....	pag. 137
4.1.5 Curve volumi-quote e superfici-quote	pag. 143
4.1.5.1 Serbatoio di Ariamacina	pag. 143
4.1.5.2 Serbatoio di Cecita.....	pag. 145
4.2 Descrizione dell'impianto di irrigazione “Mucone”	pag. 147
4.3 Caratteristiche dei bacini idrografici afferenti il sistema	pag. 148
4.4 Generazione stocastica dei dati di input (deflussi e temperature mensili) al sistema	pag. 153
4.4.1 Modellazione stocastica delle precipitazioni	pag. 153
4.4.2 Applicazione al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.....	pag. 158

4.4.2.1	Generazione dei deflussi mensili	pag. 158
4.4.2.2	Generazione delle temperature medie mensili	pag. 165
4.5	Applicazione dei modelli di ottimizzazione al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone	pag. 167
4.5.1	Posizione generale del problema	pag. 167
4.5.2	Identificazione della funzione obiettivo.....	pag. 168
4.5.2.1	Funzione obiettivo relativa alla produzione idroelettrica	pag. 168
4.5.2.2	Funzione obiettivo relativa al soddisfacimento irriguo.....	pag. 185
4.5.2.3	Funzione obiettivo complessiva	pag. 191
4.5.3	Il bilancio di massa mensile.....	pag. 192
4.5.4	I vincoli del modello di ottimizzazione	pag. 195
4.6	Ottimizzazione della gestione operativa del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone	pag. 196
4.6.1	Ottimizzazione mediante Sequential Quadratic Programming (SQP).....	pag. 196
4.6.1.1	Gestione operativa ottimale	pag. 200
4.6.2	Ottimizzazione mediante Dynamic Programming (DP)	pag. 230
4.6.2.1	Generazione delle soluzioni non-dominate e scelta della soluzione di preferenza	pag. 233
4.6.2.2	Gestione operativa ottimale	pag. 236
4.6.3	Ottimizzazione mediante Reinforcement Learning (algoritmo QL).....	pag. 266
4.6.3.1	Generazione delle soluzioni non-dominate e scelta della soluzione di preferenza	pag. 282
4.6.3.2	Gestione operativa ottimale	pag. 300
4.7	Applicazione delle regole ottimali: confronto fra i risultati ottenuti dai diversi modelli.....	pag. 308
5.	Conclusioni.....	pag. 311
	Bibliografia.....	pag. 314

1. INTRODUZIONE GENERALE

La presente tesi di dottorato ha riguardato lo studio per la ottimizzazione della gestione operativa delle risorse idriche del sistema “Ariamacina – Cecita – Mucone”. Tale sistema è costituito da due invasi, quello di Ariamacina sul fiume Neto e Cecita sul t. Mucone e dall’impianto irriguo denominato “Mucone” tutti ricadenti nella Calabria centro-settentrionale.

Il sistema è completato dalla presenza di tre centrali idroelettriche: quella di Vaccarizzo (il cui serbatoio di monte è Ariamacina) e quelle denominate “Mucone I salto” e “Mucone II salto” (entrambe con Cecita come serbatoio di monte).

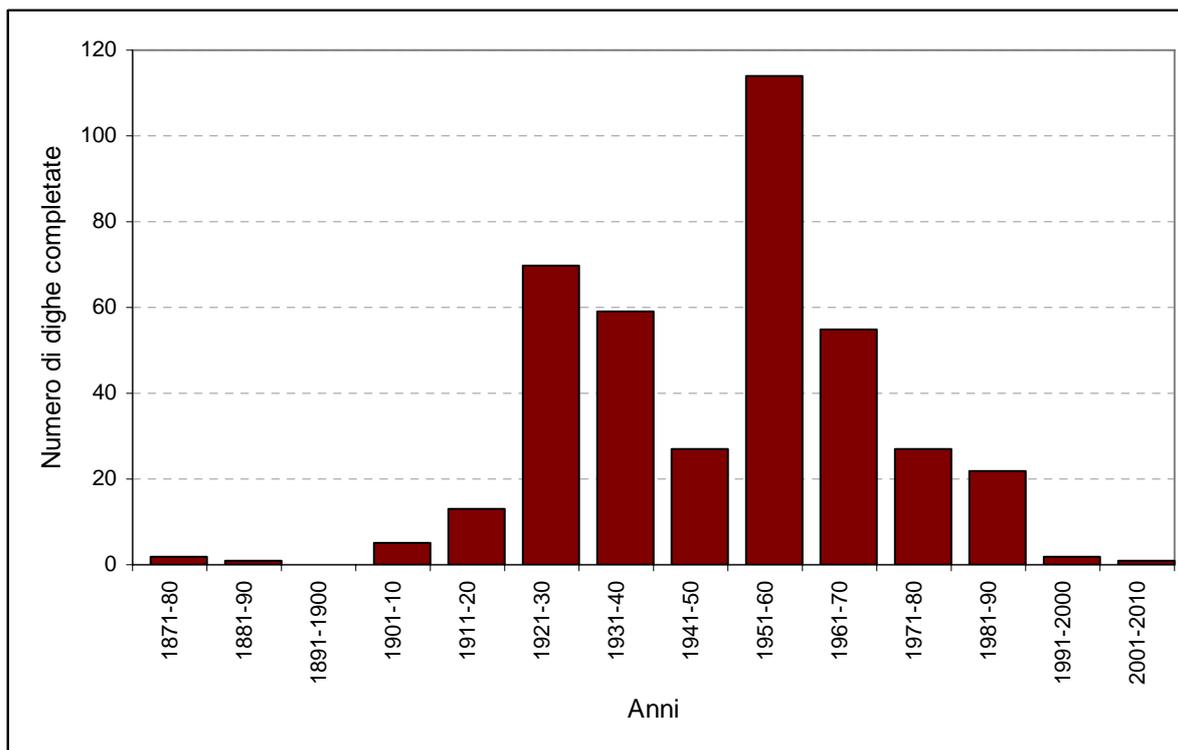
Il sistema è pertanto da considerarsi multi-invaso (sono presenti 2 serbatoi) e a scopo plurimo; gli obiettivi da perseguire, infatti, sono due: la produzione idroelettrica (fornita dalle tre centrali idroelettriche sopraccitate) e il soddisfacimento delle richieste irrigue dell’impianto “Mucone”.

Le motivazioni che hanno portato ad affrontare e ad approfondire un problema del genere sono la naturale conseguenza di una serie di ragioni che vengono esposte nel prosieguo.

Lungo tutto il XX secolo, le grandi dighe emersero come uno degli strumenti più importanti per la gestione delle risorse idriche. Più di 45.000 grandi dighe costruite in tutto il mondo giocano un ruolo fondamentale per il soddisfacimento di molte basilari esigenze umane: agricoltura, usi potabili, produzione energetica, regolazione delle acque superficiali, etc. Le stime più aggiornate indicano che circa il 30-40% delle terre irrigate nel mondo è servito da dighe, così come queste generino il 19% della produzione elettrica mondiale.

Dagli anni '30 agli anni '70 del secolo scorso, la costruzione di grandi dighe assunse, agli occhi dell’opinione pubblica, una garanzia di sviluppo economico e progresso sociale, essendo considerata uno dei simboli maggiormente icastici di modernizzazione. Tale diffuso “benevolo” sentimento nei confronti di questo tipo di opere, si tradusse in una intensa attività realizzativa, che raggiunse il suo picco negli anni '70 quando si pervenne a una media di quasi tre commissionamenti al giorno di progetti di grandi dighe nel mondo.

Anche in Italia si registrò un analogo trend: in particolare, la maggior parte delle dighe fu realizzata fra gli anni '20 e '70 del secolo scorso come mostrato nella figura seguente (Comitato Nazionale Italiano per le grandi dighe, 2010):



*Figura 1.1 – Andamento storico della realizzazione di dighe in Italia
(da Comitato Nazionale Italiano per le grandi dighe, 2010)*

Facendo riferimento alla situazione calabrese, è da ricordare (Principato, 2000; Principato 2001) che tra le azioni strategiche dell'Intervento Straordinario mirate al conseguimento dello sviluppo economico della Calabria, era stato elaborato dalla cessata Cassa per il Mezzogiorno fin dagli anni '70, il "Progetto Speciale per gli schemi idrici intersettoriali" noto come P.S. 26, il quale si proponeva di soddisfare le varie tipologie di domanda idrica (irrigua, potabile e industriale) con un approccio integrato che teneva conto sia della necessità di razionalizzare e ammodernare la rete principale di adduzione, sia della necessità di reperire risorse idriche mediante la realizzazione di nuove dighe. Se ci si riferisce ai dati del suddetto P.S. 26 risulta che nel 1950 la Calabria disponeva di circa 430 Mm³ di risorse idriche di cui 320 Mm³ per scopi idroelettrici e 110 Mm³ per altri usi. Nel 1976, grazie alle nuove opere realizzate dalla ex Cassa per il Mezzogiorno, la disponibilità complessiva della regione era stata elevata a 740 Mm³, di cui 270 per uso esclusivo idroelettrico e 470 per usi plurimi.

La situazione al 1982 fra opere esistenti, in costruzione o in fase di appalto, era caratterizzata da una disponibilità totale di 1093 Mm³ (dei quali 130 per uso esclusivo idroelettrico e 963 per diversi usi). Le risorse idriche per usi plurimi in Calabria erano quindi passate dai 110 Mm³ del 1950 ai 963 Mm³ del 1982. E si noti che il P.S. 26 si proponeva di portare al 2016 la disponibilità complessiva a ben 1800 Mm³.

Ritornando alla scala di riferimento territoriale più ampia, che è quella planetaria, a partire dagli anni '80, man mano che divennero disponibili e di dominio pubblico le esperienze acquisite e le migliori informazioni sulle performance e le conseguenze delle grandi dighe, il “costo” sociale (si stima che circa 40 – 80 milioni di persone sono state costrette all’esodo forzato per far posto agli invasi), idrologico e di impatto sugli ecosistemi fluviali di queste opere emerse in tutta la sua drammaticità, così da stimolare la crescita di una forte opposizione a nuove realizzazioni. Sulla scia di questo dibattito nacque nel 1998 la WCD (World Commission on Dams), la quale dopo una approfondita opera di monitoraggio sulle performance tecniche, finanziarie, economiche, sociali e ambientali di alcune grandi dighe del mondo, pubblicò una relazione (WCD, 2000) nella quale è asserito senza mezzi termini che molti dei progetti di sistemi di invaso a larga scala diffusi in ogni angolo del pianeta non hanno raggiunto quei livelli di beneficio economico e sociale che ne avevano giustificato i loro ingenti investimenti.

In particolare la WCD fa notare che:

- le grandi dighe progettate per il soddisfacimento di esigenze irrigue raramente raggiungono i loro target fisici, dimostrandosi investimenti poco vantaggiosi da un punto di vista economico (in molti casi non stati recuperati neanche i costi di realizzazione);
- le grandi dighe progettate per la generazione idroelettrica hanno raggiunto i loro scopi finanziari, ma sono al di sotto dei livelli di produzione energetica desiderati;
- le grandi dighe hanno dimostrato di possedere un impatto molto profondo su fiumi, bacini idrografici ed ecosistemi acquatici, nei casi peggiori con perdita irreversibile di specie ed interi ecosistemi;
- i sistematici fallimenti nella valutazione e successiva adeguata mitigazione degli impatti suddetti (in particolare la completa indifferenza al problema della risistemazione delle popolazioni costrette ad esodi forzati per fare posto agli invasi e del depauperamento dei beni di sostentamento a valle delle dighe) hanno condotto al drammatico impoverimento di milioni di persone, dando il la agli oppositori di tali opere.

Secondo il rapporto WCD (2000), questi “fallimenti” sarebbero imputabili a diverse cause: in particolare alla sottovalutazione degli aspetti pratici della gestione e manutenzione delle opere, all’emergere di nuovi usi e obiettivi non considerati in fase di progettazione originaria delle opere (necessità di ulteriori volumi idrici per soddisfare nuovi insediamenti industriali, nuovi quartieri residenziali, o per esigenze oggettivamente imprevedibili fino qualche decennio fa, si pensi al minimo deflusso vitale, etc..) e comunque a una generale mancanza di visione “generale” dei complessi problemi creati dalla realizzazione di tali opere.

I nuovi usi e obiettivi emersi nel corso degli anni (come detto, non previsti per colpa o per imprevedibili dinamiche della società) purtroppo, il più delle volte, sono risultati in conflitto fra di loro, in particolare durante i periodi di siccità.

Secondo la WCD, per superare tali problemi, è necessaria la condivisione sempre più partecipata di nuovi soggetti, l'adozione di nuove prospettive, di nuovi criteri di scelta da parte dei *decision-making*, in modo da creare consenso intorno ai progetti necessari.

La WCD ha sintetizzato la sua esperienza in cinque concetti chiave da adottare come linee guida per qualunque intervento su grandi dighe:

- equità (*equity*);
- efficienza (*efficiency*);
- partecipazione;
- sostenibilità;
- responsabilità.

Alcune delle raccomandazioni che la WCD offre ai *decision-making* per una nuova politica degli interventi con grandi dighe sono:

- guadagnare il consenso dell'opinione pubblica;
- valutare interventi alternativi;
- procedere alla ottimizzazione della gestione operativa delle dighe esistenti;
- mitigare realmente gli impatti sui bacini e sugli ecosistemi acquatici.

Ai fini ingegneristici, di grande importanza appaiono due delle cinque parole chiave introdotte dalla WCD: “**sostenibilità**” e “**ottimizzazione**”.

Riferendosi a Task Committee on Sustainability Criteria et al. (1998), si definiscono **sostenibili** i sistemi di risorse idriche che sono progettati e gestiti per contribuire pienamente agli obiettivi della società al momento attuale e nel futuro, conservando la loro integrità ecologica, ambientale e idrologica.

E' evidente, inoltre, che la crescita della popolazione mondiale e/o l'auspicabile sviluppo economico, provochino una notevole intensificazione della competizione fra diversi utilizzatori per l'accaparramento delle limitate risorse idriche disponibili. Improcrastinabile appare, quindi, lo sviluppo di **modelli di ottimizzazione** della gestione di sistemi di invaso che riescano a fronteggiare sia le molteplici e conflittuali richieste di una società complessa quale quella attuale, sia le sfide impegnative poste dai cambiamenti climatici verificatesi negli ultimi venti anni, caratterizzati, almeno per quanto riguarda l'area mediterranea, da un aumento della frequenza di accadimento di ondate di calore e periodi di siccità.

Un problema di ottimizzazione di gestione così posto, presenta un alto grado di complessità legato sia agli aspetti teorico-analitici dei modelli di programmazione matematica da utilizzare, sia alla loro implementazione nel “mondo reale”, problema non secondario se si considera che fino a pochi anni fa notevole risultava il gap esistente tra i modelli teorici e applicazioni su sistemi reali (Yeh, 1985 e Wurbs, 1993). Tale gap era frutto di una serie di concause, tra le quali si ricordano:

- le limitazioni hardware e software, che imponevano eccessive semplificazioni descrittive del sistema non accettate da parte dei gestori;
- la notevole già citata complessità e la grande varietà dei modelli di ottimizzazione esistenti in letteratura, che creavano nei gestori scetticismo e confusione;

Oggi molti di questi ostacoli sono stati superati grazie all’introduzione dei “sistemi di supporto alle decisioni” (*decision support systems* – DDS) e al notevole sviluppo di potenza dei moderni computer.

In particolare, quest’ultimo aspetto permette la riduzione del grado di semplificazione e approssimazione della descrizione modellistica del sistema, aprendo le porte a un maggior realismo applicativo dei modelli di ottimizzazione.

Il presente lavoro di tesi si suddivide in quattro paragrafi principali (oltre alla presente introduzione generale). In particolare, il paragrafo 2 introduce la disciplina scientifica di riferimento: cioè la Ricerca Operativa ed il suo legame con lo specifico problema dell’ottimale gestione dei sistemi di invaso. Nel paragrafo 3 sono esposti i lineamenti teorici principali degli approcci metodologici e dei modelli utilizzati nell’applicazione finale al sistema di invasi in oggetto, i cui risultati sono esposti e ampiamente commentati nel successivo paragrafo 4.

Il paragrafo 5, infine, riporta le considerazioni conclusive sulla complessità d’uso dei modelli, sui risultati ottenuti e sulle prospettive di studio e approfondimento future.

2. La Ricerca Operativa nella gestione delle risorse idriche

Nella presente tesi di dottorato si considera il problema di ottimizzazione delle risorse idriche utilizzate da un sistema multi-invaso a scopo plurimo (*multi-reservoirs and multi-purpose system*).

Il sistema in esame è costituito dalla rete di deflusso naturale e da un numero anche molto elevato di serbatoi interconnessi fra di loro secondo uno schema prestabilito a priori.

La prima operazione da eseguire è, pertanto, la schematizzazione del sistema reale mediante una rappresentazione grafica a *network*, cioè costituita da nodi (serbatoi, utenze) ed archi (canali, condotte, gronde, etc...) che collegano gli stessi.

Ovviamente sarà necessaria la conoscenza delle modalità di comunicazione fra i diversi invasi, cioè i deflussi previsti tra serbatoio e serbatoio. La successiva figura mostra la rappresentazione di una possibile configurazione di un sistema multi-invaso.

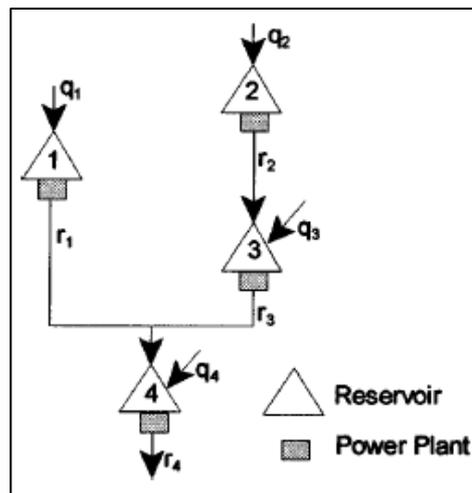


Fig. 2.1 – Schema a network di un generico sistema multi-invaso (da Labadie, 2004)

Nelle condizioni di larga generalità posti, il sistema di invasi è normalmente progettato per il perseguimento di più obiettivi: esso, cioè, è un sistema a scopo plurimo (*multi-purpose*): produzione idroelettrica, laminazione delle piene, mantenimento del minimo deflusso vitale, soddisfacimento di idroesigenze di varia natura: potabile, irrigua, industriale, etc...

Gli scopi ed obiettivi suddetti spesso sono conflittuali tra di loro, nel senso che regole operative di gestione del sistema pensate per il raggiungimento di uno d'essi, sovente pregiudicano gli altri: è il caso, ad esempio, di un sistema di invasi votato al soddisfacimento simultaneo di esigenze irrigue e laminazione delle piene. E' evidente che per il primo scopo sarebbe necessario individuare regole operative che limitassero i rilasci nei periodi invernali in modo da poter ottenere un livello d'invaso quanto più possibile vicino alla quota di massima regolazione all'inizio del periodo di deficit previsto. D'altra parte, l'obiettivo di laminazione delle piene, prevede regole operative quasi

antitetiche rispetto a quelle precedenti, votate, cioè, al mantenimento, durante il periodo invernale, di una capacità di invaso minima, necessaria per fronteggiare il verificarsi di importanti eventi di piena.

Anche da questo banale esempio emerge chiaramente la complessità del problema della stima delle regole di gestione ottimali che realizzino una sorta di compromesso tra i diversi obiettivi in gioco: tale stima è, in definitiva, un problema di “decision making” cioè un problema “decisionale”.

Nel prosieguo della presente relazione, si concentra l’attenzione sulle principali tecniche decisionali sviluppate prevalentemente nel campo della cosiddetta “Ricerca Operativa” (RO).

Tale disciplina (Hipel, 1993) nacque in Gran Bretagna nel luglio del 1938 con l’intento di sviluppare *ricerche* sugli aspetti *operativi* dei sistemi radar (Blackett, 1962; Waddington, 1973). Durante la II guerra mondiale gli alleati svilupparono ed usarono differenti tecniche RO nello studio di problemi militari a larga scala. Da quel momento in poi, la RO è stata ulteriormente sviluppata ed usata per lo studio di problemi operativi in differenti campi di applicazione: scienze gestionali, ingegneria dei trasporti, analisi dei sistemi, scienze militari, ingegneria industriale e, non ultimo, le risorse idriche (si veda l’esempio precedente, ma le tecniche della RO possono essere applicate non solo alla ricerca delle regole di gestione operative ottimali, ma anche, ad esempio, alla progettazione della configurazione ottimale di invasi in un sistema multi-invaso (Mousavi e Ramamurthy, 2000).

Le tecniche sviluppate nell’ambito della RO possono essere classificate sulla base di attributi quali:

- il numero di decisori (*decision making*);
- il numero di obiettivi (ciascun *decision making* può avere uno o più obiettivi);
- lo stato dell’informazione (un decisore può avere informazioni complete o parziali circa il problema in esame);

inoltre tali tecniche possono essere:

- probabilistiche (il modello può trattare informazioni a carattere probabilistico);
- deterministiche (il modello può trattare informazioni non probabilistiche);
- fuzzy;
- statiche (i parametri del modello non cambiano nel tempo, non essendo il tempo stesso una variabile del modello);
- dinamiche (il tempo è una variabile del modello che, pertanto, può descrivere il sistema nella sua evoluzione temporale);

Se ci si riferisce solo ai primi due attributi (numero di decisori e numero di obiettivi), le tecniche RO possono essere classificate sulla base della tabella seguente:

		NUMERO DI OBIETTIVI	
		1	> 1
NUMERO DI DECISORI	1	Varie tecniche RO	Multiple Criteria Decision Making (MCDM)
	> 1	Team Theory	Game Theory

Tabella 2.1 – Criteri di classificazione delle tecniche della RO

I paragrafi da 3.1 a 3.9 esaminano le principali tecniche RO nel caso di un unico obiettivo da perseguire, mentre il paragrafo 3.10 analizza gli aspetti teorici del cosiddetto problema “multi-obiettivo” con contestuale esposizione di alcune tecniche di risoluzione adottate nell’applicazione finale al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.

La traduzione analitica dei problemi di ottimizzazione affrontati dalla RO impone in primis una fase di formulazione del problema, durante la quale siano individuate l’insieme delle variabili giudicate come fattori rilevanti del sistema da analizzare. Tra queste ve ne saranno alcune (dette “variabili decisionali”) direttamente controllabili dal gestore del sistema (ad esempio, i rilasci turbinati), mentre altre saranno incontrollabili (“variabili di stato”). La fase successiva è la definizione di una “funzione obiettivo”, espressa in termini delle variabili del sistema, la quale sintetizzi analiticamente l’insieme degli scopi da perseguire da parte del gestore del sistema stesso.

Il passo successivo è la definizione del modello di ottimizzazione, costituito dalla funzione obiettivo testè introdotta e dai vincoli che le variabili del sistema devono obbligatoriamente rispettare (si pensi, ad esempio, ai vincoli di non negatività dei rilasci turbinati).

L’ottimizzazione vera e propria consiste nella ricerca dell’insieme “ottimo” delle variabili decisionali, cioè dell’insieme dei valori delle variabili decisionali che massimizzano (o minimizzano) la funzione obiettivo.

Come esposto nei successivi paragrafi, tale funzione, nel caso della ottimizzazione della gestione operativa di sistemi multi-invaso a scopo plurimo, risulta fortemente non-lineare, non-convessa e caratterizzata da molti massimi locali, soprattutto nel caso in cui, fra i diversi obiettivi del sistema, sia presente quello della massimizzazione della produzione energetica tramite impianti idroelettrici (Tauxe et al., 1980).

In aggiunta a queste caratteristiche, il sistema è reso ancora più complesso dal fatto che alcune variabili, come i deflussi naturali in ingresso, il tasso di evaporazione netta, i parametri idrologici, quelli economici e le domande delle utenze, dovrebbero essere trattate alla stregua di *variabili casuali*.

Il carattere aleatorio tipico di tali problemi può essere trattato mediante due approcci di tipo stocastico ed euristico alternativi (Labadie, 2004):

- approccio “**Implicit Stochastic Optimization**” – *I.S.O.* (letteralmente: “*ottimizzazione stocastica implicita*”);
- approccio “**Explicit Stochastic Optimization**” – *E.S.O.* (letteralmente: “*ottimizzazione stocastica esplicita*”);

i lineamenti teorici dei quali sono esposti nel paragrafo 3.11.

3. Lineamenti teorici di alcuni modelli della Ricerca Operativa

3.1 La programmazione lineare

Il modello matematico per il problema generale della programmazione lineare può essere espresso da (Hillier e Lieberman, 2005):

$$\max Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \quad (3.1)$$

sottoposto ai vincoli:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &\leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &\leq b_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, \quad x_n \geq 0 \quad (3.3)$$

dove le variabili x_1, x_2, \dots, x_n sono denominate “variabili decisionali”, mentre i valori di c_j, b_i e a_{ij} (per $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$) sono delle costanti in input al modello denominati “parametri del modello”.

Come si può osservare, la funzione obiettivo è lineare così come i vincoli (3.2) e (3.3).

L'equazione (3.1) sottoposta ai vincoli (3.2) e (3.3) è detta “forma standard” del problema di programmazione lineare.

La funzione Z da massimizzare è detta “funzione obiettivo”; l'insieme delle m equazioni costituenti i vincoli (3.2) sono denominati “vincoli funzionali” o “vincoli strumentali”, mentre gli n vincoli (3.3) sono i “vincoli di non-negatività”. indifferentemente

¹ Si ricordi che il problema di ottimizzazione può essere indifferentemente espresso in termini di massimizzazione o di minimizzazione di una funzione. Il passaggio dall'uno all'altro tipo è immediato, in virtù della semplice relazione:

$$\max[f(x)] = -\min[-f(x)]$$

Nel prosieguo si esporranno problemi dell'uno e dell'altro tipo in relazione all'oggetto della discussione, fermo restando il carattere generale delle considerazioni e dei risultati ottenuti.

L'insieme delle relazioni (3.1), (3.2) e (3.3) è solo una delle possibili forme mediante cui presentare e trattare il problema di programmazione lineare; come anticipato, a tale particolare forma è stato attribuito l'aggettivo "standard".

Si continua a parlare di modello matematico di programmazione lineare anche quando si verificano alcune variazioni rispetto alla forma standard. Tali variazioni riguardano:

1. la possibilità di analizzare un problema di "minimizzazione" (ricerca del minimo);
2. la possibilità di applicare vincoli funzionali con un differente verso della disuguaglianza o con presenza di uguaglianze (cioè $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n \geq b_i$ o $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i$ per qualche valore di i);
3. la possibilità di eliminare vincoli di non-negatività per qualche variabile decisionale.

Un qualunque problema che presenti alcune o tutte le variazioni indicate deve essere considerato a tutti gli effetti come un problema di programmazione lineare.

Le soluzioni del modello

Una qualunque n -pla di valori delle variabili decisionali x_1, x_2, \dots, x_n è una soluzione del modello, indipendentemente dal fatto che essa sia permessa o non permessa dai vincoli in oggetto.

Una soluzione che soddisfa tutti i vincoli (sia quelli funzionali, sia quelli di non-negatività) è detta "soluzione ammissibile".

Una soluzione che viola almeno un vincolo è detta "soluzione non ammissibile".

La regione ammissibile è l'insieme delle soluzioni ammissibili.

E' possibile che un problema non abbia soluzioni ammissibili, ma una volta determinato che esse esistono, lo scopo della programmazione lineare è di determinare una "soluzione ammissibile ottima", sulla base della funzione obiettivo del modello. Quindi una "soluzione ottima" è una soluzione ammissibile che fornisce il valore più vantaggioso per la funzione obiettivo (per "valore più vantaggioso" si intende il valore più grande, se l'obiettivo è quello di massimizzare Z , mentre il valore più piccolo se è quello di minimizzazione di tale funzione).

Molti problemi ammettono un'unica soluzione ottima (cioè un'unica combinazione di valori dell' n -pla x_1, x_2, \dots, x_n), tuttavia è possibile che ne esista più di una (soluzioni ottime multiple). Se un problema ha soluzioni ottime multiple, queste sono necessariamente in numero infinito.

Un'altra possibilità è che un problema non abbia soluzioni ottime. Questo può succedere per due cause:

1. non esistono soluzioni ammissibili;
2. i vincoli sono strutturati in modo tale da permettere alla funzione Z di crescere (o decrescere) indefinitamente: questo è il caso di funzione obiettivo illimitata.

I principali metodi utilizzati in letteratura per la risoluzione dei problemi lineari sono:

- algoritmo del *simplex* (Dantzig e Thapa, 1997);
- metodi “*Affine scaling and interior projection*” (Terlaky, 1996);
- approccio detto a “punti interni” (Karmarkar, 1984);

per l’approfondimento teorico dei quali si rimanda alla citata bibliografia.

3.2 Convessità

3.2.1 Convessità (concavità) per funzione di una singola variabile

Una funzione $f(x)$ di una variabile è una funzione convessa se, per ogni coppia x' e x'' di valori di x (con $x' < x''$) si ha:

$$f[\lambda \cdot x'' + (1 - \lambda) \cdot x'] \leq \lambda \cdot f(x'') + (1 - \lambda) \cdot f(x') \quad (3.4)$$

Per ogni valore di λ tale che $0 < \lambda < 1$.

Una funzione è strettamente convessa se nella (3.4) appare il segno $<$.

Una funzione è concava (rispettivamente “strettamente concava”) se nella condizione (3.4) appare il segno \geq (rispettivamente $>$).

Il concetto di convessità (concavità) per funzioni di una variabile ha una immediata interpretazione geometrica. Si faccia riferimento alla funzione esposta nella figura successiva:

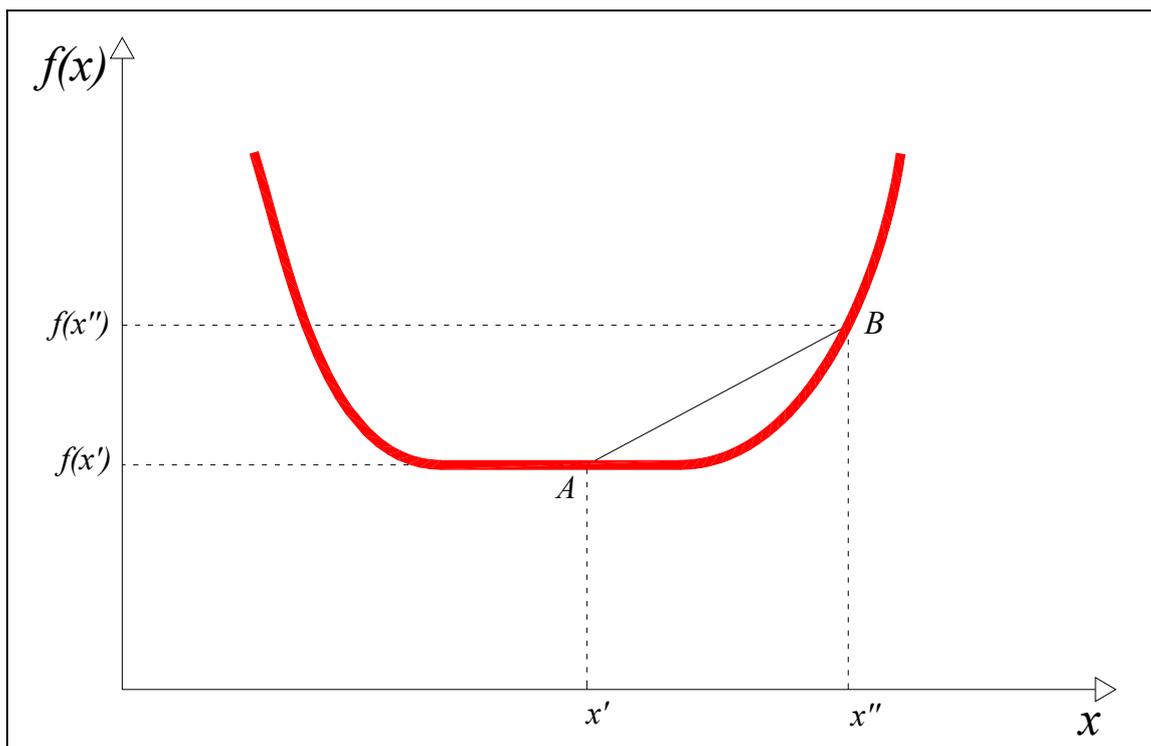


Fig. 3.1 – Esempio di funzione convessa

Siano A e B due punti appartenenti alla funzione con coordinate $A \equiv [x', f(x')]$ e $B \equiv [x'', f(x'')]$.

Il punto di coordinate $[\lambda \cdot x'' + (1 - \lambda) \cdot x', \lambda \cdot f(x'') + (1 - \lambda) \cdot f(x')]$, per qualche valore di $0 < \lambda < 1$, corrisponde ad un punto del segmento che congiunge i due estremi A e B, esclusi gli estremi stessi (si escludono perché si è assunto $0 < \lambda < 1$: i punti A e B si ottengono rispettivamente ponendo $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$).

La condizione (3.4) indica quindi che la funzione $f(x)$ è convessa se tutti i punti del segmento che unisce i due punti in esame stanno sopra o al più coincidono col grafico della funzione stessa e se questo è vero per ogni coppia di punti estremi scelta.

Sia $f(x)$ una funzione di una sola variabile che ammette derivata seconda per tutti i possibili valori x . Allora $f(x)$ è:

- convessa, se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$ per tutti i possibili valori di x ;
- strettamente convessa, se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ per tutti i possibili valori di x ;
- concava, se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$ per tutti i possibili valori di x ;

- strettamente convessa, se e solo se $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ per tutti i possibili valori di x ;

Per le relative interpretazioni geometriche si vedano le successive figure:

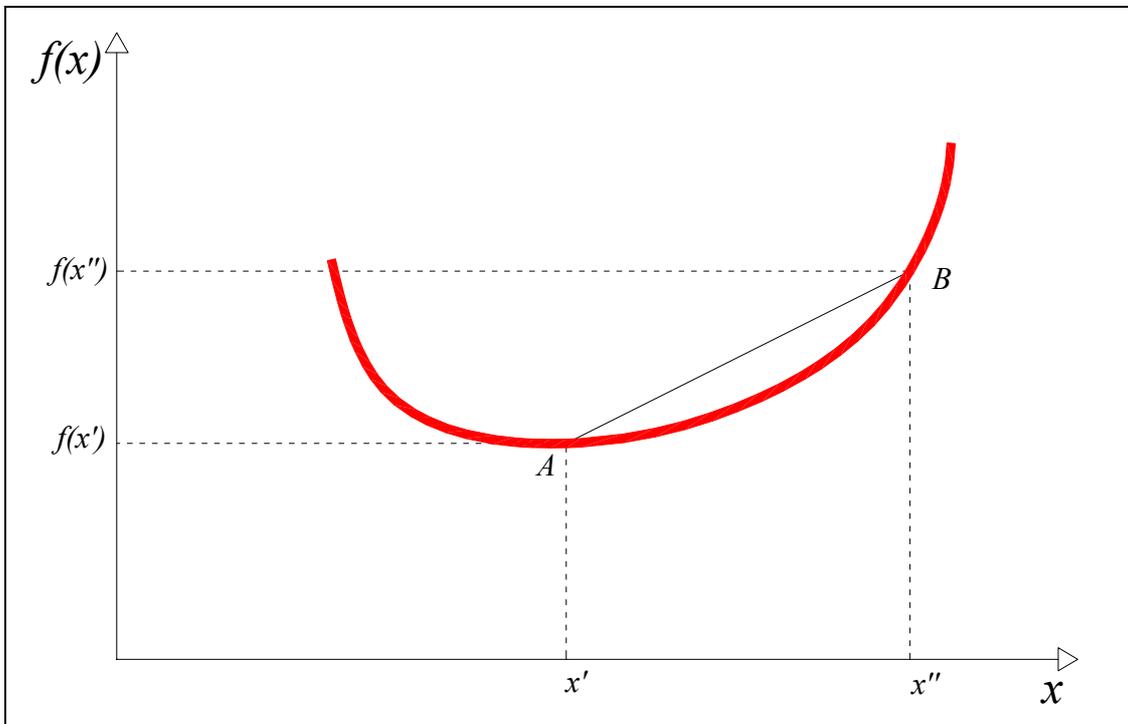


Fig. 3.2 – Esempio di funzione strettamente convessa

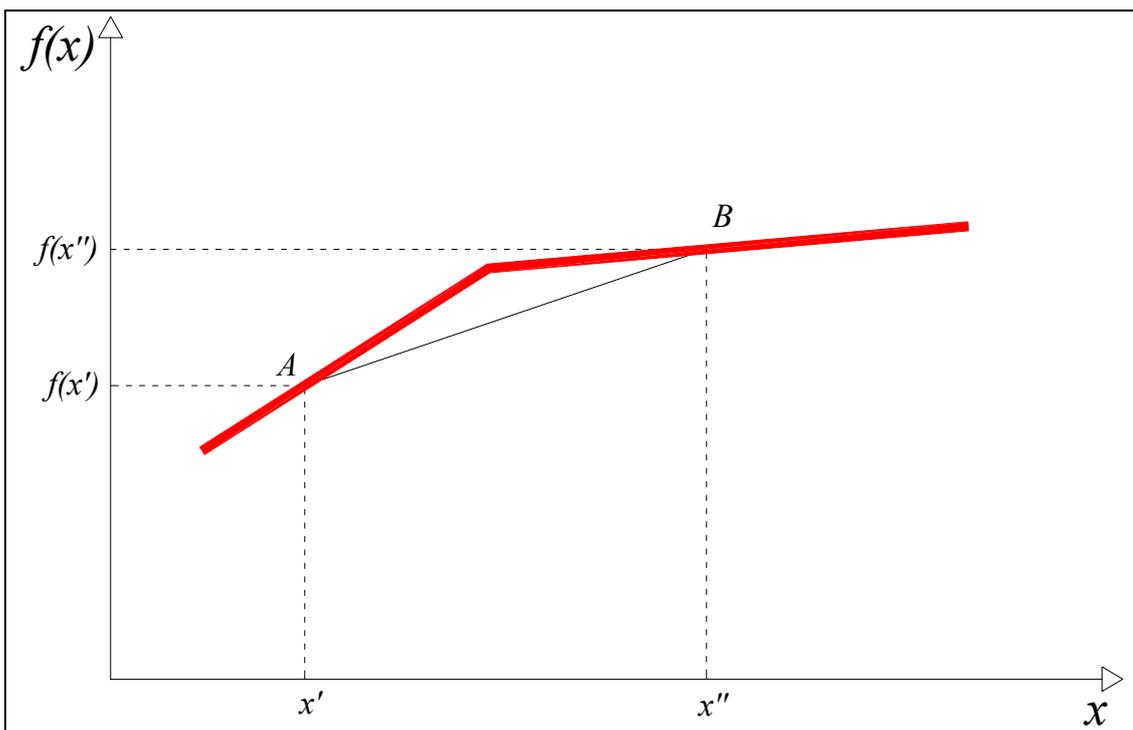


Fig. 3.3 – Esempio di funzione concava

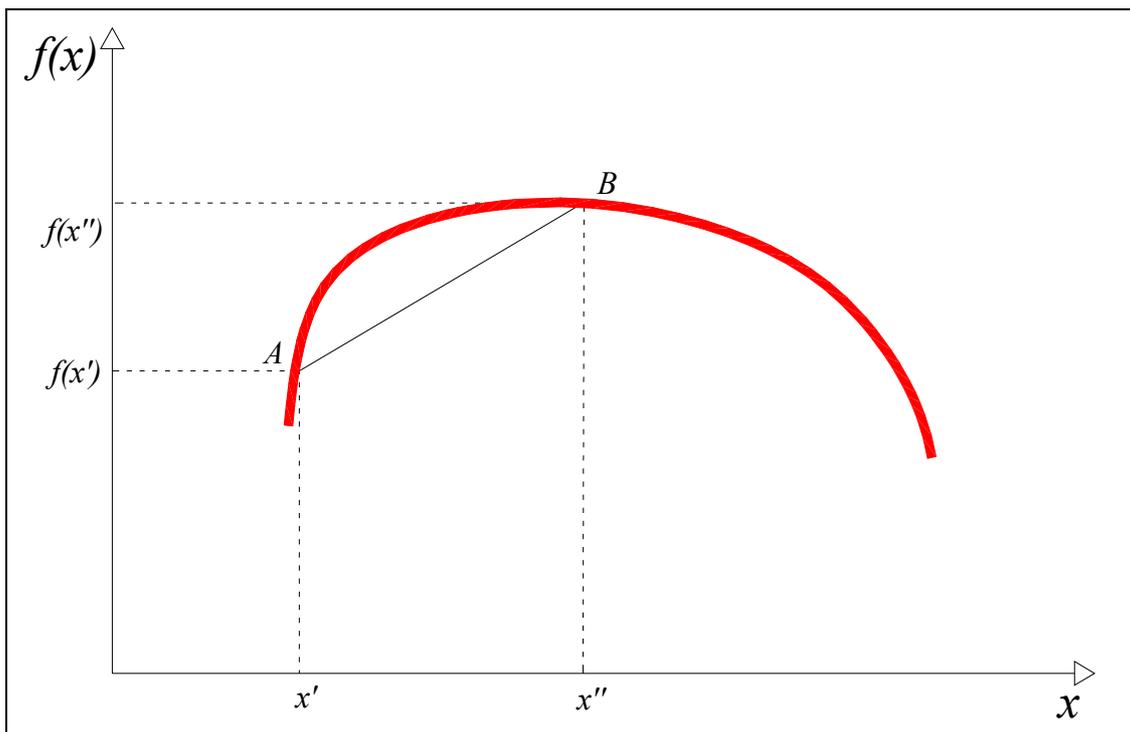


Fig. 3.4 – Esempio di funzione strettamente concava

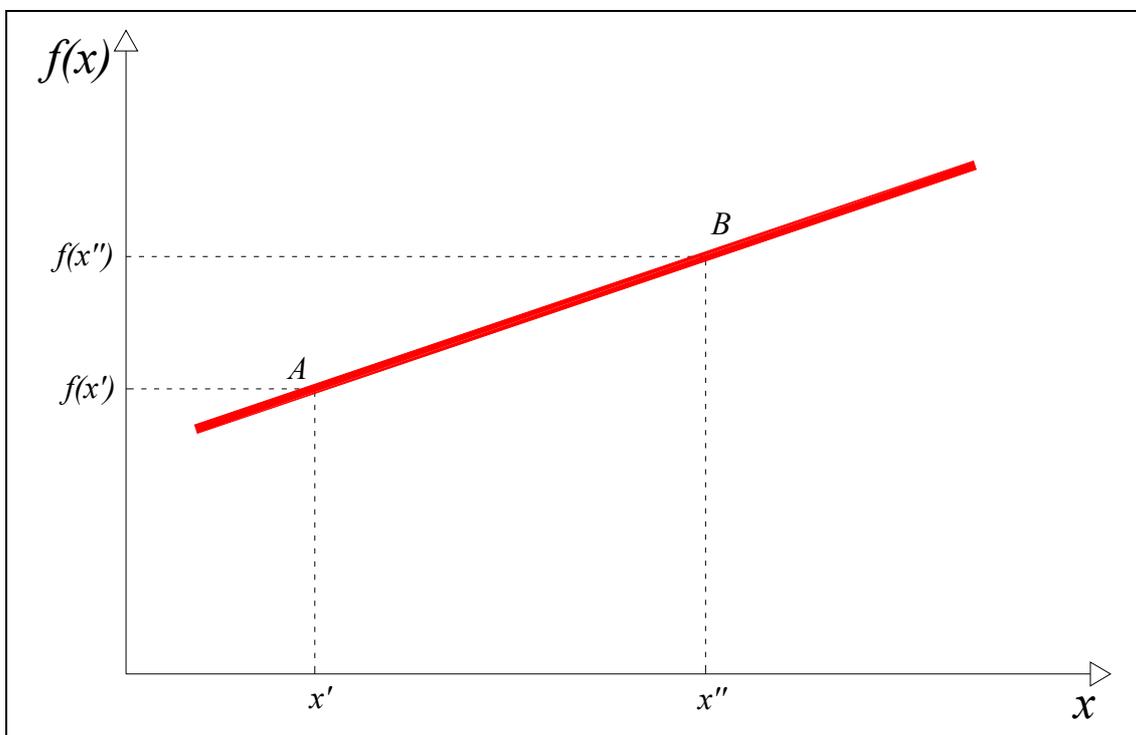


Fig. 3.5 – Esempio di funzione sia concava sia convessa

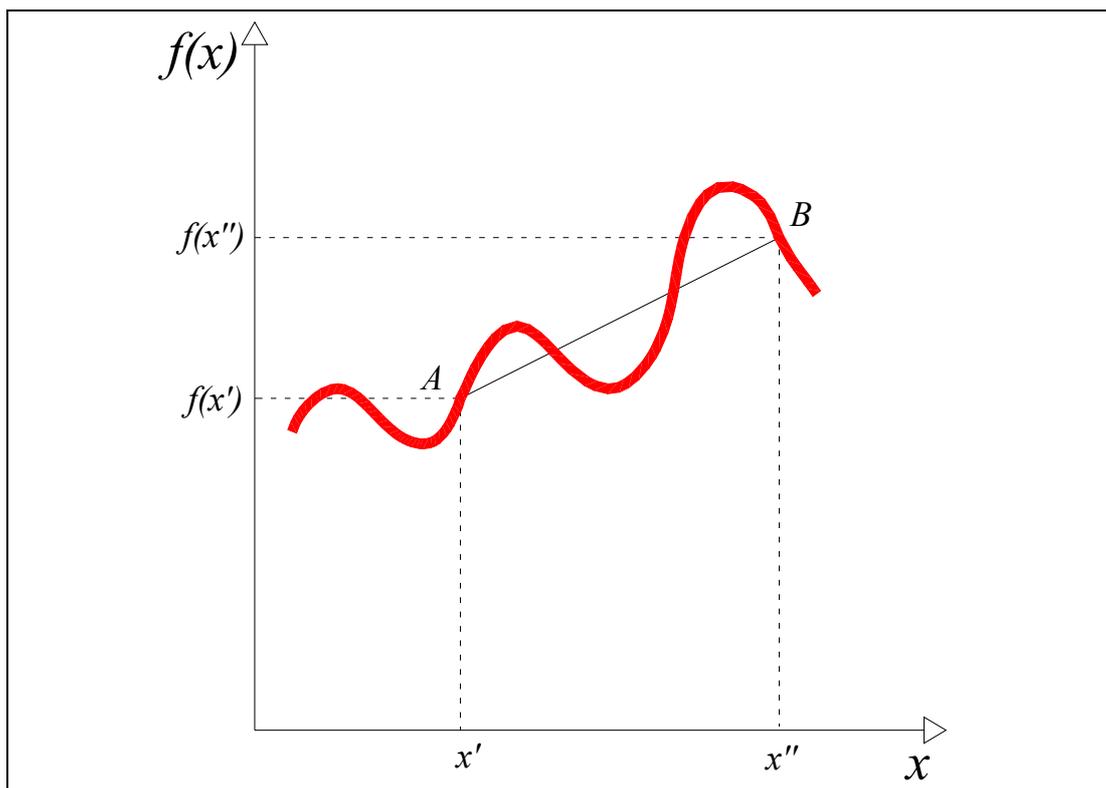


Fig. 3.6 – Esempio di funzione che non è né concava né convessa

Si noti che una funzione strettamente convessa (strettamente concava) è una funzione convessa (concava), ma non è detto che sia sempre vero il caso contrario: ad esempio se per una funzione convessa esiste qualche valore di x per cui $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$ allora tale funzione non è strettamente convessa.

3.2.2 Convessità (concavità) per funzioni di più variabili

Il concetto di convessità (concavità) espresso per funzioni di una variabile può essere generalizzato a funzioni di n variabili x_1, x_2, \dots, x_n .

Anche l'interpretazione geometrica è ancora valida, purchè si generalizzino i concetti di punti e segmenti nello spazio ad m dimensioni.

Posto $m = n + 1$, e dati due punti A e B dello spazio ad m dimensioni appartenenti al grafico della funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $A \equiv [x_1', x_2', \dots, x_n', f(x_1', x_2', \dots, x_n')]$ e $B \equiv [x_1'', x_2'', \dots, x_n'', f(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')]$, il

segmento che unisce i due punti appena introdotti è l'insieme dei punti di coordinate (x_1, x_2, \dots, x_m) dati da:

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) = \lambda \cdot x_1'' + (1-\lambda) \cdot x_1', \lambda \cdot x_2'' + (1-\lambda) \cdot x_2', \dots, \lambda \cdot x_n'' + (1-\lambda) \cdot x_n', \lambda \cdot f(x_1'', x_2'', \dots, x_n'') + (1-\lambda) \cdot f(x_1', x_2', \dots, x_n')$$

(3.5)

variando con continuità $0 < \lambda < 1$.

Una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è convessa se, per ogni coppia di punti del grafico della funzione stessa, il segmento che li unisce si trova al di sopra o al limite appartiene al grafico stesso. In modo analogo a quanto fatto per funzioni di una sola variabile, si adattano le definizioni di stretta convessità, concavità e stretta concavità.

E' inoltre possibile estendere anche alle funzioni di più variabili il test di convessità esposto per le funzioni di una sola variabile.

Così come la derivata seconda può essere usata per stabilire se una funzione di una sola variabile è convessa o meno, le derivate parziali seconde possono essere usate per stabilire la convessità di funzioni di più variabili, anche se in modo più complicato. In particolare si deve considerare la matrice hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ della funzione $f(\mathbf{x})$. Tale matrice, che ha dimensione $n \times n$, è definita

come $\nabla^2 f(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ cioè:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

In particolare la funzione di più variabili $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è convessa se e solo se la sua matrice *hessiana* $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ è semidefinita positiva per tutti i possibili valori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se cioè:

$$\mathbf{x}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (3.7)$$

Si ricorda, inoltre, che molte funzioni non convesse potrebbero invece risultarlo in certi intervalli: una funzione, pertanto, è convessa nell'intorno di un certo punto se la sua *hessiana* è semidefinita positiva in quel punto.

Infine si riportano due proprietà particolarmente importanti delle funzioni convesse/concave:

1. se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è convessa, allora la funzione $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è concava e viceversa;
2. la somma di funzioni convesse (concave) è una funzione convessa (concava).

3.2.3 Insiemi convessi

Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una funzione convessa, l'insieme dei punti che appartengono o si trovano al di sopra del grafico di tale funzione costituiscono un'insieme convesso.

Analogamente, se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una funzione concava, l'insieme dei punti che appartengono o si trovano al di sotto del grafico della funzione in esame costituiscono un'insieme convesso.

L'intersezione di insiemi convessi costituisce un insieme che è ancora convesso.

Più in generale si definisce come insieme convesso, un insieme di punti tale che, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li unisce è interno all'insieme.

Un punto estremo di un insieme convesso è un punto dell'insieme che non appartiene ad alcun segmento congiungente altri due punti distinti dell'insieme.

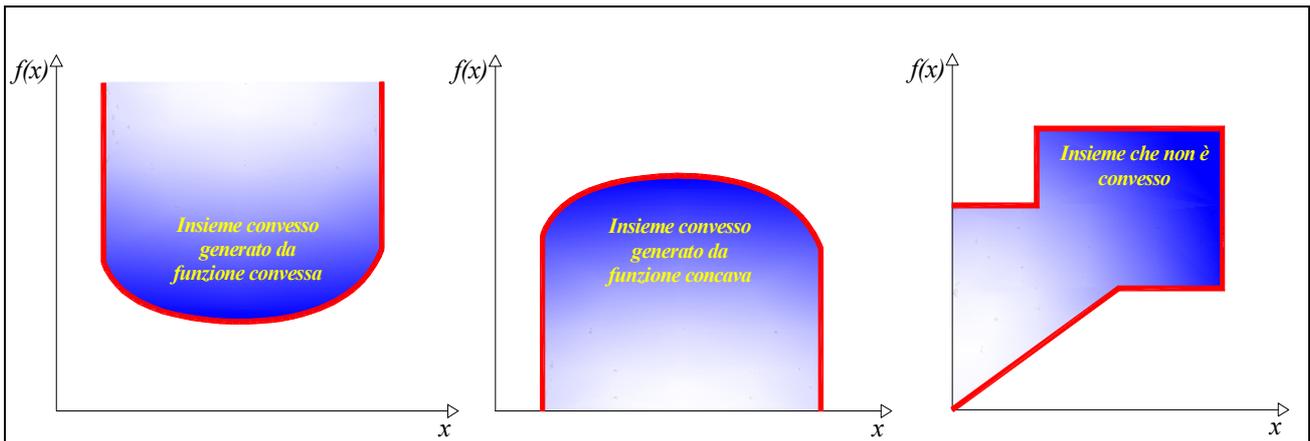


Fig. 3.7 – Esempio di insiemi convessi e non convessi

3.3 La programmazione non-lineare

Nella forma generale, il problema di programmazione non lineare è determinare il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tale da:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimizzare}} \quad f(\mathbf{x}) \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &\text{soggetto ai vincoli :} \\ &g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, m \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

in cui $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ sono funzioni delle n variabili decisionali x_1, x_2, \dots, x_n .

Esistono molti tipi differenti di problemi di programmazione non lineare a seconda delle caratteristiche delle funzioni $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ appena introdotte. A differenza dei problemi di programmazione lineare, nessun singolo algoritmo può risolvere tutti questi tipi di problemi. Al contrario, sono stati sviluppati algoritmi per varie classi di problemi.

Nel prosieguo si introdurranno tali classi e i relativi algoritmi di risoluzione adottabili.

3.3.1 Ottimizzazione non vincolata

I problemi di ottimizzazione non vincolata non hanno nessun vincolo sulla regione ammissibile; l'obiettivo, pertanto, si riduce solo a:

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimizzare}} \quad f(\mathbf{x})$$

per tutti i valori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, cioè per $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$.

Se la funzione $f(\mathbf{x})$ è differenziabile, condizione necessaria affinché una particolare soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ sia ottima è che:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \quad \text{per } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.9)$$

Se la funzione $f(\mathbf{x})$ oltre a essere differenziabile è anche “convessa”, la condizione (3.9) è anche sufficiente. In questo caso il problema si riduce alla risoluzione del sistema di n equazioni (3.9) ottenuto eguagliando a zero le n derivate parziali della funzione $f(\mathbf{x})$.

Purtroppo, però, nella maggior parte dei casi, tali derivate sono anch'esse non lineari, quindi risulta molto difficile determinare analiticamente una soluzione.

Se per qualche variabile x_j è presente un vincolo di non-negatività $x_j \geq 0$, la precedente condizione necessaria (ed nel caso indicato in precedenza, anche sufficiente) cambia in:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \begin{cases} \leq 0 & \text{in } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \quad \text{se } x_j^* = 0 \\ = 0 & \text{in } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \quad \text{se } x_j^* > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

per ogni j .

Gli algoritmi di ricerca della soluzione ottima \mathbf{x}^* si differenziano al variare del numero delle variabili decisionali in gioco: in particolare, si esamineranno quelli da adottare nel caso $n = 1$ (una sola variabile) e poi quelli da adoperare per $n > 1$.

Tali procedure devono essere introdotte ed analizzate in dettaglio, in quanto giocano un ruolo chiave anche nella risoluzione dei problemi di ottimizzazione vincolata, i quali sono concepiti in

modo tale da concentrare l'attenzione, ad ogni iterazione, su una versione non vincolata del problema (vincolato) originario.

3.3.1.1 Ottimizzazione non vincolata in una sola variabile: metodo di Newton

Si consideri una funzione di una sola variabile. Condizione necessaria affinché una particolare soluzione $x = x^*$ sia un minimo o un massimo è che:

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{in } x = x^* \quad (3.11)$$

Questa condizione come detto è solo necessaria. Per avere informazioni aggiuntive su tali punti critici è poi indispensabile indagare anche la derivata seconda. In particolare se essa è maggiore di zero in un punto critico x^* :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \quad \text{in } x = x^* \quad (3.12)$$

allora questo punto critico x^* è (quantomeno) un “minimo locale” (cioè $f(x^*) < f(x)$ in un intorno sufficientemente piccolo di x^*).

Questa condizione (di sufficienza) equivale a dire che x^* è un minimo locale se $f(x)$ è strettamente convessa in un intorno di x^* .

Così come x^* è un massimo locale se $f(x)$ è strettamente concava in un intorno di x^* .

Se si vuole calcolare il minimo (massimo) globale è necessario confrontare tutti i minimi (massimi) locali appena determinati.

Se però la funzione $f(x)$ è convessa o concava, l'analisi diventa molto più semplice.

Si considera il problema di ottimizzazione non vincolata in una sola variabile x , con funzione obiettivo $f(x)$ da massimizzare, differenziabile e concava.

Per quanto detto in precedenza, condizione necessaria e sufficiente affinché una particolare soluzione $x = x^*$ sia ottima (e che, in particolare, sia un massimo globale) è che:

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{in } x = x^* \quad (3.13)$$

Analogamente se la funzione obiettivo $f(x)$ da minimizzare è differenziabile e convessa, condizione necessaria e sufficiente affinché una particolare soluzione $x = x^*$ sia ottima (e che, in particolare, sia un minimo globale) è ancora che:

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{in } x = x^* \quad (3.14)$$

Si noti che il punto ottimo (di minimo o massimo) globale così determinato non è detto che sia unico, perché ad esempio, la funzione potrebbe essere tale da presentare derivata prima nulla in un certo intervallo.

Se però la funzione è strettamente concava (convessa), allora il massimo (minimo) globale è unico.

Se le equazioni (3.13) hanno risoluzione analitica il procedimento è terminato.

Se l'equazione non è relativamente semplice, la sua derivata potrebbe non essere risolvibile da un punto di vista analitico: sarà pertanto necessario introdurre particolari algoritmi per procedere alla sua risoluzione numerica.

Una delle procedure di ricerca numerica più utilizzate è il cosiddetto "metodo di *Newton*".

Tale metodo ha un approccio iterativo: in corrispondenza di ciascun passo della suddetta iterazione, si approssima, nell'intorno del punto corrente, la funzione $f(x)$ con una funzione quadratica e poi si minimizza (o eventualmente si massimizza) la funzione approssimata per ottenere un nuovo punto "migliore". La procedura continua fino a quando la sequenza così ottenuta di punti non converge a una soluzione ottima, nell'ipotesi che ne esista una.

L'approssimazione quadratica della funzione $f(x)$ nell'intorno del punto corrente x , viene ottenuta troncando la serie di *Taylor* al secondo termine. In particolare, se x_k è il punto corrente dell'iterazione k -esima usata per ricavare il successivo punto x_{k+1} , la serie di *Taylor* troncata è:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_k) \cdot (x - x_k)^2 \quad (3.15)$$

Poiché il punto x_k è noto, le quantità $f(x_k)$, $f'(x_k)$ e $f''(x_k)$ sono note, perciò il secondo membro è una funzione quadratica nella variabile x .

Tale funzione quadratica può essere ora minimizzata ponendo uguale a zero la sua derivata prima e risolvendo in x (si ricordi che si ipotizza $f(x)$ convessa, di conseguenza anche la funzione quadratica approssimante è convessa: in questo caso la soluzione ottenuta è un minimo globale).

La derivata prima sarà:

$$f'(x) \approx f'(x_k) + f''(x_k) \cdot (x - x_k) \quad (3.16)$$

in quanto le quantità $x_k, f(x_k), f'(x_k)$ e $f''(x_k)$ sono trattate al pari di costanti.

Imponendo che la derivata prima sia pari a zero si ottiene:

$$f'(x_k) + f''(x_k) \cdot (x - x_k) = 0 \quad (3.17)$$

da cui si ricava l'incognita x_{k+1} :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (3.18)$$

cioè, a ciascun passo dell'iterazione, il nuovo punto è dato sottraendo al "vecchio" il rapporto fra le derivate prima e seconda calcolate nel "vecchio" punto.

Questa procedura continua sino a quando la sequenza di punti converge secondo un criterio ben definito a priori. Fra i diversi criteri alternativi di convergenza adottabili si ricordano:

- la verifica che la quantità $|x_{k+1} - x_k|$ sia sufficientemente piccola (inferiore ad un ε predefinito);
- la verifica che $f'(x)$ sia quasi zero;
- la verifica che la quantità $|f(x_{k+1}) - f(x_k)|$ sia sufficientemente piccola.

3.3.1.2 Ottimizzazione non vincolata in più variabili: metodo del gradiente, metodo di Newton in più variabili e metodo "Line-search"

L'analisi per una funzione di più variabili $f(\mathbf{x})$ dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ è analoga a quella delle funzioni a una variabile.

Quindi, la condizione necessaria affinché una soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ sia un minimo o un massimo (punto critico) è che:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

I punti critici così determinati sono poi classificati come minimi o massimi locali a seconda se la funzione (nell'intorno del punto) è strettamente convessa o concava. Il minimo ed il massimo globale si ottengono confrontando il valore che la funzione f assume in questi punti critici.

Se però la funzione in esame è convessa (concava), la condizione sopra riportata è anche sufficiente affinché x^* sia un punto di minimo (massimo) globale.

Si considera, nel prosieguo, il problema di minimizzazione di una funzione differenziabile e convessa $f(\mathbf{x})$ in più variabili $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ non soggetta a vincoli di sorta.

Si supponga che non sia possibile risolvere analiticamente il sistema di equazioni ottenuto ponendo a zero le n derivate parziali e che quindi debba essere utilizzata una procedura numerica.

In questo paragrafo se ne mostreranno tre: la prima è detta "metodo del gradiente", la seconda è l'estensione del "metodo di *Newton*" al caso di più variabili, la terza è il metodo "*line search*" che può essere considerato una generalizzazione dei precedenti.

3.3.1.2.1 Metodo del gradiente

Tale metodo si basa sull'identificazione della direzione lungo cui muoversi a partire dal punto corrente massimizzando il tasso di decremento della funzione $f(x)$. Solo che nel caso di più variabili, tale identificazione non risulta semplice, in quanto vi sono innumerevoli possibili direzioni lungo cui muoversi per l'individuazione del nuovo punto "migliore": a tali direzioni corrispondono differenti tassi di miglioramento delle variabili.

L'obiettivo è raggiungere alla fine un punto in cui tutte le derivate parziali sono nulle.

Poiché si ipotizza che la funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$ sia differenziabile essa possiede il gradiente, indicato con $\nabla f(\mathbf{x})$ in ogni punto \mathbf{x} .

In particolare, il gradiente della funzione $f(\mathbf{x})$ in un generico punto \mathbf{x}' è il vettore di tutte le sue derivate parziali calcolate in \mathbf{x}' :

$$\nabla f(\mathbf{x}') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad \text{in } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \quad (3.20)$$

L'importanza del gradiente risiede nel fatto che la direzione a partire da \mathbf{x}' che massimizza il tasso di incremento della funzione $f(\mathbf{x})$ è proporzionale alla direzione di $\nabla f(\mathbf{x}')$. Si noti che per "direzione del gradiente $\nabla f(\mathbf{x}')$ " si intende la direzione del vettore che unisce l'origine con il punto nello spazio ad n dimensioni $\nabla f(\mathbf{x}')$.

In sintesi: il tasso di incremento di $f(\mathbf{x}')$ in \mathbf{x}' è massimo se ci si muove lungo la direzione indicata dal gradiente $\nabla f(\mathbf{x}')$.

E' quindi immediato comprendere che, nel caso in cui l'obiettivo sia quello di minimizzare la funzione obiettivo, la direzione di ricerca da utilizzare sia quella dell' "antigradiente" di f in \mathbf{x}' , cioè: $-\nabla f(\mathbf{x}')$ perché essa minimizza la derivata direzionale in \mathbf{x}' fra tutte le direzioni che hanno norma euclidea unitaria. Ecco perché il metodo del gradiente è anche noto come il "metodo della discesa più rapida" (*steepest descent method*).

Per giungere al punto ottimo, pertanto, si dovrebbe seguire, partendo dal punto \mathbf{x}' , la direzione del gradiente (nel verso dell'antigradiente $-\nabla f(\mathbf{x}')$) e valutare, in maniera "continua", i nuovi valori di \mathbf{x} e di $\nabla f(\mathbf{x})$, il che implica continui cambi di direzione sulla base di continue valutazioni di n derivate parziali.

Un approccio più efficiente, invece si basa sulla seguente idea: continuare a muoversi lungo la direzione fissata indicata dal gradiente fino a che $f(\mathbf{x})$ decresce. Solo in questo punto sarà necessario ricalcolare il gradiente e, sulla base di questo, cambiare direzione.

Al generico passo d'iterazione k -esimo, pertanto, il "nuovo" punto \mathbf{x}_{k+1} sarà calcolato mediante la relazione:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (3.21)$$

dove α^* è il valore (positivo) che minimizza $f(\mathbf{x}_k - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k))$, cioè minimizza la funzione obiettivo lungo la direzione del gradiente $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ partendo da \mathbf{x}_k . Cioè:

$$f(\mathbf{x}_k - \alpha^* \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)) = \min_{\alpha \geq 0} f(\mathbf{x}_k - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)) \quad (3.22)$$

Si noti che la $f(\mathbf{x}_k - \alpha \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k))$ è la $f(\mathbf{x})$ nella direzione del gradiente a partire dal punto \mathbf{x}_k ; su tale direzione le differenti variabili x_j (per $j = 1, 2, \dots, n$) che appaiono in $f(\mathbf{x})$ sono espresse da:

$$x_j = x_j' - \alpha \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

la funzione $f(\mathbf{x})$ nella direzione del gradiente è pertanto una funzione della sola variabile α .

Poiché la funzione $f(\mathbf{x})$ per ipotesi è convessa, il problema della ricerca di α^* può essere affrontato o analiticamente (quando possibile) ponendo pari a zero la derivata $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ o in maniera analoga alla ottimizzazione non vincolata in una variabile esposta nel precedente paragrafo (quando è necessario procedere per via numerica).

La procedura appena riportata è ripetuta fino a che $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ entro un prefissato margine di tolleranza ε :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \leq \varepsilon \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.24)$$

3.3.1.2.2 Metodo di *Newton* in più variabili e metodi “quasi-*Newton*”

L’idea di base, anche in questo caso, è quella del metodo di *Newton* per funzioni in una variabile: cioè calcolare un’approssimazione quadratica della funzione obiettivo $f(\mathbf{x})$ nell’intorno del punto corrente \mathbf{x}_k , troncando al secondo termine la serie di *Taylor* proprio in tale punto. Tale funzione viene quindi minimizzata (o massimizzata) per ottenere il nuovo punto da cui partire alla successiva iterazione.

La serie di *Taylor* troncata al secondo termine, approssimante la funzione $f(\mathbf{x})$ nell’intorno del punto corrente \mathbf{x}_k è:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (3.25)$$

La soluzione \mathbf{x} che minimizza tale funzione quadratica approssimante (e che costituisce pertanto il nuovo punto della successiva iterazione, se necessaria) è data da:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (3.26)$$

dove $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ è la matrice simmetrica $n \times n$ detta matrice *Hessiana* delle derivate seconde parziali di $f(\mathbf{x})$ calcolate nel punto corrente \mathbf{x}_k , e dove il termine $-\left[\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)$ rappresenta la

“direzione di ricerca” del metodo di *Newton* (che come si può osservare è diversa da quella adottata dal metodo del gradiente).

Come si può osservare dalla (3.26) il metodo di *Newton* in più variabili prevede, a ciascun passo dell'iterazione, il calcolo della matrice *Hessiana* nel punto corrente.

Normalmente, però, i vari algoritmi di programmazione non lineare (sia vincolata sia non vincolata) che usano il metodo di *Newton*, si limitano ad approssimare la funzione *Hessiana*, in quanto il suo calcolo esatto, ad ogni iterazione, sarebbe troppo oneroso da un punto di vista computazionale.

I metodi di *Newton* in cui la matrice *Hessiana* è approssimata a ciascun passo dell'iterazione sono detti metodi “quasi-*Newton*”.

Esistono vari metodi di approssimazione di $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$. Il metodo più usato però, è quello messo a punto da Broyden (1970), Fletcher (1970), Goldfarb (1970) e Shanno (1970) i quali hanno proposto la seguente formula nota come BFGS (acronimo dei cognomi dei quattro studiosi appena citati):

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{s}_k^T \cdot \mathbf{s}_k \cdot \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{s}_k} \quad (3.27)$$

Dove \mathbf{H}_k è l'approssimazione dell'hessiana al passo k -esimo, e \mathbf{H}_{k+1} è quella al passo $k+1$.

Inoltre saranno:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad (3.28)$$

$$\mathbf{q}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Come approssimazione iniziale \mathbf{H}_0 dell'hessiana può essere scelta qualunque matrice simmetrica definita positiva, ad esempio, la matrice identità \mathbf{I} . Si noti che esistono anche dei metodi che evitano, ad ogni passo, l'inversione della matrice Hessiana mediante formule che approssimano direttamente l'inversa. Fra queste si ricorda la formula DFP (Davidon, 1959; Fletcher e Powell, 1963), la cui struttura è simile alla BFGS tranne che \mathbf{q}_k è sostituito da \mathbf{s}_k .

3.3.1.2.3 Metodo “Line-search”

Per approfondimenti relativi al metodo in oggetto si rimanda a Polak (1997), Nocedal e Wright (1999), Kelley (1999), Kelley (1995)

L’idea dei metodi “Line-search” è quella di generalizzare i due metodi appena introdotti (gradiente e Newton esteso a più variabili) introducendo una ricerca monodimensionale cosiddetta “inesatta”: mentre nel “metodo del gradiente” la ricerca del minimo della funzione lungo la direzione del gradiente avviene calcolando “esattamente” il valore del parametro α^* mediante risoluzione analitica o numerica del relativo problema monodimensionale, i metodi “Line-search” individuano intervalli di valori accettabili per lo stesso parametro.

La regola di aggiornamento prevista da tali metodi è:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.29)$$

dove:

\mathbf{x}_k è il punto corrente al passo d’iterazione k -esimo, \mathbf{x}_{k+1} è il punto successivo, \mathbf{d}_k è la direzione di ricerca (*direction search*) mentre α_k è la lunghezza del passo (*step length*).

Il metodo è molto flessibile in quanto permette libertà di scelta nella direzione di ricerca e della lunghezza del passo, in modo da giungere col minor numero di valutazioni possibili della funzione $f(\mathbf{x})$, del gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ e dell’hessiano $\nabla^2 f(\mathbf{x})$, alla minimizzazione della stessa funzione lungo la direzione di ricerca.

Negli algoritmi “Line-search” tipicamente, la direzione di ricerca scelta (per i problemi di minimizzazione) è quella di discesa, ovvero la direzione tale che si verifichi:

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k < 0 \quad (3.30)$$

in modo tale da assicurare che, almeno in un intorno del punto di partenza \mathbf{x}_k , la funzione diminuisca in valore (visto che l’obiettivo è la minimizzazione) procedendo per quella direzione.

Gli algoritmi “Line-search”, quindi, sono generalizzazioni dei metodi precedentemente trattati, in quanto:

- nel metodo del gradiente, come visto, la direzione è $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)^T$; sarà quindi $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k = -\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2^2 < 0$ (quindi è una direzione di discesa);
- nei metodi *Newton* e “quasi-Newton” la direzione è $\mathbf{d}_k = -B(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)$ dove:

- $B(\mathbf{x}_k) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ nei metodi *Newton*;
- $B(\mathbf{x}_k) \approx \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ nei metodi “quasi-*Newton*”.

Si noti che, in ogni caso, anche nei metodi *Newton* e “quasi-*Newton*” la direzione di ricerca è una direzione di discesa poiché è $B(\mathbf{x}_k) = B(\mathbf{x}_k)^T > 0$, cioè $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot B(\mathbf{x}_k)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k) = -\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_{B(\mathbf{x}_k)}^2 < 0$ (quindi è una direzione di discesa);

Un volta scelta la direzione di discesa, quindi, gli algoritmi “*Line-Search*”, cercano il minimo della funzione $f(\mathbf{x})$ lungo tale direzione mediante ricerca monodimensionale inesatta, tentando di ridurre alla quantità più piccola possibile il numero di valutazioni necessarie.

La lunghezza del passo α_k si trova implementando due fasi distinte:

1. fase di *bracketing*, che ricerca un intervallo chiuso contenente il passo desiderabile;
2. fase di *sectioning*, che divide l’intervallo determinato nella fase precedente, in sotto-intervalli su cui si interpola opportunamente la funzione obiettivo, allo scopo di trovarne il minimo.

L’obiettivo, quindi, è determinare la lunghezza del passo α_k all’iterazione *k-esima*, tale che in corrispondenza del nuovo punto \mathbf{x}_{k+1} dato da $\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k$ (si veda la 3.7) la funzione $f(\mathbf{x})$ (lungo la direzione di ricerca) abbia un minimo.

Il problema non è di così semplice risoluzione. Infatti la ricerca, al passo *k-esimo*, di un α_k qualunque per cui si verifichi la condizione $f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k) < f(\mathbf{x}_k)$ non è sufficiente in quanto potrebbe condurre a riduzioni di f poco apprezzabili (stagnazione) con conseguente non raggiungimento del punto di minimo.

Affinché tale fenomeno venga evitato è necessario rispettare, nel calcolo del passo α_k le cosiddette condizioni di *Wolfe*.

La prima condizione afferma che la scelta del passo α_k al passo d’iterazione *k-esimo*, dev’essere tale da rispettare la seguente:

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k) < f(\mathbf{x}_k) + c_1 \cdot \alpha_k \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.31)$$

con $0 \leq c_1 \leq 1$.

Le α_k “accettabili” sono solo quelle che soddisfano tale disuguaglianza. Per capire tale condizione, si mostra, nella figura successiva, l’andamento delle funzioni $f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k)$ e

$f(\mathbf{x}_k) + c_1 \cdot \alpha_k \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k$, al variare del parametro α_k (si noti che la costante c_1 fornisce l'inclinazione della retta in verde).

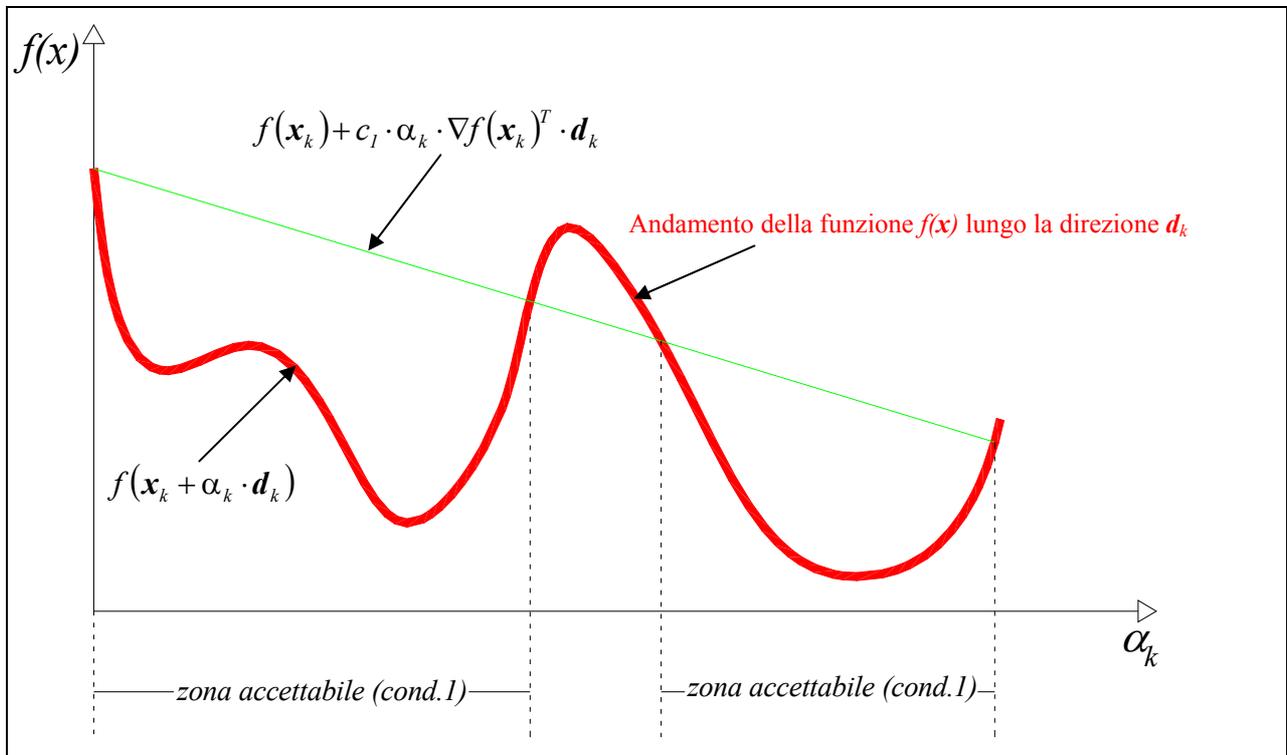


Figura 3.8 – Esplicitazione grafica della prima condizione di Wolfe

Tale prima condizione assicura una sufficiente riduzione della funzione obiettivo.

La seconda condizione è:

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k \geq c_2 \cdot \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.32)$$

con $c_1 \leq c_2 \leq 1$.

Il rispetto di quest'ultima condizione assicura che la lunghezza di passo non sia troppo piccolo.

Il primo membro è la derivata prima della funzione $f(\mathbf{x})$ lungo la direzione \mathbf{d}_k , mentre il secondo membro è proporzionale alla derivata prima della funzione stessa nel punto iniziale \mathbf{x}_k lungo la direzione \mathbf{d}_k . Tale condizione rende accettabili quei valori α_k a cui corrispondono valori della derivata prima di f maggiori rispetto alla derivata prima (che, si ricorda essere negativa) nel punto iniziale ridotta di un opportuno coefficiente c_2 : cioè quei valori di α_k per cui l'inclinazione della funzione è maggiore di quella nel punto iniziale (ridotta del suddetto opportuno coefficiente c_2).

Questa condizione fa sì che vengano scelti quei valori di α_k a cui corrispondono zone della funzione che “seguono” quelle con forte discesa, quindi con valori di f che si presumono essere bassi.

Le zone accettabili “finali”, cioè che rispettano entrambe le condizioni di Wolfe, si individuano, graficamente, dalla intersezione delle zone di accettabilità per la prima e seconda condizione (si veda figura successiva).

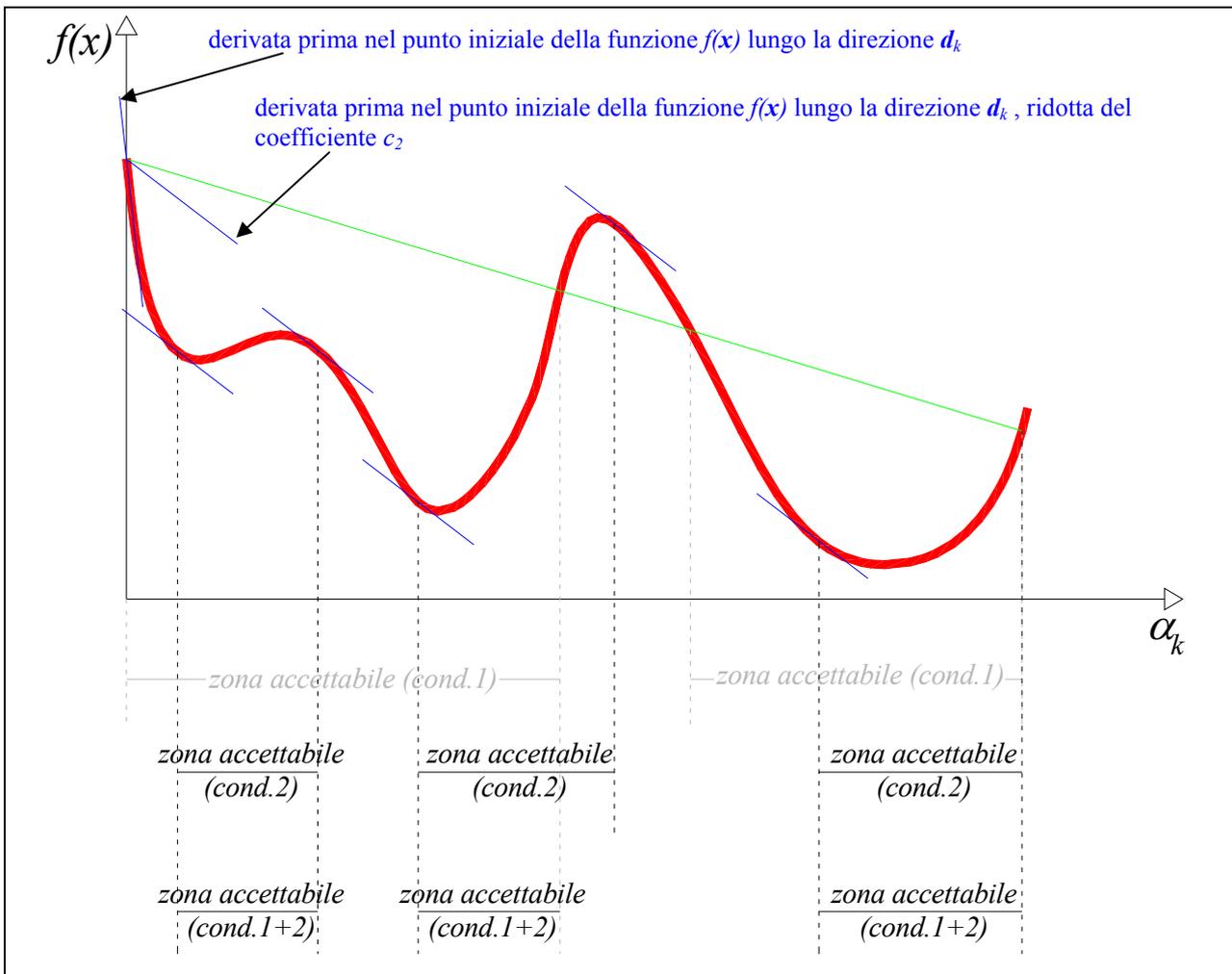


Figura 3.9 – Esplicitazione grafica delle zone di accettabilità di Wolfe

Gli algoritmi per la determinazione della lunghezza di passo dividono il problema in due fasi, nella prima candidano un opportuno passo iniziale, mentre nella seconda implementano contemporaneamente le fasi *bracketing* e la *sectioning* per ottenere il passo voluto.

Prima fase: scelta del passo iniziale. Se nella ricerca della direzione di ricerca si usano i metodi *Newton* o “quasi-*Newton*” si è soliti scegliere $\alpha_{k,0} = 1$ (con $\alpha_{k,0}$ si intende il valore di α_k al passo d’iterazione “interno” 0 (innestato in quello generale che è al k -esimo passo)).

Se la direzione di ricerca si effettua col metodo del gradiente vi sono diverse strategie:

- $\alpha_{k,0} = \alpha_{k,finale} \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_{k-1})^T \cdot \mathbf{d}_{k-1}}{\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k}$ dove con $\alpha_{k-1,finale}$ si intende il valore definitivo (al termine di una sotto-iterazione innestata in un passo di quella generale) assunto per α al passo precedente $k-1$;
- oppure: $\alpha_{k,0} = \min\left(1, \frac{100}{1 + \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|}\right)$;
- oppure: $\alpha_{k,0} = \min(1, 1,01 \cdot \hat{\alpha}_{k,0})$ dove il valore $\hat{\alpha}_{k,0}$ è data dal minimo di una funzione quadratica che interpola i valori $f(\mathbf{x}_{k-1})$, $f(\mathbf{x}_k)$ e $\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k$.

Seconda fase: calcolo della lunghezza del passo. Questo avviene mediante tecniche di interpolazione che utilizzano anche informazioni sulla derivata $\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k$ della funzione f lungo la direzione di ricerca \mathbf{d}_k . Si indica con $\varphi(\alpha_k)$ l'andamento della funzione f lungo la direzione di ricerca \mathbf{d}_k , cioè: $\varphi(\alpha_k) = f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k)$.

Si supponga noto $\alpha_{k,0}$. Se esso rispetta la prima condizione di *Wolfe* allora $\alpha_{k,finale} = \alpha_{k,0}$, altrimenti si costruisce un'approssimazione quadratica della funzione f lungo la direzione di ricerca \mathbf{d}_k sfruttando i tre valori $\{\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(\alpha_{k,0})\}$, e se ne calcola il minimo ottenendo $\alpha_{k,1}$. Se con tale minimo la prima condizione di *Wolfe* è verificata si interrompe la ricerca, altrimenti si costruisce una interpolazione cubica della funzione f lungo la direzione di ricerca \mathbf{d}_k , sfruttando i quattro valori $\{\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(\alpha_{k,0}), \varphi(\alpha_{k,1})\}$ e se ne calcola il minimo $\alpha_{k,2}$; se necessario si prosegue in tal modo fino a che la prima condizione di *Wolfe* è verificata.

Se qualcuno degli $\alpha_{k,i}$ è troppo simile al valore precedente $\alpha_{k,i-1}$, si pone $\alpha_{k,i} = \frac{\alpha_{k,i-1}}{2}$, operazione che assicura un progressivo e ragionevole miglioramento, salvaguarda l'interpolazione e simula seconda condizione di *Wolfe* che evita di scegliere un passo troppo piccolo.

Ovviamente possono essere scelte anche altre tecniche di interpolazione oltre a quella appena esposta.

3.3.2 Ottimizzazione vincolata

3.3.2.1 Posizione generale del problema

La forma standard del problema di ottimizzazione vincolata è:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizzare}} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{3.33}$$

soggetto ai vincoli :

$$\begin{aligned} h_s(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 & s &= 1, 2, \dots, l \\ g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 & j &= 1, 2, \dots, m \\ x_i^{\text{low}} &\leq x_i \leq x_i^{\text{up}} & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

dove \mathbf{x} è la variabile decisionale, vettore nello spazio ad n dimensioni.

Si noti la differenziazione tra “vincoli di uguaglianza” (espressi dalle funzioni non lineari $h(\mathbf{x})$) con numerosità pari ad l e “vincoli di disuguaglianza” (espressi dalle funzioni non lineari $g(\mathbf{x})$) con numerosità pari ad m .

Nel caso in cui si voglia far riferimento a tutte le equazioni di vincolo (a prescindere, pertanto, dal fatto che esprimano uguaglianza o disuguaglianza) si useranno le $l+m$ funzioni di vincolo:

$$v_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, 2, \dots, l, l+1, l+2, \dots, l+m.$$

Nei paragrafi precedenti si sono introdotte le condizioni necessarie e sufficienti per l’ottimalità di una soluzione nel caso di ottimizzazione non vincolata: si è detto che se la funzione obiettivo è differenziabile e convessa, i punti per i quali vale la (3.9) sono ottimi.

La domanda che ci si pone è: esistono condizioni necessarie e sufficienti per l’ottimalità di una soluzione anche nel caso di ottimizzazione vincolata?

La risposta è affermativa e, per quanto riguarda le sole condizioni di necessarietà, si basa sul teorema seguente:

Siano $f(\mathbf{x})$, $v_1(\mathbf{x})$, $v_2(\mathbf{x})$, ..., $v_{l+m}(\mathbf{x})$ funzioni differenziabili in un punto $\mathbf{x}^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$; se inoltre in tale punto i “vincoli attivi” (si veda il paragrafo 3.3.2.3.1 ed in particolare la sua sezione

“Definizione di vincoli attivi ed inattivi”) soddisfano particolari condizioni di regolarità², e se il punto \mathbf{x}^* è un punto di minimo locale, allora esiste un vettore $\boldsymbol{\lambda}^*$ tale che valgano le seguenti condizioni (dette condizioni KKT per il motivo di cui si dirà nel prosieguo):

$$1^{\text{a}} \text{ condizione: } \nabla L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ condizione: } h_s(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{per ogni } s = 1, 2, \dots, l$$

$$3^{\text{a}} \text{ condizione: } g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0 \quad \text{per ogni } j = 1, 2, \dots, m$$

$$4^{\text{a}} \text{ condizione: } \lambda_j^* \geq 0 \quad \text{per ogni } j = 1, 2, \dots, m$$

$$5^{\text{a}} \text{ condizione: } \lambda_j^* \cdot g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{per ogni } j = 1, 2, \dots, m$$

dove $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ è la funzione lagrangiana definita dalla:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{s=1}^l \lambda_s \cdot h_s(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

Tali condizioni sono la generalizzazione del “metodo dei moltiplicatori lagrangiani” (valido per i problemi di ottimizzazione non lineare di funzioni con soli vincoli di uguaglianza) al caso più ampio di funzioni con vincoli di disuguaglianza.

Si ricorda che, secondo il metodo dei moltiplicatori lagrangiani, nel punto ottimo il gradiente della funzione obiettivo deve essere ortogonale al piano tangente dei vincoli attivi: cioè, la proiezione del gradiente sullo spazio costituito dalle direzioni tangenti alla superficie dei vincoli, è nulla.

² Tra le principali condizioni di regolarità da soddisfare si ricordano (Karush 1939 e Kuhn e Tucker, 1951):

- requisito di indipendenza lineare dei vincoli (LICQ);
- requisito di Mangasarian-Fromowitz (MFCQ);
- requisito di rango costante (CRCQ);
- requisito di dipendenza lineare positiva costante dei vincoli (CPLD)
- requisito di quasi-normalità (QNCQ);
- condizione “slater”;
- vincoli di linearità;

La 1^a condizione di annullamento della funzione lagrangiana associata al problema di ottimizzazione non lineare vincolata, esprime proprio la succitata perpendicolarità, nel punto ottimo, tra gradiente della funzione e regione ammissibile generata dai vincoli attivi.

La 2^a e 3^a condizione implicano l'ovvio rispetto, sempre nel punto di ottimo \mathbf{x}^* , dei vincoli del problema (quindi l'ammissibilità dell'ottimo, cioè la locazione dell'ottimo nella regione ammissibile del problema).

La 4^a condizione implica la non negatività dei moltiplicatori lagrangiani, mentre la 5^a condizione è detta di "complementarietà".

Le 5 condizioni (di necessarietà) appena riportate sono le cosiddette "condizioni di *Karush-Kuhn-Tucker*" (condizioni KKT), nominate in tal modo perché furono ricavate in maniera indipendente dai tre studiosi citati (Karush, 1939; Kuhn e Tucker, 1951).

Esse, come anticipato, sono solo condizioni necessarie all'ottimalità di una soluzione di un problema di programmazione non lineare vincolata: non rappresentano, in via generale, anche condizioni di sufficienza.

Si può però introdurre il successivo corollario il quale introduce le condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità di una soluzione per un problema di programmazione non lineare vincolata:

Si ipotizzi che $f(\mathbf{x})$ sia una funzione convessa e che anche le $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ siano funzioni convesse e che siano soddisfatte le condizioni di regolarità.

Allora il punto $\mathbf{x}^* = x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ è una soluzione ottima se e solo se tutte le 5 condizioni KKT sono soddisfatte.

In via teorica si potrebbe ricavare una soluzione ottima direttamente dalle condizioni KKT. Purtroppo, in pratica, è quasi sempre impossibile effettuare questa operazione.

Nonostante tale limitazione, le condizioni KKT forniscono comunque importanti informazioni per l'identificazione di una soluzione ottima e danno anche la possibilità di verificare l'ottimalità.

3.3.2.2 Classi di problemi di programmazione non lineare vincolata

Nel prosieguo si introducono e analizzano differenti classi di problemi di programmazione non lineare.

Essi comprendono:

- la programmazione con vincoli lineari (tra cui si segnala la “programmazione quadratica”);
- la programmazione convessa (tra cui si segnala la “programmazione separabile”);
- la programmazione non convessa (tra cui si segnalano la “programmazione geometrica” e “frazionaria”);
- il problema di complementarità.

Al termine di un sintetico esame di tutte le classi sopra elencate, particolare attenzione verrà dedicata alla programmazione quadratica nel successivo paragrafo.

Programmazione con vincoli lineari

Sono caratterizzati da vincoli che si adattano perfettamente alla programmazione lineare: infatti tutte le funzioni $g_i(\mathbf{x})$ sono lineari, mentre la funzione $f(\mathbf{x})$ è non lineare. Il problema è notevolmente semplificato dal fatto che esiste una sola funzione non lineare su una regione ammissibile lineare. Per la soluzione di tali problemi sono stati sviluppati un certo numero di algoritmi speciali basate su estensioni del metodo del simplesso.

La “programmazione quadratica” esaminata nel dettaglio nel successivo paragrafo 3.3.2.3, è un particolare caso di “programmazione con vincoli lineari”, in cui la funzione obiettivo non lineare è di tipo quadratico.

Programmazione convessa

Copre una vasta gamma di problemi del tipo:

$$\begin{aligned} & \text{massimizzare} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{soggetto ai vincoli :} && \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i && \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, m \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} && \end{aligned}$$

in cui, però, le funzioni in gioco rispettano le condizioni:

1. la funzione $f(\mathbf{x})$ è concava;
2. ogni funzione $g_i(\mathbf{x})$ è convessa.

Queste assunzioni sono sufficienti ad assicurare che un massimo locale è anche un massimo globale.

Si noti che se il problema è invece del tipo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizzare } f(\mathbf{x}) \\ & \text{soggetto ai vincoli :} \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3, \dots, m \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Le condizioni da rispettare dalle funzioni in gioco affinché un minimo locale sia anche globale sarebbero:

1. la funzione $f(\mathbf{x})$ è convessa;
2. ogni funzione $g_i(\mathbf{x})$ è convessa.

Un caso particolare di “programmazione convessa” è la “programmazione separabile” in cui, oltre alle prime due condizioni, è verificata l’ulteriore ipotesi:

3. le funzioni $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x})$ sono “separabili”

Una “funzione separabile” è una funzione in cui ogni termine coinvolge una sola variabile: in sostanza, è una funzione somma di funzioni ciascuna di una sola variabile:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (3.35)$$

dove, come detto, ciascuna f_j è funzione della sola variabile x_j .

L’importanza di una trattazione a parte di tali problemi risiede nel fatto che un problema di programmazione separabile può essere ben approssimato mediante un problema di programmazione lineare ed è quindi possibile adoperare in maniere efficiente il metodo del simplesso.

Programmazione non convessa

Tutti i problemi di programmazione non lineare che non soddisfano le ipotesi della programmazione convessa sono tipi di “programmazione non convessa”.

Per questi problemi, anche nel caso in cui si dovesse giungere alla determinazione di una soluzione ottima, non v’è alcuna garanzia che essa sia un ottimo globale. In letteratura sono stati proposti diversi algoritmi in grado di esplorare varie porzioni della regione ammissibile e determinare (forse) un massimo globale.

Alcuni particolari tipi di problemi di programmazione non convessa quali, la “programmazione geometrica” e quella “frazionaria”, introdotti nel prosieguo possono essere risolti con algoritmi speciali.

Nella “programmazione geometrica” le funzioni obiettivo e i vincoli assumono la forma:

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \cdot P_i(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

dove $P_i(\mathbf{x}) = x_1^{a_{i1}} \cdot x_2^{a_{i2}} \cdot \dots \cdot x_n^{a_{in}}$

Le quantità c_i e a_{ij} sono costanti, mentre le funzioni $h(\mathbf{x})$ (obiettivo o di vincolo funzionale) non sono né concave né convesse.

Se però tutti i coefficienti c_i in ogni funzione sono strettamente positivi (cosicché le funzioni stesse sono polinomi positivi generalizzati, cioè “posinomi”) e si richiede di minimizzare la funzione obiettivo, il problema originario può essere trasformato in un equivalente problema convesso con variabili y_1, y_2, \dots, y_n ottenuto imponendo:

$$x_j = e^{y_j} \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.37)$$

Nella “programmazione frazionaria”, invece, la funzione obiettivo è frazionaria, cioè rapporto di due funzioni:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})} \quad (3.38)$$

Per specifiche forme di $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ sono state sviluppate speciali procedure di risoluzione (Charnes e Cooper, 1962; Schaible, 1981)

Problema di complementarità

La risoluzione di alcuni problemi di programmazione non lineare può essere ricondotta alla risoluzione del cosiddetto problema di complementarità.

Date le variabili w_1, w_2, \dots, w_p e z_1, z_2, \dots, z_p il problema di complementarità richiede di determinare una soluzione ammissibile per l’insieme di uguaglianze ed disuguaglianze:

$$\begin{cases} \mathbf{w} = F(\mathbf{z}) \\ \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.39)$$

che soddisfi anche il vincolo di complementarità:

$$\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{z} = 0 \quad (3.40)$$

Dove, \mathbf{w} e \mathbf{z} sono vettori colonna, F è una funzione vettoriale e l'apice T indica l'operazione di trasposizione.

Tale problema non ha una funzione obiettivo quindi, a rigore, non è un problema di programmazione matematica.

Il nome è legato al fatto che a causa dei vincoli (3.40), devono essere verificate le condizioni complementari:

$$w_i = 0 \text{ oppure } z_i = 0 \text{ (oppure entrambi zero) per ogni } i = 1, 2, \dots, p$$

Un importante caso particolare è il “problema di complementarità lineare”, in cui:

$$F(\mathbf{z}) = \mathbf{q} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{z} \quad (3.41)$$

Dove \mathbf{q} è un vettore colonna ed \mathbf{M} è una matrice $p \times p$. Per la risoluzione di questo problema, sotto appropriate ipotesi sulla matrice \mathbf{M} , sono stati sviluppati algoritmi efficienti: tra questi va ricordato il metodo di *Lemke* che opera in modo simile al metodo del simpleso della programmazione lineare.

3.3.2.3 Programmazione quadratica

Come anticipato nel paragrafo precedente, il problema di programmazione quadratica è, in sostanza, un problema di programmazione lineare in cui, però, la funzione obiettivo è di tipo quadratico, cioè comprende termini x_j^2 oppure $x_i \cdot x_j$ (con $i \neq j$).

Il problema, pertanto è:

$$\text{minimizzare } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \quad (3.42)$$

soggetto al vincolo (lineare):
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

Tale vincolo può essere riscritto in una forma diversa per distinguere i vincoli di uguaglianza da quelli di disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(u)} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b}^{(u)} && \text{vincoli di eguaglianza equivalenti alle equazioni lineari: } h_s(\mathbf{x}) = 0 \quad s = 1, 2, \dots, l \\ \mathbf{A}^{(d)} \cdot \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}^{(d)} && \text{vincoli di disuguaglianza equivalenti alle equazioni lineari: } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

in cui \mathbf{x} è il vettore delle variabili decisionali ($n \times 1$), \mathbf{c} è un vettore riga ($1 \times n$), \mathbf{M} è una matrice $n \times n$ ed, ammettendo che le funzioni vincolari di eguaglianza siano l e le funzioni vincolari di disuguaglianza siano m , \mathbf{b} e \mathbf{d} sono vettori colonna rispettivamente di dimensioni $l \times 1$ e $m \times 1$, mentre \mathbf{E} ed \mathbf{A} sono matrici di dimensione $l \times n$ e $m \times n$.

Gli elementi q_{ij} della matrice \mathbf{M} sono costanti note tali che $m_{ij} = m_{ji}$ (a causa del quale v'è il fattore $\frac{1}{2}$ nella funzione obiettivo).

Effettuando le moltiplicazioni tra vettori e matrici, la funzione obiettivo può essere espressa da:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \quad (3.43)$$

Per i termini in cui $i = j$ nella doppia sommatoria si ha che $x_i \cdot x_j = x_j^2$ e $-\frac{1}{2} \cdot m_{ij}$ è il suo coefficiente.

Se invece $i \neq j$ allora si ha che $-\frac{1}{2} \cdot (m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + m_{ji} \cdot x_j \cdot x_i) = -m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ e quindi $-m_{ij}$ è il coefficiente del prodotto $x_i \cdot x_j$.

Sono stati sviluppati diversi algoritmi per problemi di programmazione quadratica in cui la funzione obiettivo è una funzione convessa. Un modo per verificare la convessità della funzione obiettivo è quello di verificare la condizione:

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \quad (3.44)$$

cioè, M deve essere una matrice “semidefinita positiva”.

In questo caso il problema di ottimizzazione assume carattere “globale” (anche se l’ottimo può essere più di uno).

Se la matrice M è invece “definita positiva”, allora l’ottimo globale è unico.

Fra gli algoritmi presenti in letteratura per la risoluzione del problema di programmazione quadratica espresso dalla (3.42) si ricordano:

- il metodo del simplesso modificato;
- il metodo del gradiente coniugato (*conjugate gradient method*);
- il metodo del punto interno (*interior point method*);
- i metodi cosiddetti “*active set*” (letteralmente “insieme attivo”).

Nel prosieguo si esaminano nel dettaglio i metodi “*active set*”

3.3.2.3.1 Metodi “*Active set*”

Richiami di algebra lineare utili per la comprensione dei metodi “*Active set*”: la decomposizione QR

In algebra lineare, la cosiddetta operazione di “decomposizione QR” di una matrice consiste nel decomporre la stessa matrice in una ortogonale ed in un’altra triangolare superiore destra.

In particolare sia data una generica matrice rettangolare A di dimensioni $m \times n$ con $m > n$ e rango pari a n ; tale matrice A può essere fattorizzata come prodotto di una matrice Q di dimensioni $m \times m$ e di una matrice R di dimensioni $m \times n$ la cui sotto matrice R_I costituita dalla prime n righe (e quindi di dimensioni $n \times n$) sia triangolare superiore destra, mentre la sottostante è la matrice θ di dimensioni $(m-n) \times n$ costituita da tutti valori nulli:

$$A = Q \cdot R = Q \cdot \begin{bmatrix} R_I \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

La matrice Q è una matrice ortogonale, cioè una matrice quadrata per cui vale la condizione:

$$Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = I$$

cioè è invertibile e la inversa coincide con la trasposta.

Le sue colonne, inoltre, formano una “base ortonormale” dello spazio ad m dimensioni, cioè un insieme di vettori linearmente indipendenti (capaci di generare lo spazio vettoriale) a norma 1 e ortogonali a due a due.

Si ricorda che per “base” di un generico spazio vettoriale, in algebra lineare, si intende un insieme di vettori dello spazio, linearmente indipendenti e capaci di generare lo spazio vettoriale stesso.

Generalmente uno spazio vettoriale ha un’infinità di “basi”: esse però sono costituite sempre dallo stesso numero di vettori (cardinalità): tale numero è proprio la dimensione dello spazio stesso (ad esempio, nello spazio a tre dimensioni, una “base” è un qualunque insieme di tre vettori linearmente indipendenti e capaci di generare lo spazio stesso).

La “generazione” dell’intero spazio vettoriale, da parte della “base” avviene per combinazione lineare: un insieme $\mathbf{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di vettori, pertanto, è una base per lo spazio vettoriale V ad n dimensioni, se e solo se ogni elemento \mathbf{v} di V si può scrivere in un modo solo come combinazione lineare dei vettori v_1, \dots, v_n . I coefficienti della combinazione lineare che esprimono il vettore \mathbf{v} rappresentano le coordinate di \mathbf{v} nella base \mathbf{B} .

L’uso del lemma di *Zorn* permette di dimostrare che per qualunque spazio vettoriale è possibile individuare una base.

La matrice \mathbf{Q} può pensarsi composta da due matrici \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 rispettivamente con dimensioni $(m \times n)$ e $m \times (m - n)$; \mathbf{Q}_1 è la sottomatrice di \mathbf{Q} costituita dalle prime n colonne, mentre la \mathbf{Q}_2 dalle $m - n$ colonne rimanenti. Entrambe le matrici introdotte formano “basi ortogonali” (cioè insiemi di vettori linearmente indipendenti capaci di generare lo spazio vettoriale e che in più sono ortogonali a due a due ma che non è detto abbiano norma unitaria). La (3.45) può essere quindi riscritta come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{R}_1$$

Esistono diversi metodi per eseguire la fattorizzazione QR: tra questi si ricordano il processo di *Gram–Schmidt*, le trasformazioni di *Householder* (Householder, 1958) e le rotazioni di *Givens*. Per un approfondimento di tali metodi si richiama (Golub e van Loan, 1996).

Si ricorda che una delle applicazioni principali della fattorizzazione QR è la risoluzione del sistema di equazioni lineari $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ la cui soluzione $\mathbf{x}^{(sol)}$ è data da: $\mathbf{x}^{(sol)} = \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{b})$.

Definizione di vincoli attivi ed inattivi

I vincoli definiti dalla (3.42), come noto, definiscono con le loro equazioni $h(\mathbf{x})$ (di uguaglianza) e $g(\mathbf{x})$ (di disuguaglianza) la regione ammissibile del problema di ottimizzazione quadratica; regione all'interno della quale dovrà trovarsi l'ottimo \mathbf{x}^* .

Dato un punto qualunque \mathbf{x} appartenente alla regione ammissibile, il generico vincolo (di uguaglianza o disuguaglianza) espresso dalla relazione $v_i(\mathbf{x}) \leq 0$ è detto:

- “attivo”, se per il punto \mathbf{x} in esame $v_i(\mathbf{x}) = 0$;
- “inattivo”, se per il punto \mathbf{x} in esame $v_i(\mathbf{x}) < 0$.

Dalla definizione data è evidente come i vincoli di uguaglianza, per un punto all'interno della regione ammissibile, siano sempre del tipo “attivo”, mentre i vincoli di disuguaglianza possono essere di entrambi i tipi a seconda del fatto che \mathbf{x} sia posizionato o meno sul confine individuato dal vincolo stesso.

L'insieme dei vincoli attivi forma il cosiddetto “*active set*” cioè “l'insieme attivo”.

Metodo “*Active set*”

Il metodo include due fasi: nella prima si effettua il calcolo di un punto iniziale che sia ammissibile (se esiste). La seconda fase si basa sulla generazione iterativa di punti ammissibili che convergono alla soluzione ottima. Teoricamente, tale sequenza di punti dovrebbe essere composta, come detto, da punti ammissibili che soddisfino, quindi, i vincoli espressi nella (3.42). Tutti i punti perciò dovrebbero risiedere nella regione ammissibile, al limite raggiungendone i relativi confini.

Si assuma che il punto ammissibile al passo d'iterazione *t-esimo* sia \mathbf{x}_t . Tale punto soddisferà i vincoli, ma alcuni di essi risulteranno “attivi”, altri “inattivi”: si indica, perciò, con \hat{A}_t la stima, al passo d'iterazione *t-esimo*, della matrice dei vincoli “attivi” del punto soluzione “vero”. Tale matrice, per quanto detto in precedenza, terrà conto di tutti i vincoli di uguaglianza e di quelli di disuguaglianza attivi per \mathbf{x}_t (cioè, il punto in esame si trova proprio sulla frontiera di questi ultimi vincoli).

Tale schematizzazione, prendendo in considerazione solo alcuni dei vincoli (cioè quelli “attivi”) riduce i gradi di libertà del problema di ottimizzazione.

Il metodo, all'iterazione *t-esima*, calcola la matrice \hat{A}_t da usare nel problema di ottimizzazione (3.42) per ricavare la direzione di ricerca $\hat{\mathbf{d}}_t$ allo stesso passo: quindi tale vettore si ottiene, a ciascun passo di iterazione, minimizzando la funzione obiettivo permanendo sui vincoli attivi.

Ma come si ottiene tale risultato?

Si ipotizzi che i vincoli attivi al passo t -esimo siano in numero pari a $n_t^{(act)}$: la matrice \hat{A}_t ha dimensione $n_t^{(act)} \times n$; la matrice trasposta \hat{A}_t^T ha quindi dimensione $n \times n_t^{(act)}$. Tale matrice può essere decomposta col metodo QR:

$$\hat{A}_t^T = \mathbf{Q}_t \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

dove \mathbf{Q}_t è una matrice ortogonale $n \times n$ e \mathbf{R}_t è una matrice triangolare superiore destra $n_t^{(act)} \times n_t^{(act)}$, mentre $\mathbf{0}$ è la matrice di tutti zero $(n - n_t^{(act)}) \times n_t^{(act)}$. Come visto in precedenza può effettuarsi la seguente scomposizione: $\mathbf{Q}_t = [\mathbf{Y}_t, \mathbf{Z}_t]$ dove \mathbf{Y}_t contiene le prime $n_t^{(act)}$ colonne di \mathbf{Q}_t (quindi ha dimensione $n \times n_t^{(act)}$) e \mathbf{Z}_t le rimanenti $n - n_t^{(act)}$ colonne (quindi ha dimensione $n \times (n - n_t^{(act)})$).

Quest'ultima matrice è detta "matrice di spazio nullo" dei vincoli lineari attivi \hat{A}_t^T . Infatti per esse si ha che:

$$\hat{A}_t \cdot \mathbf{Z}_t = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

La \mathbf{Z}_t forma una base ortogonale alle righe della matrice \hat{A}_t : quindi, un sottospazio ammissibile per \hat{d}_t , garanzia della permanenza sui confini dei vincoli attivi, si può formare dalla base \mathbf{Z}_t come combinazione lineare delle colonne di tale matrice:

$$\hat{d}_t = \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{p} \quad (3.48)$$

per qualche vettore \mathbf{p} .

Il problema (3.42) si trasforma quindi, nel seguente:

$$q(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_t + \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{p} \quad (3.49)$$

Differenziando $q(\mathbf{p})$ rispetto a \mathbf{p} si ottiene:

$$\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{p} + \mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{c} \quad (3.50)$$

$\nabla q(\mathbf{p})$ è definito “gradiente proiettato” (della funzione quadratica) perché è il gradiente proiettato nel sottospazio definito da \mathbf{Z}_t .

Il termine $\mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_t$ è detto *hessiano* proiettato. Se \mathbf{H} è definito positivo allora il minimo della funzione $q(\mathbf{p})$ nel sottospazio definito da \mathbf{Z}_t occorre quando $\nabla q(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ cioè è da ricercare la soluzione del sistema lineare di equazioni:

$$\mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Z}_t \cdot \mathbf{p} = -\mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{c} \quad (3.51)$$

Il nuovo punto \mathbf{x}_{t+1} dell’iterazione al passo $t+1$ è quindi dato dalla:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \alpha \cdot \hat{\mathbf{d}}_t \quad \text{con } \hat{\mathbf{d}}_t = \mathbf{Z}_t^T \cdot \mathbf{p} \quad \text{con } \mathbf{p} \text{ dato dalla risoluzione di (3.51).}$$

Qual è il valore da attribuire ad α ?

Il valore $\alpha = 1$ è la lunghezza di passo esatta per il minimo della funzione ristretta sullo spazio nullo di $\hat{\mathbf{A}}_t$. Se tale passo può essere considerato senza violazione dei vincoli allora è stata trovata la soluzione di QP. Altrimenti è necessario la lunghezza di passo è minore di 1 e un nuovo vincolo è incluso nell’insieme attivo alla iterazione $t+1$.

La distanza lungo una qualunque direzione $\hat{\mathbf{d}}_t$ dai confini dei vincoli è:

$$\alpha = \min_i \left\{ \frac{-(A_i \cdot \mathbf{x}_t - b_i)}{A_i \cdot \hat{\mathbf{d}}_t} \right\} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, l+m \quad (3.52)$$

Dove A_i è la riga i -esima della matrice \mathbf{A} e b_i del vettore \mathbf{b} . L’equazione è definita per i vincoli non inclusi nell’insieme attivo e dove la direzione $\hat{\mathbf{d}}_t$ è verso tali confini: $A_i \cdot \hat{\mathbf{d}}_t > 0$ per $i = 1, 2, \dots, l+m$.

Quando n vincoli indipendenti sono inclusi nell’insieme attivo, senza localizzazione del minimo, allora sono calcolati i moltiplicatori lagrangiani λ_i in modo da soddisfare l’insieme non singolare delle equazioni lineari:

$$\hat{\mathbf{A}}_t^T \cdot \boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{c} \quad (3.53)$$

Se tutti gli elementi λ_t sono positivi, \mathbf{x}_t è la soluzione ottimale di QP. Se qualche λ_t è negativo, e se tale componente non corrisponde a un vincolo di uguaglianza, allora il relativo vincolo è cancellato dall'insieme attivo e una nuova iterazione è tentata.

Inizializzazione dell'algoritmo "Active set"

Come anticipato, il metodo "Active set" richiede un punto ammissibile per incominciare le iterazioni. Se il punto iniziale che si ha a disposizione (noto da conoscenze "esterne", si veda metodo SQP) non è ammissibile, se ne può trovare uno risolvendo il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \gamma \\ & \text{soggetto ai vincoli :} \\ & A_s \cdot \mathbf{x} = b_s \quad s = 1, 2, \dots, l \quad (3.54) \\ & A_j \cdot \mathbf{x} - \gamma \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

dove con A_s si indica la riga s -esima della matrice A .

Un punto ammissibile, se esiste, è ottenuto da (3.54) calcolando \mathbf{x} in modo che soddisfi i vincoli di uguaglianza. Tale valore è ricavato risolvendo un insieme sotto o sopra determinato di equazioni lineari formato dai vincoli di uguaglianza. Se la soluzione a tale problema esiste, allora la variabile "slack" γ è pari al massimo vincolo di disuguaglianza in quel punto.

In sostanza, il punto iniziale ammissibile sarà quello che, fra tutti i punti che risolvono il sistema dei vincoli di uguaglianza, minimizza la violazione dei vincoli di disuguaglianza (violazione che è misurata, appunto, da γ). Un punto ammissibile esiste se, per esso, si ha $\gamma \leq 0$.

3.3.2.4 Le tecniche numeriche per i problemi di ottimizzazione non lineare vincolata

Le tecniche numeriche per i problemi di ottimizzazione non lineare vincolata possono essere classificati secondo due approcci differenti:

1. Approccio indiretto: l'idea alla base di tali algoritmi è quella di trasformare problemi di ottimizzazione vincolati in non-vincolati e risolvere iterativamente tali problemi usando i risultati dell'iterazione corrente per l'impostazione di quella al passo successivo. Essi sono anche conosciuti come *Sequential Unconstrained Minimization Techniques (S.U.M.T.)*

(Fiacco e McCormick, 1968) cioè, letteralmente, tecniche di minimizzazione non vincolate sequenziali. La loro *ratio* risiede nell'indubbio vantaggio di sfruttare algoritmi già esistenti per i problemi di ottimizzazione non lineare non-vincolata. Fra i metodi più usati in letteratura si ricordano il metodo *Exterior Penalty Function (EPF)* e *Augmented Lagrangian Multiplier (ALM)* (che risulta essere il migliore tra quelli "indiretti").

2. Approccio diretto: tali algoritmi trattano i vincoli del problema e la funzione obiettivo senza effettuare nessuna trasformazione sugli stessi. Fra i metodi più frequentemente utilizzati si ricordano: il metodo *Scan e Zoom*, il *Generalized Reduced Gradient (GRG)*, il *Sequential Gradient Restoration Algorithm (SGRA)*, il *Sequential Linear Programming (SLP)* ed il *Sequential Quadratic Programming (SQP)* trattato più approfonditamente nel seguito in quanto metodo di ottimizzazione utilizzato nella presente tesi.

3.3.2.4.1 Il metodo *Sequential Quadratic Programming (SQP)*

Basato sui lavori di Biggs (1975), Han (1977) e Powell (1978a, 1978b), il metodo SQP è molto simile al metodo di Newton così come introdotto nell'ottimizzazione non vincolata.

A ciascun passo dell'iterazione principale, si approssima la funzione obiettivo mediante serie di *Taylor* troncata al secondo termine (quindi un'approssimazione quadratica) e le funzioni dei vincoli mediante espansione in serie di *Taylor* troncata al primo termine (approssimazione lineare). Si calcola poi un'approssimazione della matrice *hessiana* usando la formula BFGS introdotta nei paragrafi precedenti. Dalla conoscenza di questa matrice è possibile procedere alla risoluzione del sotto-problema quadratico che genera la direzione di ricerca. Questa poi è usata nella procedura "*Line-search*" per il calcolo della lunghezza di passo e quindi del successivo punto dell'iterazione.

Approfondimenti del metodo SQP possono essere trovati in Fletcher (1987), Gill et al. (1981), Powell (1983), Hock e Schittowski (1983).

1° passo

Dato il problema di programmazione non lineare vincolata (3.33), si ricava il relativo problema quadratico approssimato espandendo, intorno al punto corrente \mathbf{x}_k , la funzione obiettivo in serie di Taylor troncata al secondo termine (approssimazione quadratica) e le $l+m$ equazioni dei vincoli in serie di Taylor troncate al primo termine (approssimazione lineare) ottenendo:

$$\underset{\mathbf{d}_k}{\text{minimizzare}} \quad f(\Delta \mathbf{x}_k) \approx f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{x}_k^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{d}_k$$

(3.55)

soggetta ai vincoli :

$$h_s(\mathbf{x}_k) + \nabla h_s(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k = 0 \quad s = 1, 2, \dots, l$$

$$g_j(\mathbf{x}_k) + \nabla g_j(\mathbf{x}_k)^T \cdot \mathbf{d}_k \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{d}_k^{\text{low}} \leq \mathbf{d}_k \leq \mathbf{d}_k^{\text{up}}$$

Noto, al passo *k-esimo* dell'iterazione, il punto corrente \mathbf{x}_k , tutte le funzioni sopra riportate sono costituite da valori numerici ben definiti (se \mathbf{x}_k è noto sono valutabili i termini $f(\mathbf{x}_k)$, $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$, $h_s(\mathbf{x}_k)$, $\nabla h_s(\mathbf{x}_k)$ per $s = 1, 2, \dots, l$ e $g_j(\mathbf{x}_k)$ e $\nabla g_j(\mathbf{x}_k)$ per $j = 1, 2, \dots, m$) tranne \mathbf{d}_k : la minimizzazione, pertanto, è da effettuare sull'unico termine incognito, cioè \mathbf{d}_k che rappresenta la direzione di ricerca.

2° passo

Questo sotto-problema quadratico può essere risolto mediante il metodo “*active set*” che come visto nel paragrafo precedente a sua volta è un processo iterativo (per comodità d'esposizione si è indicato con “*k*” il passo d'iterazione generale della SQP e con “*t*” quello della sottoiterazione del metodo “*active set*”).

3° passo

Una volta nota la direzione di ricerca \mathbf{d}_k come soluzione del sottoproblema quadratico, è necessario calcolare la lunghezza di passo α_k lungo essa. Tale valore dovrà controbilanciare le esigenze di riduzione della funzione obiettivo f lungo la direzione di ricerca \mathbf{d}_k ed il rispetto dei vincoli.

Per poter raggiungere questo scopo si introduce una predefinita funzione, detta “funzione di merito”, strutturata in modo tale che il problema di minimizzazione non vincolata basato su essa, genera il valore di α_k che controbilancia le esigenze di cui sopra.

La “funzione di merito” $\psi(\mathbf{x}_{k+l})$ usata in questa sede per l'implementazione di SQP è quella introdotta da Han (1977) e Powell (1978b):

$$\psi(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^l (r_{k+1})_i \cdot h_i(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^m (r_{k+1})_i \cdot \max[g_i(\mathbf{x}_{k+1}), 0] \quad (3.56)$$

dove i parametri $(r_{k+1})_i$, detti “parametri di penalità”, sono:

$$(r_{k+1})_i = \max_i \left\{ \lambda_i, \frac{1}{2} \cdot (r_k)_i + \lambda_i \right\} \text{ per } i = 1, 2, \dots, l+m$$

Come si può osservare dalla struttura della (3.56), la “funzione di merito” $\psi(\mathbf{x}_{k+1})$ in caso di violazioni dei vincoli fa assumere ai termini di sommatoria posti al secondo membro valori diversi da zero, mentre nel caso in cui i vincoli siano pienamente soddisfatti tali termini sono pari a zero.

Nel caso di violazione vincoli, quindi, sarà $|\psi(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_{k+1})| > 0$, in caso contrario, invece, sarà:

$$\psi(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_{k+1}).$$

Si noti che i parametri di penalità sono inizializzati mediante:

$$(r_1)_i = \left\| \frac{\nabla f(\mathbf{x}_1)}{\nabla v(\mathbf{x}_1)} \right\| \text{ per } i = 1, 2, \dots, l+m \quad (3.57)$$

dove con $v(\mathbf{x})$ si indica la generica funzione di vincolo (che può essere $g(\mathbf{x})$ o $h(\mathbf{x})$).

Come si può osservare dalla struttura della (3.56), inoltre, è necessario calcolare, per ogni valore α_k che si sta ricercando, i moltiplicatori lagrangiani λ_i .

Si noti che la matrice $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ che appare nel sottoproblema quadratico, è la matrice *hessiana* della funzione f che, quindi, a rigore, dovrebbe essere calcolata ad ogni passo d’iterazione. Ma poiché questa operazione è molto onerosa da un punto di vista computazionale, in letteratura è raccomandato non il calcolo esatto, bensì l’approssimazione della matrice *hessiana* calcolata mediante la formula BFGS:

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \cdot \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{s}_k} \quad (3.58)$$

dove \mathbf{H}_k è l'approssimazione dell'hessiana al passo k -esimo, e \mathbf{H}_{k+1} è quella al passo $k+1$, inoltre saranno:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad (3.59)$$

$$\mathbf{q}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{l+m} \lambda_i \cdot \nabla v_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \left[\nabla f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{l+m} \lambda_i \cdot \nabla v_i(\mathbf{x}_k) \right] \quad (3.60)$$

Powell raccomanda di mantenere, ad ogni iterazione, l'hessiana definita positiva anche se essa potrebbe risultare non definita al punto soluzione.

L'hessiana si mantiene positiva se il termine $\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k$ è positivo ad ogni iterazione e se \mathbf{H} è stata inizializzata come matrice definita positiva.

Quando il termine $\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k$ non è positivo \mathbf{q}_k è modificato elemento per elemento in modo da ottenere $\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k > 0$.

Nella fase iniziale, gli elementi maggiormente negativi di $\mathbf{q}_k \cdot \mathbf{s}_k$ sono ripetutamente dimezzati fino a che $\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k \geq 10^{-5}$.

Se dopo tale procedura il termine $\mathbf{q}_k^T \cdot \mathbf{s}_k$ è ancora negativo, si modifica \mathbf{q}_k aggiungendo ad esso un vettore \mathbf{a} moltiplicato per uno scalare w :

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k + w \cdot \mathbf{a} \quad (3.61)$$

dove:

$$a_i = \begin{cases} \nabla v_i(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot v_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla v_i(\mathbf{x}_k) \cdot v_i(\mathbf{x}_k) & \text{se } (\mathbf{q}_k)_i \cdot w < 0 \text{ e } (\mathbf{q}_k)_i \cdot (\mathbf{s}_k)_i < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, l+m \quad (3.62)$$

Come si vede dalla (3.60) per aggiornare l'hessiana è necessario, anche in questo caso, calcolare i moltiplicatori lagrangiani della funzione f .

4° passo

La soluzione da utilizzare per il passo successivo è determinata mediante la relazione:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \cdot \mathbf{d}_k \quad (3.63)$$

L'iterazione si interrompe se:

- Sono soddisfatte le condizioni KKT e rispettati i vincoli;
- Oppure se il nuovo punto differisce di una quantità molto piccola da quello corrente;
- Oppure se si raggiunge un numero massimo di iterazioni definito a priori.

Da quanto esposto, si noti che il calcolo dei moltiplicatori lagrangiani è necessario per:

- effettuare la verifica delle condizioni KKT;
- calcolare la funzione di merito;
- aggiornare l'approssimazione dell'*Hessiana* mediante la formula BFGS.

3.4 Reinforcement Learning

3.4.1 Generalità

Il reinforcement learning (da questo punto in poi RL), fu originariamente concepito da psicologi comportamentali i quali studiarono l'abilità degli animali di apprendere determinate azioni in risposta a particolari sollecitazioni ambientali, sulla base di premi (*rewards*) o penalità (*punishments*) associati all'azione medesima.

Il sistema RL, come mostrato nella successiva figura, è costituito da un agente (che è il soggetto deputato ad apprendere un predeterminato comportamento), dall'ambiente in cui agisce l'agente stesso e dalla loro reciproca interazione.

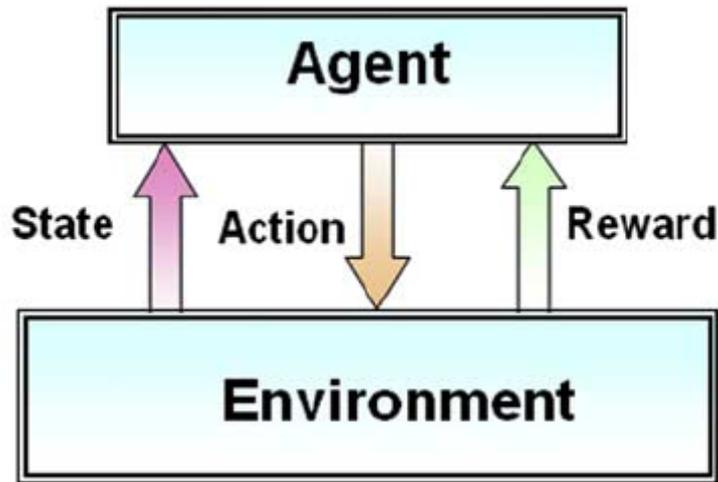


Figura 3.10 – Sistema agente-ambiente per RL (da Lee e Labadie, 2007)

L'agente, quindi è colui che apprende (*learner*) e contemporaneamente prende le decisioni (*decision-maker*) su come comportarsi nell'ambiente (*environment*) il quale, a sua volta, è costituito da tutto ciò che è fuori dall'agente.

La loro interazione è continua: l'agente prende delle decisioni, effettuando le azioni conseguenti, sulla base dello stato effettivo dell'ambiente; ad esse l'ambiente risponde passando in un nuovo stato ed assegnando all'agente un "premio" (*reward*).

L'obiettivo dell'agente è proprio quello di apprendere una politica comportamentale (*policy*) tale da massimizzare tali premi su un periodo temporale predefinito.

Entrando più nello specifico (Sutton e Barto, 2000) , l'interazione tra ambiente e agente avviene in corrispondenza di ciascuno degli istanti temporali discreti $t = 1, 2, 3, \dots$ di una predefinita sequenza temporale discreta.

Nel generico istante temporale t , l'agente riceve una particolare rappresentazione dello stato del sistema $s_t \in S$, dove S è l'insieme dei possibili stati dell'ambiente; sulla base di tale rappresentazione, l'agente seleziona un'azione $a_t \in A(s_t)$ essendo $A(s_t)$ l'insieme delle azioni possibili nello stato s_t . Nel successivo istante temporale $t+1$, l'agente riceve dall'ambiente circostante un premio numerico $r_{t+1} \in R$ dove R è l'insieme dei valori premio, mentre lo stesso ambiente passa allo stato s_{t+1} . Si veda, al proposito, la figura successiva

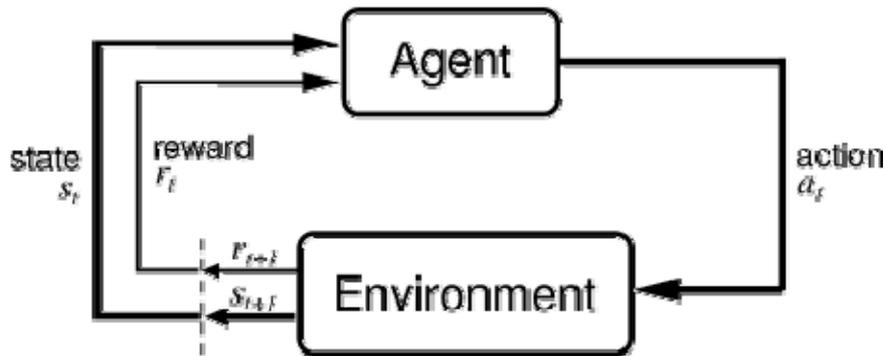


Figura 3.11 – Sistema agente-ambiente per RL (da Sutton e Barto, 2000)

Si anticipa che il valore numerico del premio r_{t+1} elargito dall'ambiente ed il nuovo stato s_{t+1} possono essere variamente interrelati fra loro e dipendenti sia dall'azione a_t compiuta dall'agente stesso sia dallo stato di partenza s_t dell'ambiente.

Ritornando alla descrizione del sistema RL, è da aggiungere che, come anticipato, l'agente compie nell'istante t la sua azione a_t sulla base di una determinata politica comportamentale (da questo punto in poi definita *policy*) che, in sostanza, suggerisce la scelta di un'azione specifica da parte dell'agente quando l'ambiente circostante si trova in un determinato stato. Più specificamente la policy è definita come una funzione $\pi_t(s,a)$ la quale fornisce, per ciascun istante temporale t , la probabilità di scegliere l'azione $a_t = a$ tenendo conto del fatto che l'ambiente si trova nello stato $s_t = s$.

L'obiettivo dell'agente, come detto, è quello di cambiare man mano la policy π_t , in modo che essa “suggerisca” azioni (dette *ottime*) tali da massimizzare non *il* premio immediato bensì, più generalmente, *i* premi in una prospettiva di lungo periodo.

Questo framework, appena descritto, è del tutto astratto e flessibile, essendo applicabile a molti problemi reali in molte diverse modalità operative.

3.4.2 Definizione di “ritorno atteso”

Si analizza in maniera più specifica, a questo punto, il concetto di massimizzazione in prospettiva di lungo periodo.

Se, dall'interazione fra agente ed ambiente lungo una sequenza temporale qualsiasi, si ottiene, a partire dal generico istante temporale t , la successione di premi numerici $r_{t+1}, r_{t+2}, r_{t+3}, \dots$ la domanda che ci si pone è la seguente: l'obiettivo dell'agente è quello di massimizzare i premi

ricevuti in una prospettiva di lungo termine: ma, analiticamente, quale particolare combinazione/funzione di tali premi futuri si vuole massimizzare?

Una possibile risposta è quella di massimizzare il cosiddetto “ritorno atteso” (*expected return*) R_t definito dalla semplice somma dei premi ricevuti dall’agente lungo tutta la sequenza temporale a partire dal generico istante t :

$$R_t = r_{t+1} + r_{t+2} + r_{t+3} + \dots + r_T \quad (3.64)$$

dove T è l’istante temporale finale.

Tale definizione, però, ha senso solo in quelle particolari applicazioni ove esiste un istante temporale finale dove, cioè, le interazioni agente – ambiente, si estrinsecano spontaneamente in sotto-sequenze temporali finite comunemente definite *episodi*. Ciascun episodio finisce, perciò, in uno stato terminale che viene seguito da un reset dell’interazione con ri-partenza di un altro episodio a partire da uno stato iniziale che può essere predefinito o scelto stocasticamente da apposita distribuzione probabilistica.

In altre applicazioni, invece, l’interazione agente-ambiente non può essere definita ad episodi, ma continua indefinitamente. Tali interazioni vengono definite *continue*.

In questi casi, la definizione del ritorno atteso della (3.64), è inapplicabile perché $T = \infty$ e, conseguentemente, R_t , che è la variabile numerica da massimizzare, potrebbe tendere all’infinito (si pensi al caso di un premio numerico pari a +1 per ciascun istante temporale). Il premio di lungo periodo da massimizzare non può essere quello espresso dalla (3.64): è necessario, quindi, introdurre un nuovo concetto: quello di *sconto*. L’agente deve massimizzare il cosiddetto “ritorno atteso scontato” (*expected discounted return*) definito da:

$$R_t = r_{t+1} + \gamma \cdot r_{t+2} + \gamma^2 \cdot r_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} \quad (3.65)$$

dove γ è un parametro detto “tasso di sconto” tale che $0 \leq \gamma \leq 1$.

La (3.65), in sostanza, informa del fatto che l’agente deve massimizzare la somma dei premi futuri opportunamente scontati.

Il tasso di sconto determina il valore attuale di premi futuri, cioè il premio r_{t+3} ottenuto all’istante temporale $t+3$, ai fini della scelta delle azioni ottime vale, all’istante attuale t , “solo” $\gamma^2 \cdot r_{t+3}$ che, essendo $\gamma < 1$, è minore di r_{t+3} .

Con $\gamma < 1$, pertanto, la R_t definita dalla (3.65) ha somma finita anche se $T = \infty$.

Si noti che, se $\gamma = 0$, l'agente è "miope" cioè il suo obiettivo è quello di massimizzare il premio immediato, senza "alzare lo sguardo" alle prospettive di lungo termine.

Interazioni agente-ambiente continue e ad episodi: visione unificata

Le interazioni agente-ambiente ad episodi e continue, determinano una scelta differente della variabile da massimizzare: essendo questa definita dalla (3.64) per le prime, e dalla (3.65) per le seconde.

Se però, nel caso delle interazioni ad episodi, si considera un particolare tipo di schema (mostrato nella figura successiva), nel quale lo stato terminale è uno speciale stato "assorbente" che provoca la sola transizione su stesso e genera premi pari a zero:

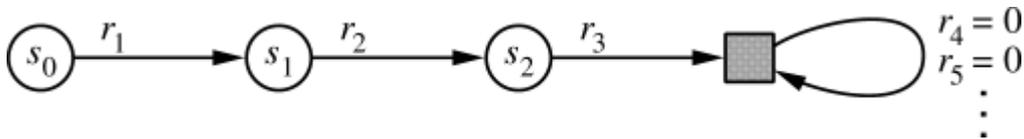


Figura 3.12 – Schema unificato per interazioni continue e a episodi (da Sutton e Barto, 2000)

dove il quadrato a destra è lo speciale stato terminale "assorbente", allora è possibile adottare una visione "unificata" tra interazioni continue e a episodi, adottando in ogni circostanza la (3.65) nel seguito riproposta per comodità d'esposizione:

$$R_t = r_{t+1} + \gamma \cdot r_{t+2} + \gamma^2 \cdot r_{t+3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} \quad (3.65)$$

ed ammettendo, come lecita, la possibilità che $T = \infty$ (e, conseguentemente, la necessità che sia $\gamma < 1$) nelle interazioni continue, e T finito (e, conseguentemente, la possibilità che $\gamma = 1$) nelle interazioni ad episodi.

3.4.3 Il modello dell'ambiente come processo decisionale markoviano finito

L'ambiente, come detto in precedenza, interagisce con l'agente effettuando, in risposta ad un'azione particolare eseguita dall'agente stesso, un ben definito cambiamento di stato "elargendo" un premio immediato.

In questo paragrafo si definiscono in maniera più approfondita le proprietà dell'ambiente che influenzano proprio gli aspetti in oggetto: il passaggio di stato e la quantificazione del premio numerico da elargire.

In particolare, senza perdita di generalità e con rilevante semplificazione degli aspetti matematici coinvolti, si considerino gli insiemi degli stati ed azioni possibili come valori discreti: si operi, cioè una discretizzazione dei valori numerici degli stati e delle azioni.

La domanda che si pone è questa: come può reagire l'ambiente, nell'istante $t+1$, cioè in quale stato s_{t+1} transiterà il sistema e quale premio immediato r_{t+1} elargirà lo stesso, una volta che l'agente, nell'istante t , ha effettuato l'azione prescelta a_t ?

Nel caso più generale la “risposta” del sistema potrebbe dipendere da tutto ciò che è accaduto prima. In questo caso, la dinamica dell'ambiente è definita dalla distribuzione di probabilità:

$$Pr\{s_{t+1} = s', r_{t+1} = r \mid s_t, a_t, r_t, s_{t-1}, a_{t-1}, r_{t-1}, \dots, s_0, a_0, r_0\} \quad (3.66)$$

per ogni valore s', r e per tutti i possibili valori s_i, a_i, r_i per $i = t, t-1, \dots, 0$.

Se l'ambiente è caratterizzato da “proprietà Markoviane”, allora la risposta dell'ambiente al tempo $t+1$ dipende solo dallo stato s_t dell'ambiente e dall'azione a_t eseguita dall'agente al tempo immediatamente precedente t :

$$Pr\{s_{t+1} = s', r_{t+1} = r \mid s_t, a_t\} \quad (3.67)$$

per ogni valore s', r e per tutti i possibili valori s_t, a_t .

Nel prosieguo si assume che valga la (3.67), cioè che l'ambiente sia caratterizzato da proprietà markoviane.

In tal caso si dice che l'ambiente, nel sistema RL, presenta una dinamica ad un passo. Cioè lo stato dell'ambiente nell'istante successivo a quello attuale ed il premio elargito possono essere predetti semplicemente conoscendo lo stato dell'ambiente e l'azione eseguita dall'agente allo stato attuale.

Un sistema RL che soddisfa la proprietà markoviana è definito un “processo decisionale markoviano” (MDP). Se, come assunto in precedenza, lo spazio degli stati e delle azioni è finito, allora il sistema RL è definito “processo decisionale markoviano finito” (MDP finito).

Specificando meglio la (3.67), un MDP finito è caratterizzato dalla conoscenza:

$$P_{ss'}^a = Pr\{s_{t+1} = s', r_{t+1} = r \mid s_t, a_t\} \quad (3.68)$$

cioè della probabilità $P_{ss'}^a$, che l'ambiente passi allo stato s' , una volta che l'agente abbia eseguito l'azione a quando l'ambiente si trovava nello stato s .

Allo stesso modo, sempre nel caso di un MDP finito, noto l'azione a eseguita dall'agente quando l'ambiente era nello stato s e noto lo stato successivo s' , è possibile stimare il valore atteso del premio immediato:

$$R_{ss'}^a = E\{r_{t+1} \mid s_t = s, a_t = a, s_{t+1} = s'\} \quad (3.69)$$

In sintesi, se il sistema RL è ipotizzato come un MDP finito, il modello dell'ambiente è completamente definito dalla conoscenza della distribuzione di probabilità $P_{ss'}^a$ e dalla funzione $R_{ss'}^a$.

3.4.4 Le “funzioni di valore” (*value functions*)

La stragrande maggioranza degli algoritmi di ottimizzazione RL si basa sulla stima delle cosiddette “funzioni di valore” (*value functions*), cioè funzioni (degli stati dell'ambiente) che stimano quanto “buono” risulta per l'agente trovarsi in un particolare stato.

In particolare, tali funzioni, associano al generico stato dell'ambiente il ritorno atteso definito dalla (3.65). Tale ritorno atteso, però, dipende da quali azioni l'agente sceglierà durante l'evolversi dell'interazione con l'ambiente (cioè al progredire del tempo). E poiché, come anticipato, l'agente sceglie le azioni sulla base di una determinata *policy*, è naturale associare tali funzioni di valore alla *policy* che l'agente segue.

Detto in termini più rigorosi, data una *policy* $\pi(s, a)$ che fornisce la probabilità che l'agente esegua l'azione a una volta che l'ambiente si trovi nello stato s , si definisce “valore dello stato s sotto la *policy* π ”, indicato con $V^\pi(s)$, il ritorno atteso partendo dallo stato s e seguendo la *policy* π . Per MDP finiti, tale funzione di valore è pari a:

$$V^\pi(s) = E_\pi\{R_t \mid s_t = s\} = E_\pi\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} \mid s_t = s\right\} \quad (3.70)$$

dove con E_π si indica l'operatore valore atteso per l'agente che segue la *policy* π .
 V^π , quindi, è detta "funzione valore" (*value function*) per la *policy* π .

In modo analogo si definisce la "funzione azione-valore" (*action-value function*) per la *policy* π , indicata con $Q^\pi(s,a)$, la quale fornisce il ritorno atteso partendo dallo stato s compiendo l'azione a e, solo da questo momento in poi, seguendo la *policy* π .

$$Q^\pi(s,a) = E_\pi \{R_t | s_t = s, a_t = a\} = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} | s_t = s, a_t = a \right\} \quad (3.71)$$

Una delle proprietà fondamentali delle funzioni di valore appena definite è che esse soddisfano una particolare relazione ricorsiva dimostrata, a mo' d'esempio per la sola funzione valore V^π :

$$V^\pi(s) = E_\pi \{R_t | s_t = s\} = E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} | s_t = s \right\} = E_\pi \left\{ r_{t+1} + \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+2} | s_t = s \right\} \quad (3.72)$$

$$V^\pi(s) = \sum_a \pi(s,a) \cdot \sum_{s'} P_{ss'}^a \cdot \left[R_{ss'}^a + \gamma \cdot E_\pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+2} | s_{t+1} = s' \right\} \right] \quad (3.73)$$

giungendo alla relazione:

$$V^\pi(s) = \sum_{a \in A(s)} \pi(s,a) \cdot \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')] \quad (3.74)$$

definita equazione di Bellman per la funzione di valore V^π .

Come si può osservare dalla (3.74), l'equazione di Bellman fornisce una relazione tra la funzione valore in uno stato s , e quello dello stato successore s' .

Partendo cioè dallo stato s , l'agente può eseguire, sulla base della *policy* π , una delle azioni a possibili. Per ciascuna d'esse l'ambiente può evolvere, sulla base della funzione $P_{ss'}^a$, verso uno degli stati s' possibili (che hanno una propria $V^\pi(s')$), ottenendo differenti valori del premio $R_{ss'}^a$.

L'equazione (3.74) di Bellman non fa altro che eseguire la media pesata dei termini $R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')$ relativi a tutte le possibili azioni e stati futuri, usando come pesi proprio le probabilità di accadimento di tali possibilità.

Ad esempio, si consideri che l'ambiente sia, all'istante t , nello stato s e si supponga che la *policy* π , sia tale che in s , l'agente può eseguire solo tre azioni:

a_1 con probabilità 20%

a_2 con probabilità 50%

a_3 con probabilità 30%

inoltre, si ipotizzi che il modello dell'ambiente, dato dalle funzioni $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$, è tale che:

compiendo l'azione a_1 si giunga agli stati:

s_1 con probabilità 55%, ottenendo un premio immediato $r = 0,1$ e sapendo che $V(s_1)=10$

s_2 con probabilità 45%, ottenendo un premio immediato $r = 0,2$ e sapendo che $V(s_2)=20$

compiendo l'azione a_2 si giunga agli stati:

s_3 con probabilità 35%, ottenendo un premio immediato $r = 0,3$ e sapendo che $V(s_3)=15$

s_4 con probabilità 65%, ottenendo un premio immediato $r = 0,4$ e sapendo che $V(s_4)=18$

compiendo l'azione a_3 si giunga agli stati:

s_5 con probabilità 25%, ottenendo un premio immediato $r = 0,5$ e sapendo che $V(s_5)=21$

s_6 con probabilità 75%, ottenendo un premio immediato $r = 0,6$ e sapendo che $V(s_6)=23$

allora l'equazione di Bellman si specifica come nel seguito:

$$V^\pi(s) = 0.2 \cdot A + 0.5 \cdot B + 0.3 \cdot C$$

che, come si vede, è la media pesata (il denominatore è la somma dei pesi, cioè 1) dei termini

$\sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')]$ con pesi dati dalla probabilità di accadimento delle diverse azioni a , mentre

gli altri termini sono:

$$A = P_{ss_1}^{a_1} \cdot [R_{ss_1}^{a_1} + \gamma \cdot V^\pi(s_1)] + P_{ss_2}^{a_1} \cdot [R_{ss_2}^{a_1} + \gamma \cdot V^\pi(s_2)] = 0,55 \cdot [0,1 + \gamma \cdot 10] + 0,45 \cdot [0,2 + \gamma \cdot 20]$$

$$B = P_{ss_3}^{a_2} \cdot [R_{ss_3}^{a_2} + \gamma \cdot V^\pi(s_3)] + P_{ss_4}^{a_2} \cdot [R_{ss_4}^{a_2} + \gamma \cdot V^\pi(s_4)] = 0,35 \cdot [0,3 + \gamma \cdot 15] + 0,65 \cdot [0,4 + \gamma \cdot 18]$$

$$C = P_{ss_5}^{a_3} \cdot [R_{ss_5}^{a_3} + \gamma \cdot V^\pi(s_5)] + P_{ss_6}^{a_3} \cdot [R_{ss_6}^{a_3} + \gamma \cdot V^\pi(s_6)] = 0,25 \cdot [0,5 + \gamma \cdot 21] + 0,75 \cdot [0,6 + \gamma \cdot 23]$$

anch'essi, in realtà, medie pesate con pesi pari sempre alle probabilità di accadimento, questa volta però degli stati successivi a partire da stato precedente ed azione nota.

Nel complesso, quindi, l'equazione (3.74), lo si ripete ancora una volta, non fa altro che eseguire la media pesata dei termini $R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')$ relativi a tutte le possibili azioni e stati futuri, usando come pesi proprio le probabilità di accadimento di tali possibilità.

Analogamente è possibile definire l'equazione di Bellman per la funzione azione-valore $Q^\pi(s,a)$.

Si noti, infatti, che, per definizione stessa di funzione azione-valore, si ha:

$$Q^\pi(s,a) = \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')] \quad (3.75)$$

La (3.74) pertanto può essere riscritta nel modo seguente:

$$V^\pi(s) = \sum_{a \in A(s)} \pi(s,a) \cdot Q^\pi(s,a) \quad (3.76)$$

Sostituendo in (3.75) la nuova espressione (3.76) si ha pertanto:

$$Q^\pi(s,a) = \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot \left[R_{ss'}^a + \gamma \cdot \sum_{a' \in A(s')} \pi(s',a') \cdot Q^\pi(s',a') \right] \quad (3.77)$$

ottenendo:

$$Q^\pi(s,a) = \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot R_{ss'}^a + \gamma \cdot \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot \sum_{a' \in A(s')} \pi(s',a') \cdot Q^\pi(s',a') \quad (3.78)$$

Cioè, la funzione azione-valore per la *policy* π per la coppia stato-azione (s,a) è la somma della media pesata dei premi immediati ottenuti per tutti gli stati successivi possibili partendo dallo stato s ed eseguendo l'azione a (essendo i pesi costituiti dalle probabilità di accadimento proprio di tali stati successivi possibili), e della media pesata (con pesi costituiti dalle probabilità di accadimento degli stati successivi di s ed a , e delle probabilità di accadimento delle possibili azioni a' a partire

da ciascuno stato successore predetto) dei valori che la funzione azione-valore assume per tutte gli stati successori possibili s' e le relative azioni possibili a' .

3.4.5 Le funzioni di valore ottimali

Ciò che è stato sinora esposto è la semplice introduzione delle cosiddette “funzioni di valore” associate ad una ben definita a priori politica di comportamento (*policy*).

L'obiettivo degli algoritmi RL, però, è quello di massimizzare, come già ampiamente detto, il ritorno atteso sul lungo periodo. Cioè, detto in altri termini, è quello di individuare una *policy* che (detta, appunto, ottimale) che “suggerisca” all'agente il compimento delle azioni che massimizzano il già citato ritorno atteso di lungo periodo.

Quindi l'obiettivo degli algoritmi di lungo periodo è quello di cercare la *policy* ottimale.

Ma come si definisce, in maniera analitica, tale *policy*?

Innanzitutto v'è da dire che una *policy* π è (analiticamente) migliore o uguale di un'altra π' se, per ciascuno stato dell'ambiente, il ritorno atteso di π è maggiore o uguale a quello di π' , cioè:

$$\pi \geq \pi' \text{ se e solo se } V^\pi(s) \geq V^{\pi'}(s) \quad \forall s \in S$$

Da questa definizione, discende che esiste almeno una *policy* migliore o uguale a tutte le altre *policies*. Questa è la *policy* ottimale.

Sebbene possano essere molte, tali *policies* ottimali si indicano tutte con lo stesso simbolo π^* . Tutte queste *policies* ottimali condividono in ogni caso la stessa “funzione valore ottimale” V^* definita come:

$$V^*(s) = \max_{\pi} V^\pi(s) \quad \forall s \in S \quad (3.79)$$

Le *policies* ottimali, inoltre, condividono la stessa “funzione azione-valore ottimale” Q^* definita come:

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} Q^\pi(s, a) \quad \forall s \in S, a \in A(s) \quad (3.80)$$

Tale funzione fornisce il ritorno atteso partendo dallo stato s , compiendo l'azione a e, solo da questo punto in poi, seguendo la *policy* ottimale.

Il problema, ora, riguarda il calcolo di tali funzioni di valore ottimali. Questo avverrà mediante le cosiddette equazioni di ottimalità di Bellman. Tali equazioni esprimono, intuitivamente, il fatto che il valore di uno stato sotto una *policy* ottimale, è il ritorno atteso eseguendo la migliore azione da quello stato, cioè:

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} Q^{\pi^*}(s, a) \quad (3.81)$$

Sviluppando il termine a secondo membro si ha:

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} E_{\pi^*} \{R_t | s_t = s, a_t = a\}$$

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} E_{\pi^*} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+1} | s_t = s, a_t = a \right\}$$

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} E_{\pi^*} \left\{ r_{t+1} + \gamma \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \cdot r_{t+k+2} | s_t = s, a_t = a \right\}$$

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} E \{ r_{t+1} + \gamma \cdot V^*(s_{t+1}) | s_t = s, a_t = a \} \quad (3.82)$$

che equivale a:

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s'} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^*(s')] \quad (3.83)$$

La (3.82) e la (3.83) sono due forme alternative dell'equazione di ottimalità di Bellman per la funzione di valore V^* .

Analogamente è possibile ricavare le due forme alternative dell'equazione di ottimalità di Bellman per la funzione azione-valore:

$$Q^*(s, a) = E \left\{ r_{t+1} + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q^*(s_{t+1}, a') | s_t = s, a_t = a \right\} \quad (3.84)$$

$$Q^*(s, a) = \sum_{s'} P_{ss'}^a \cdot \left[R_{ss'}^a + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q^*(s', a') \right] \quad (3.85)$$

L'equazione di ottimalità di Bellman (una qualunque fra le quattro appena ricavate) costituisce un sistema di equazioni, una per ogni stato, con numero di incognite pari proprio al numero di stati. Se si hanno N stati, quindi, il sistema di equazioni è $N \times N$ con N incognite.

Conoscendo, pertanto, la dinamica dell'ambiente (caratterizzata da $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$), le funzioni $V^*(s)$ e $Q^*(s, a)$ possono essere ricavate, almeno in via teorica, mediante i metodi di risoluzione dei sistemi di equazione non lineare.

Una volta calcolati $V^*(s) \forall s \in S$ oppure $Q^*(s, a) \forall s \in S$ e $\forall a \in A(s)$, come ricavare la *policy* ottimale?

Se è stata calcolata la funzione di valore $V^*(s)$, posizionati in un generico stato s , da esso è possibile eseguire tutta una serie di azioni: quella ottimale (facente parte, pertanto, della *policy* ottimale) è scelta applicando la (3.83) o la (3.82), cioè massimizzando il valore atteso della somma fra premio immediato e valore funzione degli stati successivi.

Se, invece, è stata calcolata direttamente la $Q^*(s, a)$, la determinazione dell'azione ottimale (facente parte della *policy* ottimale) è ancora più semplice, in quanto, posizionati in s , è semplicemente quella azione (fra quelle possibili in s) che massimizza i differenti valori $Q^*(s, a)$. Questa maggiore "semplicità" nella determinazione della *policy* ottimale, ovviamente, è ottenuta al costo di dovere calcolare la $Q^*(s, a)$ che, come si vede dalla sua stessa notazione, è da calcolare per tutte le coppie (s, a) .

3.4.6 Le funzioni di valore ottimali nel caso deterministico

Se l'ambiente è deterministico se, cioè:

$$P_{ss'}^a = I$$

$$R_{ss'}^a = r(s, a, s')$$

ciò significa che, posti in uno stato s ed eseguendo una determinata azione a , l'ambiente non potrà che evolvere in un unico ben determinato stato successore s' ed in nessun altro; contrariamente,

quindi, al caso precedente quando, posti in uno stato s e compiuta l'azione possibile a , lo stato poteva evolvere in uno qualunque dei vari stati successivi possibili.

In maniera analoga, in un ambiente deterministico, posti nello stato s e compiuta l'azione a , (con l'ambiente che evolve deterministicamente in s') si ottiene un premio $r(s, a, s')$ che non è più da intendersi come valore atteso, ma come dato ben preciso.

Le equazioni di ottimalità di Bellman (3.83) e (3.85), pertanto, nel caso di ambiente deterministico diventano:

$$V^*(s) = \max_{a \in A(s)} [r(s, a, s') + \gamma \cdot V^*(s')] \quad (3.86)$$

$$Q^*(s, a) = r(s, a, s') + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q^*(s', a') \quad (3.87)$$

3.4.7 Le funzioni di valore ottimali stagionali

Esistono casi in cui l'interazione agente-ambiente avviene in un contesto ambientale caratterizzato dalla periodicità delle diverse variabili in gioco.

In tali casi, la determinazione di un'unica funzione valore ottimale $V^*(s)$ o di un'unica funzione azione-valore ottimale $Q^*(s, a)$, fornirebbe *policy* ottime scarsamente efficienti.

Un esempio può essere fornito da un semplice serbatoio che abbia l'unico scopo di servire un comprensorio irriguo: è evidente che lo stato di invaso vicino alla capacità di massima regolazione implica azioni ottime differenti in dipendenza del periodo dell'anno in cui si verifica tale situazione: nei mesi estivi, infatti, le utenze presentano picchi di richiesta idrica, l'agente (il soggetto gestore del sistema di invasi) deve, quindi, eseguire tutte quelle operazioni di rilascio necessarie al soddisfacimento delle esigenze colturali del comprensorio servito; nei mesi invernali, invece, le richieste irrigue sono nulle: gli eventuali rilasci, quindi, si limitano a quelli necessari a garantire il corretto funzionamento dell'invaso e le condizioni di sicurezza a valle dello stesso.

Dall'esempio emerge con chiarezza la necessità di differenziare le *policy* ottime seguite dall'agente (il soggetto gestore del sistema) in dipendenza di opportuni sottoperiodi a loro volta individuati sulla base delle caratteristiche di periodicità delle variabili del sistema (intrinseche ed estrinseche) in gioco.

Detto in termini matematici, come anticipato, non basta più calcolare un'unica funzione valore $V^*(s)$ o azione-valore $Q^*(s,a)$, ma tante funzioni $V_t^*(s)$ oppure $Q_t^*(s,a)$, una per ciascuno dei sottoperiodi “ t ” individuati dall’esame delle suddette periodicità di sistema.

Nel caso della gestione di sistemi di invaso, i parametri in gioco, almeno da un punto di vista teorico, variano istante per istante.

Se però, come nel caso della presente tesi, lo scopo è quello di giungere a *policy* ottime di gestione a scale spaziali e temporali che si possono definire medio-grandi, è del tutto accettabile asserire che i suddetti parametri varino da stagione a stagione o meglio ancora, da mese a mese, presentando una periodicità annuale: si pensi, ad esempio, ai deflussi affluenti ai serbatoio o alla temperatura media mensile esterna influenzante l’evaporazione dallo specchio liquido; così come le erogazioni alle utenze, quali le richieste irrigue (picco nei mesi estivi, nulli in quelli invernali) o idropotabili (presenti in ogni stagione dell’anno ma con un picco, anche in questo caso, nei mesi estivi).

In tali situazioni, adottando la rappresentazione alla scala mensile, sarà necessario determinare 12 funzioni di valore o di azione –valore ottime, una per ciascun mese dell’anno:

$V_t^*(s)$ per $t =$ gennaio, febbraio,dicembre

$Q_t^*(s,a)$ per $t =$ gennaio, febbraio,dicembre

Le equazioni di ottimalità di Bellman (3.83) e (3.85), nel caso stagionale, quindi diventano:

$$V_t^*(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s'} P_{s,s'}^a \cdot [R_{s,s'}^a + \gamma \cdot V_{t+1}^*(s')] \quad (3.88)$$

$$Q_t^*(s,a) = \sum_{s'} P_{s,s'}^a \cdot \left[R_{s,s'}^a + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q_t^*(s',a') \right] \quad (3.89)$$

Se l’ambiente è deterministico le equazioni di Bellman (3.86) e (3.87), nel caso “stagionale” diventano:

$$V_t^*(s) = \max_{a \in A(s)} [r(s,a,s') + \gamma \cdot V_{t+1}^*(s')] \quad (3.90)$$

$$Q_t^*(s,a) = r(s,a,s') + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q_{t+1}^*(s',a') \quad (3.91)$$

Solo che, in questo caso, con t non si intende il generico sottoperiodo (stagione, mese, decade, etc...) individuato dalla periodicità delle variabili di sistema, ma proprio lo step temporale di queste

ultime; ad esempio, avendo a disposizione una sequenza di N variabili di input mensili, applicando l'approccio stocastico stagionale, la DP genera 12 funzioni azione-valore $Q_t(s,a)$ con $t = \text{gennaio, febbraio, marzo,dicembre}$, mentre l'approccio deterministico appena descritto genera tante Q quanti sono tutti i mesi della sequenza disponibile, cioè N , quindi: $Q_t(s,a)$ con $t = 1, 2, 3, \dots, N$.

La differenza è che quest'ultima sequenza di $Q_t(s,a)$ è valida solo per la sequenza che l'ha generata, mentre la prima sequenza di 12 valori di Q , includendo nella propria struttura le caratteristiche stocastiche dell'ambiente, ha validità "generale" quindi applicabile anche ad altre sequenze di variabili di input future.

3.5 Metodi approssimati di risoluzione delle equazioni di ottimalità di Bellman

Come detto, la risoluzione delle equazioni di Bellman fornisce la possibilità di ottenere la *policy* ottimale. Purtroppo, però, questa soluzione raramente può essere realmente ricavata: le equazioni suddette si basano, infatti, su una serie di assunzioni (l'ambiente deve essere un MDP) e conoscenze (le distribuzioni di probabilità delle occorrenze degli stati $P_{ss'}^a$, i valori attesi dei premi immediati $R_{ss'}^a$) che nella pratica sono note solo di rado; inoltre la struttura stessa delle equazioni prevede l'analisi di tutte le possibilità effettuando una ricerca completa degli stati futuri.

Quindi, oltre alla perfetta conoscenza della dinamica d'ambiente, è necessario disporre di risorse computazionali adeguate ad una mole di calcoli che può diventare considerevole. Ad esempio, il gioco del backgammon (di cui è nota la dinamica dell'ambiente e che può essere modellato come MDP), presenta circa 10^{20} stati. La risoluzione dell'equazione di ottimalità di Bellman richiederebbe migliaia di anni utilizzando i computer più veloci oggi esistenti.

Nel sistema RL ci si deve, pertanto, accontentare di soluzioni approssimate.

I metodi decisionali che si esamineranno nel seguito possono essere visti tutti come differenti modalità di risoluzione approssimata dell'equazione di ottimalità di Bellman. Tra tali metodi, si analizzeranno:

- gli algoritmi della Dynamic Programming,
- quelli del metodo di Monte Carlo,
- e i cosiddetti metodi di apprendimento *temporal-difference* (TD).

3.6 Dynamic Programming

Con “programmazione dinamica” (*Dynamic programming*, da questo punto in poi, DP) si intende una serie di algoritmi da utilizzare per la determinazione delle *policies* ottimali (Bellman, 1957a, 1957b).

Tali algoritmi, però, richiedono la completa conoscenza del modello dell’ambiente (che, oltretutto, deve necessariamente essere MDP).

Gli algoritmi DP, pertanto, sono di limitata utilità nell’ambito del RL, ma di rilevante importanza da un punto di vista teorico, per l’analisi degli altri due metodi che, in realtà, possono essere considerati come tentativi di “emulazione” dei DP col vantaggio della diminuzione degli oneri computazionali.

Incominciando ad analizzare la DP, si assume che:

- l’ambiente sia MDP finito: cioè gli stati s e le azioni possibili $a \in A(s)$ sono finiti;
- la dinamica dell’ambiente è nota: cioè sono conosciute le funzioni $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$,
 $\forall s, s' \in S, a \in A(s)$;

Sebbene i metodi DP possano, almeno in casi speciali, essere applicati a problemi con spazi continui degli stati e delle azioni, nel prosieguo si considererà il solo caso di insiemi discreti e finiti degli stessi.

Anche con gli algoritmi DP, l’idea chiave è quella di giungere all’ottenimento delle *policies* ottimali mediante l’uso delle funzioni di valore $V^*(s)$ e $Q^*(s, a)$ introdotte nei paragrafi precedenti.

Innanzitutto si esaminerà la capacità della DP di calcolare la funzione di valore V^π nota che sia la *policy* π seguita dall’agente (problema detto di *policy evaluation*).

In seguito si esporrà l’abilità della DP di giungere alla stima della *policy* ottimale.

3.6.1 Problema di *policy evaluation*

Come anticipato, tale problema consiste nel calcolo della funzione di valore $V^\pi(s) \forall s \in S$, nota che sia la particolare *policy* π seguita dall’agente.

Si ricorda che la $V^\pi(s)$ è data dalla (3.74) qui richiamata per comodità d’esposizione:

$$V^\pi(s) = \sum_{a \in A(s)} \pi(s, a) \cdot \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')] \quad (3.92)$$

dalla quale si evince che, nota la dinamica dell'ambiente (cioè le funzioni $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$, $\forall s, s' \in S, a \in A(s)$) la (3.74) costituisce un sistema di N equazioni nelle N incognite $V^\pi(s)$ $s \in S$, essendo N la numerosità dell'insieme S .

In maniera analoga a quanto detto in precedenza per l'equazione di ottimalità di Bellman, la risoluzione del sistema (3.74) è molto onerosa da un punto di vista computazionale.

Il calcolo della $V^\pi(s)$ $\forall s \in S$ avviene con un metodo per successive iterazioni basato sulla struttura stessa della (3.74):

$$V_{k+1}(s) = \sum_{a \in A(s)} \pi(s, a) \cdot \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V_k(s')] \quad \forall s \in S \quad (3.93)$$

tale metodo calcola l'approssimazione $V_{k+1}(s)$ di $V^\pi(s)$ nello stato s al passo di iterazione $k+1$, basandosi sulle approssimazioni $V_k(s')$ di $V^\pi(s)$ negli stati successivi di s (cioè i vari s' possibili), al passo di iterazione precedente k .

Nota che sia l'approssimazione $V_0(s)$ di $V^\pi(s)$ al passo 0 (può essere scelta arbitrariamente), il metodo iterativo genera una serie di funzioni valore $\{V_k\}$ che per $k \rightarrow \infty$, è stato dimostrato convergere al valore vero V^π .

Tale algoritmo è detto appunto, *iterative policy evaluation* (valutazione iterativa di *policy*).

Esso, ad ogni successivo passo dell'iterazione, non fa altro che rimpiazzare il vecchio valore di V nello stato s , con un nuovo valore che dipende, tramite la (3.93), anche dai vecchi valori di V presenti nei possibili stati successivi di s seguendo la *policy* π che si vuole valutare.

Questa operazione di “rimpiazzamento” è detta di *full backup*, perché, appunto, l'aggiornamento di V avviene dopo avere fatto una copia (cioè un *back up*) di tutti i possibili stati successivi.

Tale operazione di “salvataggio” può avvenire in due modi diversi: nel primo si usano due array di valori $V(s)$ $\forall s \in S$ (uno per i “nuovi” valori al passo d'iterazione $k+1$ e l'altro per quelli “vecchi” al passo k , quest'ultimo da utilizzare nel secondo membro della (3.93)), mentre nel secondo si utilizza un solo array di valori $V(s)$ $\forall s \in S$: in tal caso può capitare il caso in cui l'aggiornamento al passo $k+1$ del valore $V_{k+1}(s)$ dello stato s , possa basarsi su uno o più valori degli stati successivi s' , non del passo precedente k , bensì già aggiornati proprio al passo corrente d'iterazione $k+1$.

Anche questa particolare versione (detta *in-place*) dell' *iterative policy evaluation*, è stata dimostrata convergere al valore vero $V^\pi(s)$. Nel prosieguo ci si riferirà implicitamente sempre a tale versione.

Un'altra questione importante è la terminazione dell'algoritmo. Teoricamente esso converge al valore vero $V^\pi(s)$ solo al limite per $k \rightarrow \infty$. Nella pratica però, è necessario imporre uno stop determinato: una tipica condizione è quella di valutare, ad ogni passo d'iterazione, la quantità $\max_{s \in S} |V_{k+1}(s) - V_k(s)|$, e procedere alla conclusione dell'algoritmo quando tale quantità risulta inferiore di una tolleranza (piccola) fissata a priori.

3.6.2 Problema di *policy improvement*

Il problema di *policy evaluation* (cioè di valutazione di una policy) esposto nel precedente paragrafo, non è un problema fine a se stesso, bensì precipuamente votato all'obiettivo principale della DP, cioè la determinazione di una *policy* particolare, quella ottimale.

Si supponga che sia nota, grazie, ad esempio, all'uso della versione *in-place* dell'*iterative evaluation policy*, il valore vero $V^\pi(s) \forall s \in S$, della funzione di valore per la *policy* π .

Quindi, ora, posti in un qualunque stato s dell'ambiente, si conosce "l'appetibilità" di risiedere in quello stato, cioè è noto il ritorno atteso seguendo la *policy* π a partire da s .

Ancora, però, non si sa se esista una *policy* che garantisca un grado di appetibilità maggiore di π .

Un modo per scoprirlo è quello di scegliere, a partire da s , un'azione a non "contemplata" dalla *policy* π , e solo dopo questa scelta, seguire la *policy* originaria; la valutazione di tale comportamento è definita dalla (3.75) qui richiamata per comodità d'esposizione:

$$Q^\pi(s, a) = \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^\pi(s')] \quad (3.94)$$

è evidente che, se $Q^\pi(s, a)$ è maggiore di $V^\pi(s)$ la "nuova" *policy* (ottenuta dalla vecchia, eseguendo in s non l'azione prevista dalla stessa, bensì un'altra) è "migliore" della vecchia.

Questo risultato è immediatamente generalizzabile nel cosiddetto teorema di *policy improvement* (teorema del *miglioramento di policy*): siano π e π' due *policy* (per comodità d'esposizione e senza perdita di generalità s'assume che siano deterministiche) tali che:

$$Q^\pi(s, \pi'(s)) \geq V^\pi(s) \quad \forall s \in S \quad (3.95)$$

allora la *policy* π' è migliore o almeno buona quanto la *policy* π , cioè si verificherà che:

$$V^{\pi'}(s) \geq V^{\pi}(s) \quad \forall s \in S \quad (3.96)$$

se nella (3.95) v'è stretta ineguaglianza in tutti gli stati, allora nella (3.96) vi sarà la stessa stretta ineguaglianza in almeno uno stato.

Il semplice esempio esposto in precedenza sul miglioramento di una *policy* esistente, mostra che il suddetto miglioramento avviene sulla base della funzione azione-valore $Q^{\pi}(s, a)$:

$$\pi'(s) = \underset{a}{\operatorname{arg\,max}} Q^{\pi}(s, a) = \underset{a}{\operatorname{arg\,max}} \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^{\pi}(s')] \quad (3.97)$$

dove, con il termine $\underset{a}{\operatorname{arg\,max}}$ si intende non il valore massimo di $Q^{\pi}(s, a)$, bensì l'azione che rende massima $Q^{\pi}(s, a)$.

La (3.97) conduce a una nuova *policy* π' che, proprio a causa della modalità di scelta della nuova azione, è detta *greedy* (letteralmente dall'inglese: vorace, avido). Cioè la nuova *policy* è detta *greedy* perché basata sulla scelta di azioni che appaiono le migliori solo nel brevissimo termine, cioè “dando uno sguardo” all'istante temporale immediatamente successivo.

Il procedimento che permette di migliorare una *policy* esistente generandone una nuova che è “*greedy*” rispetto a quella originaria è detto, appunto, di *policy improvement*.

Se ora si suppone che, implementando il processo di *policy improvement*, si giunga alla determinazione di una *policy* π' che sia tanto buona quanto, ma non migliore, di π , si avrà che $V^{\pi} = V^{\pi'}$ e quindi dalla (3.97) segue che:

$$V^{\pi'}(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s' \in S} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V^{\pi'}(s')] \quad (3.98)$$

che è uguale all'equazione di ottimalità di Bellman (3.83): da ciò segue che $V^{\pi'} = V^{\pi} = V^*$ e quindi sia π' che π sono *policies* ottimali.

3.6.3 Determinazione della *policy* ottimale mediante algoritmi DP

La *policy* ottimale nella DP può essere ottenuta mediante due tecniche differenti:

1. *Policy iteration*;
2. *Value iteration*.

le quali verranno esposte nel prosieguo.

3.6.3.1 *Policy iteration*

Tale algoritmo si basa sulla continua alternanza di fasi di *evaluation* ed *improvement*. Nota la *policy* iniziale π_0 , si procede dapprima con la fase di *evaluation* (E) mediante *iterative policy evaluation* ottenendo la funzione di valore corrispondente V^{π_0} . Nota quest'ultima, mediante la tecnica di *policy improvement* esposta nel precedente paragrafo si ricava la *policy* π_1 (che è *greedy* rispetto alla π_0), fase (I). A questo punto il ciclo riparte proprio da π_1 che deve essere dapprima valutata (E) e poi migliorata (I), ottenendo π_2 , e così via sino all'ottenimento della *policy* ottimale π^* e della relativa funzione di valore ottimale V^* .

La successiva figura (da Sutton e Barto, 2000) esemplifica quanto appena sintetizzato:

$$\pi_0 \xrightarrow{\text{E}} V^{\pi_0} \xrightarrow{\text{I}} \pi_1 \xrightarrow{\text{E}} V^{\pi_1} \xrightarrow{\text{I}} \pi_2 \xrightarrow{\text{E}} \dots \xrightarrow{\text{I}} \pi^* \xrightarrow{\text{E}} V^*,$$

Poiché un MDP finito ha un numero finito di *policies*, questo processo deve convergere ad una *policy* ottimale e ad una funzione di valore ottimale in un numero finito di iterazioni.

Si noti, per inciso, che il metodo *policy iteration*, si basa su due tipi di iterazioni: la prima è “intrinseca” in quanto riguarda la sola fase di *evaluation*; la seconda, invece, è “estrinseca” poiché interessa l'alternarsi tra fasi di *evaluation* e *improvement*, necessari per giungere alla *policy* ottimale.

Il metodo in esame si è rivelato capace di convergere in un numero di iterazioni (estrinseche) sorprendentemente basso.

3.6.3.2 Value iteration

Come appena visto, l'unico inconveniente dell'algoritmo di *policy iteration* è costituito dal fatto che ciascuna fase di *evaluation* (implementata mediante *iterative evaluation policy*) è essa stessa un processo iterativo che teoricamente converge al suo obiettivo (cioè la stima del valore vero della generica *policy* π_i al passo di iterazione "estrinseco" i) solo al limite.

Per fortuna, però, si può dimostrare che la convergenza del metodo *policy iteration* non è inficiata anche nel caso in cui ciascuna delle singole fasi di *evaluation* è troncata molto prima dell'ottenimento di un risultato di approssimazione del valore vero V^π accettabile. Un caso molto importante è quando, addirittura, la singola fase di *evaluation* è stoppata dopo appena una iterazione.

Questa è l'essenza del metodo di stima della *policy* ottimale detto *Value Iteration*.

Esso assume la forma iterativa:

$$V_{k+1}(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s'} P_{ss'}^a \cdot [R_{ss'}^a + \gamma \cdot V_k(s')] \quad \forall s \in S \quad (3.99)$$

La (3.99) combina in un'unica spazzata (iterazione), sia la fase di *evaluation* sia quella di *improvement*.

Per una arbitraria V_0 iniziale, la sequenza $\{V_k\}$ converge al valore vero V^* sotto le stesse condizioni che garantiscono l'esistenza stessa di V^* .

Dall'esame dell'equazione (3.99), si osserva che il metodo di *value iteration* può essere messo in relazione con l'equazione di ottimalità di Bellman (3.83), manipolata in modo tale da ottenere una relazione iterativa.

In analogia a quanto detto in merito alla *iterative evaluation policy*, anche la *value iteration* converge verso il suo obiettivo (il valore vero di V^*) solo al limite. E' necessario, pertanto, anche in questo caso, fare un accenno ai possibili criteri di conclusione del processo iterativo.

In pratica, quindi, tale processo sarà terminato, quando si verificherà un cambiamento molto piccolo nella funzione di valore (ad esempio: valutare, per ciascun stato $s \in S$, la differenza tra $V_{k+1}(s)$ e $V_k(s)$, e verificare che il massimo di tali differenze sia inferiore ad un valore numerico molto piccolo scelto a priori).

3.6.4 La *Generalized Policy Iteration* (GPI)

Il metodo di stima *value iteration* sebbene in questa sede sia stato esposto quasi in contrapposizione (o quanto meno in alternativa) a quello *policy iteration*, in realtà obbedisce anch'essa ad un principio di base che permea quasi tutti gli algoritmi del RL: cioè l'interazione di due processi complementari: quello di *evaluation* e quello di *improvement*.

Tale principio è così diffuso che è possibile parlare di un vero e proprio metodo, seppure molto generale, chiamato appunto: *Generalized Policy Iteration* (GPI).

Ogni algoritmo di RL di stima della policy ottimale che basa la sua ricerca sulla reciproca interazione delle due fasi di valutazione e miglioramento (al di là di dettagli sulla modalità di tale interazione) può essere descritto in via generale come un GPI.

Come si può notare dai precedenti paragrafi, entrambi i metodi DP appena esaminati (*policy iteration* e *value iteration*) aggiornano le stime della funzione di valore in uno stato, sulla base di stime della funzione di valore negli stati successivi: cioè aggiornano le stime sulla base di altre stime. Questa proprietà è detta *bootstrapping*.

3.7 Metodo Monte Carlo

In questo metodo non è richiesta la perfetta conoscenza dell'ambiente, ovvero:

- gli stati $s \in S$;
- le azioni $a \in A(s)$;
- e le più volte citate funzioni $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$.

Il metodo Monte Carlo (MC), infatti, si basa solo sull'esperienza, cioè sulla base di sequenze campionate di stati, azioni e premi generate da interazione diretta o simulata con l'ambiente oggetto di studio. Si noti che nel caso di interazione simulata è necessario sviluppare comunque un modello dell'ambiente ma esso non deve così completo da fornire anche le (complesse) distribuzioni di probabilità richieste dai metodi della DP: deve "soltanto" essere capace di generare campioni di stati, premi ed azioni.

Come si vedrà più approfonditamente nel seguito, il metodo considera le interazioni del tipo "ad episodi". E solo al termine di ciascun episodio le funzioni valore e la policy per ciascuno stato dell'ambiente e/o per ciascuna coppia (s,a) sono aggiornate: il metodo Monte Carlo, quindi, è

“incrementale” solo a riguardo degli episodi e non anche del singolo intervallo temporale come nel caso della DP.

Nonostante questa sostanziale differenza, la DP emana la sua influenza sui metodi MC in quanto l’ottenimento della *policy* ottimale avviene, sostanzialmente, allo stesso modo: in primis v’è la fase di *evaluation*, cioè il calcolo della funzione valore V^π e della funzione azione-valore $Q^\pi(s,a)$, nota che sia la *policy* π seguita dall’agente; successivamente v’è la fase di *improvement*, in modo, quindi, da tendere alla *policy* ottimale.

3.7.1 La fase *evaluation* di MC

3.7.1.1 Funzione valore $V^\pi(s)$

Poiché la funzione valore $V^\pi(s)$ rappresenta il ritorno atteso nello stato s se, a partire da tale stato, l’agente segue la *policy* π , il modo più immediato per la stima di tale valore (per ciascuno stato) dall’esperienza è quello di mediare i ritorni (cioè l’insieme dei premi opportunamente scontati) osservati a partire da quello stato per ciascuno episodio: maggiore è il numero dei ritorni mediati, migliore sarà l’approssimazione al valore vero atteso. Questa è l’idea di fondo dei metodi MC.

In particolare, se si vuole stimare con MC la $V^\pi(s)$, cioè la funzione valore nello stato s seguendo la *policy* π , si implementano, come detto una lunga serie di episodi.

Ciascuna occorrenza dello stato s in un episodio è detta “visita”. Considerando il singolo episodio, la prima volta che occorre s viene definita “prima visita” di s .

A seconda di come tali “visite” vengono prese in considerazione per il calcolo della $V^\pi(s)$, si hanno due metodi MC:

- 1) *first-visit* MC: quando la stima di $V^\pi(s)$ avviene calcolando il valore medio dei ritorni osservati dopo la prima visita, in un generico episodio, dello stato s (si ha, pertanto, al massimo un ritorno per episodio) ;
- 2) *every-visit* MC: quando la stima di $V^\pi(s)$ avviene calcolando il valore medio dei ritorni osservati a seguito di ciascuna visita dello stato s (in questo caso, pertanto, possono aversi più ritorni per episodio).

Tali metodi, pur avendo proprietà teoriche differenti, presentano un comportamento simile.

Nel seguito, si farà implicito riferimento al *first-visit* MC che, essendo stato introdotto negli anni '40 del XX secolo è stato maggiormente studiato.

Entrambi i metodi, come detto, convergono al valore vero $V^\pi(s)$ quando il numero di “visite” di s , tende all'infinito.

Per il *first-visit* MC ogni ritorno è una stima $\tilde{V}^\pi(s)$ identicamente e indipendentemente distribuita di $V^\pi(s)$: per la legge dei grandi numeri la sequenza di queste stime converge al valore atteso.

Anche se meno immediato da comprendere, anche per il metodo *every-visit* MC le stime convergono al valore atteso (si veda Singh e Sutton, 1996).

Si noti, infine, che, a differenza della DP, i metodi MC non eseguono il *bootstrapping*: cioè le stime per uno stato non si basano sulle stime di altri stati. Così come il costo computazionale della stima di uno stato non dipende dal numero complessivo di stati dell'ambiente: tale proprietà rende i metodi MC particolarmente adatti nel caso in cui è richiesta la valutazione delle funzioni di valore per un sottoinsieme di stati.

3.7.1.2 Funzione azione-valore $Q^\pi(s,a)$

Se il modello completo dell'ambiente non è disponibile, allora è particolarmente utile la stima non della funzione valore ottimale $V^*(s)$, bensì quella della funzione azione-valore ottimale $Q^*(s,a)$. Infatti, si rammenta che la stima delle funzioni valore è funzionale alla determinazione dell'obiettivo finale: cioè l'individuazione della *policy* ottimale. Se è nota la $V^*(s)$, l'azione ottima (facente parte della *policy* ottimale), si sceglie applicando l'equazione di ottimalità di Bellman (3.83). Ma per far questo è necessario conoscere il modello completo dell'ambiente, cioè, in particolare, le funzioni $P_{ss'}^a$ e $R_{ss'}^a$.

I metodi MC, però, sono applicabili anche nel caso di modello dell'ambiente sconosciuto, perché, come già detto, apprendono da esperienze (dirette o simulate mediante modelli matematici semplificati) organizzate per episodi. La stima di $V^*(s)$, per i metodi MC, sarebbe pertanto inutile ai fini della individuazione della *policy* ottimale. In questi casi è quindi utile la stima della $Q^*(s,a)$, da cui è immediato scegliere l'azione ottima nello stato s (essendo quella che semplicemente massimizza la stessa funzione per s fissato).

Ecco perché, nel caso dei metodi MC, assume maggiore importanza la stima della funzione azione-valore $Q^*(s,a)$.

Tale fase di *evaluation*, comunque, non differisce sostanzialmente da quella relativa alla $V^\pi(s)$. Si ricorda, infatti, che $Q^\pi(s,a)$ è il ritorno atteso nello stato s , una volta eseguita l'azione a e, solo da questo punto in poi, seguendo la *policy* π .

Anche in questo caso, l'apprendimento si basa sulla esperienza (diretta o per simulazione) organizzata per episodi. Ed in analogia a quanto visto nel precedente paragrafo, si avrà un metodo *first-visit* ed un altro *every-visit*.

La sola complicazione è che, se π è una *policy* deterministica, molte coppie (s,a) potrebbero non essere mai "visitate", questo perché, posti in un generico stato s , la *policy* sceglierebbe sempre la stessa azione. Così, senza valori da mediare, il metodo non migliorerebbe la stima con il progredire delle esperienze. E' il cosiddetto problema di "mantenimento dell'esplorazione" (*maintaining exploration*).

Un modo per ovviare tale problema, è quello di imporre che la coppia di partenza di ciascun episodio sia scelta in maniera random in modo che tutte le coppie abbiano una probabilità di essere scelte maggiore di zero. Questo garantisce che tutte le coppie vengano visitate infinite volte, se infinito è il numero di episodi considerati. Questo è la cosiddetta *exploring starts*, che, come si può notare, sarebbe comunque impossibile da applicare nel caso di esperienza diretta con l'ambiente.

L'alternativa è quella di utilizzare *policies* non deterministiche, le quali attribuiscono alle azioni di un generico stato probabilità di essere scelte sempre maggiori di zero. In tal modo si risolve il problema di *maintaining exploration*.

3.7.2 La stima della *policy* ottimale con metodi MC

I metodi MC stimano la *policy* ottimale mediante algoritmi che rispettano i principi generali della *Generalized Policy Iteration* (GPI) introdotto per la DP.

L'unica differenza, in questo caso, è che la fase di *evaluation* e di *improvement* (si veda la successiva figura tratta da Sutton e Barto, 2000) sono da applicare in riferimento alla funzione azione-valore $Q(s,a)$, anziché alla $V(s)$:

$$\pi_0 \xrightarrow{\text{E}} Q^{\pi_0} \xrightarrow{\text{I}} \pi_1 \xrightarrow{\text{E}} Q^{\pi_1} \xrightarrow{\text{I}} \pi_2 \xrightarrow{\text{E}} \dots \xrightarrow{\text{I}} \pi^k \xrightarrow{\text{E}} Q^{\pi^k},$$

La fase di *evaluation* stima, al passo k -esimo, il valore vero della Q^{π^k} , generando un infinito numero di episodi mediante *exploring starts*.

La fase di *improvement* determina la nuova (“migliore”) *policy* π_{k+1} , calcolando la *greedy policy* rispetto ai vecchi valori Q^{π_k} assunti dalla funzione azione-valore.

Poiché nel caso dei metodi MC si fa riferimento alla funzione $Q(s,a)$, il calcolo della *greedy policy* π_{k+1} è immediato in quanto non necessita della conoscenza dell’ambiente:

$$\pi_{k+1}(s) = \arg \max_{a \in A(s)} Q^{\pi_k}(s, a) \quad (3.100)$$

Il teorema di *policy improvement* è valido anche in questo caso assicurando la convergenza del metodo alla *policy* ottimale.

Gli unici problemi della stima della *policy* ottimale con metodi MC, come esposti sinora, risiedono nelle due assunzioni di:

- infinito numero di episodi della fase di *evaluation*;
- ed *exploring starts*

difficilmente applicabili in pratica.

La prima assunzione può essere facilmente rimossa mediante due approcci alternativi.

Il primo è quello di “accontentarsi”, in ciascuna fase di *evaluation*, di determinare una funzione azione-valore che sia solo una approssimazione del valore vero della *policy* oggetto di stima: tale approccio individua un numero minimo di episodi necessari per ridurre l’errore atteso di stima in appositi intervalli di confidenza e garantisce la convergenza almeno nei limiti del livello di approssimazione prescelto. Con questo primo approccio, in ogni caso, la singola fase di *improvement* inizia solo quando la fase di *evaluation* (sebbene “approssimata”) è terminata.

Il secondo approccio, invece, richiama più da vicino quanto esposto nel caso della *value iteration* della DP: si rinuncia, cioè, al completamento della fase di *evaluation* prima dell’inizio della fase di *improvement*. Cioè la fase di *evaluation* non è implementata (effettuando infinite iterazioni) sino al raggiungimento del valore vero di Q^{π_k} bensì, bloccandosi prima, non può far altro che “tendere” al valore vero Q^{π_k} (la suddetta *value iteration*, in realtà, era un caso estremo, in quanto riservava alla fase di valutazione una sola iterazione).

Uno dei più semplici algoritmi MC di calcolo della *policy* ottimale è il cosiddetto *Monte Carlo ES* (ES è l’acronimo di *Exploring Starts*) che si basa proprio sul secondo approccio appena illustrato, attribuendo una sola iterazione alla fase di *evaluation*.

Algoritmo Monte Carlo ES

- A. Si inizializza arbitrariamente per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$ la $Q(s,a)$;
- B. si inizializza arbitrariamente per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$ una *policy* $\pi(s,a)$;
- C. si genera, per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$, un *array* dinamico vuoto $Returns(s,a)$;
- D. Si ripetono indefinitamente le seguenti operazioni:
 - D.1. Generazione di un episodio usando la tecnica *exploring starts* e la *policy* $\pi(s,a)$;
 - D.2. Per ciascuna coppia (s,a) visitata dall'episodio si effettuano le seguenti operazioni:
 - D.2.1. si calcola $R(s,a)$ (ritorno che segue la prima "visita" di (s,a));
 - D.2.2. si aggiunge $R(s,a)$ all'*array* dinamico $Returns(s,a)$;
 - D.2.3. si aggiorna $Q(s,a)$ mediante la regola $Q(s,a) \leftarrow \text{media}[Returns(s)]$;
 - D.3. per ogni s raggiunto dall'episodio:
 - D.3.1. $\pi(s) \leftarrow \underset{a}{\text{arg max}} Q(s,a)$

Come si vede, alla fine del singolo episodio, si aggiorna la $Q(s,a)$ una volta sola (punto D.2.3): subito dopo (punto D.3) v'è già la fase di *improvement* che determina la *policy greedy*

3.7.2.1 La rimozione dell'assunzione *exploring starts* nei metodi MC: metodi *on-policy* e *off-policy*

Come già detto, l'assunzione *exploring starts* (necessaria per garantire l'esplorazione di tutte le coppie (s,a) di cui si vuole la stima della funzione azione-valore) è di impraticabile applicazione.

E' necessario, pertanto, individuare approcci alternativi che risolvano il problema.

Fra questi, nel prosieguo si esamineranno i metodi:

- *on-policy*;
- *off-policy*.

3.7.2.1.1 Metodi *on-policy*

In tali metodi, la *policy* è *soft*.

Per *soft policies* si intendono tutte quelle *policies* tali che: $\pi(s,a) > 0 \forall s \in S, a \in A(s)$, cioè *policies* per cui, posti nello stato s , la probabilità di scegliere una qualunque azione fra quelle possibili per s ,

è sempre strettamente maggiore di zero, garantendo in tal modo che, sia nella fase di *evaluation* sia in quella di *improvement*, tutte le coppie (s,a) vengano “visitate” nei diversi episodi considerati.

Esistono diversi tipi di *soft-policy*.

In questa sede, i metodi *on-policy* usano *soft-policies* cosiddette ε -*greedy*.

Le ε -*greedy policies*, cioè, sono *soft-policies*, che, con probabilità pari a ε suggeriscono all’agente di compiere una qualunque delle azioni possibili in quello stato, mentre con una certa probabilità (dipendente da ε stessa, nel modo che si vedrà appresso) suggeriscono all’agente di compiere l’azione (detta “azione *greedy*”) che ha il massimo valore (stimato) di $Q(s,a)$.

Da tale definizione segue che la probabilità di scegliere una qualunque delle azioni possibili *non-greedy*, per lo stato in esame è pari a:

$$\frac{\varepsilon}{|A(s)|} \quad (3.101)$$

essendo $|A(s)|$ il numero complessivo di azioni possibili nello stato s , mentre la probabilità di scegliere l’azione *greedy*, risulta essere pari a:

$$1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A(s)|} \quad (3.102)$$

Se si assume per ε un valore molto piccolo, le ε -*greedy policies* suggeriscono all’agente di scegliere con grande probabilità l’azione *greedy*, mentre con bassa probabilità tutte le altre azioni (fra le altre azioni è compresa, si noti bene, anche l’azione *greedy*).

Se, ad esempio, si ha un ambiente con numero di azioni possibili, per un generico stato s , pari a 10 e si assume $\varepsilon = 0,05$ (cioè $\varepsilon = 5\%$), la ε -*greedy policy* sceglierà, con probabilità pari allo 0,5%, (risultando $0,05 / 10 = 0,005$) una qualunque delle 9 azioni *non-greedy* (e quindi l’insieme delle azioni *non-greedy* ha la probabilità di essere scelto pari a $0,005 \cdot 9 = 0,045$ cioè il 4,5%) mentre sceglierà con probabilità pari al 95,5% l’azione *greedy*.

Per chiarire meglio la cornice teorica di riferimento, si aggiunga che fra le *soft policy* possibili v’è una tipologia definita come ε -*soft policies*, definite come quelle *policies* per cui $\pi(s,a) \geq \frac{\varepsilon}{|A(s)|}$.

Ebbene le ε -*greedy policies* sono esempi di ε -*soft policies*.

Anzi, si può affermare che tra le ε -soft policies le ε -greedy policies sono quelle che maggiormente si avvicinano alle policies greedy (le quali scelgono deterministicamente (quindi con probabilità 100%, cioè sempre) l'azione greedy).

Si può inoltre dimostrare che il teorema di policy improvement vale anche per soft-policies: data una qualunque ε -soft policy π , la ε -greedy policy π' ricavata rispetto a Q^π è migliore di π .

Algoritmo per la stima della policy ottimale mediante metodo MC on-policy

L'idea di fondo dei metodi MC detti on-policy è ancora quella dell'alternanza di fasi di evaluation e improvement esposta dalla Generalized Policy Iteration (GPI).

- A. Si inizializza arbitrariamente per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$ la $Q(s,a)$;
- B. si inizializza arbitrariamente per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$ una ε -soft policy $\pi(s,a)$;
- C. si genera, per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$, un array dinamico vuoto $Returns(s,a)$;
- D. Si ripetono indefinitamente le seguenti operazioni:
 - D.1. Generazione di un episodio usando la policy $\pi(s,a)$;
 - D.2. Per ciascuna coppia (s,a) visitata dall'episodio si effettuano le seguenti operazioni:
 - D.2.1. si calcola $R(s,a)$ (ritorno che segue la prima "visita" di (s,a));
 - D.2.2. si aggiunge $R(s,a)$ all'array dinamico $Returns(s,a)$;
 - D.2.3. si aggiorna $Q(s,a)$ mediante la regola $Q(s,a) \leftarrow \text{media}[Returns(s)]$;
 - D.3. per ogni s raggiunto dall'episodio:
 - D.3.1. $a^* = \arg \max_a Q(s,a)$

$$D.3.2. \text{ per tutti le azioni } a \in A(s): \pi(s,a) = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A(s)|} & \text{se } a = a^* \\ \frac{\varepsilon}{|A(s)|} & \text{se } a \neq a^* \end{cases}$$

L'algoritmo MC on-policy per il calcolo della policy ottimale, parte dalla inizializzazione di una policy iniziale arbitraria di tipo soft, con la quale si genera un episodio.

Alla fine dell'episodio, la fase di evaluation si implementa (troncandola al primo passo di iterazione) usando i metodi MC del tipo first-visit (punto D.2.3).

Subito dopo (punto D.3) si migliora la policy di partenza.

Si usa tale nuova policy π' per generare un altro episodio, e così via.

Come si vede, episodio per episodio, si passa da una generica *soft policy* iniziale ad una ε -greedy *policy* via via “migliore”, sino al raggiungimento della *policy* ottimale.

Si chiama metodo *on-policy*, perché le fasi di *evaluation* e *improvement* si implementano sulla *policy* che ha generato l’episodio.

Si segnala, infine, che tra le *policies* capaci di controbilanciare le esigenze di esplorazione e sfruttamento (problema di *exploration/exploitation*), v’è anche la cosiddetta *policy softmax*. Tale *policy* ovvia una particolare proprietà delle *policies* ε -greedy ed ε -soft in generale: quando queste, infatti, esplorano (cioè quando non scelgono l’azione *greedy*), operano una scelta random uniforme, potendo pertanto suggerire all’agente, con eguale probabilità, di eseguire tanto l’azione peggiore quanto quella più vicina alla migliore: nel caso in cui vi siano azioni molto peggiori delle altre, tale proprietà risulta essere un fastidioso inconveniente.

La *policy softmax*, invece, assegna un grado (o peso) di preferenza a ciascuna azione possibile, in accordo con la funzione azione-valore stimata. L’azione è scelta in maniera random con riferimento però, al grado associato all’azione stessa: ciò significa che l’azione peggiore è scelta molto raramente.

La *policy softmax* più comune usa la distribuzione di *Gibbs*, o di *Boltzmann*, la quale sceglie l’azione a al tempo t con probabilità data da:

$$\frac{e^{Q_t(a)/\tau}}{\sum_{b=1}^n e^{Q_t(b)/\tau}} \quad (3.103)$$

dove τ è un parametro detto “temperatura”: se esso è alto la distribuzione tende all’equiprobabilità; mentre se è basso le differenze di probabilità di scelta aumentano.

3.7.2.1.2 Metodi *off-policy*

Nel precedente paragrafo sono stati esposti i metodi cosiddetti *on-policy*: come detto essi stimano e migliorano la funzione azione-valore della stessa *policy* usata per generare gli episodi necessari per l’implementazione del metodo.

Si supponga, invece, di avere a disposizione solo episodi generati da una policy π' , diversa da quella π per la quale vogliamo effettuare la stima (ed il successivo miglioramento) delle funzioni V^π e/o $Q^\pi(s,a)$.

E' possibile apprendere (e conseguentemente migliorare) il valore delle funzioni suddette (relative alla policy π), anche nel caso in cui siano implementate esperienze generate *off-policy*, cioè al di fuori della policy oggetto di valutazione?

La risposta è affermativa.

Si supponga, infatti, di generare un gran numero di episodi dalla policy π' .

Si supponga, inoltre, che in tutti questi episodi, le "prime visite" del generico stato s siano in numero complessivo pari a n_s .

A seguito della i -esima "prima visita" ($i = 1, 2, \dots, n_s$), si verificherà una ben determinata sequenza di stati e azioni, la cui probabilità di accadimento si indica con $p_i^{\pi'}(s)$. Inoltre a questa sequenza è associato un ritorno osservato $R_i^{\pi'}(s)$.

Se si vogliono utilizzare gli n_s valori $R_i^{\pi'}(s)$ per calcolare $V^\pi(s)$, è necessario fare una media pesata

di tali valori, con pesi costituiti dal rapporto $\frac{p_i^\pi(s)}{p_i^{\pi'}(s)}$:

$$V^\pi(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \frac{p_i^\pi(s)}{p_i^{\pi'}(s)} \cdot R_i^{\pi'}(s)}{\sum_{i=1}^{n_s} \frac{p_i^\pi(s)}{p_i^{\pi'}(s)}} \quad (3.104)$$

dove con $p_i^\pi(s)$ si indica la probabilità di accadimento di quella sequenza di stati e azioni a partire da s , seguendo però la policy di cui si vuole la stima.

I due termini di probabilità appena introdotti, nei metodi Monte Carlo (dove non v'è perfetta conoscenza dell'ambiente), ovviamente non sono noti.

Ma dalla (3.104) emerge che ciò che interessa è il loro rapporto che, invece, può essere calcolato anche a prescindere dalla conoscenza delle dinamiche d'ambiente.

Se si indica con t il tempo in cui si incontra per la prima volta nell'episodio lo stato s e $T_i^{\pi'}(s)$ il tempo in cui termina l' i -esimo episodio che coinvolge lo stato s , si ha:

$$p_i^{\pi'}(s) = \prod_{j=t}^{T_i^{\pi'}(s)} \pi'(s_j, a_j) \cdot P_{s_j s_{j+1}}^{a_j} \quad (3.105)$$

quindi si avrà:

$$\frac{p_i^{\pi}(s)}{p_i^{\pi'}(s)} = \frac{\prod_{j=t}^{T_i^{\pi}(s)} \pi(s_j, a_j) \cdot P_{s_j s_{j+1}}^{a_j}}{\prod_{j=t}^{T_i^{\pi'}(s)} \pi'(s_j, a_j) \cdot P_{s_j s_{j+1}}^{a_j}} = \prod_{j=t}^{T_i^{\pi'}(s)} \frac{\pi(s_j, a_j)}{\pi'(s_j, a_j)} \quad (3.106)$$

Quindi, il peso $\frac{p_i^{\pi}(s)}{p_i^{\pi'}(s)}$, necessario nel calcolo della (3.104) non dipende dalle dinamiche dell'ambiente, ma solo dalle *policy* che si stanno considerando.

In particolare, si noti che la *policy* che si vuole stimare (e migliorare) è la cosiddetta *estimation policy* (nel caso precedente è stata indicata con π). Mentre la *policy* che genera gli episodi è detta *behavior policy*, cioè, letteralmente la *policy* “comportamentale”.

Nei metodi MC del tipo *off-policy*, quindi, le due funzioni, di stima/miglioramento e comportamentali sono effettuate da *policies* differenti.

Un vantaggio è che la *policy* da stimare/migliorare (*estimation policy*) potrebbe essere deterministica, mentre quella che genera il comportamento (cioè gli episodi) continua a scegliere tutte le possibili azioni in maniera stocastica, in modo da risolvere il problema di *maintaining exploration*.

In sostanza, è necessario che la *policy* π' che genera il comportamento sia *soft*.

La *estimation policy* π , invece, è la *greedy policy* (deterministica) rispetto alla Q^{π} .

Come nel caso *on-policy*, un qualunque algoritmo *off-policy* segue il principio dell'alternanza delle fasi di *evaluation* e *improvement* introdotti nella *Generalized Policy Iteration* (GPI).

3.7.3 Formulazione “incrementale” dei metodi MC

I metodi Monte Carlo, come visto in precedenza, aggiornano le stime della funzione azione-valore nello stato s , alla fine di ciascun episodio, quando è ormai noto il ritorno osservato nell'episodio a seguito della “prima visita” in s .

Se, ad esempio, per s , dopo un certo numero di episodi N_e , sono disponibili n (con $n \leq N_e$) valori di “ritorno osservati” R_j ($j = 1, 2, \dots, n$) la media pesata V_n può essere calcolata volta per volta con una semplice media aritmetica:

$$V_n = \frac{\sum_{j=1}^n R_j}{n} \quad (3.107)$$

o con una media pesata:

$$V_n = \frac{\sum_{j=1}^n w_j \cdot R_j}{\sum_{j=1}^n w_j} \quad (3.108)$$

dove i vari w_j sono coefficienti con cui pesare i vari ritorni osservati.

Se è disponibile al momento attuale un nuovo ritorno R_{n+1} , la nuova stima V_{n+1} può essere calcolata rispettivamente con la relazione:

$$V_{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} R_j}{n+1} \quad (3.109)$$

nel caso di media aritmetica, mentre con:

$$V_{n+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} w_j \cdot R_j}{\sum_{j=1}^{n+1} w_j} \quad (3.110)$$

nel caso di media pesata.

L'applicazione della (3.109) o (3.110) però è onerosa da un punto di vista computazionale a causa del fatto che è necessario mantenere in memoria gli n ritorni precedentemente osservati e gli n pesi relativi: al crescere del tempo le capacità di memoria necessarie crescono indefinitamente.

Si può agevolmente dimostrare, però, che la nuova media V_{n+1} può essere calcolata, sia nel caso di media aritmetica sia di quella pesata, mediante la regola di aggiornamento incrementale:

$$V_{n+1} = V_n + \alpha \cdot (R_{n+1} - V_n) \quad (3.111)$$

Dove α è un opportuno coefficiente, detto “tasso di apprendimento” (*learning rate*) che nel caso di media aritmetica assume il valore $\alpha = \frac{1}{n}$, mentre nel caso della media pesata $\alpha = \frac{w_{n+1}}{\sum_{j=1}^{n+1} w_j}$.

La relazione (3.111) è di evidente agevole applicazione, dovendo mantenere in memoria, ai fini de calcolo dell’aggiornamento, due soli numeri: la “vecchia” media V_n ed il parametro α (nel caso di media aritmetica significa mantenere in memoria solo il numero di ritorni osservati sino a quel momento, mentre nel caso di media pesata, semplicemente, la somma dei pesi).

Si noti che la (3.111) può essere anche espressa come:

$$V_{n+1} - V_n = \alpha \cdot (R_{n+1} - V_n) \quad (3.112)$$

cioè come:

$$\Delta V_{n+1} = \alpha \cdot (R_{n+1} - V_n) \quad (3.113)$$

dove con ΔV_{n+1} si indica l’incremento da attribuire alla vecchia stima V_n per giungere alla nuova stima V_{n+1} : ecco perché il titolo di questo paragrafo parla di formulazione “incrementale” dei metodi MC.

Grande importanza, ai fini della convergenza (del metodo incrementale) al valore vero della funzione valore da stimare, assume il valore da attribuire al parametro α .

Esso può essere, come nei casi appena descritti (media aritmetica e pesata dei ritorni), variabile da occorrenza ad occorrenza, ma potrebbe anche essere costante (comunque $0 \leq \alpha \leq 1$): quest’ultima possibilità è da imporre in caso di problemi non-stazionari (che sono la maggior parte di quelli che si possono incontrare nella realtà).

Ma imporre α costante cosa significa? Cioè, prima si è imposta la regola di aggiornamento (media aritmetica e pesata) e si è ricavato l’andamento di α (che è risultato essere variabile nel tempo). Ora,

invece, trattasi del problema inverso: con α costante (fissato a priori) che tipo di aggiornamento si sta considerando?

Questo può essere dimostrato agevolmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } V_n = V_{n-1} + \alpha \cdot [R_n - V_{n-1}] \\ \text{allora sar\`a: } V_n = \alpha \cdot R_n + (1 - \alpha) \cdot V_{n-1} \\ \text{quindi sar\`a: } V_n = \alpha \cdot R_n + (1 - \alpha) \cdot R_{n-1} + (1 - \alpha)^2 \cdot V_{n-2} \\ \text{cio\`e: } V_n = \alpha \cdot R_n + (1 - \alpha) \cdot R_{n-1} + (1 - \alpha)^2 \cdot V_{n-2} + \dots + (1 - \alpha)^{n-1} \cdot \alpha \cdot R_1 + (1 - \alpha)^n \cdot V_0 \\ \text{che, compattando i termini, equivale a:} \end{array} \right.$$

$$V_n = (1 - \alpha)^n \cdot V_0 + \sum_{i=1}^n \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-i} \cdot R_i \quad (3.114)$$

Ricapitolando: mentre nei metodi incrementali, imporre α variabile come $\alpha = \frac{1}{n}$ oppure $\alpha = \frac{w_{n+1}}{\sum_{j=1}^{n+1} w_j}$

significa aggiornare la funzione valore effettuando, rispettivamente, la media aritmetica e pesata (con pesi w_n) dei ritorni R_i , imporre $\alpha = cost$ significa aggiornare la funzione valore effettuando la media pesata dei ritorni R_i e del valore iniziale V_0 . Infatti, nella (3.114), essendo $(1 - \alpha)^n$ il peso di V_0 e $\alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-i}$ i pesi di R_i , si può verificare che $(1 - \alpha)^n + \sum_{i=1}^n \alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-i}$ è pari ad 1 (quindi la (3.114) è una media pesata).

In particolare, essendo i pesi dei ritorni pari a $\alpha \cdot (1 - \alpha)^{n-i}$ ed essendo $(1 - \alpha) \leq 1$, assumere α costante significa pesare maggiormente i ritorni piú recenti e, man mano che n cresce, sempre meno la stima iniziale V_0 .

Un semplice metodo incrementale MC (per la *evaluation*) del tipo *every-visit* è il cosiddetto “*constant- α MC*”, dato da:

$$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \cdot [R - V(s)] \quad (3.115)$$

in cui α è un parametro di *step-size* assunto costante.

3.7.3.1 Convergenza della formulazione incrementale

Dalla teoria della approssimazioni stocastiche, la convergenza della (3.111) al valore vero è assicurata con probabilità pari ad 1, solo quando la sequenza dei coefficienti α rispetta le seguenti condizioni:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = \infty \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty \quad (3.116)$$

Si noti che la sequenza $\alpha = \frac{1}{n}$, rispetta entrambe le condizioni, mentre $\alpha = \text{cost}$ no (in particolare la seconda delle (3.115)): questo significa che le stime potrebbero non convergere continuando a variare in risposta ai più recenti ritorni conseguiti: e come appare evidente, questo è un comportamento auspicabile proprio in ambienti non-stazionari, come già anticipato all'inizio del paragrafo 3.7.3.

3.8 Algoritmi *temporal-difference* (TD)

Gli algoritmi TD possono essere considerati come una combinazione fra i metodi MC e quelli della DP.

Come i metodi MC, gli algoritmi TD apprendono la *policy* ottima dall'esperienza (sia essa diretta o simulata mediante modello matematico) senza che sia necessaria, pertanto, la perfetta conoscenza delle dinamiche d'ambiente. Come la DP, invece, gli algoritmi TD eseguono il *bootstrapping*, cioè aggiornano le stime delle funzioni valore sulla base di altre stime.

Come per gli altri metodi RL, anche in questo paragrafo si suddividerà l'esposizione fra i due problemi di base: quello di *evaluation*, cioè la stima delle funzioni di valore V^π e/o $Q^\pi(s,a)$ corrispondenti alla *policy* π , e quella di stima della *policy* ottimale. Si noti come quest'ultimo sia ancora una volta affrontato sulla base dell *Generalized Policy Iteration* (GPI).

3.8.1 Problema di *evaluation* mediante metodi TD

Come anticipato, gli algoritmi TD, al pari dei metodi MC, usano l'esperienza per la risoluzione del problema di *evaluation*.

Nel paragrafo precedente, si è visto come i metodi MC aggiornino la funzione valore di un generico stato s solo al termine dell'episodio che ha "coinvolto" s , dopo, cioè, che è stato osservato il ritorno complessivo R che ha seguito lo stato in esame. Un semplice metodo di *evaluation* MC del tipo *every-visit* è il cosiddetto "*constant- α MC*", già incontrato nel precedente paragrafo (formula (3.115)) e che qui si riporta per comodità d'esposizione:

$$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \cdot [R - V(s)] \quad (3.115)$$

in cui α è il parametro di apprendimento assunto costante.

Gli algoritmi TD, come detto, eseguono, al pari della DP, il *bootstrapping*, ma mentre la DP calcola (si veda l'equazione (3.93)) la nuova stima di V o Q come media dei termini $(r + \gamma V)$ di tutti i possibili stati successivi, gli algoritmi TD usano un solo stato successore, e cioè un solo termine $(r + \gamma V)$, effettuandone la media pesata con la propria vecchia stima, con pesi costituiti proprio dal coefficiente d'apprendimento α :

$$V_{k+1}(s) = (1 - \alpha) \cdot V_k(s) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot V_k(s')] \quad (3.116)$$

questo implica che:

$$V_{k+1}(s) = V_k(s) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot V_k(s') - V_k(s)] \quad (3.117)$$

cioè si ritorna alla forma incrementale simile alla (3.113):

$$\Delta V_{k+1} = \alpha \cdot [r + \gamma \cdot V_k(s') - V_k(s)] \quad (3.118)$$

in cui il termine $[r + \gamma \cdot V_k(s') - V_k(s)]$ è detto proprio *temporal difference* (dando perciò il nome al metodo).

Più in generale, quindi, si può affermare che i metodi *evaluation* TD (come gli MC) sono incrementali e che proprio “l’incrementalità” permette l’uso di una regola d’aggiornamento di carattere generale del tipo:

$$\text{correzione di stima} \leftarrow \alpha \cdot [\text{target} - \text{vecchia stima}]$$

dove:

- nel caso MC il *target* è costituito dal ritorno al termine dell’episodio;
- nel caso TD il *target* è costituito dal termine $(r + \gamma V)$ relativo ad un solo stato successore (campione).

Si noti, che mentre i metodi *evaluation* della DP sono *full backup* (perché, si veda ancora l’equazione (3.93), l’aggiornamento di V avviene dopo avere fatto una copia, cioè un *back up*, di tutti i possibili stati successivi) quelli MC e TD sono *sample backup*, in quanto l’aggiornamento della funzione valore avviene usando uno solo dei possibili stati successivi, cioè usando uno stato successore “campione”.

Inoltre, mentre i metodi MC devono attendere la fine dell’episodio prima dell’aggiornamento della funzione valore (perché, come detto, solo allora R è noto), i metodi TD necessitano di un’attesa che si limita al successivo *step* temporale: cioè, già all’istante di tempo successivo, si “creano” le condizioni per l’aggiornamento della funzione valore.

Ad esempio, il più semplice metodo TD, noto come metodo TD(0), è dato dalla regola di aggiornamento:

$$V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot V(s') - V(s)] \quad (3.119)$$

Dove con r si indica il premio immediato ottenuto dall’agente quando, partendo dallo stato s , esegue l’azione a “suggerita” dalla *policy* $\pi(s,a)$ che si vuole stimare (a seguito di tali scelte l’ambiente passa poi nello stato successore s').

L’algoritmo completo TD(0) è il seguente:

Nota la *policy* $\pi(s,a)$ da valutare,

A. Si inizializza arbitrariamente la funzione valore $V(s)$.

B. Per ciascun episodio generato si ripetono le seguenti operazioni:

- B.1. si sceglie lo stato iniziale s dell'episodio;
- B.2. si sceglie l'azione a da compiere nello stato s , sulla base della *policy* $\pi(s,a)$;
- B.3. si osserva il premio r e lo stato successore s' ;
- B.4. si applica la regola di aggiornamento $V(s) \leftarrow V(s) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot V(s') - V(s)]$;
- B.5. si assume $s = s'$;
- B.6. si ripetono i punti da B.2 a B.5 sino a quando si raggiunge lo stato terminale dell'episodio.

Per qualunque fissata *policy* π , l'algoritmo TD(0) appena descritto, è stato dimostrato convergere a V^π in media se α è costante e sufficientemente piccolo, e con probabilità 1 se α decresce secondo le condizioni di approssimazione stocastiche (3.116).

Aperta, inoltre, rimane la questione relativa alla velocità di convergenza. I metodi MC e TD convergono asintoticamente alla stima corretta, ma quale dei metodi apprende più velocemente?

Allo stato attuale, non v'è nessuna prova matematica che un metodo sia più veloce di un altro.

3.8.2 Gli algoritmi TD per la stima delle *policy* ottimali

Come esposto per i metodi MC, anche gli algoritmi TD seguono il modello generale denominato *Generalized Iteration Policy* (GPI) per giungere alla stima della *policy* ottimale: l'unica differenza, ovviamente, è che negli algoritmi TD la fase di *evaluation* è implementata mediante metodi TD come il TD(0) introdotto in precedenza.

E così come esposto sempre per i metodi MC, anche con gli algoritmi TD è necessario controbilanciare le esigenze di esplorazione di nuove possibilità (cioè di nuove azioni suscettibili di essere ottimali) allo sfruttamento dei risultati già acquisiti. Si ricade, quindi, nuovamente nelle due classi di metodi già introdotti in precedenza: metodi *on-policy* e *off-policy*.

Tra i primi verrà analizzato il metodo denominato *SARSA*.

Tra i secondi si analizzerà il metodo che verrà poi applicato per la ottimizzazione della gestione del sistema di invasi oggetto della presente tesi: il metodo *Q-Learning*.

Si noti che entrambi gli algoritmi concentrano la loro attenzione sulla stima della funzione azione valore Q^* : nel caso in cui si conoscesse solo la V^* , infatti, sarebbe impossibile risalire alla *policy* ottimale π^* proprio a causa del fatto che gli algoritmi TD non necessitano della conoscenza perfetta del modello d'ambiente che, invece, è indispensabile per ricavare π^* una volta nota la V^* .

3.8.2.1 Metodo TD *on-policy*: il *SARSA*

Il metodo *SARSA* (State Action Reward State Action) si basa sulla fase di *evaluation* della funzione azione-valore $Q^\pi(s,a)$ corrispondente alla *policy* comportamentale π per ciascuna coppia possibile (s,a) stato-azione (si ricorda che per “*policy* comportamentale” si intende la *policy* che genera gli episodi necessari per l’implementazione del metodo).

Tale fase viene implementata mediante un algoritmo del tutto simile al TD(0) introdotto in precedenza per la stima di V^π :

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot Q(s',a') - Q(s,a)] \quad (3.120)$$

Questa regola di aggiornamento usa una quintupla di eventi, cioè: s, a, r, s', a' che definiscono la transizione da una coppia stato-azione alla successiva. La quintupla suddetta spiega la sigla *SARSA* attribuita al metodo in esame.

A questo punto, “costruire” un metodo di stima della *policy* ottimale (che sia *on-policy*) sulla base del metodo *evaluation SARSA* appena introdotto è semplice.

Algoritmo *on-policy SARSA*:

- A. Si inizializza arbitrariamente la funzione azione valore $Q(s,a)$.
- B. Per ciascun episodio generato si ripetono le seguenti operazioni:
 - B.1. si sceglie lo stato iniziale s ;
 - B.2. si sceglie l’azione a da compiere nello stato s , sulla base di una *policy* derivata da Q (ad esempio la *policy* che sia ϵ -greedy sulla Q);
 - B.3. si osserva il premio r e lo stato successivo s' ;
 - B.4. si sceglie l’azione a' nello stato s' , sulla base di una *policy* derivata da Q (ad esempio la *policy* che sia ϵ -greedy sulla Q);
 - B.5. si applica la regola di aggiornamento $Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \cdot [r + \gamma \cdot Q(s',a') - Q(s,a)]$;
 - B.6. si assume $s = s'$;
 - B.7. si assume $a = a'$;
 - B.8. si ripetono i punti da B.3 a B.7 sino a quando si raggiunge lo stato terminale dell’episodio.

Nel punto B.2 v’è la generazione dell’episodio (in s si compie l’azione a) e si individua la coppia (s,a) da aggiornare: la *policy* che effettua tale passo, cioè la *policy* comportamentale, è quella ϵ -greedy sulla Q .

Nel punto B.5, invece, v'è la fase di *evaluation* vera e propria.

Il *SARSA* non giunge, a rigore, alla stima della *policy* ottimale, essendo votata alla “semplice” stima della funzione azione-valore che genera gli episodi.

In realtà, probabilmente (il risultato che si sta esponendo non è stato ancora pubblicato nella letteratura scientifica) l'algoritmo converge con probabilità 1 alla *policy* ottimale (e alla relativa funzione azione-valore ottimale) visitando tutte le coppie azione-valore un infinito numero di volte e modificando gradualmente la *policy* usata per la generazione degli episodi facendola convergere al limite alla *policy greedy*: ad esempio questo potrebbe essere ottenuto con una ε -*greedy policy* il cui valore del parametro ε sia variabile in funzione del numero di episodi considerati, in particolare diminuendo con il progredire delle generazioni di episodi; ad esempio se N_e è il numero totale di episodi generati, il valore del parametro ε all'episodio i ($i = 1, 2, \dots, N_e$) è: $\varepsilon(i) = 1/i$.

3.8.2.2 Metodo *TD off-policy*: il *Q-Learning*

Lo sviluppo di un metodo TD off-policy ha portato all'introduzione dell'algoritmo detto *Q-Learning* (Watkins, 1989).

La sua forma più semplice e diffusa (*Q-Learning* ad uno step) è data dalla seguente regola di aggiornamento:

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q(s',a') - Q(s,a) \right] \quad (3.121)$$

In questo caso la funzione azione-valore Q appresa, approssima direttamente il suo valore ottimale Q^* , a prescindere da quale *policy* (comportamentale) si sta seguendo per la generazione degli episodi.

Algoritmo off-policy *Q-Learning*:

- A. Si inizializza arbitrariamente per ogni $s \in S$ e $a \in A(s)$ la funzione azione-valore $Q(s,a)$;
- B. Per ciascun episodio generato si ripetono le seguenti operazioni:
 - B.1. si sceglie lo stato iniziale s ;
 - B.2. si sceglie l'azione a da compiere nello stato s , sulla base di una *policy* derivata da Q (ad esempio la *policy* che sia ε -*greedy* sulla Q);

B.3. si osserva il premio r e lo stato successivo s' ;

B.4. si applica la regola di aggiornamento $Q(s, a) \leftarrow Q(s, a) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q(s', a') - Q(s, a) \right]$;

B.5. si assume $s = s'$;

B.6. si ripetono i punti da B.2 a B.5 sino a quando si raggiunge lo stato terminale dell'episodio.

Come si vede, la *policy* che genera gli episodi (*policy* comportamentale) è una *policy* ϵ -greedy, mentre la valutazione/miglioramento della funzione azione-valore si ottiene mediante una *policy* greedy, infatti nella (3.121) l'azione a' scelta al passo successivo s' , è quella che massimizza la funzione azione-valore Q nello stato s' .

Si dimostra che il metodo Q-Learning, converge con probabilità 1 alla *policy* ottimale Q^* .

Si noti che, nel caso di ambiente stagionale (ad esempio: mensile), l'algoritmo prevede la stima di 12 funzioni azione-valore, da determinare mediante la regola di aggiornamento:

$$Q_t(s_t, a_t) \leftarrow Q_t(s_t, a_t) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a_{t+1} \in A(s_{t+1})} Q_{t+1}(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_t(s_t, a_t) \right] \quad (3.122)$$

la quale, come si può osservare, prevede che la nuova stima $Q_t(s_t, a_t)$ della funzione di valore Q alla stagione (mese) t per la coppia (s_t, a_t) , dipenda anche dalla (precedente) stima di Q alla stagione (mese) $t+1$ nello stato successore (s_{t+1}, a_{t+1}) .

3.9 Quadro riepilogativo degli algoritmi RL

A conclusione si riporta un quadro riepilogativo delle principali proprietà dei metodi RL esaminati:

METODO	Conoscenza dell'ambiente	Proprietà incrementale	Bootstrapping	Tipo di aggiornamento
Dynamic Programming	PERFETTA	NO	SI	FULL BACKUP
Monte Carlo	NESSUNA CONOSCENZA	SI (per episodi)	NO	SAMPLE BACKUP
Temporal Difference	NESSUNA CONOSCENZA	SI (per singolo intervallo temporale)	SI	SAMPLE BACKUP

Tabella 3.1 – Quadro riepilogativo delle caratteristiche principali dei metodi RL

3.10 Programmazione Multiobiettivo

Il problema della ottimizzazione vincolata multi obiettivo può essere formulato nel seguente modo (Bazaraa et al., 1979; Miettinen, 2004):

$$\min \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T \right\} \quad \text{con } k \geq 2 \quad (3.123)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

cioè la minimizzazione del vettore di funzioni $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, sottoposto al sistema di vincoli definito dal vettore di funzioni $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

In particolare, le funzioni $f_i(\mathbf{x})$ (con $i = 1, 2, \dots, k$) all'interno della parentesi quadrata, sono tali che:

$$f_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$$

cioè sono tutte funzioni scalari.

Si ha pertanto che:

$$\mathbf{f} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^k \quad (\text{con } k \geq 2)$$

La funzione $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ rappresenta gli m vincoli del problema ed è tale che:

$$\mathbf{g} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

Cioè, quella che si vuole effettuare è la ricerca del minimo di un vettore di funzioni: il problema è che nello spazio delle k -uple di numeri reali non esiste nessun ordinamento *totale* (cioè nello spazio \mathfrak{R}^k non esiste nessuna relazione binaria fra gli elementi dello spazio stesso, che sia riflessiva, antisimmetrica, transitiva e totale); d'altra parte esistono molteplici modi di definire un ordinamento *parziale* tra le suddette k -uple: ciascuno d'essi induce una differente definizione di ottimalità. Nel prosieguo sarà analizzato uno di tali ordinamenti parziali.

Lo spazio delle variabili di decisione del problema (3.123) è \mathfrak{R}^n .

Lo spazio degli obiettivi del problema, invece, è \mathfrak{R}^k .

La regione ammissibile del problema, definita dai vincoli $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, si indicherà con F . Essa è tale che:

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$$

Ovviamente sarà $F \subset \mathfrak{R}^n$. Quindi un vettore $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^k$ di variabili decisionali è ammissibile se $\mathbf{x} \in F \subset \mathfrak{R}^n$.

L'immagine della regione ammissibile F è $Z = \mathbf{f}(F)$. Essa è tale che:

$$Z = \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^k ; \exists \mathbf{x} \in F, \mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

Un vettore $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^k$ di obiettivi è ammissibile se $\mathbf{z} \in Z \subset \mathfrak{R}^k$.

Per una più chiara comprensione dei concetti sin'ora esposti si faccia riferimento alla figura successiva, che mostra in forma grafica gli spazi (anche ammissibili) delle variabili decisionali e degli obiettivi per un generico problema di ottimizzazione a 2 obiettivi ($k=2$), dove $f_i : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ ($i = 1, 2$):

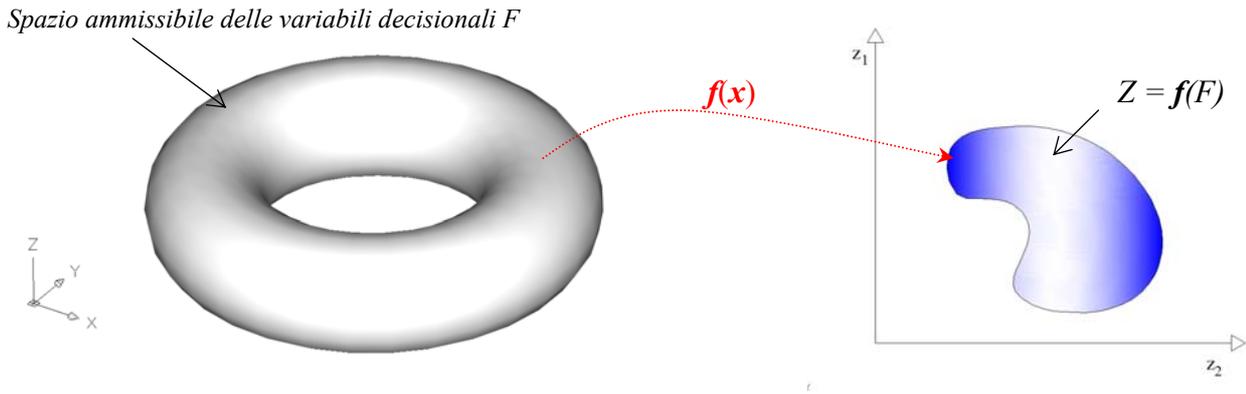


Figura 3.13 – Spazi delle variabili decisionali e degli obiettivi

Si noti che, introdotta la lagrangiana L e gli m parametri $\lambda = \lambda_i$:

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)] + [\lambda_1 \cdot g_1(x) + \lambda_2 \cdot g_2(x) + \dots + \lambda_m \cdot g_m(x)] \quad (3.124)$$

al problema multi obiettivo si potranno estendere le classiche condizioni di ottimalità KKT del primo ordine (si veda paragrafo 3.3.2).

Si definisce vettore ideale \mathbf{z}^{id} degli obiettivi, il vettore di componenti:

$$z_i^{id} = \min_{\mathbf{x} \in F} f_i(\mathbf{x}) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, k$$

cioè il vettore la cui i -esima componente è il minimo della funzione $f_i(\mathbf{x})$.

Se non vi fossero conflitti tra le k funzioni obiettivo f_i , una soluzione (banale) del problema sarebbe quella di ottimizzare separatamente le suddette, mediante k applicazioni di ottimizzazione mono-obiettivo: i k risultati ottenuti sarebbero le componenti del vettore ideale \mathbf{z}^{id} che apparterebbe alla regione ammissibile degli obiettivi Z .

Nella maggioranza dei casi, però, esiste un certo tasso di conflittualità tra gli obiettivi: questa situazione fa sì che $\mathbf{z}^{id} \notin Z$.

A questo punto è necessario definire cosa si intende per soluzione ottima di un problema di programmazione multi obiettivo. La definizione matematica che si propone nel seguito è stata proposta per la prima volta da Edgeworth nel 1881 e successivamente ripresa da Vilfredo Pareto (Pareto, 1896) che, nel suo “Cours d’économie Politique” affermò:

“Principeremo col definire un termine di cui è comodo fare uso per scansare lungaggini. Diremo che i componenti di una collettività godono, in una certa posizione, del massimo di ofelimità,

quando è impossibile allontanarsi pochissimo da quella posizione giovando, o nuocendo, a tutti i componenti la collettività; ogni piccolissimo spostamento da quella posizione avendo necessariamente per effetto di giovare a parte dei componenti la collettività e di nuocere ad altri. “

Tradotto in termini matematici: dati due vettori $z^{(a)}$ e $z^{(b)} \in \mathfrak{R}^k$, si dice che $z^{(a)}$ domina $z^{(b)}$ secondo Pareto se:

$$\begin{aligned} z_i^{(a)} &\leq z_i^{(b)} && \forall i = 1, 2, \dots, k \\ z_j^{(a)} &< z_j^{(b)} && \text{per almeno un indice } j \in \{1, 2, \dots, k\} \end{aligned}$$

Tale relazione binaria introduce, nello spazio delle k -uple di numeri reali, un ordinamento parziale (non riflessivo) indicato nel seguito con “ \leq_p ”: si noti che l’eventualità $z^{(a)}$ dominante su $z^{(b)}$ si indica con: $z^{(a)} \leq_p z^{(b)}$.

Un vettore di decisioni $x^* \in F$ è un ottimo secondo Pareto se non esiste un altro vettore $x \in F$ per cui valga $f(x) \leq_p f(x^*)$ (cioè che non esista un altro vettore la cui immagine, cioè il valore degli obiettivi, domini sull’immagine del primo).

Analogamente un vettore obiettivo $z^* \in Z$ è ottimo secondo Pareto se non esiste un altro vettore $z \in Z$ per cui $z \leq_p z^*$.

Detto, pertanto, in altre parole, noto il vettore ottimo z^* secondo Pareto, non è possibile trovare un altro vettore (nella regione di ammissibilità degli obiettivi) tale che, migliorando una componente di z^* non peggiori le altre. Quindi i vettori ottimi di Pareto sono punti di equilibrio che risiedono sulla frontiera di Z . L’insieme degli ottimi di Pareto del problema (3.123) costituisce la cosiddetta frontiera efficiente.

La figura successiva mostra la frontiera di Pareto per il problema di ottimizzazione (ricerca del minimo) a due obiettivi definito in precedenza.

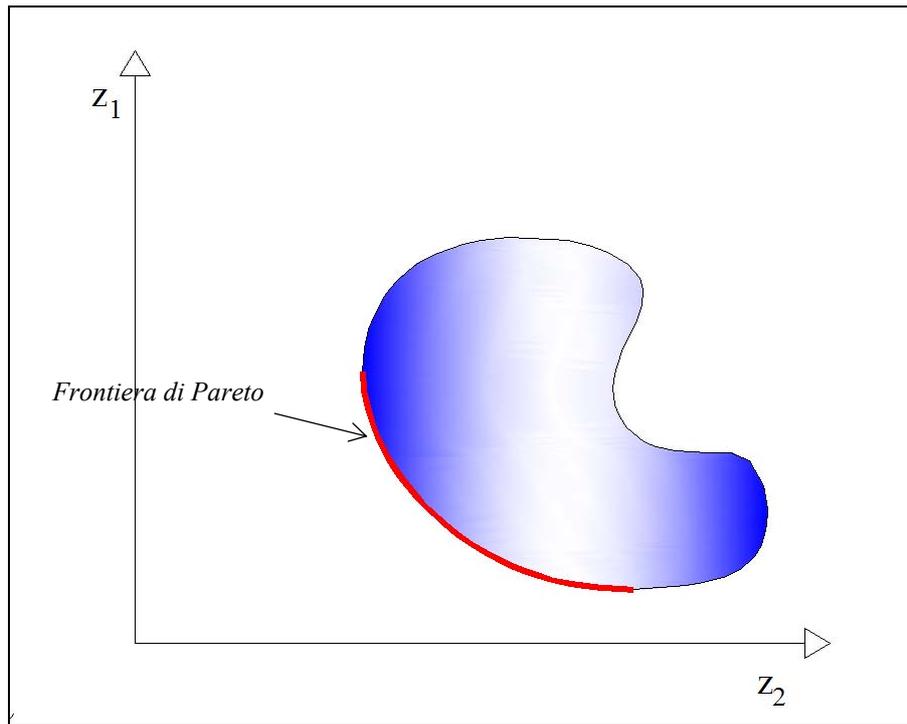


Figura 3.14 – Frontiera di Pareto per problema di ottimizzazione a due obiettivi

La definizione di ottimo di Pareto data in precedenza è, ovviamente, di tipo globale dato che si richiede la validità di una certa proprietà su tutto l'insieme ammissibile del problema (3.123). Ovviamente è possibile dare una definizione di ottimo locale secondo Pareto: un vettore di decisioni $\mathbf{x}^* \in F$ è un ottimo locale secondo Pareto se esiste un numero $\delta > 0$ tale che \mathbf{x}^* è ottimo secondo Pareto in $F \cap B(\mathbf{x}^*, \delta)$, dove con $B(\mathbf{x}, \delta)$ si indica la sfera aperta di centro $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ e raggio $\delta > 0$. La figura successiva esemplifica in maniera grafica i concetti appena espressi ancora una volta per il problema di ottimizzazione (ricerca del minimo) a due obiettivi definito in precedenza.

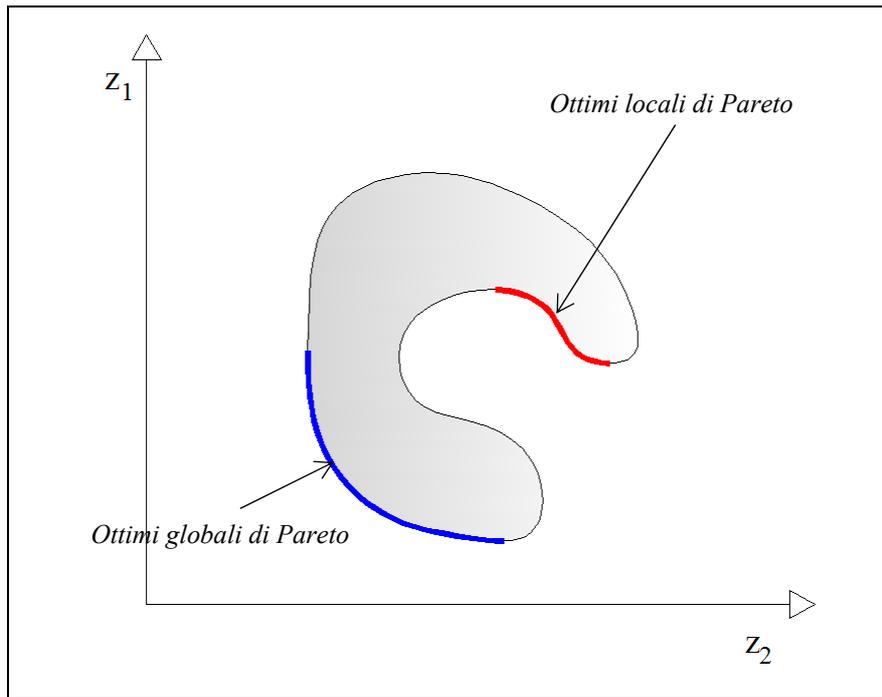


Figura 3.15 – Ottimi locali e globali secondo Pareto per problema di ottimizzazione a due obiettivi

Ogni ottimo globale è anche ottimo locale. Il viceversa è vero solo se il problema (3.123) è convesso, se cioè sono verificate entrambe le seguenti condizioni:

- l'insieme ammissibile F è convesso;
- tutte le funzioni obiettivo $f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sono convesse.

La definizione di ottimo secondo Pareto, inoltre, può essere leggermente indebolita ottenendo la definizione di ottimo debole di Pareto. In particolare, un vettore di decisioni $\mathbf{x}^* \in F$ è un ottimo debole secondo Pareto se non esiste un altro vettore $\mathbf{x} \in F$ per cui valga $\mathbf{f}(\mathbf{x}) < \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$.

Anche in questo caso è possibile definire, in maniera analoga alla precedente, un ottimo debole locale, così come stabilire che nel caso in cui il problema (3.123) sia convesso ogni ottimo debole locale è un ottimo debole globale di Pareto.

Si noti che l'insieme degli ottimi secondo Pareto è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto.

La figura successiva esemplifica in maniera grafica i concetti appena espressi ancora una volta per il problema di ottimizzazione (ricerca del minimo) a due obiettivi definito in precedenza.

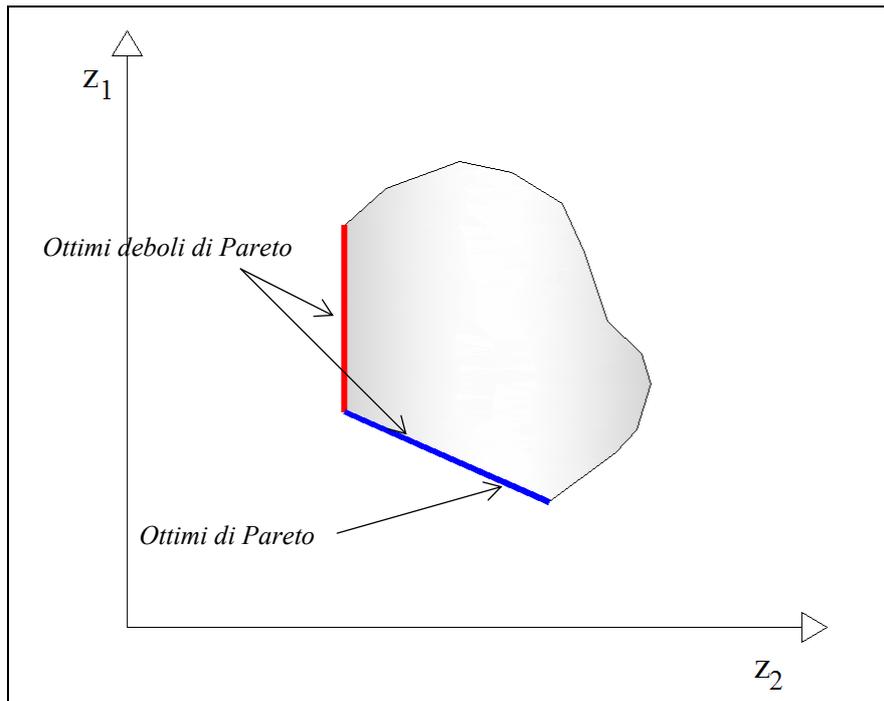


Figura 3.16 – Ottimi e ottimi deboli secondo Pareto per problema di ottimizzazione a due obiettivi

Come anticipato, si ribadisce che lo spazio delle k -uple di numeri reali è solo parzialmente ordinato e che le definizioni di ottimo e ottimo debole secondo Pareto non sono le uniche che è possibile dare per esso: nello specifico si può dimostrare come tali definizioni siano un caso particolare del concetto di punto efficiente rispetto a un cono.

3.10.1 Metodi di soluzione

Generare le soluzioni ottime secondo Pareto costituisce la parte essenziale della programmazione multi obiettivo e anzi, da un punto di vista strettamente matematico, il problema (3.123) si considera risolto una volta che sia stata individuata la frontiera di Pareto.

Da un punto di vista pratico, invece, non sempre ci si può accontentare semplicemente di avere trovato l'insieme degli ottimi di Pareto. In molti casi, infatti, è necessario ordinare tutte le soluzioni trovate e quindi selezionare la migliore rispetto a tale ordinamento. Quest'ultima operazione è effettuata, solitamente, dal decisore, cioè, nel caso di un generico sistema di invasi a scopo plurimo come quello oggetto di studio, dal gestore del sistema stesso. Tale decisore dovrà fornire tutte le informazioni necessarie per effettuare l'ordinamento degli ottimi di Pareto secondo le sue preferenze. In base a tale ordinamento, alla fine, si giungerà alla soluzione ottima (secondo Pareto) e preferita.

I metodi risolutivi della programmazione multi obiettivo (cioè i metodi che permettono di generare tutti i punti della frontiera di Pareto e scegliere la soluzione preferita dal decisore), vengono spesso suddivisi in quattro grandi categorie:

- Metodi senza preferenze: nei quali il decisore non ha nessun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto;
- Metodi a posteriori: nei quali si genera l'insieme di tutti gli ottimi di Pareto e poi lo si presenta al decisore che sceglie l'azione preferita sulla base delle sue esigenze e della sua esperienza;
- Metodi a priori: nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che abbia inizio il processo risolutivo. In base alle informazioni avute dal decisore viene direttamente trovata la soluzione ottima migliore senza dover generare tutti gli ottimi di Pareto;
- Metodi interattivi: nei quali il decisore specifica le sue preferenze man mano che l'algoritmo procede, guidando in tal modo il processo risolutivo verso la soluzione per lui più soddisfacente.

Si noti, comunque, che al di là di tale distinzione formale, tutte i metodi sopraelencati, si basano sulla medesima idea di fondo: cioè trasformare il problema originario a più obiettivi in un problema con una sola funzione obiettivo. La tecnica mediante la quale si ottiene un problema mono-obiettivo a partire da un altro con più obiettivi è noto come scalarizzazione.

Le tecniche maggiormente usate nell'ambito della ricerca operativa sono:

- per quanto riguarda i metodi senza preferenze si ricorda il metodo "GOAL" (detto anche "GLOBAL"), che comprende quello detto "MIN-MAX" (di Tchebycheff);
- per quanto riguarda i metodi a posteriori si ricordano:
 - metodo della funzioni aggregate (A.O.F., acronimo di Aggregate Objectives Functions), generalizzazione del metodo dei pesi (o della somma pesata);
 - metodo degli ϵ -vincoli (detto anche "Trade-off");
- per quanto riguarda i metodi a priori si ricordano:
 - metodo della "value function";
 - metodo dell'"ordinamento lessicografico" (o gerarchico);
- per quanto riguarda i metodi interattivi si ricorda il metodo "STEP".

Nel paragrafo successivo si analizzeranno da un punto di vista teorico i metodi poi implementati nell'applicazione al caso reale di gestione ottima del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone: il metodo AOF e dei pesi.

3.10.1.1 Metodi AOF e dei pesi

Si consideri il problema:

$$\min \sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})$$

(3.125)

$$g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

dove il vettore \mathbf{w} (le cui componenti sono w_i) appartiene allo spazio \mathfrak{R}_+^k . Le suddette componenti, inoltre, si intendono “normalizzati”, cioè tali che:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Si può dimostrare che esiste una stretta relazione tra le soluzioni del problema scalarizzato secondo la (3.125) e il problema originario (3.123):

Ogni soluzione globale (locale) del problema (3.125) è un ottimo debole globale (locale) di Pareto per il problema (3.123). Se, in particolare, il problema (3.125) ammette soluzione unica allora essa è un ottimo di Pareto per il problema (3.123).

In maniera analoga, se i pesi w_i sono tutti strettamente positivi è possibile dimostrare che ogni soluzione globale (locale) del problema (3.125) è un ottimo globale (locale) di Pareto per il problema (3.123).

Se il problema (3.123) è convesso ed \mathbf{x}^* è un suo ottimo di Pareto, allora esistono dei pesi $\mathbf{w} \in \mathfrak{R}_+^k$ (con $\sum_{i=1}^k w_i = 1$) e tali che \mathbf{x}^* è soluzione anche del problema (3.125).

Da quest'ultima proposizione si può pertanto dedurre che se il problema è convesso, modificando l'insieme dei pesi w_i si può ottenere l'intera frontiera ottima secondo Pareto. L'inconveniente di tal metodo è che se lo spazio ammissibile degli obiettivi e delle variabili decisionali non è convesso, il metodo dei pesi non è capace di “catturare”, al variare dei pesi w_i , tutti i punti della frontiera di

Pareto: in particolare ben documentato in letteratura è l'incapacità di "cogliere" quelli che giacciono sulle zone non-convesse della frontiera (Athan e Papalambros, 1996; Chen et al., 1998; Das e Dennis, 1997; Das e Dennis, 1998; Koski, 1985; Messac et al., 2000a; Osyczka, 1984; Rakowska et al., 1991).

Questo è un grave problema in quanto la scelta della soluzione "preferita" da parte del decisore avviene sulla base dei punti Pareto-ottimi forniti dalla programmazione multi obiettivo: quindi, affinché tale soluzione "preferita" dal decisore sia la migliore possibile, è necessario che si generino il maggior numero di punti della frontiera di Pareto (teoricamente tutti), siano essi giacenti su zone convesse, siano essi giacenti su zone concave.

Il problema della "catturabilità" dei punti Pareto ottimi su frontiere non-convesse può essere risolto (almeno in via teorica) mediante l'uso del metodo cosiddetto delle funzioni aggregate (AOF). (Messac et al., 2000b).

Esso può essere considerato come la generalizzazione del metodo dei pesi esposto in precedenza, in quanto anch'esso si basa sulla ottimizzazione di una funzione (scalare) che è combinazione delle diverse funzioni obiettivo del problema originario (3.123).

In particolare si consideri una qualunque funzione scalare $u(f): \mathfrak{R}^k \rightarrow \mathfrak{R}$ che aggreghi le diverse funzioni obiettivo scalari f_i del problema (3.123) in modo da generare un valore scalare. Tale funzione $u(f)$ sarà caratterizzata dalla presenza di un set di parametri liberi.

Per una fissata combinazione di valori di tali parametri, la risoluzione del problema:

$$\min\{u(f) \mid f \in Z\} \quad (3.126)$$

genera un punto Pareto ottimo (giacenti su zone anche non-convesse della frontiera di Pareto) se la funzione $u(f)$ soddisfa una serie di condizioni.

Innanzitutto la funzione $u(f)$ deve essere ammissibile, ovvero deve risultare monotona crescente rispetto ad ogni singolo obiettivo (a prescindere dai valori a cui gli altri obiettivi sono mantenuti costanti (Steuer, 1989): si può dimostrare che tali funzioni catturano punti Pareto ottimi (almeno) locali.

Sebbene la proprietà dell'ammissibilità (da rispettare da parte delle funzioni aggregate) appena definita sia condizione necessaria per la catturabilità di tutti i punti Pareto ottimi, essa non risulta sufficiente.

In particolare, in Messac (2000b), si dimostra che un punto pareto-ottimo è catturabile da parte di una funzione aggregata ammissibile se e solo se, in un suo intorno, la funzione definita come la differenza tra l'iper-superficie della regione Pareto-ottima e l'iper-superficie della funzione

aggregata è convessa. Ossia se la curvatura della funzione aggregata è maggiore di quella della regione Pareto ottima.

Per questo motivo il metodo dei pesi riesce a catturare i soli punti che appartengono a regioni convesse della frontiera.

Una implicazione interessante di quanto osservato è che una funzione aggregata, la cui curvatura può essere incrementata aggiustando il valore dei parametri, riesce a cogliere sempre più punti e, al limite, tutti i punti pareto-ottimi.

Una funzione con queste caratteristiche è la seguente:

$$u(f) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})^s \quad (3.127)$$

nella quale la curvatura è controllata dal parametro s . Per un valore unitario di tale parametro si ritrova la funzione del metodo dei pesi descritta precedentemente. Si osserva infine che se i valori degli obiettivi possono essere minori di zero i valori di s , per fare in modo che la funzione sia ammissibile (monotonicità crescente), devono essere limitati ai soli interi dispari.

3.11 Come trattare le aleatorietà: approcci I.S.O. ed E.S.O.

Come anticipato nel paragrafo 2, il modello di ottimizzazione della gestione operativa delle risorse idriche di un sistema multi-invaso a scopo plurimo, è reso matematicamente più complesso dal fatto che alcune variabili di sistema, come i deflussi naturali in ingresso, il tasso di evaporazione netta, i parametri idrologici, quelli economici e le domande delle utenze, dovrebbero essere trattate alla stregua di *variabili casuali*.

Il carattere aleatorio tipico di tali problemi può essere risolto (Labadie, 2004) mediante due approcci di tipo stocastico ed euristico alternativi:

- approccio “**Implicit Stochastic Optimization**” – *I.S.O.* (letteralmente: “*ottimizzazione stocastica implicita*”);
- approccio “**Explicit Stochastic Optimization**” – *E.S.O.* (letteralmente: “*ottimizzazione stocastica esplicita*”);

Nel prosieguo si espongono i lineamenti teorici dei due approcci appena introdotti.

3.11.1 Approccio I.S.O.

Tale approccio prevede l'ottimizzazione (mediante uno dei metodi deterministici esposti nei precedenti paragrafi: programmazione lineare, non lineare, dinamica) del sistema di equazioni costituito dalla funzione obiettivo e dai relativi vincoli, sulla base di una ben definita serie temporale di dati di input al sistema (deflussi naturali, temperature medie, etc...) caratterizzati da aleatorietà.

I dati suddetti possono appartenere ad una serie storica o ad una generata sinteticamente.

Lo svantaggio principale di tale approccio è che le operazioni di rilascio ottimali così determinate sono uniche per la particolare serie temporale di dati idrologici utilizzata.

Si deve pertanto procedere alla stima della correlazione esistente fra le regole operative ottimali così determinate e alcune grandezze idrologiche osservabili, quali il volume d'invaso effettivo, i deflussi non-regolati in ingresso al sistema nel periodo di tempo precedente e/o eventualmente i deflussi non-regolati previsti, etc..., ottenendo delle *guidecurves* stagionali, cioè delle funzioni che indichino al gestore del sistema l'azione da eseguire (il rilascio turbinato), in relazione al periodo dell'anno e allo "stato" del sistema (cioè all'insieme dei valori delle variabili di sistema scelte per spiegare le regole operative ottimali stesse).

Le tecniche utilizzate per la stima di tale correlazione sono:

- quelle proprie dell'*analisi di regressione multipla*;
- le *reti neurali artificiali* (Artificial Neural Networks – ANN): Chandramouli e Raman (1996) utilizzano una ANN per la stima delle operazioni ottimali (in dipendenza di volume d'invaso, deflussi non-regolati e domanda) per l'invaso di Aliyar nella regione del Tamil Nadu, India, estendendo tale metodo, in un altro lavoro del 2001, ad un intero e complesso sistema d'invasi;
- quelle basate su *logica Fuzzy*. In questa sede si cita lo studio di Shrestha et al. (1996) per l'invaso di Tenkiller Lake, Okl.

Il rischio dell'approccio I.S.O. è che si verifichi una debole correlazione statistica.

La figura successiva mostra schematicamente un tipico approccio I.S.O.

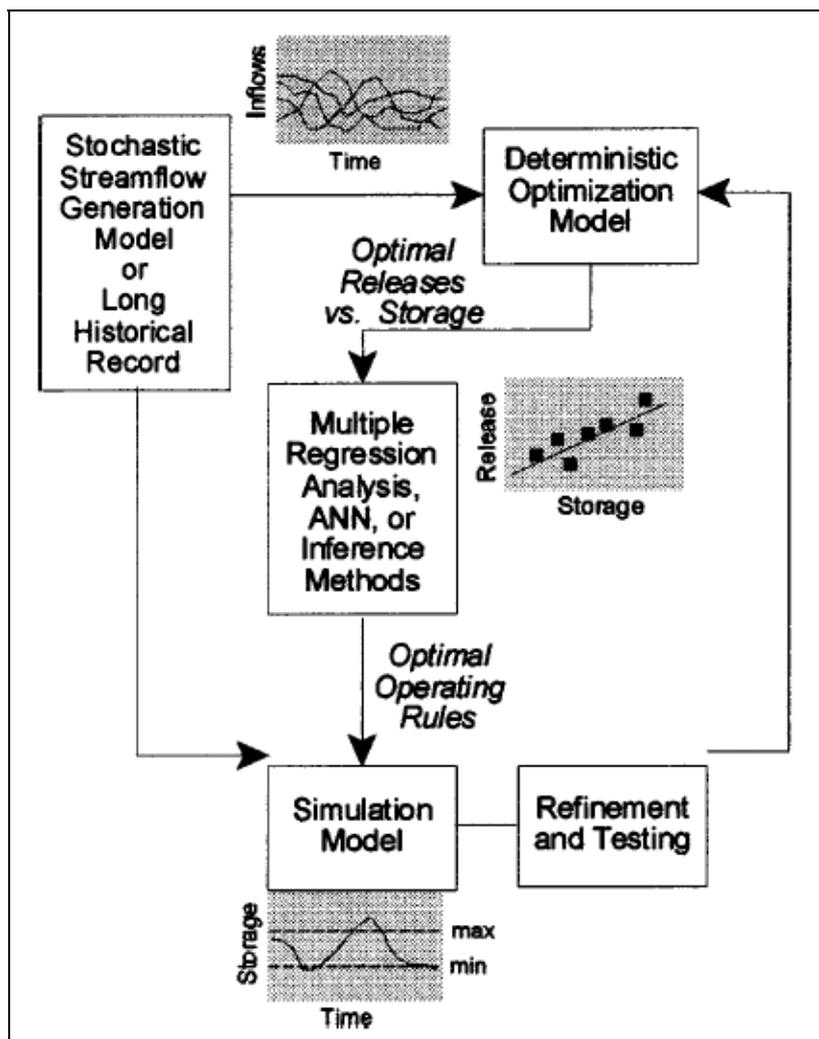


Figura 3.17 – Schema dell’approccio I.S.O. (da Labadie, 2004)

3.11.2 Approccio E.S.O.

L’approccio E.S.O. è designato per operare direttamente sulla distribuzione di probabilità delle grandezze idrologiche stocastiche, anziché su una ben determinata sequenza di dati storici o generati sinteticamente. Al contrario dell’approccio I.S.O., questo significa che la ottimizzazione è effettuata senza la presunzione della perfetta previsione degli eventi futuri. Inoltre le regole operative ottimali (cioè, in pratica, le già citate *guidecurves* stagionali) non sono ricavate mediante inferenza dei risultati dell’ottimizzazione, bensì come esito diretto dell’applicazione dell’approccio. La figura successiva mostra schematicamente un tipico approccio E.S.O.

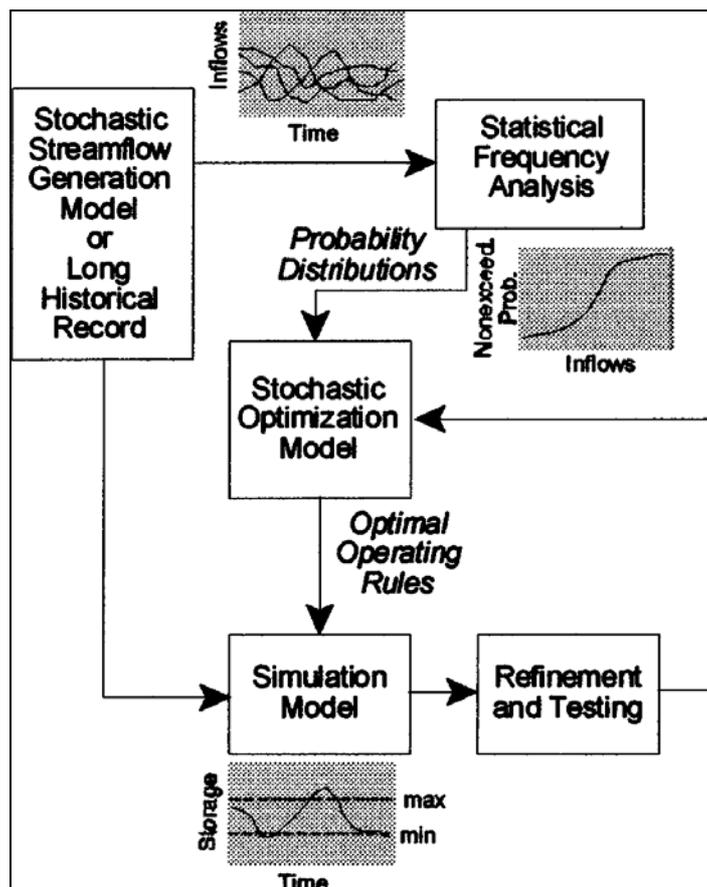


Figura 3.18 – Schema dell’approccio E.S.O. (da Labadie, 2004)

Purtroppo l’approccio E.S.O. applicato ai sistemi di invaso è molto più oneroso da un punto di vista computazionale rispetto a quello I.S.O., come riconosciuto da Roefs e Bodin (1970).

I deflussi non-regolati sono la principale fonte di incertezza e possono essere caratterizzati da appropriata distribuzione di probabilità (parametrica o non parametrica).

Per problemi operativi di breve periodo, i deflussi in input al sistema potrebbero essere generati da un modello di previsione: in questi casi la principale fonte di incertezza sarebbe proprio l’errore previsionale.

Nel problema potrebbero essere individuate altre variabili random: richieste idriche, parametri afferenti il clima (che influenzano la evaporazione e altre perdite) e parametri economici (ad esempio, in un mercato dell’elettricità non regolamentato, il prezzo stesso dell’energia (Zhang Joyce Li e Ponnambalam, 2006).

Senza entrare nel merito, le principali tecniche E.S.O. proposte in letteratura sono (Labadie, 2004):

- **Chance Constrained Models;**
- **Stochastic Linear Programming Models,** estensione al caso stocastico delle tecniche di programmazione lineari (l’estensione delle tecniche di programmazione non lineare è ostacolata dagli alti tempi computazionali richiesti);

- **Stochastic Dynamic Programming Models (SDP)** (Labadie, 2004; Lee Jin-Hee e Labadie, 2007) che formula il problema della ottimizzazione come un processo decisionale markoviano. La SDP “vanta” numerose applicazioni su singolo invaso: Labadie (1993) per l’invaso Valdesia nella Repubblica Dominicana, Stedinger et al. (1984), Huang et al. (1991), Vasiliadis e Karamouz (1994).

Purtroppo l’estensione a sistemi d’invaso è aggravata dalla maledizione della dimensionalità in misura ancora maggiore rispetto al caso deterministico. Una delle poche applicazioni della SDP al caso di sistemi d’invaso è stato effettuato da Tejada-Guibert et al. (1996) (sistema d’invasi Trinity-Shasta in California).

Kelman e al. (1990), hanno proposto una variante della SDP, chiamata **Sampling Stochastic Dynamic Programming (SSDP)**, la quale usa scenari di deflusso per rappresentare la natura stocastica dei deflussi stessi (per sua natura trova migliori applicazioni per ottimizzazioni in tempo reale).

Un metodo che tenta di superare la maledizione della dimensionalità propria della SDP è proprio il **“Reinforcement Learning” (RL)** (Sutton e Barto, 2000) esposto nei suoi lineamenti teorici nel paragrafo 3.4 e successivi.

Come visto, a differenza degli altri metodi, RL non presuppone la conoscenza del processo stocastico che governa i deflussi in ingresso al sistema. Al contrario, tale conoscenza è appresa dall’esperienza. Il RL fu del resto originariamente concepito da psicologi del comportamento sulla base della osservazione della capacità degli animali di imparare determinate azioni in risposta a particolari stimoli di punizione o ricompensa.

Labadie (2007) applica tale metodo (insieme e per confronto, ad altri tre: i) approccio implicito con programmazione dinamica D.P.S.A., ii) SDP, iii) Sampling Stochastic Dynamic programming) al complesso sistema d’invasi presenti nel bacino del fiume Geum nella Corea del Sud (obiettivi in ordine di priorità: i) mantenimento del deflusso minimo vitale e soddisfacimento delle esigenze civili, industriali ed irrigui, ii) produzione idroelettrica).

Le regole operative ottimali ricavate con RL e con gli altri metodi (con esclusione della SDP, inapplicabile a causa dei suoi alti “costi” computazionali) sono state poi applicate per la simulazione dell’intero sistema (mediante apposito modello) su un periodo di tempo (per il quale erano a disposizione dati registrati di deflusso in ingresso al sistema) non compreso nell’orizzonte temporale utilizzato in precedenza per la stima delle regole operative stesse. I risultati hanno dimostrato non solo la completa applicabilità di RL per sistemi d’invaso, ma anche la sua superiorità in termini di performance.

4. Ottimizzazione della gestione del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.

4.1 Descrizione del sistema idroelettrico Ariamacina-Cecita

4.1.1 Premessa

Il sistema di invasi Ariamacina-Cecita utilizza i bacini dell'alto corso del fiume Neto e del fiume Mucone; si sviluppa tra le quote 1296,00 e 190,00 m s.l.m. circa, con un dislivello totale di 1106,00 m ed ha una potenza installata totale in produzione di 178.000 kW ed una producibilità media annua totale di 342 milioni di kWh.

L'impianto denominato "Vaccarizzo" è regolato in testa dal bacino di modulazione di Ariamacina, della capacità utile di circa 1,2 milioni di m³, il quale regola i deflussi dell'alto corso del fiume Neto.

Le acque turbinate dal suddetto impianto idroelettrico vengono poi restituite nel serbatoio di Cecita, della capacità utile di 107,2 milioni di m³, ottenuto sbarrando il t. Mucone.

Dall'opera di presa di tale invaso le acque vengono turbinate all'impianto idroelettrico denominato "Mucone I salto". Le acque restituite da questo impianto, unite ad altri volumi idrici derivati da traverse di sbarramento sussidiarie sullo stesso t. Mucone (a valle del primo impianto) e sui torrenti Bruviello, S. Martino-Cericò e San Mauro, sono poi indirizzate verso un secondo impianto denominato "Mucone II salto".

La successiva figura 4.1 presenta la corografia del sistema in oggetto.

Nel prosieguo si analizzano le caratteristiche principali degli invasi, degli impianti idroelettrici, dell'impianto irriguo e di tutte le opere idrauliche annesse al sistema in oggetto. Per maggiori approfondimenti si rimanda a Principato (2009) e Oliveti (2004).



Figura 4.1 : Corografia del Sistema Idroelettrico Vaccarizzo - Mucone 1° Salto e Mucone 2° Salto

4.1.2 Serbatoio di Ariamacina

Il serbatoio di Ariamacina è ottenuto sbarrando l'alto corso del fiume Neto.

Lo sbarramento è del tipo a gravità massiccia, in calcestruzzo, con andamento rettilineo, tracimabile nella parte centrale.



Figura 4.2: vista del serbatoio di Ariamacina

DATI PRINCIPALI DELLA DIGA DESUNTI DAL PROGETTO APPROVATO:

- altezza della diga (ai sensi del D.M. 24.03.'82)	14,55	m
- altezza della diga (ai sensi della L. 584/'94)	9,70	m
- altezza di massima ritenuta	9,05	m
- quota coronamento	1321,70	m s.l.m.m.
- franco (D.M. n° 44 del 24.03.'82)	1,00	m
- franco netto (D.M. n° 44 del 24.03.'82)	0,85	m
- sviluppo del coronamento	170,81	m
- volume della diga	600,00	m ³
- grado di sismicità assunto nel progetto	S= 9	

L'opera di ritenuta e' classificata, ai sensi del D.M. 24.3.82, come diga muraria a gravità ordinaria (Aa1).

DATI PRINCIPALI DELL'INVASO DESUNTI DAL PROGETTO APPROVATO

- quota di massimo invaso	1321,20	m s.l.m.m.
- quota massima di regolazione	1318,80	m s.l.m.m.
- quota minima di regolazione	1316,60	m s.l.m.m.
- superficie dello specchio liquido:		
- alla quota di massimo invaso	1,20	km ²
- alla quota massima di regolazione	0,74	km ²
- alla quota minima di regolazione	0,40	km ²
- volume utile di regolazione	1,20x10 ⁶	m ³
- volume di laminazione	2,30x10 ⁶	m ³

La diga, che come già accennato ha andamento planimetrico rettilineo, tracimabile nella parte centrale per uno sviluppo di 51,41 m, è costituita da n. 8 conci in conglomerato cementizio, con dosaggio di 220 kg di cemento per m³ di impasto.

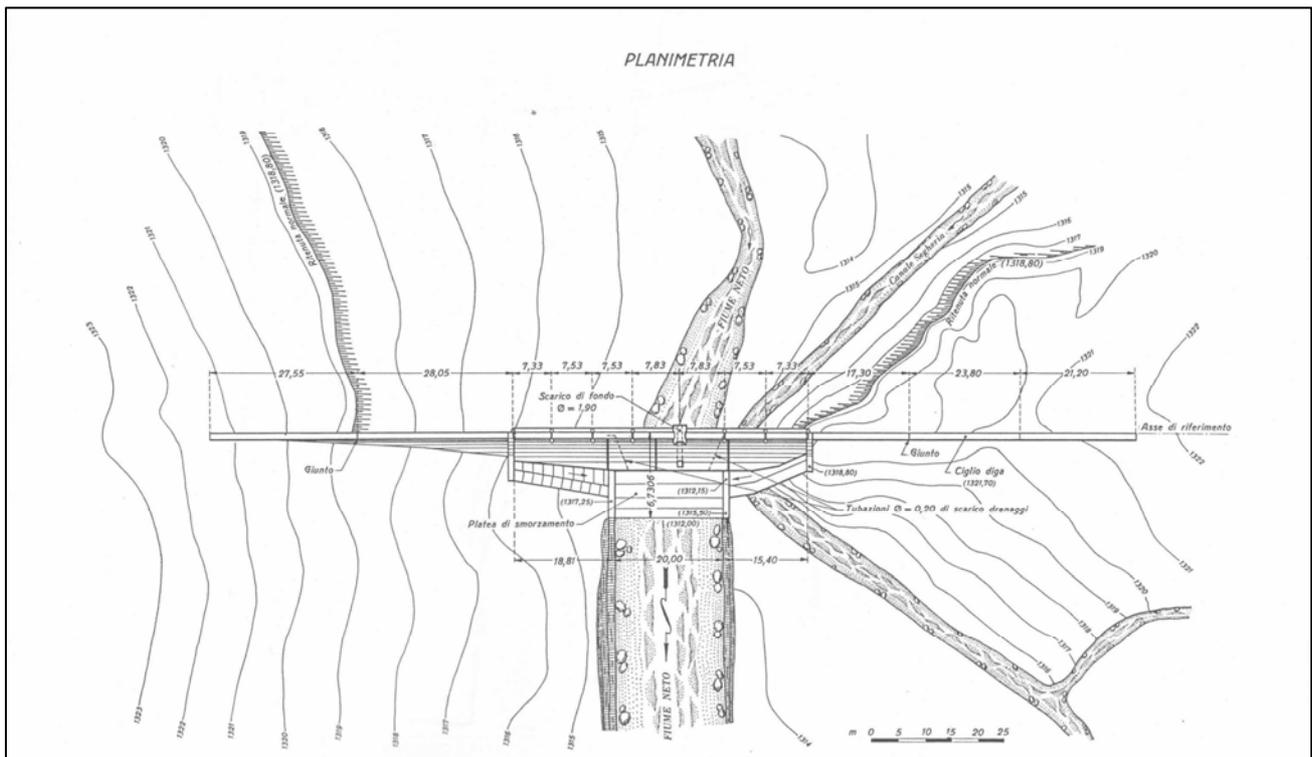


Figura 4.3 : Serbatoio di Ariamacina – planimetria delle opere

La diga è dotata di sistema drenante costituito da tubi di diametro 0,20 m in calcestruzzo poroso, disposti alla distanza di 0,40 m dall'asse di riferimento della diga e ad interasse di 22,50 m. Detti

tubi sono collegati inferiormente ad un tubo di diametro 0,20 m di eternit, avente pendenza del 2%, che scarica le acque nella platea posta a valle della parte tracimabile della diga.

Sul tronco sfiorante della è ricavata una passerella pedonale in ferro della larghezza di 1,20 m, dalla quale si manovra la paratoia dello scarico di fondo.

A valle della parte tracimabile, sagomata secondo il profilo Creager – Scimeni, è disposta una platea risaliente, con pendenza del 4%, a quota minima di 1311,65 m s.l.m.m., raccordata con il paramento di valle; tale platea ha spessore massimo di 2,65 m, pianta rettangolare di 20,00 m di lunghezza e 8,50 m di larghezza.

Il bacino imbrifero si estende sull'altopiano silano interessando formazioni granitoidi più o meno alterate, che considerate nel loro insieme si comportano come materiali praticamente impermeabili.

La sezione di sbarramento, con quota di massimo invaso a 1321,20 m s.l.m.m., ha una estensione in senso normale all'asse del fiume, a tale quota, di circa 100 m ed è costituita:

- in sponda sinistra, da quota 1322,00 m s.l.m.m. a quota 1313,00 m s.l.m.m., affiora il granito leggermente alterato, che si immerge gradatamente verso la sponda destra;
- l'alveo del fiume Neto ha il fondo a circa 1313,00 m s.l.m.m., parte in roccia e parte (destra) su un ammasso ghiaioso – sabbioso di circa 10 m di profondità;
- tutta la sponda destra è coperta da una formazione ghiaiosa, sabbiosa conglomeratici, della potenza di una ventina di metri, costituente una conoide di deiezione di discreta impermeabilità e compattezza, di notevole estensione a monte e a valle dello sbarramento, sotto la quale si ritrova la formazione granitica della sponda sinistra, a quota 1303,00 m s.l.m.m., cioè praticamente a 10 metri sotto la quota dell'alveo del fiume Neto.

DATI PRINCIPALI DELLE OPERE DI SCARICO:

Portata esitata con livello nel bacino alla quota	1321,20 m s.l.m.m.
– dallo scarico di superficie	390,00 m ³ /s
– dallo scarico di fondo	7,96 m ³ /s



Figura 4.4 : Vista dello scarico di superficie

CARATTERISTICHE PRINCIPALI:

- scarico di superficie: costituito dal tratto sfiorante della diga, di lunghezza 51,41 m, suddiviso in 8 luci di cui 7 di lunghezza 7,13 m ed una di 1,50 m. Il paramento di scarico, con soglia a quota 1318,80 m s.l.m.m., sagomato secondo il profilo Creager - Scimeni e convoglia la vena defluente in due canali collettori, posti al piede della diga sulla platea centrale, la quale scarica nell'alveo del fiume Neto con una contropendenza del 4% .
- scarico di fondo: consiste in una tubazione metallica del diametro di 1 m e con asse d'imbocco a quota 1313,00 m s.l.m.m., che attraversa la diga nella parte centrale e sbocca nella platea a valle dell'opera. La paratoia piana di cui è munito lo scarico di fondo è manovrabile a distanza dal coronamento.

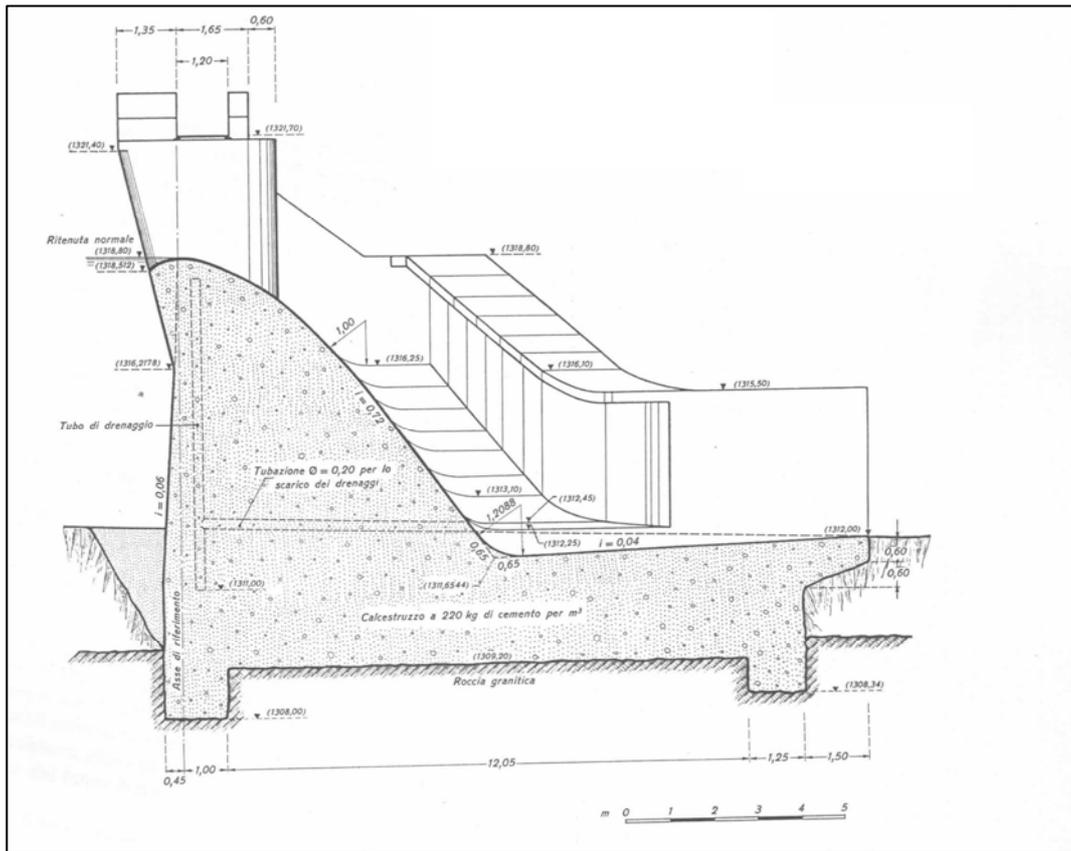


Figura 4.5 : Scarico di fondo

- opera di presa : ubicata in sponda sinistra del serbatoio è costituita da un manufatto, in cui è ricavata una luce di 2,80 x 2,35 m, intercettabile con paratoia piana e protetta da una griglia in ferro.

4.1.3 Serbatoio di Cecita

Il serbatoio di Cecita è ottenuto sbarrando il fiume Mucone.

Lo sbarramento è realizzato in calcestruzzo cementizio a doppia curvatura con struttura perfettamente simmetrica rispetto al piano di mezzeria e spessore variabile sia con l'altezza sia, per elementi orizzontali, dalla chiave verso l'imposta, ed è appoggiata, tramite giunto perimetrale, su un pulvino di fondazione avente lo scopo di ripartire gli sforzi sulla roccia.

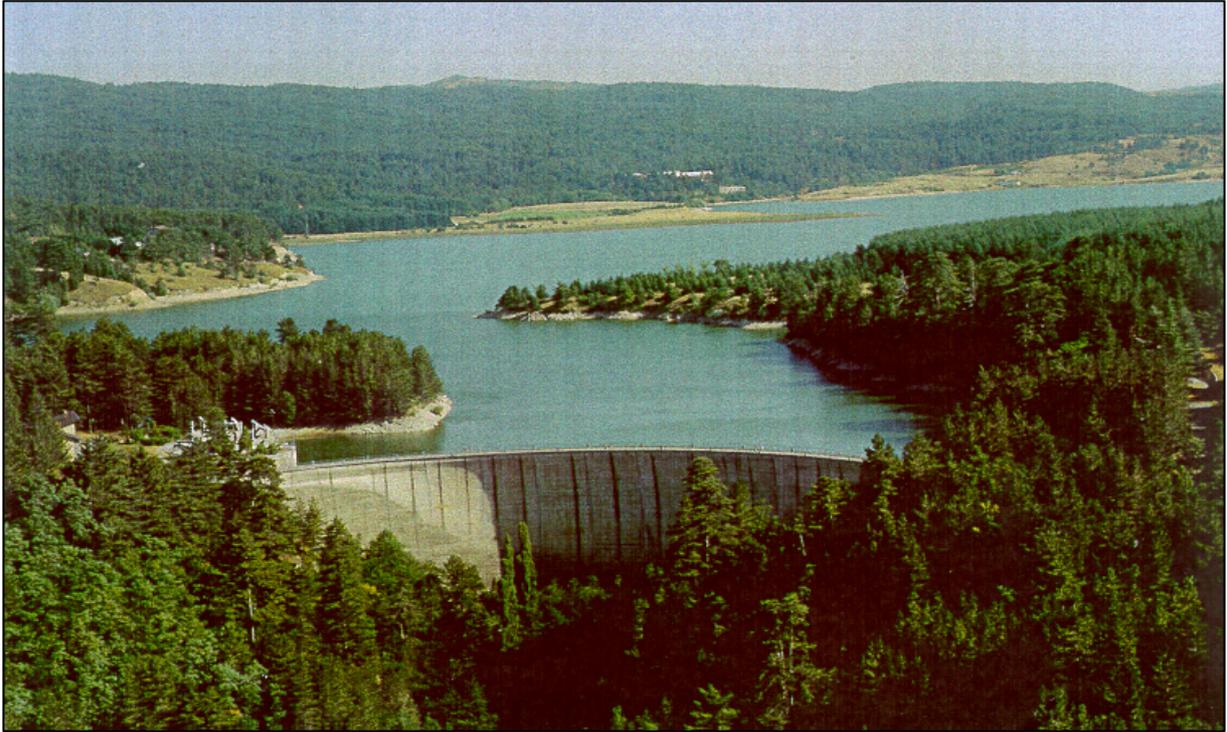


Figura 4.6 : Vista del serbatoio di Cecita

La diga è suddivisa in 15 elementi verticali mediante 14 giunti di costruzione radiali, a contatto. Nel corpo diga, poco al di sopra del pulvino, è ricavato un cunicolo d'ispezione perimetrale con due accessi laterali. Nel concio centrale, nel pulvino, è ricavato un cunicolo trasversale contenente parte della strumentazione di misura e controllo.

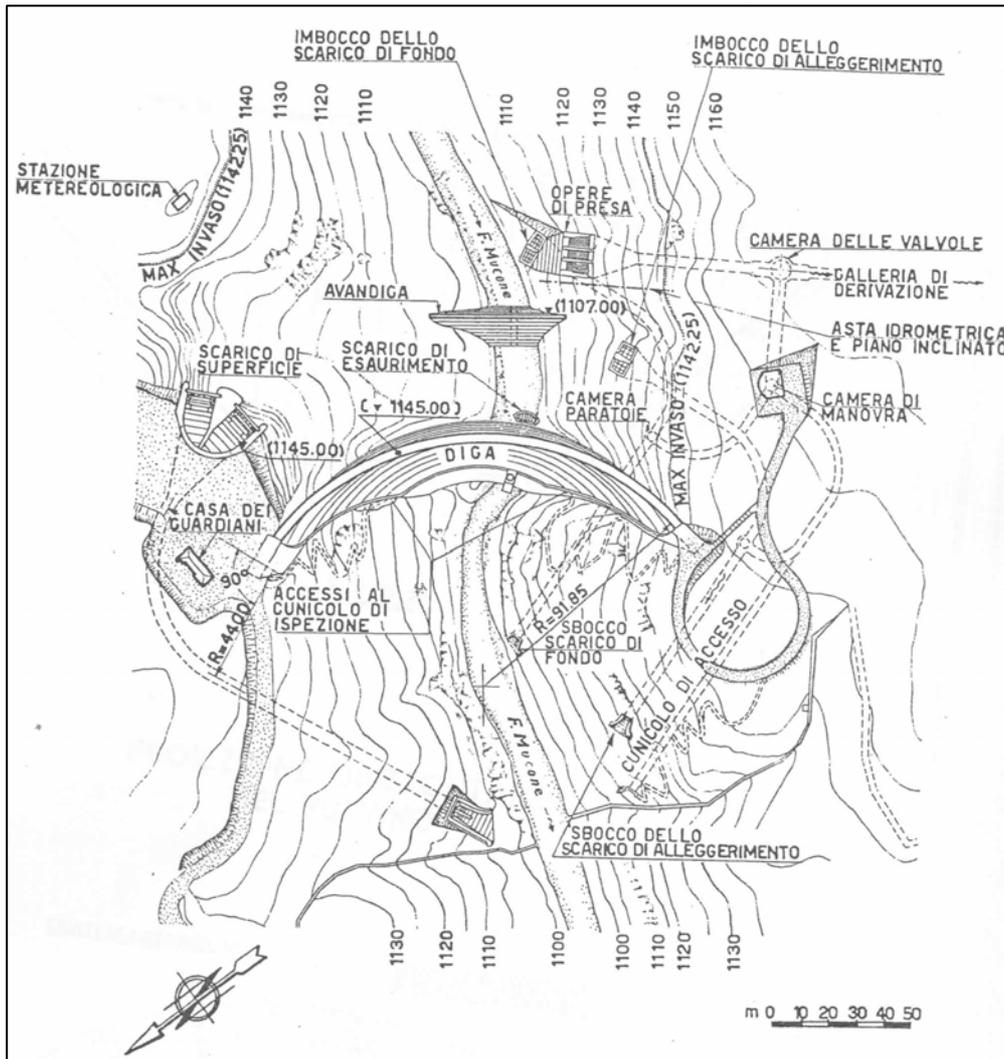


Figura 4.7 : Serbatoio di Cecita – planimetria delle opere

Il sistema drenante è costituito da una rete di tubi del diametro di 0,25 m in numero di 4 per concio. I tubi dei 9 conci centrali confluiscono nel cunicolo trasversale realizzato nel pulvino; la rete drenante di ognuno dei 6 conci laterali confluisce in un proprio tubo di raccolta con recapito nello stesso cunicolo trasversale.

La struttura è appoggiata con giunto perimetrale su un pulvino di fondazione incastrato sui fianchi rocciosi della stretta.

Il diaframma di tenuta è costituito da un duplice velo di fori di iniezioni disposti da spalla a spalla, più un terzo velo nella parte centrale. La distanza media dei fori è di 5,00 m, la distanza tra i veli è di 3,50 m.

Nella stretta di Cecita la formazione di imposta della diga è costituita da roccia granitica. I saggi in corso d'opera mostrarono un granito abbastanza integro, non eccessivamente e profondamente

fratturato, con esclusione di allargamenti e caverne nel substrato. Inoltre non furono riscontrati significativi depositi alluvionali.

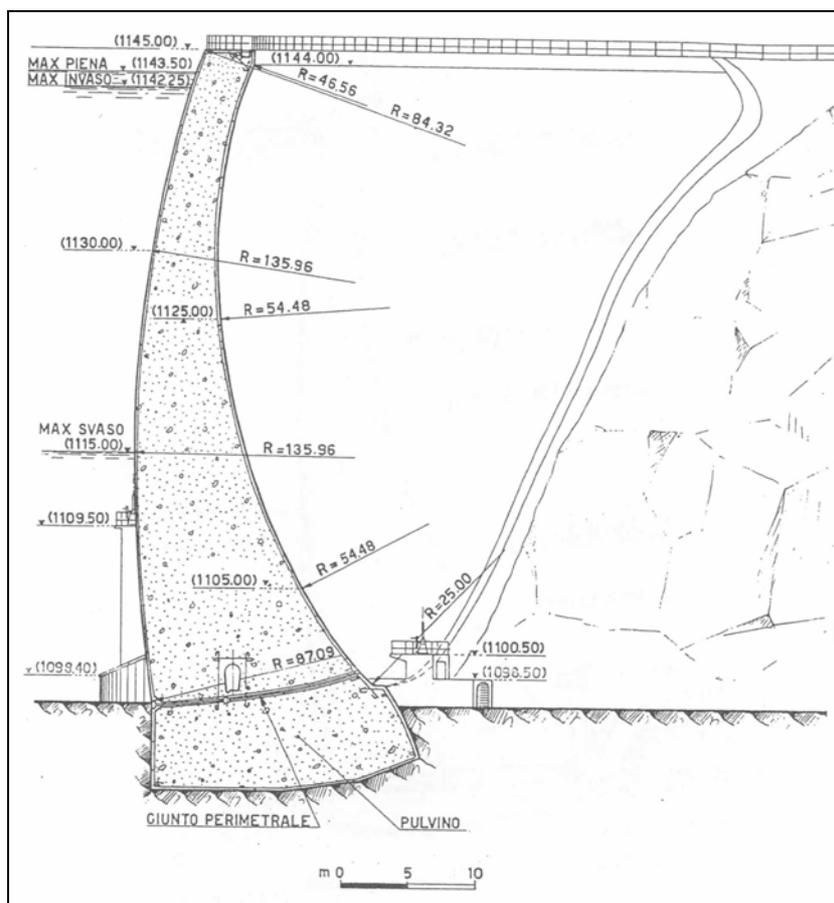


Figura 4.8 : Sezione trasversale tipo della diga

DATI PRINCIPALI DELL'INVASO DESUNTI DAL PROGETTO APPROVATO

- quota di massimo invaso	1143,50	m s.l.m.m.
- quota massima di regolazione	1142,25	m s.l.m.m.
- quota minima di regolazione	1115,00	m s.l.m.m.
- superficie dello specchio liquido:		
- alla quota di massimo invaso	11,33	km ²
- alla quota massima di regolazione	10,41	km ²
- alla quota minima di regolazione	0,26	km ²
- volume totale di invaso (ai sensi del D.M. 24.3.'82)	121,47x10 ⁶	m ³
- volume utile di regolazione	107,17x10 ⁶	m ³
- volume di laminazione	13,25x10 ⁶	m ³
- volume di invaso (ai sensi della L.584/1994)	108,22x10 ⁶	m ³
- portata di massima piena di progetto	210	m ³ /s

(1) bacino dell'Alto Neto utilizzato tramite la diga di Ariamacina.

Il bacino imbrifero si estende sull'altopiano silano interessando formazioni granitoidi più o meno alterate. La copertura vegetale è costituita, sulle pendici dei rilievi, da boschi di conifere e faggi, mentre nelle zone sub pianeggianti ampie aree sono destinate a coltivazioni. Le acque del bacino allacciato del fiume Neto affluiscono nel serbatoio di Cecita tramite lo scarico della centrale Vaccarizzo, ove pervengono dopo essere state invasate nel bacino di Ariamacina.

DATI PRINCIPALI DELLE OPERE DI SCARICO:

Portata esitata con livello nel serbatoio alla quota 1143,50 m s.l.m.m.:

- dallo scarico di superficie	380,00	m ³ /s
- dallo scarico di alleggerimento	53,00	m ³ /s
- dall'opera di derivazione	18,00	m ³ /s
- dallo scarico di fondo	70,00	m ³ /s



Figura 4.9 : Vista dello scarico di superficie

CARATTERISTICHE PRINCIPALI DEGLI SCARICHI:

- Scarico di superficie: ubicato in sponda destra è costituito da due soglie, a profilo aderente, affiancate, che si immettono in un'unica galleria a pelo libero lunga circa 175 m. Ciascuna soglia è sormontata da una paratoia a settore cilindrico, con ventola superiore abbattibile con

comando idraulico automatico o volontario da cabina di manovra ricavata nel muro centrale che separa le due paratoie. Ciascuna paratoia completa (elemento inferiore e ventola) è dotata di comando oleodinamico, automatico con regolatore statico di livello azionato da apposito galleggiante, o volontario dalla cabina di manovra, con impianto oleodinamico proprio alimentato da elettropompa con benzopompa di riserva. In caso di emergenza si fa ricorso ad un accumulatore di olio in pressione (pompa a mano).

Quota soglia:	1139,20 m s.l.m.m.
luce netta di ciascuna paratoia:	10,00 m
ritenuta totale delle paratoie:	3,05 m
ritenuta della ventola:	1,00 m
quota sbocco galleria:	1105,00 m s.l.m.m.

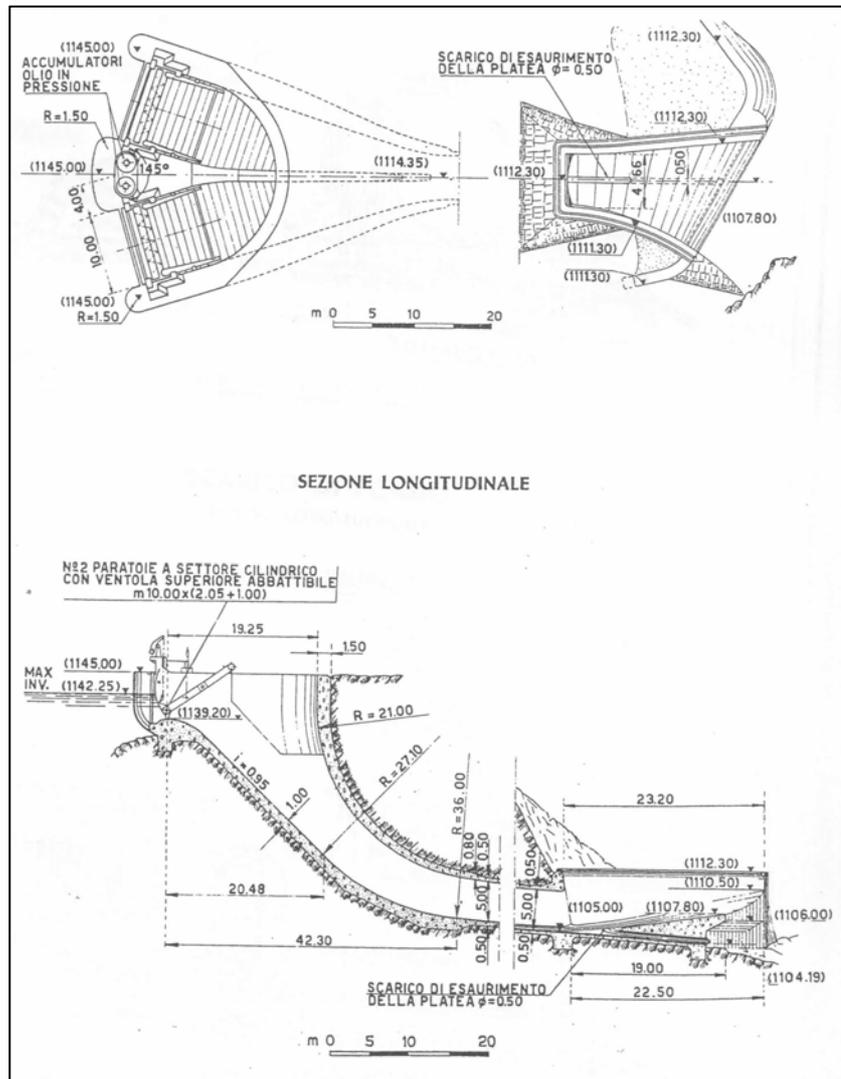


Figura 4.10 : Pianta e sezione longitudinale dello scarico di superficie

- Scarico di alleggerimento: è costituito da una galleria a sezione circolare, della lunghezza di circa 170 m, ubicata in sponda sinistra, intercettata a 94,50 m dall'imbocco (quota soglia 1125,30 m s.l.m.m.) da due paratoie piane a strisciamento in serie, comandabili a distanza con impianto oleodinamico dalla cabina di manovra e sul posto con pompa a mano. L'olio in pressione, per le manovre centralizzate degli scarichi di alleggerimento e di fondo, è fornito da due gruppi elettropompa, ubicati nella cabina di manovra, e da un gruppo turbopompa sussidiario ubicato nella camera delle paratoie dello scarico di fondo, con dispositivo di avviamento automatico nel caso di mancanza di tensione e dispositivo di blocco per quota d'invaso inferiore a 1140.00 m s.l.m.m.

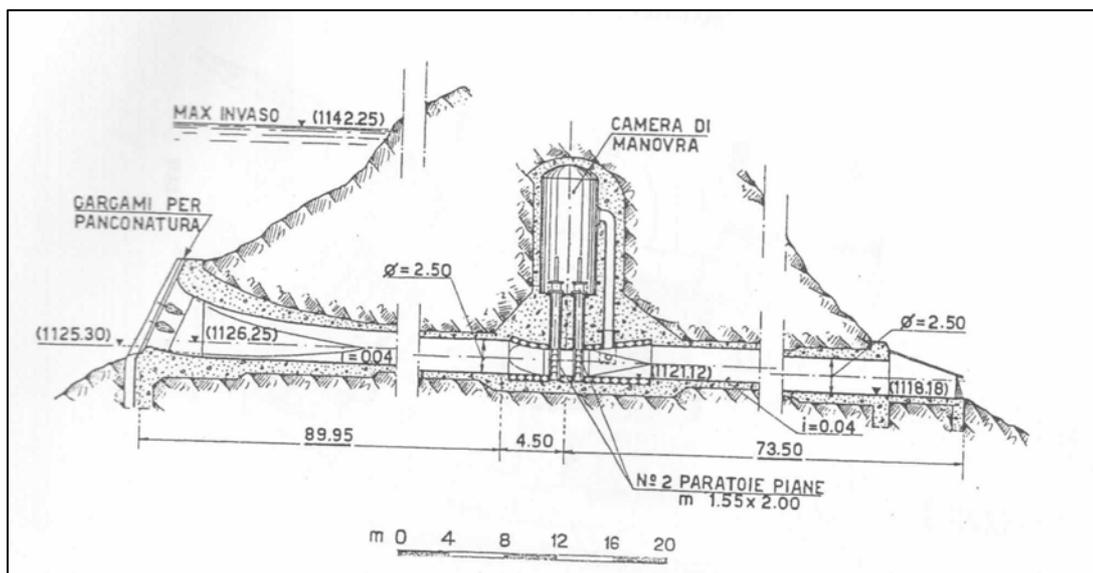


Figura 4.11 : Sezione longitudinale dello scarico di alleggerimento

- Scarico di fondo: è costituito da una galleria a sezione circolare della lunghezza di 184,80 m, ubicata in sponda sinistra, intercettata a 96,30 m dall'imbocco (quota soglia 1101,00 m s.l.m.m.) da due paratoie piane a strisciamento in serie, azionate con comando a distanza mediante un circuito oleodinamico alimentato da due elettropompe e sul posto con pompa a mano.

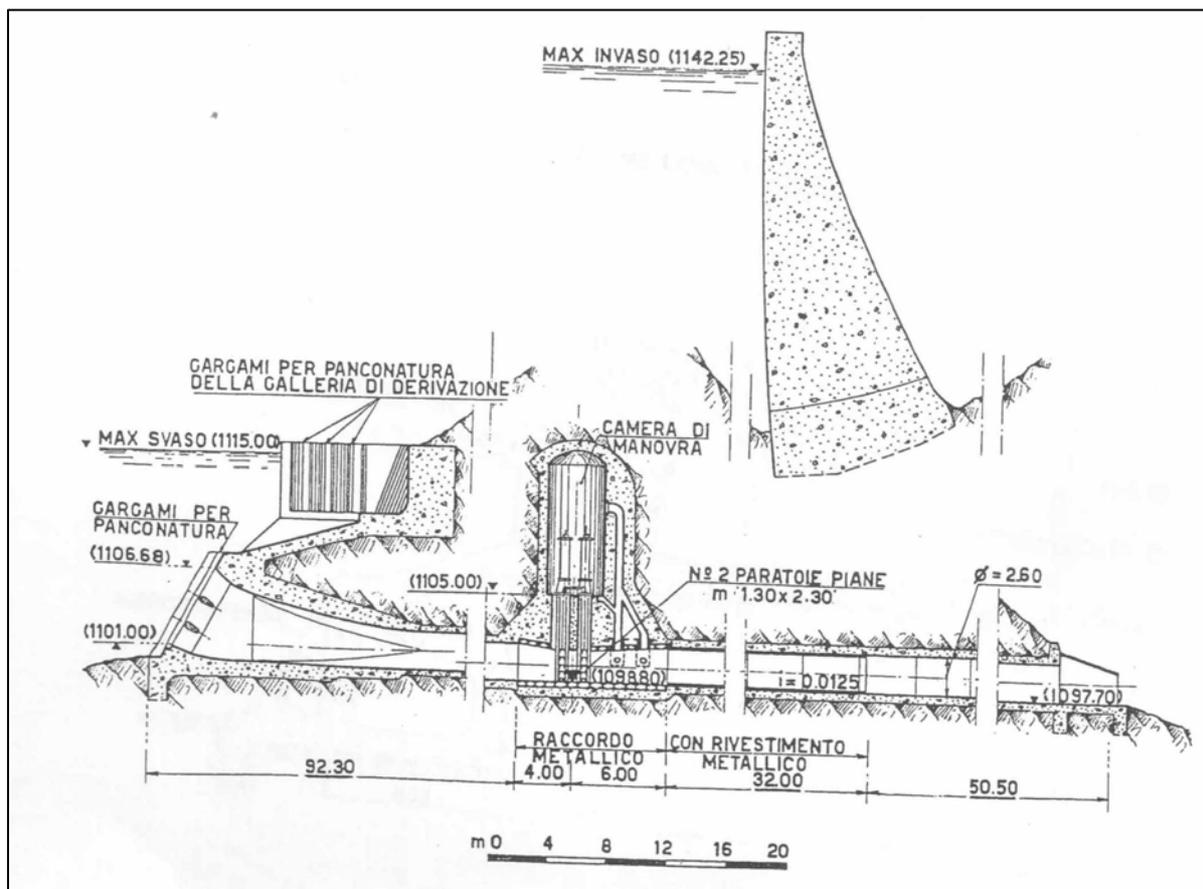


Figura 4.12 : Sezione longitudinale dello scarico di fondo

- Scarico di esaurimento: è costituito da un tubo metallico, di diametro interno 1,20 m che attraversa il pulvino di fondazione ed è munito a monte di una paratoia piana circolare $\varnothing = 1,40$ m a strisciamento ed a valle di una paratoia circolare $\varnothing = 1,20$ m a cuneo, entrambe comandate a mano. La soglia allo sbocco è a quota 1097,00 m s.l.m.m.

Nella successiva figura 4.13, infine, si riportano la planimetria e la sezione longitudinale dell'opera di presa.

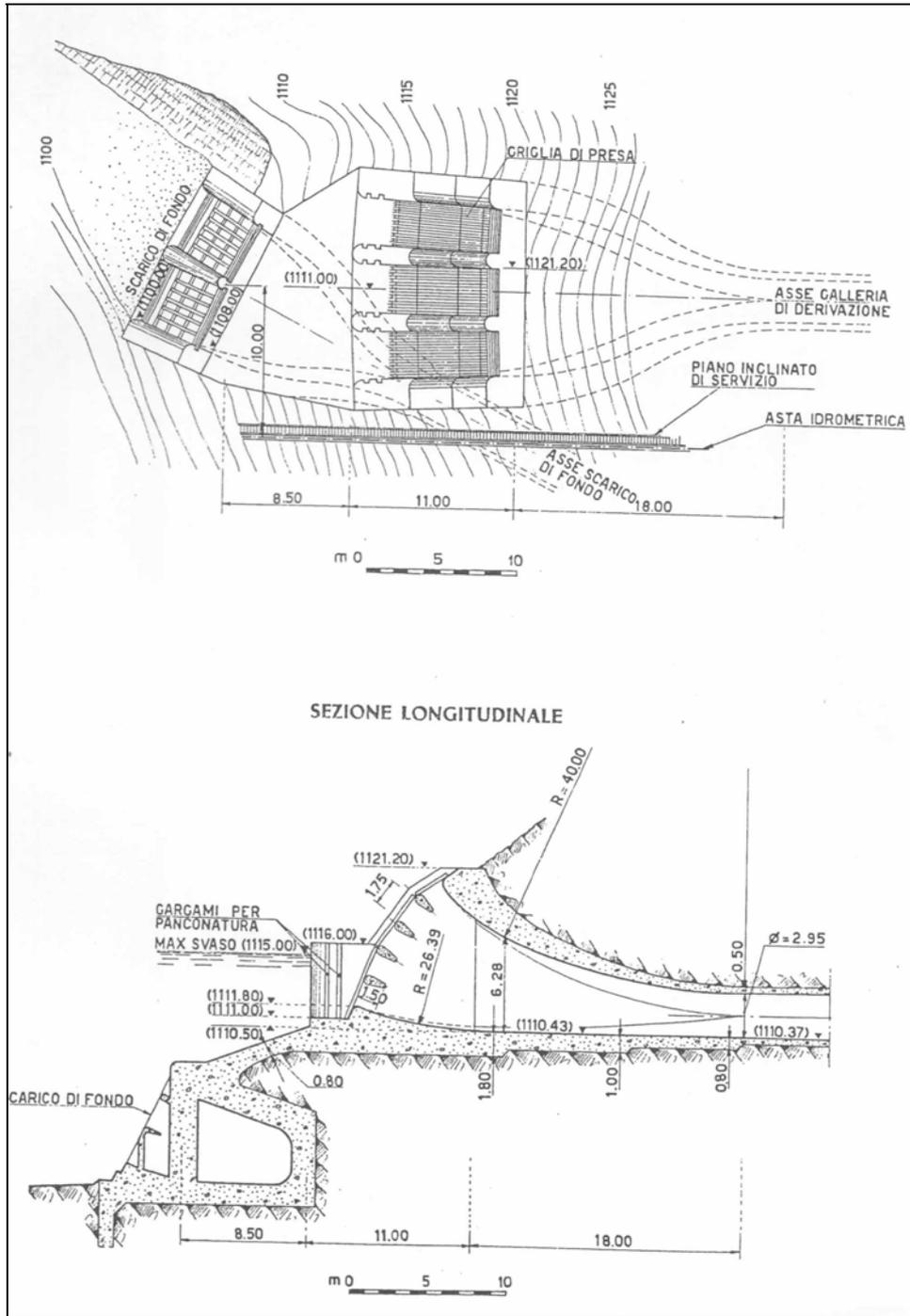


Figura 4.13 : Planimetria e sezione longitudinale dell'opera di presa

4.1.4 Gli impianti idroelettrici di Vaccarizzo, Mucone I salto e Mucone II salto

I tre impianti idroelettrici denominati di Vaccarizzo, Mucone I salto e Mucone II salto, sono regolati in testa, rispettivamente, dal serbatoio di Ariamacina (il primo) e dal serbatoio di Cecita (gli altri due).

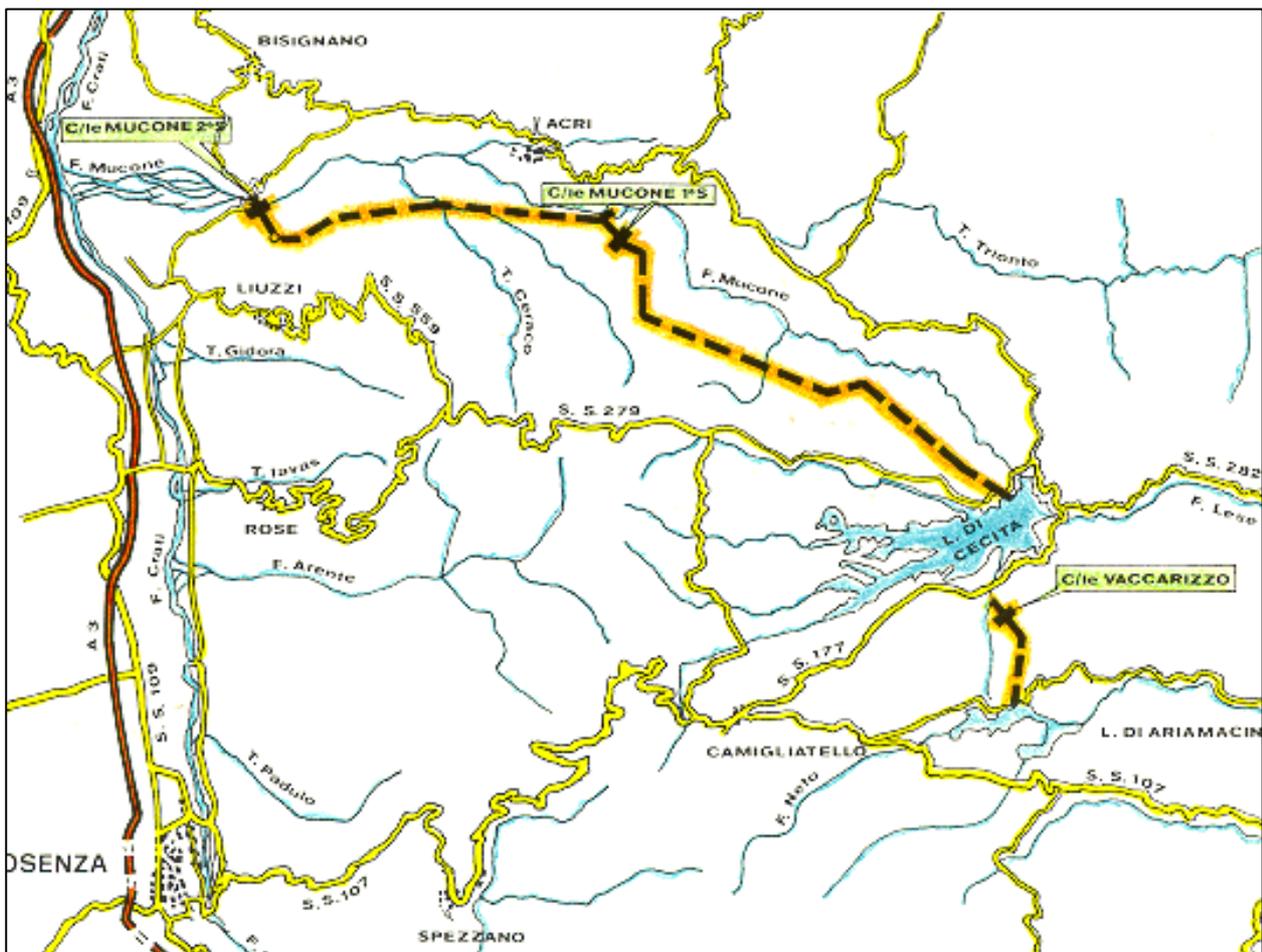


Figura 4.14 : Corografia del sistema idroelettrico di Vaccarizzo - Mucone I Salto - Mucone II Salto



Figura 4.15 : sistema idroelettrico di Vaccarizzo - Mucone I salto - Mucone II salto, profilo schematico

4.1.4.1 Impianto di Vaccarizzo

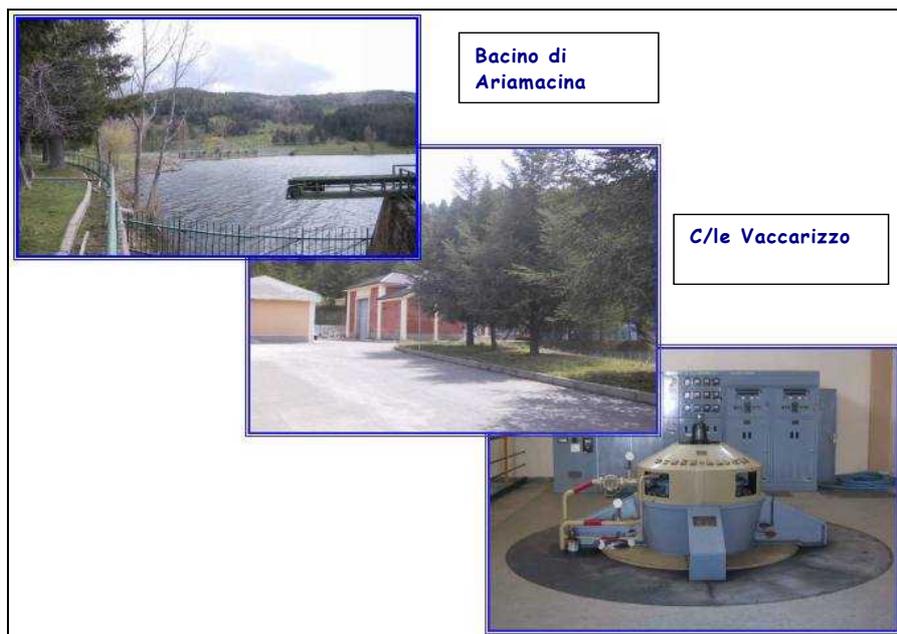


Figura 4.16 : Foto dell'invaso di Ariamacina e della centrale di Vaccarizzo

Opera di presa

L'opera di presa del bacino è posta in sponda sinistra protetta anteriormente da una griglia di ferro e dotata all'imbocco di una paratoia piana a strisciamento comandata oleodinamicamente da una cabina di manovra posta in loco.



Figura 4.17 : Vista dell'opera di presa

Galleria di derivazione in pressione

La galleria ha una lunghezza pari a 3,329 m , con portata massima derivabile di 6 m³/s, di diametro interno 2,00 m;

Condotta forzata

La condotta è metallica ed è installata all'aperto, protetta a monte da una valvola a farfalla. Quest'ultima è dotata di un dispositivo di comando in chiusura automatica per eccesso di velocità in condotta e di comando volontario di chiusura elettrico a distanza. L'apertura della valvola è comandata oleodinamicamente in sito. La condotta è lunga 967 m, diametro iniziale 2,00 m, diametro finale 1,60 m. In centrale la condotta termina con una valvola a farfalla di intercettazione alla turbina.

La quantità d'acqua max derivabile dal bacino è 6,0 m³/s, mentre la producibilità media annua dell'impianto è di 13,46 Gwh.



Figura 4.18 : Vista della condotta forzata

Centrale di Vaccarizzo

La Centrale idroelettrica di Vaccarizzo è costituita da un unico gruppo generatore asincrono della potenza di 8220 kVA equipaggiato con una turbina del tipo Francis ad asse verticale. Il gruppo è collegato rigidamente ad un trasformatore elevatore della potenza di 8500 kVA con rapporto 5/20 kV. L'energia prodotta è convogliata, mediante la linea 20/kV Cecita, alla stazione 150/20kV di Cecita a circa 8 km di distanza dalla centrale. La centrale è dotata di un armadio automatismi unificato per gruppi non regolanti.

Canale di scarico

Le acque turbinate dalla centrale Vaccarizzo sono restituite al lago Cecita per essere sfruttate sull'asta idraulica del Mucone, il canale di scarico è costituito da un breve tronco in uscita dalla turbina immersa nell'acqua, raccordato al canale che sbocca nel torrente Vaccarizzo con soglia allo sbocco a quota 1159,80 m s.l.m.m.



Figura 4.19 : Vista del canale di scarico

4.1.4.2 Impianti Idroelettrici Mucone I salto e Mucone II salto

Gli impianti idroelettrici sul fiume Mucone, affluente di destra del fiume Crati, nel quale sbocca a valle di Cosenza, sono stati realizzati nel periodo 1950 – 1955. Utilizzano su due salti, secondo lo schema classico di derivazione forzata con serbatoio di regolazione in testa, il tratto di asta fluviale, a forte pendenza e con un dislivello dell'ordine di 950,00 m, compreso tra la stretta di Cecita, in cui è stata realizzata la diga omonima e che costituisce il caratteristico ginocchio fra l'altopiano silano e le pendici che strapiombano verso il mare e la località Ponte Mucone, allo sbocco del canale di restituzione dell'impianto II salto, dove il fiume si allarga in un caotico delta alluvionale.

Il complesso suddetto, con prese, gallerie di derivazione e centrali in sinistra del fiume, comprende:

- il serbatoio di Cecita, con bacino imbrifero $157,95 \text{ km}^2$, quota massima di invaso 1142,25 m s.l.m.m. e volume utile 107,16 milioni di m^3 ;
- l'impianto I Salto, nella cui centrale in caverna di Acri (CS), sono installati due gruppi, ad asse orizzontale, da 55 MW ciascuno, composto ognuno da due turbine Pelton ad unico getto con introduttore diritto orizzontale montate a sbalzo ai lati di un unico alternatore situato al centro. Questa installazione, che a suo tempo fu la prima importante del genere realizzata nell'Italia Meridionale, è stata recentemente modificata, con sostituzione delle precedenti ruote Pelton con altre di caratteristiche diverse, che hanno fornito risultati soddisfacenti;

- l'impianto II salto, che utilizza, oltre alle acque di scarico del primo, i deflussi del bacino imbrifero intermedio del fiume Mucone, pari a 53,73 km² e quelli di altri bacini secondari, torrenti Bruviello, San Martino-Cericò e San Mauro, di superficie, rispettivamente 1,00, 36,26 e 4,50 km², affluenti di sinistra del fiume Mucone, immessi lungo la galleria forzata di derivazione. Nella relativa centrale all'aperto, posta in prossimità della cittadina di Bisignano (CS), sono installati due gruppi ad asse verticale, da 27 MW ciascuno, costituito da una turbina Francis e dal relativo alternatore.

Lo schema delle derivazioni è, per tutti e due gli impianti, completamente forzato, con uno sviluppo complessivo di gallerie di circa 24 km ed un dislivello geodetico di 949,75 m.

4.1.4.2a Impianto Mucone I Salto

Il bacino imbrifero direttamente sotteso è pari a 157,95 km²; la portata derivabile varia da una media di 3,40 m³/s ad una massima di 20,00 m³/s, con quota alla presa variabile da 1143,50 (massima eccezionale), 1142,25 (massima normale), 1135,90 (media) a 1115,00 m s.l.m.m. (minima), con restituzione a quota 501,25 m s.l.m.m.; il salto geodetico è pari 641,00 m, con un salto utile medio di 629,50 m.

A fronte di una potenza installata di 2 x 55 MV, la potenza efficiente è pari a 98,85 MV.

Opera di Presa

L'opera di presa è ubicata in sponda sinistra del serbatoio, al di sopra dello scarico di fondo; è costituita da tre luci, sormontate da una griglia di presa, con quota della soglia 1111,80 m s.l.m.m.

Le tre luci convogliano le acque nella galleria di derivazione, di diametro interno 2,95 m.

L'intercettazione avviene in corrispondenza della camera delle valvole ed è costituita da una paratoia piana a strisciamento 2,75 x 2,95 m e da una valvola a farfalla automatica per eccesso di velocità, con comando oleodinamico a distanza e sul posto.



Figura 4.20 : Camera di presa, vista del By pass e della valvola a farfalla

Galleria di derivazione

La galleria di derivazione, dimensionata per una portata massima derivabile di $20 \text{ m}^3/\text{s}$ ha una lunghezza complessiva di 13,618 km fino all'asse del pozzo piezometrico; è a sezione circolare con diametro interno variabile da 2,95 a 2,70 m, con rivestimento in c.a. normale per 8,582 km ed in c.a. precompresso costruito fuori opera per 5,158 km.

Il rivestimento in cemento armato precompresso è stato costruito in elementi della lunghezza di 5,00 m, con getto verticale senza riprese, in casseforme metalliche, con adeguata vibrazione della massa e con riduzione del rapporto acqua cemento mediante l'uso di pompe a vuoto, con il sistema Billner Vacuum Concrete.

L'azione di precompressione è stata realizzata mediante avvolgimento ad elica su unico strato di filo di acciaio diametro 5 mm ad alta resistenza.

Gli elementi del peso di 16.000 kg per diametro interno 2,70 m e di 17.000 kg per diametro interno di 2,85 m, sono stati introdotti nella galleria prerivestita, con intercapedine di 5,5 – 6,0 cm, mediante apposito carrello automotore con trasporto a sbalzo.

Pozzo piezometrico

Il pozzo piezometrico è a sezione cilindrica, del tipo differenziale, con camera di limitazione sulla canna piezometrica ed immissione a vortice degli sfiori della canna piezometrica nella parte superiore del pozzo verticale; ha una altezza complessiva di 112,00 m, di cui 72,00 m entro terra e

presenta una strozzatura alla base. Il pozzo verticale tra le quote 1159,00 e 1151,80 m s.l.m.m. ha un diametro di 10,60 m, che si riduce ad un diametro di 6,50 m tra le quote 1145,60 e 1075,00 m s.l.m.m. La canna piezometrica è inclinata ed ha un diametro di 1,50 m. In detta canna è inserita una camera di riserva della capacità di 200 m³, avente funzione di compenso nelle manovre di variazione di potenza dei gruppi.



Figura 4.21: Vista del pozzo piezometrico

Camera Valvole

A circa 135 m dal pozzo piezometrico è collocata, in caverna, la camera valvole, a quota 1024,72 m s.l.m.m.; ad essa si accede mediante una galleria di lunghezza circa 300,00 m. Nella camera sono posizionate due valvole a farfalla, quella di monte (di sicurezza), con chiusura manuale, mentre quella di valle è a chiusura automatica per eccesso di velocità dell'acqua in condotta, oppure volontaria con comando in sito o elettricamente a distanza dalla centrale o dal posto di teleconduzione PT/NA.



Figura 4.22 : Vista della galleria di accesso alla camera valvole

Condotta forzata

La condotta forzata ha inizio in caverna ispezionabile ed è costituita da una condotta metallica, del tipo libero, senza giunti, con pendenza 83,147 %, protetta a monte da due valvole a farfalla in serie, con diaframma di guida, quella a valle a chiusura automatica per eccesso di velocità dell'acqua in condotta o volontaria con comando in sito ed elettricamente a distanza dalla centrale e con apertura oleodinamica comandata in sito.

La lunghezza della condotta è di 843,458 m con diametro iniziale di 2,50 m e finale di 2,00 m, mentre il collettore ha una lunghezza di 54,072 m ed un diametro di 12,10 m. Dal collettore si dipartono le diramazioni per le turbine.

Centrale Mucone I Salto

La centrale è ubicata sulla sponda sinistra del fiume Mucone, in località Caprarizzi, nel Comune di Acri; è costruita in caverna ed è equipaggiata con due gruppi di turbine ad asse orizzontale, ciascuno composto di due turbine semplici, ad unico distributore circolare, con deviatore automatico del getto e con le rispettive ruote Pelton, alimentate ciascuna da unico getto, con introduttore diritto orizzontale, montate a sbalzo ai due lati di un unico alternatore, situato al centro. La potenza efficiente dell'impianto è pari a 101,440 MW, con una producibilità media annua di 191,71 Gwh.

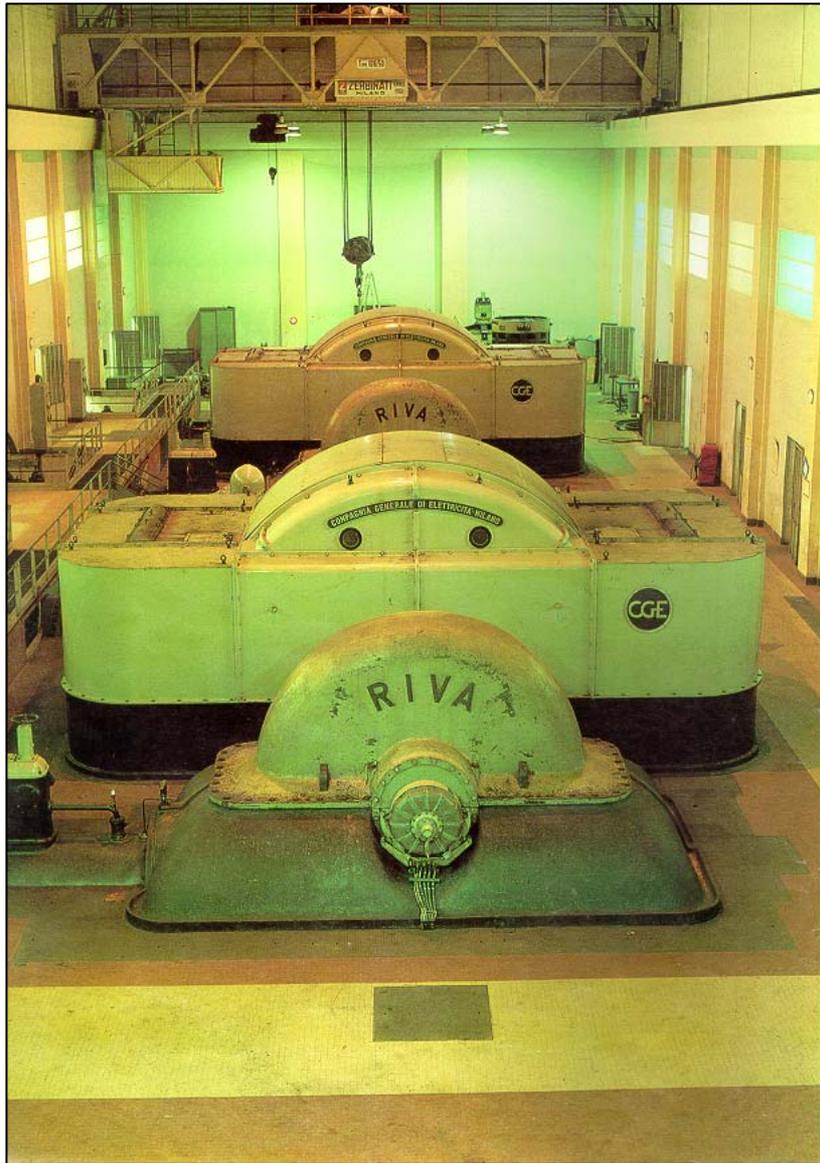


Figura 4.23 : Vista della sala macchine

La centrale è in caverna, con rivestimento in calcestruzzo armato a sezione policentrica, su pilastri e voltine, con ventilazione naturale e aria condizionata nei locali quadri e con uscita di sicurezza in testa alla Centrale.

La sala macchine ha una lunghezza di 59,50 m, larghezza 15,70 m ed altezza 15,80 m. Il locale quadri ha una lunghezza di 10,90 m, larghezza 14,70 ed altezza 15,80 m. I locali trasformatori e officina smontaggio, sempre in caverna, con rivestimento in calcestruzzo armato, a sezione policentrica, su pilastri e voltine, con lunghezza 53,00 m e larghezza variabile da 8,00 a 8,40 m ed altezza variabile da 11,40 a 16,50 m per l'officina smontaggio.

I locali trasformatori sono collegati alla centrale con apposito cunicolo, nel quale sono disposti i cavi 15 kV.

Alla Centrale si accede mediante una galleria a sezione policentrica di altezza 5,10 m e larghezza 4,916 m di lunghezza 789,90 m.

Opere di restituzione

I deflussi utilizzati dalla turbina vengono scaricati, attraverso una galleria di restituzione a pelo libero, direttamente nella galleria di derivazione dell'impianto a valle (impianto di Mucone 2° Salto) o, in caso di fuori servizio della centrale, direttamente nel fiume Mucone. La galleria è a sezione tipo svizzero con raggio 3,00 m.

Sezione 150/220 kV

La sezione 150/220 kV è ubicata all'aperto. Dalla sezione partono due linee a 150 KV e tre linee a 220 kV..

4.1.4.2b Impianto Mucone II Salto



Figura 4.24 : Vista della vasca di accumulo, del pozzo piezometrico e della centrale

Il bacino imbrifero sotteso è pari a 253,44 km² e comprende, altresì, i deflussi del bacino imbrifero intermedio del fiume Mucone (pari a 53,73 km²), le cui acque vengono captate a mezzo della presa ausiliaria sul fiume Mucone, e quelli dei bacini allacciati con prese sui torrenti Bruviello, San Martino-Cericò e San Mauro (affluenti di sinistra del fiume Mucone) di superficie, rispettivamente pari a 1,00, 36,26 e 4,50 km².

Il complesso di tali volumi idrici è convogliato in una vasca di accumulo di 30.000 m³, bacino di regolazione oraria che alimenta la Centrale Mucone II Salto.

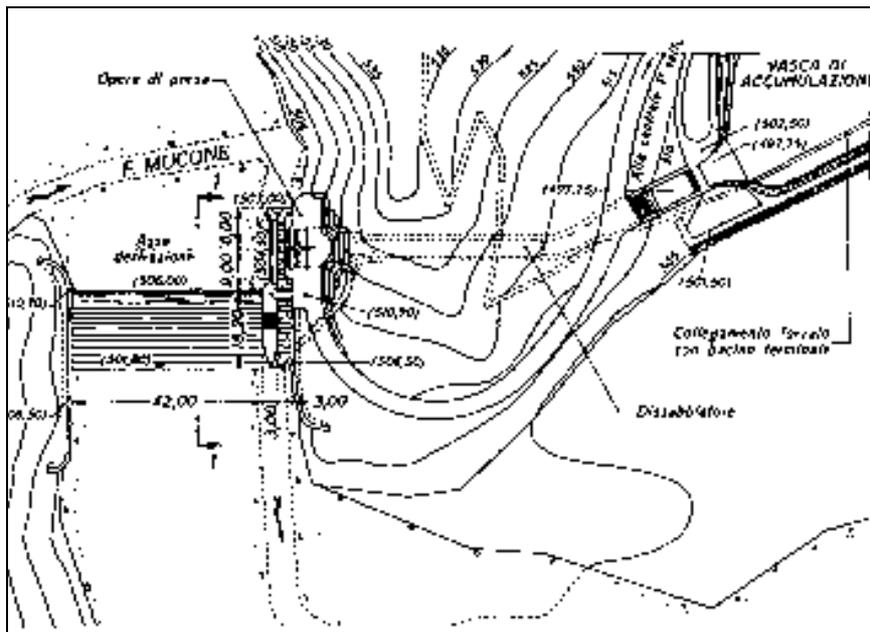


Figura 4.25 : Planimetria delle opere di sbarramento e della presa sussidiaria sul F. Mucone

Una soglia tracimabile divide la vasca in due parti di diversa capacità. La più piccola stabilisce con il suo livello il salto geodetico utilizzabile nell'impianto.

L'apporto del fiume Mucone, se inferiore a 3 m³/s, è convogliato direttamente nella vasca piccola mediante una tubazione in cemento poggiata sulla platea della vasca grande; se superiore, la quantità eccedente viene accumulata nella vasca grande; una paratoia a ventola, che funziona sulla differenza di pressione idrostatica agente sui due lati della stessa, riversa l'acqua dalla vasca grande alla vasca piccola quando il livello di quest'ultima è inferiore. Una galleria a pelo libero unisce l'acqua della vasca a quella turbinata, proveniente dalla galleria di scarico di Mucone I salto e a quella del torrente Bruviello.

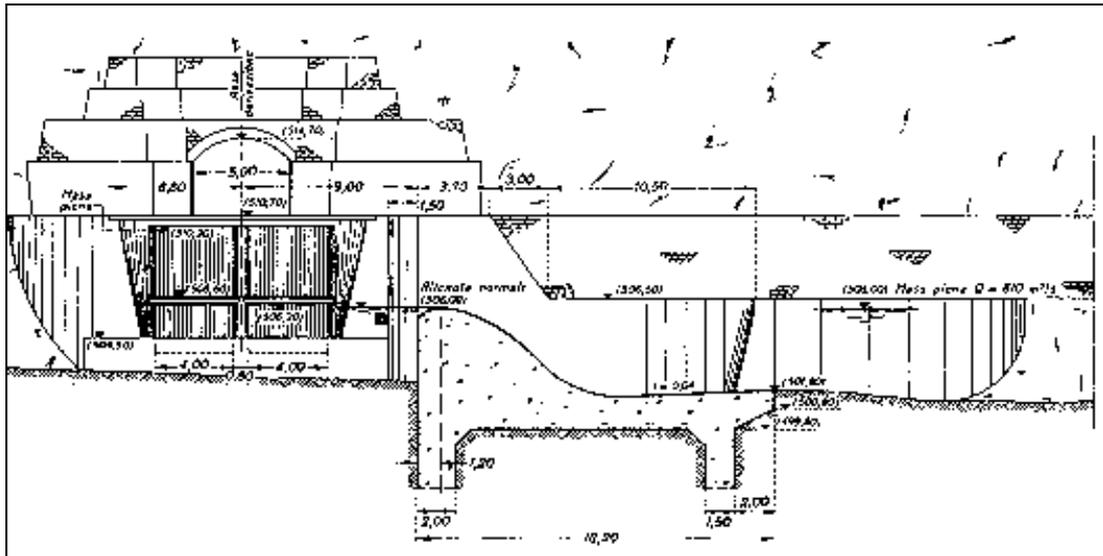


Figura 4.26 : Presa sussidiaria sul F. Mucone - Sezione della traversa di sbarramento

Il sistema di invaso ha due punti di sicurezza, che permettono di riversare l'acqua in eccedenza nel fiume Mucone. Uno è costituito da una soglia tracimabile a quota 501,40 m s.l.m.m., posta su un lato della vasca piccola, mentre l'altro è stato realizzato con una paratoia di livellamento situata nella galleria a pelo libero.

La portata derivabile varia da una media di 5,15 m³/s ad una massima di 20,00 m³/s, con quota di ritenuta variabile da 501,25 (massima), 499,75 (media) a 498,25 m s.l.m.m. (minima), con restituzione a quota 192,50 m s.l.m.m.; il salto geodetico è pari 308,75 m, con un salto utile medio di 306,10 m.

Opere di Presa

Le opere di presa sussidiaria sul fiume Mucone e sui torrenti Bruviello, San Martino-Cericò e San Mauro, sono costituite da una traversa di sbarramento a soglia derivante e presentano un particolare tipo di sistemazione in opera di griglie metalliche di presa, aventi lo scopo di evitare la necessità di sbrigliamento.

Difatti essendo i predetti alvei torrentizi dotati di forte portata solida durante piene, anche modeste, ne consegue la necessità di costruire opere di presa con modalità, che ne escludono il funzionamento, quando la portata nell'alveo supera un limite opportunamente prestabilito, onde ridurre al minimo possibile le portate introdotte nella derivazione sussidiaria.

Le griglie installate sono state realizzate in base alla considerazione che, se una griglia metallica di normale presa fluviale forma con la direzione della corrente che l'attraversa un angolo acuto anziché ottuso, i materiali galleggianti trascinati dalle acque defluenti, anziché tendere ad aderire ad essa, dovrebbero, per effetto del loro stesso peso, cadere nel canale di sgiaimento, sottostante la

griglia, normalmente realizzato in corrispondenza dell'incile di presa. Pertanto l'installazione delle griglie metalliche, prevede la possibilità di far loro assumere, in caso di necessità, l'inclinazione comunemente adottata, per rotazione intorno alla cerniera inferiore all'uopo predisposta.

L'installazione delle griglie, fin dall'inizio dell'esercizio nel 1955, dette risultati soddisfacenti.

L'acqua dissabbiata si riversa per sfioro nel pozzo di caduta al cui piede è inserita la tubazione in pressione, di collegamento con la galleria forzata dell'impianto.

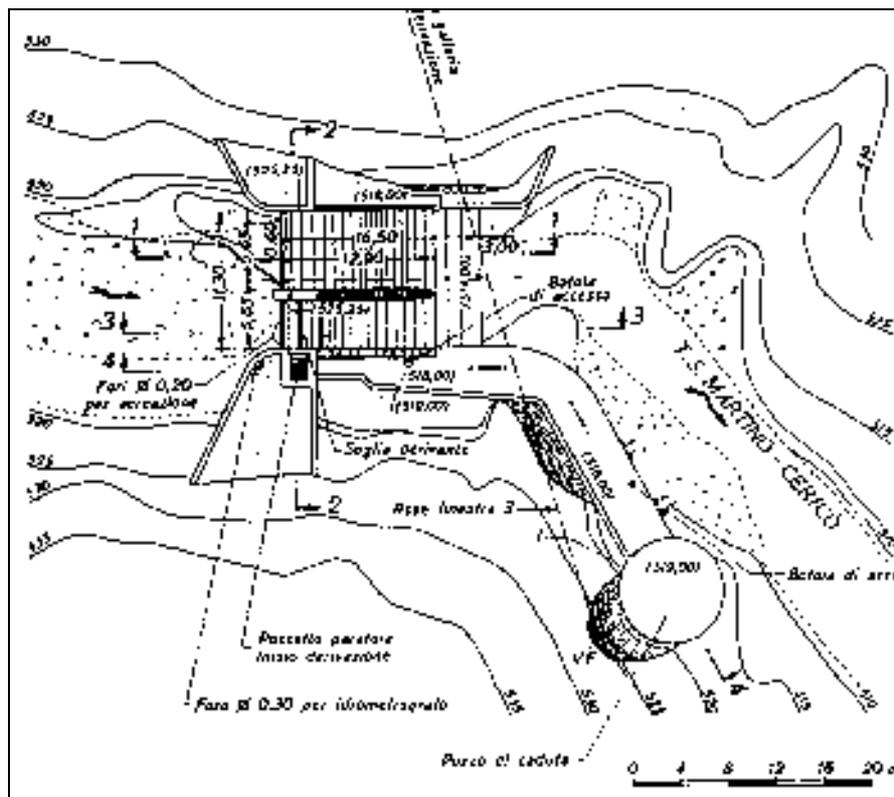


Figura 4.27 : Planimetria della presa sussidiaria sul Torrente S. Martino - Cericò

Galleria di derivazione forzata

La galleria di derivazione, dimensionata per una portata massima derivabile di 20 m³/s ha una lunghezza complessiva di 10,425 km m fino all'asse del pozzo piezometrico; è a sezione circolare con diametro interno di 3,30 m, con rivestimento in c.a. normale; ha origine nella galleria a pelo libero e termina nel pozzo piezometrico.

Pozzo piezometrico e camera valvola

Al termine della galleria forzata è ubicata la camera valvola; nell'ambito delle stesse strutture civili a monte di essa si trova la canna piezometrica, costituita da una struttura circolare in calcestruzzo diametro 2.80 e di altezza totale 40 m tutta all'esterno; il pozzo piezometrico, che si trova più a

monte della canna, è costituito da una struttura cilindrica in calcestruzzo tutta all'esterno, con diametro da 12,8 m a 20 m ed altezza totale di 36 m. Nella camera valvole sono presenti due valvole a farfalla, quella di monte (di sicurezza), con sgancio manuale, mentre quella di valle è a chiusura automatica per eccesso di velocità dell'acqua in condotta, oppure volontaria, comandata in sito ed elettricamente a distanza dalla centrale o dal posto di teleconduzione PT/NA.



Figura 4.28 : Vista del pozzo piezometrico

Condotta forzata

La condotta forzata ha inizio dal pozzo piezometrico ed è costituita da una tubazione metallica, con giunti di dilatazione, protetta a monte da due valvole a farfalla in serie, quella a valle a chiusura automatica per eccesso di velocità dell'acqua in condotta o volontaria con comando in sito ed elettricamente a distanza dalla centrale e con apertura oleodinamica comandata in sito.

La lunghezza della condotta è di 1150,00 m con diametro iniziale di 2,90 m e finale di 2,30 m; il finale diramatore ha un diametro di 1,63 m.; da questo si dipartono le diramazioni per le turbine.

Centrale Mucone II Salto

La centrale idroelettrica del Mucone II salto è ubicata all'aperto a circa una quota 198,00 m s.l.m.m. nel Comune di Luzzi (CS); è equipaggiata con due gruppi ad asse verticale, costituiti da generatore sincrono e turbina Francis. Ogni alternatore ha una potenza di 32 MVA.

La stazione elettrica e' costituita da un quadro blindato in SF6 a 150 kV, costituita da due semisbarre accoppiate con sezionatore di serie (89c), sul quale afferisce la produzione dei gruppi attraverso i rispettivi trasformatori elevatori 10/150kV, e due linee denominate "ATR-150/220kV", e "Feroletto" (la linea Feroletto a 150kV, ad oggi é fuori servizio).

Nel quadro all'aperto e' installato un autotrasformatore 150/220 kV con potenza 100 MVA che connette la rete a 220/kV (linea Mucone 2°- Feroletto e Mucone 2° S. - Rotonda).

I due trasformatori di gruppo hanno un rapporto di trasformazione a vuoto $10\pm 5\%$ 10/150kV ed una potenza di 32 MVA ciascuno.

I servizi ausiliari dell'impianto sono alimentati tramite due trasformatori MT/bt 20/0,4 kV da 250 kVA, ai quali afferiscono le linee MT denominate " Ponte Mucone " e "Serra di Buda", una di riserva all'altra , di competenza della D.D. Calabria.

I S.A., in emergenza, sono alimentati da un gruppo elettrogeno da 200 kVA.

La potenza efficiente dell'impianto è pari a 54,00 MW, con una producibilità media annua di 100,90 GWh.

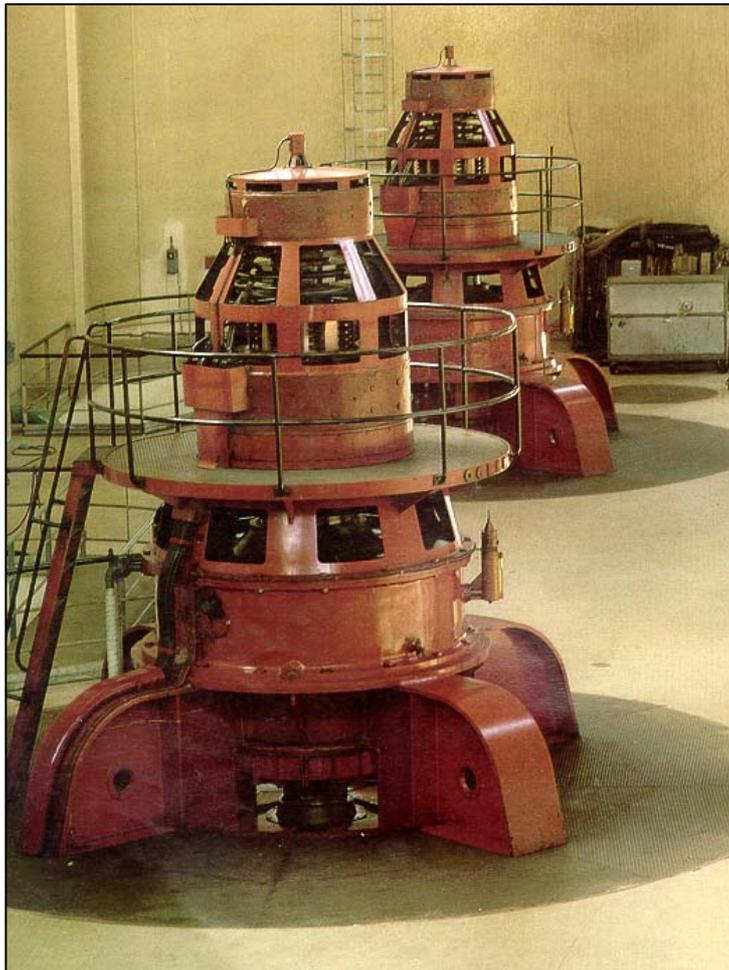


Figura 4.29 : Vista della sala macchine

Opere di restituzione

I deflussi utilizzati dalla turbina vengono scaricati, attraverso un canale di restituzione a pelo libero, direttamente nell'alveo del fiume Mucone, per essere captati dall'impianto irriguo "Mucone" mediante incanalamento in una vasca di modulazione.



Figura 4.30 : Vista della paratoia di regolazione del canale di scarico

4.1.5 Curve volumi-quote e superfici-quote

4.1.5.1 Serbatoio di Ariamacina

La figura successiva mostra la curva teorica dei volumi invasati e delle superfici occupate dalla acque invasate nel serbatoio di Ariamacina in funzione delle quote del pelo libero:

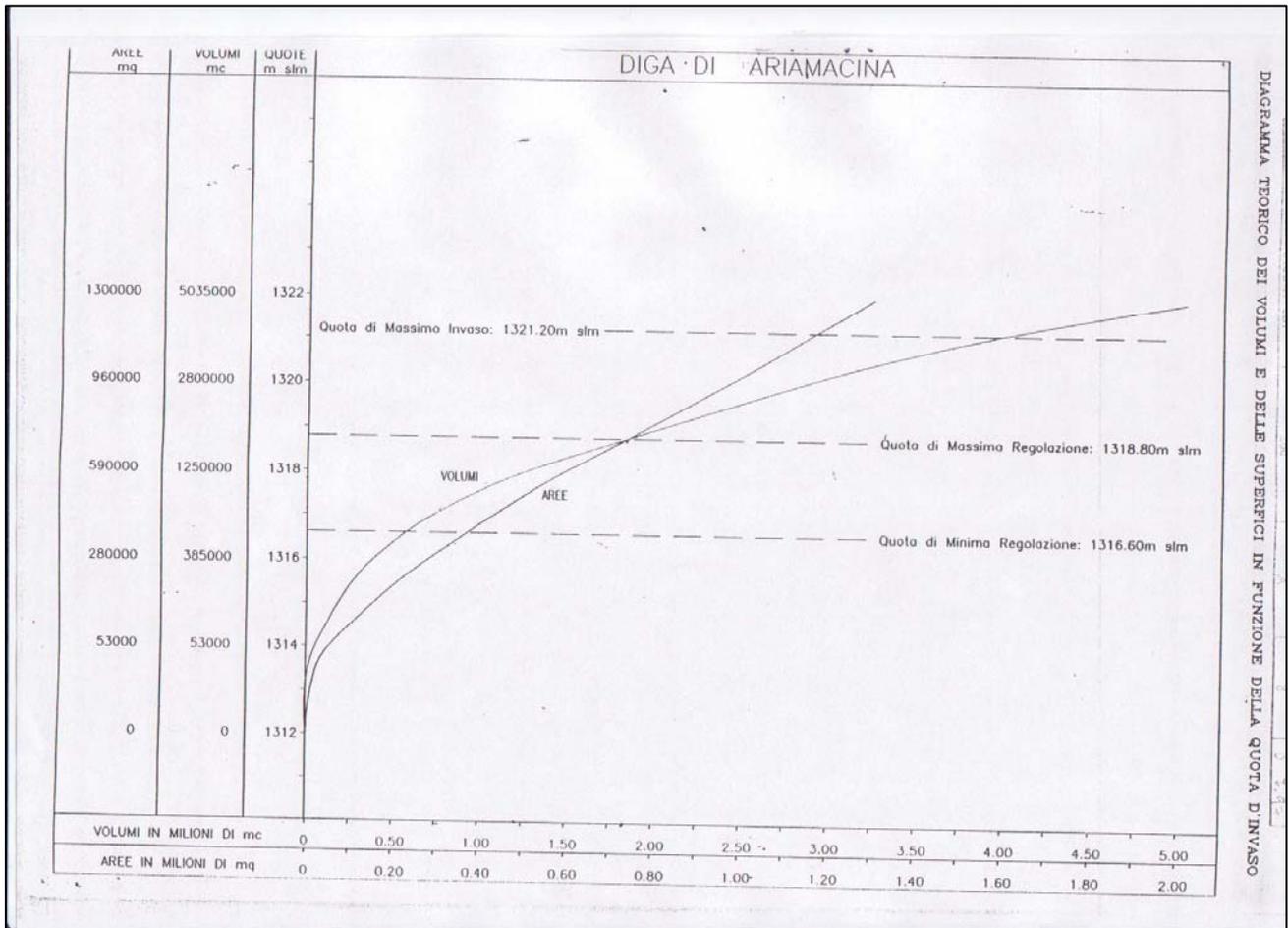


Figura 4.31 – Curve teoriche quote/volumi e aree/volumi per il serbatoio di Ariamacina

Ai fini dell'applicazione dei modelli di ottimizzazione esposti nei loro lineamenti teorici nei paragrafi precedenti, si è proceduto alla approssimazione delle curve mostrate nella figura precedente, mediante equazioni del tipo $A = A_0 \cdot (z - z_{MIN})^y$ per la curva aree-quote e $S = S_0 \cdot (z - z_{MIN})^b$ per la curva volumi-quote, ottenendo le seguenti relazioni:

$$A = 0,0312 \cdot (z - z_{MIN})^{1,6276} \quad \text{per la curva aree-quote} \quad (4.1)$$

$$S = 0,0099 \cdot (z - z_{MIN})^{2,7096} \quad \text{per la curva volumi-quote} \quad (4.2)$$

dove z_{MIN} è la quota per cui si annullano i volumi e le aree; nel caso del serbatoio di Ariamacina $z_{MIN} = 1312,00$ m s.l.m.m.

I punti reali e le curve approssimanti sono riportate nelle successive due figure.

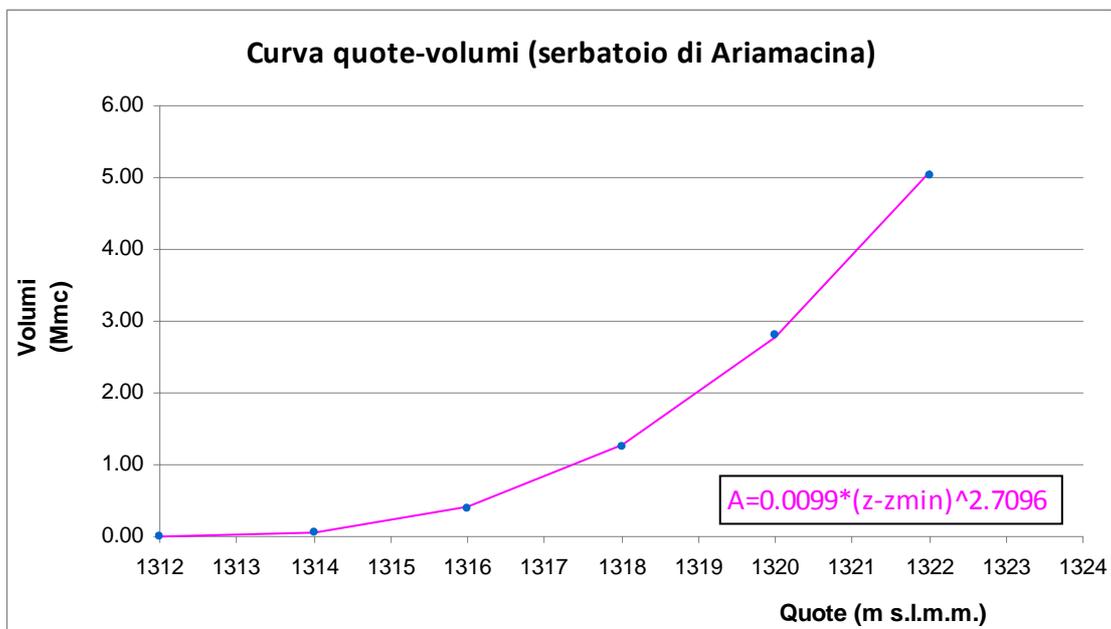
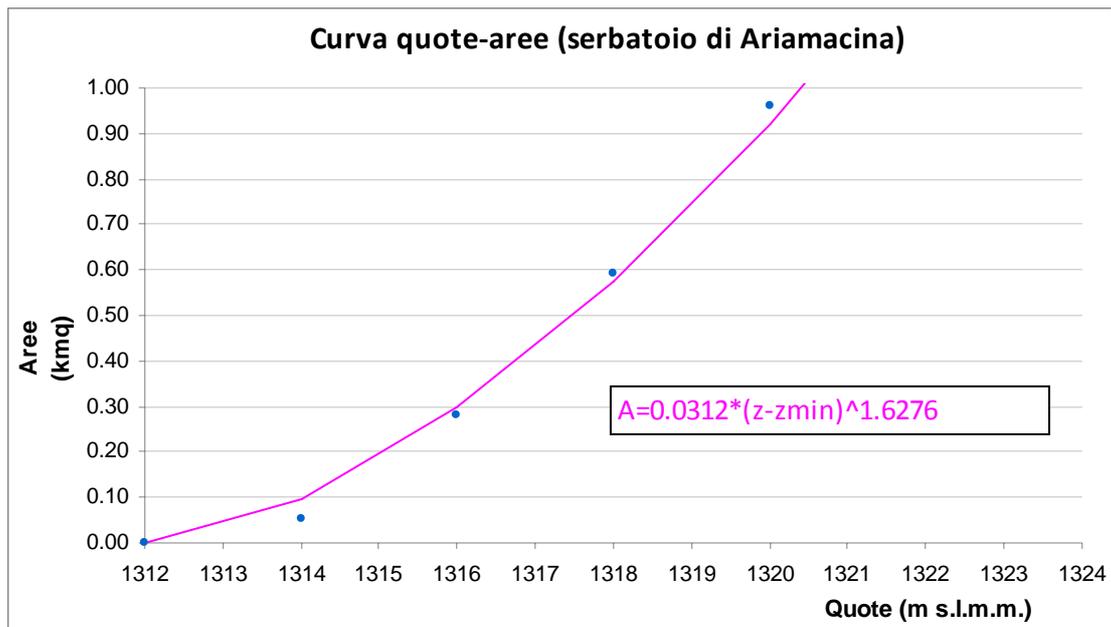


Figura 4.32 –Approssimazione delle curve teoriche quote/volumi e aree/volumi per il serbatoio di Ariamacina

4.1.5.2 Serbatoio di Cecita

La figura successiva mostra la curva teorica dei volumi invasati e delle superfici occupate dalla acque invasate nel serbatoio di Cecita in funzione delle quote del pelo libero:

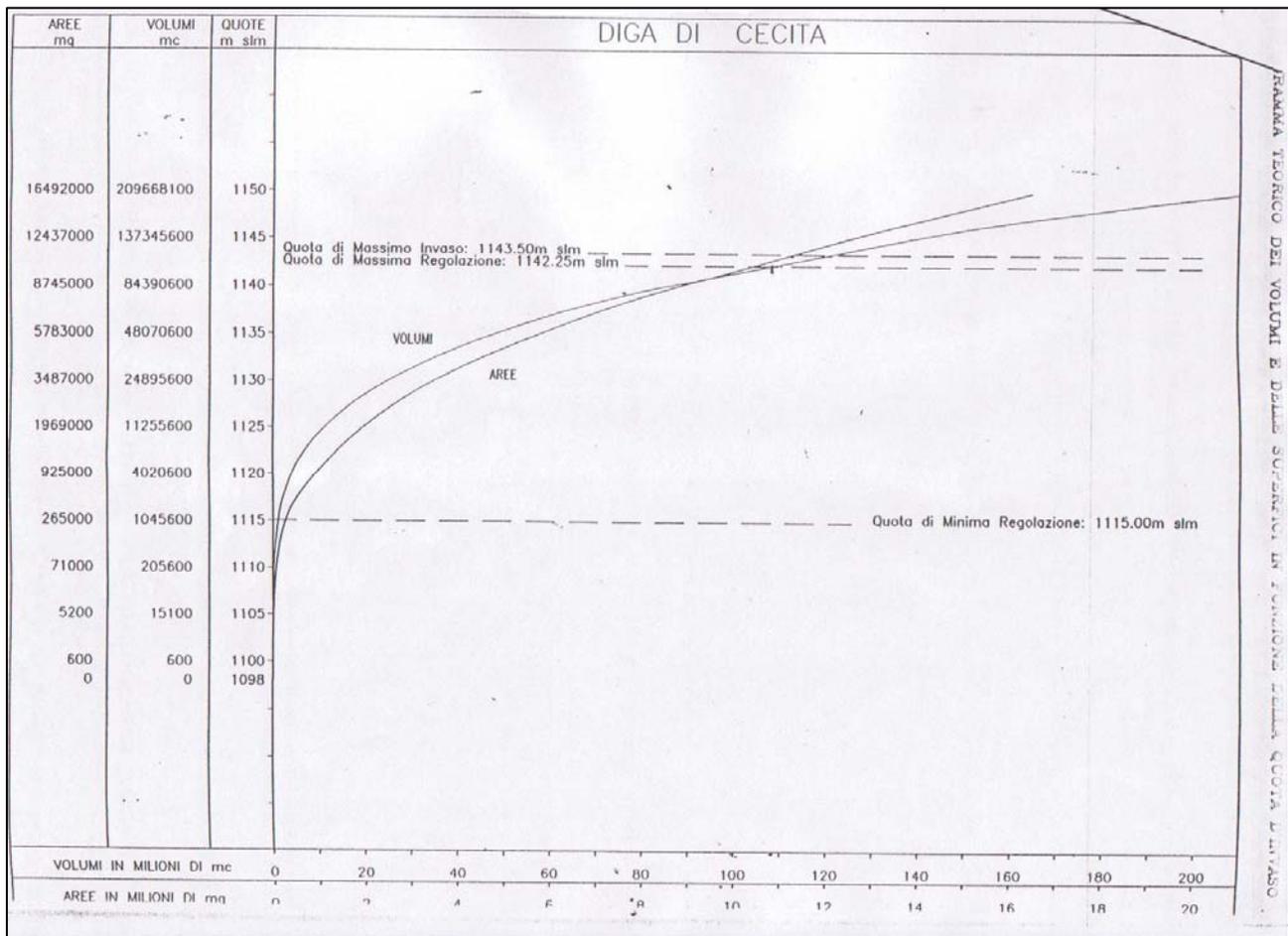


Figura 4.33 – Curve teoriche quote/volumi e aree/volumi per il serbatoio di Cecita

Ai fini dell'applicazione dei modelli di ottimizzazione esposti nei loro lineamenti teorici nei paragrafi precedenti, si è proceduto alla interpolazione delle curve mostrate nella figura precedente, mediante equazioni del tipo $A = A_0 \cdot (z - z_{MIN})^\gamma$ per la curva aree-quote e $S = S_0 \cdot (z - z_{MIN})^\beta$ per la curva volumi-quote, ottenendo le seguenti relazioni:

$$A = 0,000066046 \cdot (z - z_{MIN})^{3,1491} \quad \text{per la curva aree-quote} \quad (4.3)$$

$$S = 0,0000080578 \cdot (z - z_{MIN})^{4,3223} \quad \text{per la curva volumi-quote} \quad (4.4)$$

dove z_{MIN} è la quota per cui si annullano i volumi e le aree; nel caso del serbatoio di Ariamacina $z_{MIN} = 1098,00$ m s.l.m.m.

I punti reali e le curve interpolanti sono riportate nelle successive due figure.

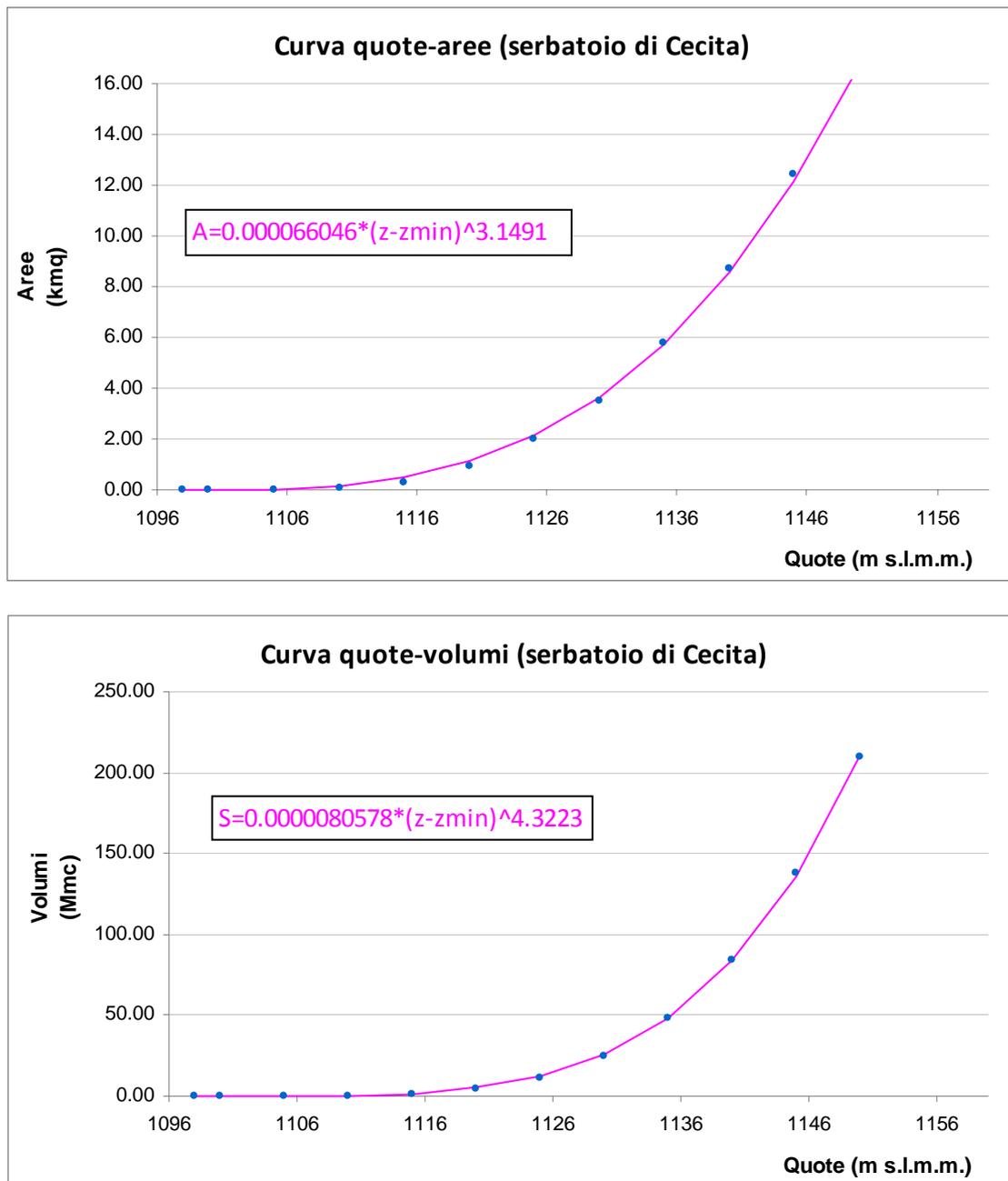


Figura 4.34 – Approssimazione delle curve teoriche quote/volumi e aree/volumi per il serbatoio di Cecita

4.2 Descrizione dell’ impianto di irrigazione “Mucone”

L’impianto interessa la media valle del Crati situata a circa 12 km a nord di Cosenza, e si estende per circa 5 km in destra e sinistra Mucone.

Sono interessati dal comprensorio i territori dei comuni di Bisignano, Luzzi, S. Sofia d’Epiro e Tarsia.

Le caratteristiche principali sono:

Superficie dominata	40 km ² (4000 ha)
Superficie irrigabile	30 km ² (3000 ha)
Superficie irrigata	14,3 km ² (1430 ha)
Grado di utilizzazione	48%

Il clima è quello tipico della media valle del Crati, caratterizzato da piovosità abbondanti, temperature invernali estremamente variabili e possibilità di gelate primaverili.

Gli indirizzi colturali attuali vertono prevalentemente sulle colture in asciutto tradizionali quali cereali e olivo, mentre l'irrigazione è orientata sull'orticoltura e sulle foraggere. Si hanno inoltre vigneti, oliveti e coltivazioni varie.

La disponibilità idrica è assicurata dalle fluenze del fiume Mucone per una portata massima di 5530 l/s derivata a valle dello scarico della central idroelettrica ENEL. Mediante presa a quota 192,50 m s.l.m.m. e adduzione sino a una vasca di compenso di 300.000 m³.

La rete di adduzione e quella di distribuzione è interamente tubata e l'irrigazione avviene per aspersione e per espansione.

I principali parametri irrigui derivanti dal progetto originario sono:

dotazione annua	0,64 Mm ³ /km ² (6400 m ³ /ha)
Corpo d'acqua	20 l/s
Orario d'esercizio	16/24 ore
Periodo irriguo	1 maggio / 30 ottobre

Tutte le reti di distribuzione (circa 250 km) sono realizzate in cemento amianto, da sostituire in adeguamento alle norme sanitarie vigenti.

4.3 Caratteristiche dei bacini idrografici afferenti il sistema

Nel prosieguo si esaminano le caratteristiche dei bacini idrografici afferenti le sezioni significative del sistema di invasi descritto nei precedenti paragrafi.

L'analisi è stata effettuata sulla base del D.T.M. della regione Calabria con risoluzione 20 m.

Le sezioni suddette sono:

- la diga di Ariamacina sul fiume Neto;
- la diga di Cecita sul torrente Mucone;

- l'opera di presa sul torrente Mucone, a valle della diga di Cecita, per immissione nella galleria di derivazione dell'impianto II salto;
- l'opera di presa sul torrente Ceraco (detto anche San Martino - Cericò) per immissione nella galleria di derivazione dell'impianto II salto;
- la restituzione a valle dell'impianto II salto.

La figura 4.35 riporta gli elementi principali del sistema di invasi, mentre nella figura 4.36 è riportata la delimitazione dei bacini idrografici chiusi alle sezioni significative indicate in precedenza.

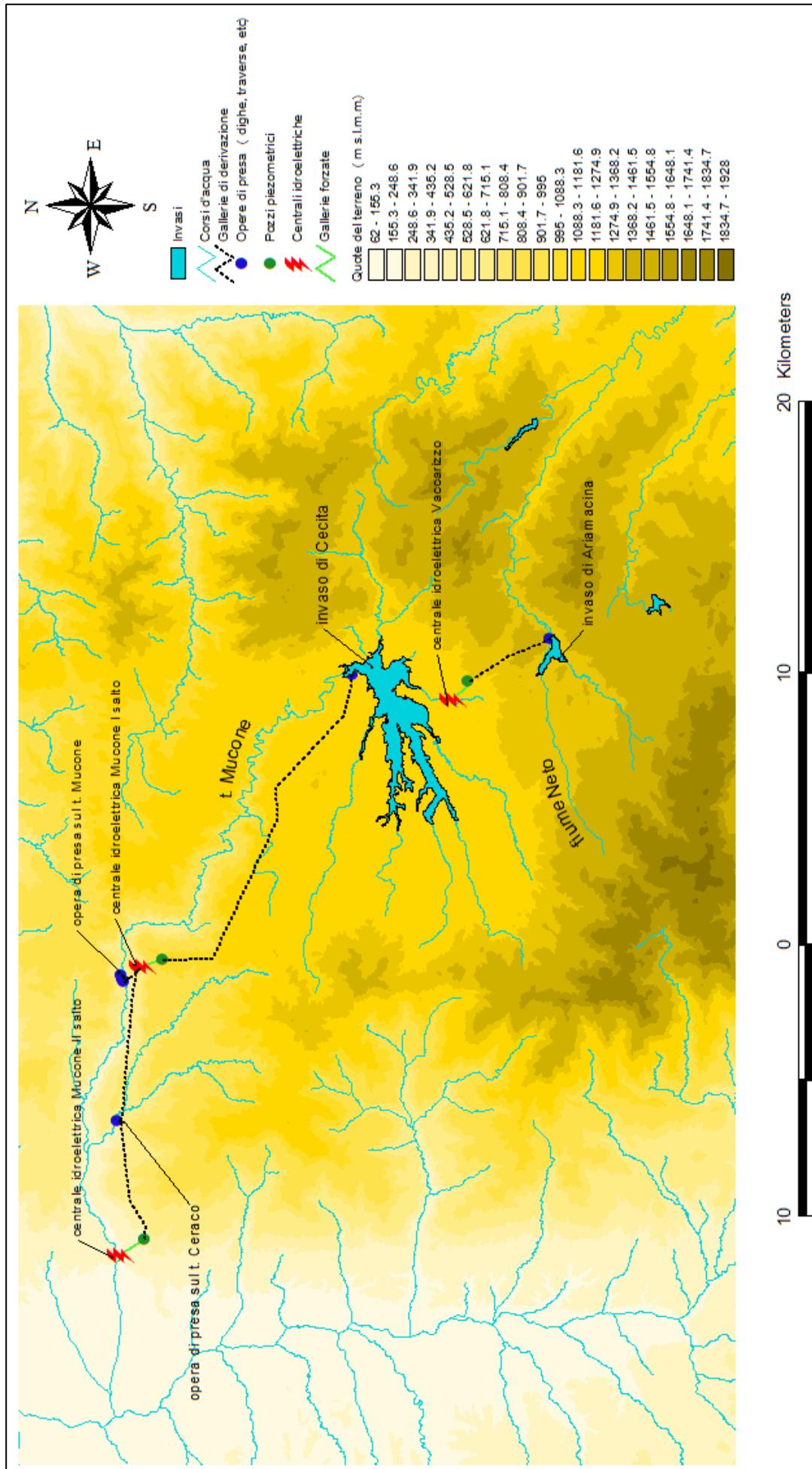


Figura 4.35 – Planimetria del sistema di invasi Ariamacina-Cecita

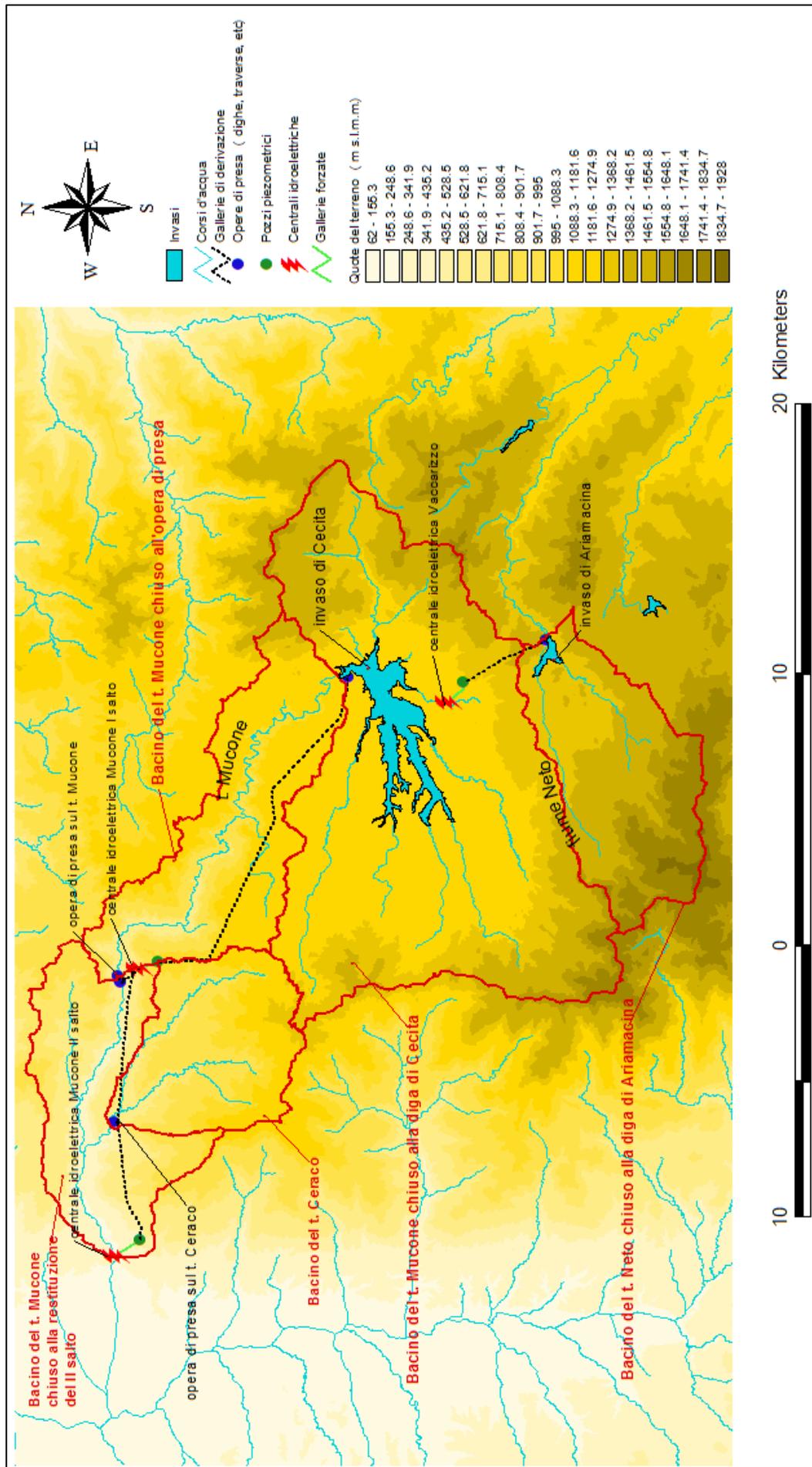


Figura 4.36 – Bacini idrografici afferenti le sezioni significative del sistema di invasi Ariamacina-Cecita

Le caratteristiche del bacino idrografico del fiume Neto chiuso alla diga di Ariamacina sono:

superficie: 45,997 km²

perimetro: 34,386 km

quota media: 1509,86 m s.l.m.m.

pendenza media: 11,33%

Le caratteristiche del bacino idrografico del t. Mucone chiuso alla diga di Cecita sono:

superficie: 157,948 km²

perimetro: 71,354 km

quota media: 1286,12 m s.l.m.m.

pendenza media: 9,01%

Le caratteristiche del bacino idrografico parziale del t. Mucone (cioè escludendo la precedente porzione afferente la diga di Cecita) chiuso all'opera di presa sono:

superficie: 53,725 km²

perimetro: 46,251 km

quota media: 1074,21 m s.l.m.m.

pendenza media: 16,59%

Le caratteristiche del bacino idrografico parziale del t. Mucone (cioè escludendo i bacini afferenti l'opera di presa e la diga) chiuso all'opera di restituzione della centrale idroelettrica II salto sono:

superficie: 41,640 km²

perimetro: 39,734 km

quota media: 632,67 m s.l.m.m.

pendenza media: 18,78%

Le caratteristiche del bacino idrografico del t. Ceraco chiuso all'opera di presa sono:

superficie: 36,265 km²

perimetro: 27,364 km

quota media: 982,65 m s.l.m.m.

pendenza media: 16,01%

4.4 Generazione stocastica dei dati di input (deflussi e temperature mensili) al sistema

I modelli di ottimizzazione descritti teoricamente nei paragrafi precedenti, necessitano, come dati in ingresso, di serie (storiche o generate stocasticamente) di deflussi mensili afferenti le sezioni significative del sistema (introdotte nel precedente paragrafo) e temperature medie mensili in prossimità delle dighe.

Tali grandezze, come anticipato, sono fondamentali per la corretta impostazione e risoluzione delle equazioni del modello di ottimizzazione esposto nei successivi paragrafi: in particolare, le temperature medie mensili sono basilari per il calcolo dei volumi evaporati mensilmente dagli invasi del sistema.

In questo paragrafo si espone la modellazione stocastica utilizzata per la descrizione probabilistica degli afflussi meteorici e temperature medie discretizzate alla scala mensile.

Una volta generate le serie dei valori di queste ultime grandezze, sono state ricavate:

- le serie dei valori di deflusso mensile tramite l'uso di coefficienti di deflusso medio mensile desunti dagli annali idrologici redatti dall'ex Servizio Idrografico;
- le serie dei valori di tasso di evaporazione mensile (in mm/mese), mediante l'uso della formula cosiddetta di Visentini.

4.4.1 Modellazione stocastica delle precipitazioni

Nel prosieguo si espone la descrizione probabilistica delle precipitazioni e delle temperature mediante l'impiego di modelli stocastici a parametro discreto $\{A_k \ k \in N\}$ come esposto in Sirangelo (2010).

Nel problema in esame appare adeguata l'adozione di una scala temporale di discretizzazione mensile.

La variabile aleatoria A_k , caratterizzante il modello stocastico a parametro discreto della generica grandezza A , sarà quindi fornita:

- per le precipitazioni, dalla cumulata mensile delle stesse $P_{12 \cdot N_a + m}$ in cui $k = 12 \cdot N_a + m$;
- per le temperature, dalla media mensile delle stesse $T_{12 \cdot N_a + m}$ in cui è sempre $k = 12 \cdot N_a + m$;

dove N_a è l'indice dell'anno ($N_a = 1, 2, 3, \dots$) e m quello del mese ($m = 1$ (gennaio), 2 (febbraio), ..., 12 (dicembre)). Le generiche grandezze $A_{12 \cdot N_a + m}$ sono variabili aleatorie per le quali è

possibile ipotizzare una distribuzione probabilistica trans-normale (Draper & Cox, 1969) nella forma approssimata detta “trasformata di Box e Cox”.

Si assumerà, pertanto, che le variabili aleatorie $Y_{12 \cdot N_a + m}$, trasformate delle variabili originarie $A_{12 \cdot N_a + m}$ secondo la:

$$Y_{12 \cdot N_a + m} = \begin{cases} (A_{12 \cdot N_a + m})^\lambda & \text{per } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \ln A_{12 \cdot N_a + m} & \text{per } \lambda = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

risultino distribuite in accordo alla legge probabilistica gaussiana.

D'altra parte, una delle peculiarità delle precipitazioni cumulate alla scala mensile e delle temperature medie mensili dell'Italia meridionale, è la marcata stagionalità caratterizzata:

- per le precipitazioni, da valori ridotti nei periodi estivi;
- per le temperature, da valori elevati negli stessi periodi.

Il processo si presenta come ciclo-stazionario risultando invariante per traslazioni dell'asse temporale la cui ampiezza sia multiplo dell'anno. E' possibile, quindi, effettuare una sorta di “destagionalizzazione” dei processi in oggetto mediante l'introduzione di una nuova variabile aleatoria ottenuta direttamente dalla $Y_{12 \cdot N_a + m}$ mediante la relazione:

$$Z_k = \frac{Y_{12 \cdot N_a + m} - \mu_{Y_m}}{\sigma_{Y_m}} \quad (4.6)$$

dove μ_{Y_m} e σ_{Y_m} rappresentano le medie e gli scarti quadratici medi delle variabili aleatorie $Y_{12 \cdot N_a + m}$ che, grazie alla suddetta ciclo-stazionarietà, dipendono dal mese m ma non dall'anno N_a .

L'operazione di “destagionalizzazione”, pertanto, comporta la stima di ben 24 parametri (μ_{Y_m} e σ_{Y_m} con $m = 1, 2, \dots, 12$).

Un approccio modificato che permette di utilizzare un numero minore di parametri è quello che prevede la descrizione di μ_{Y_m} e σ_{Y_m} (o, rispetto a quest'ultima, equivalentemente della varianza $\sigma_{Y_m}^2$) per mezzo di una funzione periodica, di periodo pari a un anno, espressa in forma approssimata tramite il suo sviluppo di Fourier troncato:

$$\mu_{Y_m} \cong \tilde{\mu}_{Y_m} = \frac{1}{2} \cdot a_0^{(\mu)} + \sum_{j=1}^{N_{ar}^{(\mu)}} \left[a_j^{(\mu)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot j \cdot m\right) + b_j^{(\mu)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot j \cdot m\right) \right] \quad (4.7)$$

$$\sigma_{Y_m}^2 \cong \tilde{\sigma}_{Y_m}^2 = \frac{1}{2} \cdot a_0^{(\sigma^2)} + \sum_{j=1}^{N_{ar}^{(\sigma^2)}} \left[a_j^{(\sigma^2)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot j \cdot m\right) + b_j^{(\sigma^2)} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot j \cdot m\right) \right] \quad (4.8)$$

in cui:

- $N_{ar}^{(\mu)}$ indica il numero di armoniche considerate per la media, mentre $a_0^{(\mu)}$, $a_j^{(\mu)}$, $b_j^{(\mu)}$ con $j = 1, \dots, N_{ar}^{(\mu)}$ indicano i coefficienti di Fourier per la media;
- $N_{ar}^{(\sigma^2)}$ indica il numero di armoniche considerate per la varianza, mentre $a_0^{(\sigma^2)}$, $a_j^{(\sigma^2)}$, $b_j^{(\sigma^2)}$ con $j = 1, \dots, N_{ar}^{(\sigma^2)}$ indicano i coefficienti di Fourier per la varianza;

Con tale approccio il numero di parametri da stimare dipende dal numero di armoniche considerate: nell'applicazione in oggetto si è verificato $N_{ar}^{(\mu)} = N_{ar}^{(\sigma^2)} = 1$ oppure $N_{ar}^{(\mu)} = N_{ar}^{(\sigma^2)} = 2$ con l'impiego, pertanto, di 6 o 10 parametri.

In definitiva, una volta stimati:

- il parametro λ della trasformata di Box & Cox;
- il numero di armoniche $N_{ar}^{(\mu)} = N_{ar}^{(\sigma^2)}$ degli sviluppi di Fourier troncati;
- i coefficienti $a_0^{(\mu)}$, $a_j^{(\mu)}$, $b_j^{(\mu)}$ con $j = 1, \dots, N_{ar}^{(\mu)}$ e $a_0^{(\sigma^2)}$, $a_j^{(\sigma^2)}$, $b_j^{(\sigma^2)}$ con $j = 1, \dots, N_{ar}^{(\sigma^2)}$ degli sviluppi stessi;

la descrizione probabilistica della generica grandezza A_k a scala mensile è così ridotto al ben più semplice processo gaussiano standardizzato Z_k .

La strategia di stima consiste nel determinare i valori parametrici suddetti in modo che:

- sia nulla l'asimmetria campionaria g_{1Z} della variabile aleatoria Z ;
- $\tilde{\mu}_{Y_m}$ e $\tilde{\sigma}_{Y_m}^2$ ricadano nella regione di non rigettabilità per un test di ipotesi di stazionarietà del secondo ordine del processo Z_k ;
- $N_{ar}^{(\mu)} = N_{ar}^{(\sigma^2)}$ sia il minimo numero di armoniche per cui risulti positivo il test precedente.

In particolare, avendo a disposizione un campione di N anni di osservazioni di afflussi mensili $p_{12 \cdot N_a + m}$ e temperature medie mensili $t_{12 \cdot N_a + m}$ ($N_a = 1, 2, \dots, N$ e $m = 1, 2, \dots, 12$ per un totale di $N_D = 12 \cdot N$ dati per ciascuna grandezza considerata – deflussi mensili e temperature medie mensili), l'algoritmo di stima si basa sulla scelta iniziale di un valore di primo tentativo di λ , sulla valutazione dei campioni gaussianizzati y_k mediante la (4.5), sul calcolo delle relative medie e

varianze campionarie e per, $N_{ar}^{(\mu)} = N_{ar}^{(\sigma^2)} = 1$, sul calcolo dei coefficienti degli sviluppi di Fourier troncati mediante tecniche di interpolazione trigonometrica.

Si determinano a questo punto $\tilde{\mu}_{y_m}$ e $\tilde{\sigma}_{y_m}^2$ mediante (4.7) e (4.8) e si valutano i campioni gaussiani standardizzati Z_k . Si effettuano poi i test d'ipotesi di stazionarietà del secondo ordine (test a due code) per la media $\tilde{\mu}_{y_m}(\lambda)$ e $\tilde{\sigma}_{y_m}^2(\lambda)$: se anche uno solo dei test non risulta verificato, si incrementa di una unità il numero di armoniche N_{ar} ripetendo i passi descritti partendo dal calcolo dei coefficienti di Fourier; altrimenti si calcola l'asimmetria campionaria $g_{1Z}(\lambda)$. Se tale valore differisce significativamente da zero, si cambia il valore iniziale di λ e si ripetono tutte le diverse fasi sin dall'inizio.

Prima dell'utilizzo è necessario sottoporre il modello stocastico Z_k a due test statistici che ne accertino rispettivamente:

1. la reale gaussianità (test di gaussianità);
2. l'assenza di una pur residua struttura correlativa (test di indipendenza);

Test di gaussianità

Poiché λ è stato calcolato in modo da azzerare "forzatamente" g_{1Z} , in questa sede non si è utilizzato il test di gaussianità basato sul coefficiente di asimmetria campionario, bensì sulla statistica di ordine immediatamente superiore al terzo, cioè il coefficiente di Curtosi campionario g_{2Z} dato da:

$$g_{2Z} = \frac{1}{N_D} \cdot \sum_{k=1}^{N_D} \left[\frac{z_k - m_Z}{\sigma_Z} \right]^4 \quad (4.9)$$

che, essendo $m_Z \approx 0$ e $s_Z \approx 1$ si riduce a:

$$g_{2Z} = \frac{1}{N_D} \cdot \sum_{k=1}^{N_D} z_k^4 \quad (4.10)$$

L'ipotesi di gaussianità del processo non potrà essere rigettata, con livello di significatività α , allorché si abbia:

$$\text{inv}F_{G_2, N_D} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \leq g_{2Z} \leq \text{inv}F_{G_2, N_D} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (4.11)$$

dove $invF_{G_2, N_D}(\cdot)$ indica l'inversa della funzione di ripartizione della curtosi campionaria, tratta da campioni di dimensione N_D , estratti da un universo statistico gaussiano. Poiché la forma analitica di tale funzione non è nota, gli estremi dell'intervallo di non rigettabilità suddetti sono stati valutati per via numerica mediante applicazione di tecniche tipo Monte Carlo.

Test di indipendenza

Il processo di trasformazione del generico processo originario ciclo-stazionario A_k nel processo stazionario Z_k non è detto rimuova per intero la struttura correlativa di A_k , per cui il processo destagionalizzato Z_k potrà risultare sia incorrelato, sia correlato.

Per verificare tale aspetto è stato applicato il test di *Anderson* il quale si basa sulla seguente proprietà: nell'ipotesi di processo gaussiano strettamente stazionario ed indipendente, i coefficienti di autocorrelazione campionari $r_{Z, \nu}$ dati da:

$$r_{Z, \nu} = \frac{\left[\left(\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1}^{N_D - \nu} z_k \cdot z_{k+\nu} \right) - \left(\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1}^{N_D - \nu} z_k \right) \cdot \left(\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1+\nu}^{N_D} z_k \right) \right]}{\left\{ \left[\sqrt{\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1}^{N_D - \nu} z_k^2 - \left(\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1}^{N_D - \nu} z_k \right)^2} \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1+\nu}^{N_D} z_k^2 - \left(\frac{1}{N_D - \nu} \cdot \sum_{k=1+\nu}^{N_D} z_k \right)^2} \right] \right\}} \quad (4.12)$$

sono approssimativamente distribuiti secondo una legge gaussiana di media pari a $-\frac{1}{N_D - \nu}$ e

varianza $\frac{N_D - \nu - 1}{(N_D - \nu)^2}$.

L'ipotesi di processo "correlato" non potrà essere rigettata, pertanto, se i valori $r_{Z, \nu}$ ricadono all'interno dei corrispondenti intervalli di confidenza:

$$\left[-\frac{1}{N_D - \nu} - \xi_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{N_D - \nu - 1}}{N_D - \nu}; -\frac{1}{N_D - \nu} + \xi_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{N_D - \nu - 1}}{N_D - \nu} \right] \quad \text{con } \nu = 1, 2, \dots, \nu_{\max} \quad (4.13)$$

dove sono stati posti $\nu_{\max} = 24$, $\alpha = 0,05$ e quindi $\xi_{0,975} = 1,96$

Nel solo caso della variabile aleatoria temperatura media mensile, il test di Anderson appena descritto ha portato a rigettare l'ipotesi di un processo Z_k correlato.

E' stato quindi necessario modellarne la struttura correlativa mediante modellazione di tipo autoregressivo del primo ordine AR(1):

$$Z_{k+1} = \rho_{Z,1} \cdot Z_k + \varepsilon_k \cdot \sqrt{1 - \rho_{Z,1}} \quad (4.14)$$

dove $\rho_{Z,1}$ è il coefficiente di autocorrelazione di lag 1, stimato tramite il suo corrispondente campionario $r_{Z,1}$, ed ε_k è una variabile gaussiana standardizzata.

La verifica dell'ipotesi AR(1) è stata effettuata mediante l'analisi dei residui i quali sono risultati normali (test di Bera – Jarque) e incorrelati.

4.4.2 Applicazione al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone

4.4.2.1 Generazione dei deflussi mensili

Sono state considerate le serie storiche delle piogge mensili registrate nelle stazioni pluviometriche (attualmente gestite dal Centro Funzionale Multirischi ARPACAL) di:

- Camigliatello (ex Federici) posta a quota 1291,00 m s.l.m.m.
- Sculca posta a quota 1358,00 m s.l.m.m.
- Cecita posta a quota 1180,00 m s.l.m.m.
- Pinutello posta a quota 1005,00 m s.l.m.m.
- Acri posta a quota 750,00 m s.l.m.m.

le cui posizioni geografiche rispetto ai bacini significativi del sistema sono riportate nella successiva figura:

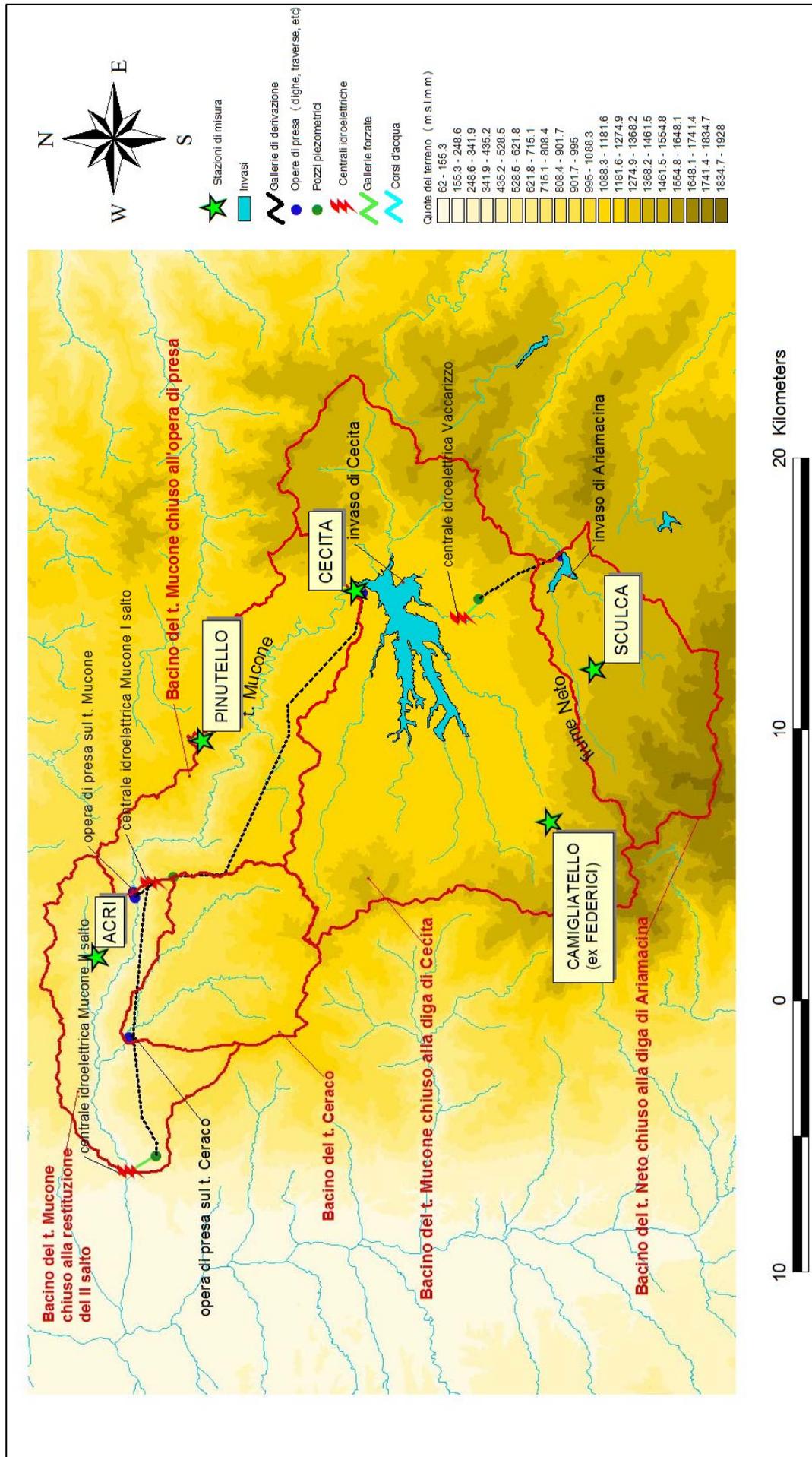


Figura 4.37 – Stazioni di misura utilizzate nello studio

Le successive tabelle riportano i valori delle serie storiche in oggetto:

Stazione pluviometrica di Camigliatello (ex Federici)

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Tot
1923	86	121	44	192	23	77	4	29,3	61	83	238	705	1.663,30
1924	210	227	0	175	14,5	34,5	85,5	4,5	0	153	206	33,6	1.143,60
1925	20,7	47,5	118,4	137,5	207,2	27	0	4,5	63,5	194,2	321	288	1.429,50
1926	147,6	99,1	142,5	123,4	114	109,2	35,1	4,7	46,9	33,8	74,4	286,5	1.217,20
1927	348,3	119,7	225	60	78,2	12	11,5	14,2	70,5	203,2	224,7	510,3	1.877,60
1928	141,1	109	249,5	194,6	197,8	0	43,7	2	101,7	128,2	390	264	1.821,60
1929	407,5	279,5	82,5	145,4	103,5	45,5	0	112	80	182	271	107,3	1.816,20
1930	210,3	268,3	119,4	202,2	115	67,5	5,2	8,8	44,4	196,9	158	468,4	1.864,40
1931	318,8	322,4	159,8	167,8	54	10,2	0	0	102,9	66,7	149	227,9	1.579,50
1932	158	130,2	215,5	180,9	25,1	19,2	6,3	9	83,4	52,5	215,8	78	1.173,90
1933	221,4	282,4	119,9	109,7	134	60,4	11,5	70,5	48,6	244,6	473,7	524,9	2.301,60
1934	219,9	138,8	230,4	66,5	154,4	49,7	21,2	14,8	76	228,3	175,7	169,6	1.545,30
1935	275,9	327,7	281,6	55,7	36,3	14,5	41,5	8,8	5	153	267	458,1	1.925,10
1937	152	298	113,8	110	61	14	2,5	38	122	71	249	449,5	1.680,80
1938	232,9	374,5	41,9	56,9	129,5	19,8	23,4	41,4	12,3	159,2	98,1	224,2	1.414,10
1940	491,6	227,4	32,3	215,3	87	95,7	6,2	22,8	27,9	359,3	99,8	532,5	2.008,10
1941	335,4	431,7	23,5	173,2	119,5	91,7	11,1	7,6	63,5	320,4	258,8	91,7	1.928,10
1942	319,8	238,2	154,3	19,3	38	54,8	9,7	47,7	36,7	48	208,6	45,4	1.220,50
1943	359,1	104,7	88,8	48,8	120,6	38,8	11	0,1	31,5	98,3	423,6	120,7	1.446,00
1944	134	316,1	343,5	3,2	19,1	29,9	0	32,2	52	349,4	217,2	182,3	1.678,90
1945	424,1	64	67,7	36,8	11,9	3,9	14,7	6,2	239	56,7	443,1	317,8	1.685,90
1946	202,7	87,8	157,2	137,8	35	0,2	10,2	0	3	186,6	168	435,1	1.423,60
1947	319,5	363,6	105	64,2	154,5	54,8	46	43,2	40,1	120,9	129,8	324	1.765,60
1948	263,9	145,4	10,4	108,2	109,2	10,3	20,9	8	134,1	129,9	201	30,3	1.171,60
1949	128,4	52,1	133,2	22,4	42,8	17,4	22,5	29,6	19,8	86,5	358,7	78,3	991,7
1950	153,1	219,5	131,9	60,7	74,5	1,1	8,8	15,1	86,3	114,8	223,9	444,5	1.534,20
1951	255,4	233,3	324,4	45,7	172,3	1,9	12,4	26,3	186,2	119,5	181,9	140,1	1.699,40
1952	274,1	376,4	101,8	48,7	88,1	6,5	58,7	13,6	31,7	107,5	375,6	296,1	1.778,80
1953	133	277,4	41,6	117,6	80,8	157,2	1,1	63,3	74,9	297,2	79,5	65,3	1.388,90
1954	262,4	257,8	197,4	101,6	209,6	40,6	8,8	1,4	28,5	102	191,7	235,1	1.636,90
1955	230,7	255,1	169,4	99,4	1,1	47	30,5	55,2	226,4	306,5	193	93	1.707,30
1956	120,3	456,9	59,3	119	130,2	47,1	0,8	29,8	25,8	215,8	260,2	111,7	1.576,90
1957	326,2	90,6	164,8	41,8	96,6	0	11,9	55,1	43,5	195,2	234,2	159,7	1.419,60
1958	165,1	81,5	358,5	160,8	105,7	45,8	6,6	0	48,4	122,4	305,5	270,6	1.670,90
1959	391,1	16,3	208,2	130,7	157,5	47,2	34,9	43,2	73,7	134,1	368,2	345	1.950,10
1960	261,4	259,9	180,4	164,6	108,3	12,9	21,4	0	118,9	194,2	155,8	334,3	1.812,10
1961	176,6	106,6	50,7	159,1	73,9	31,9	10,6	10,4	0	127,6	259,3	272,8	1.279,50
1962	178,9	131	286,3	120	48,9	68,1	22,5	26,1	119,3	100,5	282,9	320,7	1.705,20
1963	299,6	448,6	233,2	89,6	113,1	27,1	165,6	51	38,2	141,8	64,6	375,5	2.047,90
1964	156	127,6	351,8	206,7	40,1	98,1	62,4	20,4	51,6	225,4	165,9	390,8	1.896,80
1965	232,6	365,7	99,4	196,4	31,2	2,8	0	40,8	154,3	54,4	300,3	224,8	1.702,70
1966	516,1	181,7	116,8	146,2	138,2	39,9	6,3	11	96,1	133,3	461,6	425,2	2.272,40
1967	247	186,8	111,8	250,8	43,2	35,7	44,6	25	118,6	29	89	433,8	1.615,30
1968	541,1	105,3	147,6	14,3	74,3	124,9	0	59,7	31,2	40,3	192,9	578,8	1.910,40
1969	376,2	581,6	439,3	105,8	136,3	48,5	55,5	70,9	97	114,6	322,2	556,4	2.904,30
1970	296,5	202,2	59,7	22,7	69,4	25,7	20,4	26,6	101,5	252	116,5	75	1.268,20
1971	188,8	179,8	307,5	102	1	10,8	54,1	16,6	97,4	113,3	114,9	113	1.299,20
1972	337,1	148,7	61,5	44,5	63,3	3,8	56,2	46,7	66,6	109	25,9	97,8	1.061,10
1973	217,9	217,6	205,2	136,4	17,5	12,8	40,4	93	120,5	331	93,3	166,4	1.652,00

Tabella 4.1 – Precipitazioni mensili per la stazione pluviometrica di Camigliatello (ex Federici)

Stazione pluviometrica di Sculca

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Anno
1941	186,4	333,8	19,3	112,7	74,6	77,3	10,3	0,7	56,9	232,6	226,9	64,6	875,9
1942	250,4	302,8	146,3	21,4	11,9	68,4	9,6	48,1	27,5	27,5	155,4	45,5	1114,8
1943	267,8	119,2	94,3	60,8	114,1	24,7	9,7	0	5,3	134,5	304,1	136,4	1270,9
1944	119	347,5	371,8	31,2	27,8	72,7	0	1,8	38,1	212,2	267,2	163,1	1652,4
1945	545,3	123	82,7	27,9	37,5	21,5	11,4	5,4	180,6	48	418,4	252,8	1754,5
1946	232,9	79	117,9	126,8	41,2	6	7,9	1,8	22	179,3	133,3	424,7	1372,8
1947	242,1	390,5	64,4	64,9	107	38	30	29	23,7	111	73,4	302,1	1476,1
1948	152,1	152,5	11,5	103,7	83,3	9	18,8	13,2	103,3	114,9	195,7	34,8	992,8
1949	154,6	64	132,2	20,8	39,9	10,5	17,6	16,8	34,8	83,4	265	50,7	890,3
1950	190,2	154,7	158	36,5	62,4	6,3	22,1	52,6	56,6	82	137	355,9	1314,3
1951	211,3	166,9	302,9	35,1	90,4	6,4	11,5	18,4	102,1	126,2	147,1	140,4	1358,7
1952	210,1	281,9	75,5	66,2	76,9	19,4	55,1	14,9	15,3	78,9	243,4	251,3	1388,9
1953	109,2	254,3	37,5	127,5	62,9	88,8	1,2	42,5	72,3	332,8	97,3	58,7	1285
1954	225,4	244,4	201,8	79	138	9,3	1,9	0	21,1	85,2	171,1	149,2	1326,4
1955	201,9	217,3	160,3	96	2,8	37,2	19,8	36,4	134,6	225,3	145,8	44,4	1321,8
1956	93	375,2	73	81,1	104,9	39,1	0	14,6	36,1	139	217,3	99,1	1272,4
1957	295,8	76,7	98,9	50	134	2,1	17,1	29,5	28,8	176,5	214,1	116,6	1240,1
1958	136,9	77,6	223,7	89	88,3	37,4	14	0,5	51,3	104,2	296,5	183,2	1302,6
1959	276,2	32,3	156,5	129,2	110,5	53,1	53,7	58,7	81,3	149,2	339,2	266,7	1706,6
1960	238,2	252,5	168,3	125,4	115,4	20,1	34,9	0	99,7	136,9	114,5	279,8	1585,7
1961	184,4	113,4	66	117,5	48,8	14,1	7,1	7,5	11	134,8	206,8	160,7	1072,1
1962	143,1	123,3	251,1	144,3	50,5	20,9	20,7	14,3	80,4	106	196,3	284,7	1435,6
1963	219,9	320,8	133,7	64,7	109,3	20,1	80,3	42,3	32,8	122,7	39,1	249,1	1434,8
1964	170,9	105,6	220,6	127	19,2	142,4	74,4	49,9	28,3	202,2	133,6	250,8	1524,9
1965	196,1	226	62,5	118,2	24	1,6	2	22,1	130,2	56,3	291,5	266	1396,5
1966	386,5	112,1	79,6	152,3	96,1	62,4	5,4	10,4	77,5	126,5	426	341,1	1875,9
1967	299,5	119,8	124,3	210,7	47,1	21,5	42,1	41,1	58	23,7	62,5	252,8	1303,1
1968	396,9	86,2	54,9	17,1	70	112,8	0	72,3	10,2	21,7	165,4	313,6	1321,1
1969	159,8	208	166,1	45,2	73,1	21,5	64,2	42,1	80,1	95,2	168,1	435,5	1558,9
1970	200,1	239,4	148,1	43,7	37,1	35,3	44,9	22,4	71,7	190,3	125,5	102,6	1261,1
1971	231,4	104,9	215,1	103,1	2,4	11,9	52,6	18,5	124,2	123,8	296,7	146	1430,6
1972	260	228,5	82,9	67,1	54,7	2,4	29,6	63,3	72,5	102,8	49,1	116,9	1129,8
1973	251,2	314,1	235	168,5	20	5,5	12,7	11,3	111,1	223,1	98,5	149,3	1600,3
1974	43,2	198,3	129,5	262,2	115,3	28,4	16	50,6	93,2	173,7	192	147,2	1449,6
1976	79,2	80,5	57,2	91,6	48,7	126,6	56,4	28,7	27	247,7	337	371,8	1552,4
1977	98,9	89,5	51	97	7,8	8,7	0	17,1	71,5	61,2	248,4	186,3	937,4
1978	251,5	227,1	176,5	201,5	135,8	22,6	0	41,6	66,6	207,4	37,7	168,8	1537,1
1979	313,1	255,5	98,1	134,9	101,9	108,4	9,6	29,3	2,9	98,3	219,7	144,7	1516,4
1980	162,5	46,1	149	110	190,7	48,4	5	2,1	7,7	282,9	308,8	174,1	1487,3
1982	78,1	88,6	145,9	50,4	27,5	33,3	22,3	49	43,2	208,4	91,9	254,5	1093,1
1983	58,5	189,8	65,2	57,3	20,5	80,5	31,2	0,6	63,6	71,7	148	209,4	996,3
1984	147	188,9	138,3	120,7	41,5	21,4	0	31,5	50,9	79,5	204	110,4	1134,1
1985	183,2	37,8	207,7	180,3	130,9	0,3	0,2	0	13,8	28,8	238,9	34,9	1056,8
1986	142	185,3	80,4	58,9	113,8	84,4	54,9	1	33,9	216,2	72	113,2	1156
1988	227,1	271,6	279,6	53,6	26,9	5,2	0	3,8	96,8	29,4	175	99,3	1268,3
1990	79,6	116,1	55,9	231,3	143,8	0,5	23,7	52,6	17,8	121,8	242,4	282,6	1368,1
1992	20,7	48,8	27,3	151,3	83,4	111,6	6,3	0	21	175,3	171,4	244,8	1061,9
1993	59,2	79,1	245,9	6,3	193	0,7	0	0,8	11,8	45,1	131,5	219,3	992,7
1994	109,9	219,4	0	157,1	94,7	17,1	38,8	29,8	22,1	101,8	105,4	21,5	917,6
1995	177,5	179,6	136,2	101,9	114	11,3	18,6	211,9	192,5	55,8	27,3	335,4	1562
1996	249,2	86,8	183,2	169,6	97,7	21	21,9	0	286,8	383,5	273,7	197,7	1971,1
1997	116,4	59,8	103,8	113	24,6	0	3,7	86,5	99,8	159,2	260,3	200,7	1227,8
1998	70	169,7	55,4	34,3	166,5	34,7	12,3	13,6	41,1	165,7	208	65,4	1036,7
1999	164,8	86,2	74,8	123,8	41,4	15,9	47	21,6	68,3	74,6	82,8	206	1007,2
2000	40	66,6	16,9	65,5	54,1	34,5	14,3	7,6	70,8	134,4	111,5	157,3	773,5
2001	130,4	105	58	90	85,2	29,7	7,9	39,5	38,7	0,3	8,3	151,3	744,3

Tabella 4.2 – Precipitazioni mensili per la stazione pluviometrica di Sculca

Stazione pluviometrica di Cecita

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Tot
1924	172	163	86,5	106	37	15,5	184,5	5	0	70	169,5	44,7	1.053,70
1925	29	50	84,5	76	222,5	15	3	1	53	161,8	301,5	132,5	1.129,80
1926	144	71,5	105,9	83,5	161,5	75	27	24	34	29,5	50,5	222,3	1.028,70
1928	225	78	170	81,5	66	1	44	14	56	61	279,5	161	1.237,00
1929	297,5	382	88,2	92,5	134,5	49	0	167,5	149	90	352,7	59	1.861,90
1930	174,7	263,5	88,5	158,2	54,5	93,5	0	3	72	129,5	100	303,5	1.440,90
1931	197,5	288,5	99	121	75,5	19	6	0	49	45	64,5	186,2	1.151,20
1932	113,5	73,5	133,5	68,5	35,5	20	27,5	5,5	88	51	164,5	57,5	838,5
1933	227	202	133,5	57	75,5	83	42	23	36,5	104	273,5	328,3	1.585,30
1934	115,5	184	105,5	36,5	399,5	55	18,5	8,5	36,5	269,5	77	149,7	1.455,70
1935	152	101,5	199	22	18,5	19	38	20	14,7	66,5	128,5	266,5	1.046,20
1936	56,5	83,5	80	132,2	113,5	36	0	57	57,5	138,5	295	150,5	1.200,20
1937	47	212,5	112,5	85,5	81	48	14	37,5	22	74	176,5	221,1	1.131,60
1938	146,2	170,1	52,6	97,4	62,6	29,9	8,4	20,6	10,4	78,8	70,8	245,3	993,1
1939	98,7	78,6	119,9	62,4	89,2	72,6	0,4	43,8	236,6	95	83,2	166,4	1.146,80
1940	295,6	129,7	33,5	113,3	59,7	92,3	47,3	12,2	11,7	157,7	55	342,9	1.350,90
1941	137,8	170,7	13,7	73,9	59,9	59	17,9	1,3	66,9	137,7	159,9	55,4	954,1
1942	165,1	204,6	156,9	18,2	9,5	100	4,8	29,4	7,9	35,7	109,8	27,7	869,6
1943	181,6	109,5	68	51	67,6	15,4	1,2	0	12,8	150,1	225,9	68,5	951,6
1944	142	301,5	257,7	31,1	21,2	11,7	0,5	13,5	34,4	175,9	203,5	219,6	1.412,60
1945	391,7	124,7	54,2	22,3	14,9	31,3	39,2	11,5	216	20,9	292,3	163,1	1.382,10
1946	249,3	53,8	116,3	71,7	50,1	15,7	10,1	6,4	15,5	139,2	88,2	542,3	1.358,60
1947	206,8	201,6	25,9	73,8	90,5	55,8	70,1	31	18,9	76,8	75,4	168,3	1.094,90
1948	114,6	123	10,2	110	66,6	19,8	45	24,5	83,8	101,4	327,6	63,6	1.090,10
1949	101,9	66,9	110,6	38,2	33,1	15,3	16,9	19,2	24,2	116,9	159,6	27,4	730,2
1950	179,7	142,5	270	25,8	45,5	1,2	10,6	31,6	42,9	35,1	80,8	222,8	1.088,50
1951	243,9	184	284,6	22,6	48,8	0,4	18,2	9,4	107,8	134,4	79,8	158,4	1.292,30
1952	145,8	180	67,6	41,6	56,9	15,9	53,4	14,4	21	54,2	193,3	265,5	1.109,60
1953	153,7	235	36,6	103,9	80,1	63	0,2	61	80	277,5	132,8	56,5	1.280,30
1954	204,8	241,2	203	96	130,9	37	1,2	1,8	17,8	73,6	184,6	120,4	1.312,30
1955	159	162,5	95	96,6	0,6	49,4	36,8	37,6	204,1	229	87,2	80,7	1.238,50
1956	159	385,2	43,4	45,9	65,5	34,6	0	11	10,1	179,6	140,3	108	1.182,60
1957	247,7	53	84,8	31	126,1	0	5,6	42,4	44,4	183,5	173	110,3	1.101,80
1958	97,6	54,4	154	119,3	98,4	20	14,8	0	32,9	120,2	211,4	221,8	1.144,80
1959	158,2	24	226,2	101,8	121	69,6	24,2	31,2	50,8	84	272	137,9	1.300,90
1960	198	117,4	121,8	77,4	72,8	13,9	25,5	0	68,2	76,9	87,7	219	1.078,60
1961	211,1	90,2	77	78,1	48,2	23,9	20,2	2,1	0	63,2	85,6	148,6	848,2
1962	103,3	113,7	147,2	71,2	31,8	18,8	21	9,2	84,6	46,2	134,3	254	1.035,30
1963	210,8	348,7	177,7	97	99	22,9	68,5	51,2	26,2	165,8	27,8	127,7	1.423,30
1964	165,8	76,6	227,8	156,3	58,6	88,4	64,4	16,8	32,8	127,8	129,2	303,4	1.447,90
1965	184,4	236,8	71	104	19,6	4	0	42,8	147	56,6	148,6	177,8	1.192,60
1966	353,2	105,8	76	197	61,6	45,1	4,8	6,4	75,6	128,4	340,7	357,9	1.752,50
1967	176,2	83,6	75,4	78	51,6	15,6	41,2	9,2	82,8	37,6	78,6	136,4	866,2
1968	213,2	59,4	23,6	11,4	79,8	96,2	0	62	41,8	34,4	98,6	162	882,4
1969	263,8	99,7	257,2	39,9	35,4	19,4	27	51,4	85,7	110,8	89,6	273,9	1.353,80
1970	183,2	160,5	58,2	16,2	45,2	11,5	15,7	18,5	91,9	235	92,4	56,7	985
1971	150	149,2	275,6	71,2	1,2	8,9	46,7	15,4	84,9	113,1	108,3	56,8	1.081,30
1972	280,9	148,4	52,1	44,8	57,7	3	53	40,2	52	83,2	24,2	93,4	932,9
1973	199,8	176	193,4	126,6	15	10,2	14,5	0,8	108,4	309,4	73,2	93,4	1.320,70
1974	21,8	95,8	37,6	101,2	33,8	11,4	4,6	42,6	76,6	111,8	126	90,2	753,4
1975	39,4	205,2	41	25,4	62	40,4	2,4	22	24,6	104	134,4	61,4	762,2
1976	46	82	17,2	48,4	48,2	66,2	36,8	29,2	17,4	168,2	241,4	175,4	976,4
1977	32,2	41,8	26,6	64,4	9,4	3,8	0,2	22,6	72	65,8	119,2	162,8	620,8
1978	126,6	70,6	90,8	62	85	4,8	0	0	42	79,6	18,6	87,6	667,6
1979	115,2	43	40,6	76,2	121,4	14,4	13,2	19,8	16,2	90,2	147,6	89,4	787,2
1980	143,4	20,8	108,2	64,8	103,8	46,2	0	2,6	18,6	281,4	220,4	221,6	1.231,80
1981	297	68,6	1,8	57,4	88,4	4	10,2	36,6	31	45,8	98,4	307,4	1.046,60
1982	150,6	72,2	126,6	40,8	33,4	33,8	9,8	46,2	34	179	34,6	103,6	864,6
1983	33	148,4	94,6	42,4	1,6	50,6	47,8	10,6	120,2	166,8	127	331,2	1.174,20
1984	63,2	107,4	122,4	139,8	20,6	10,8	1,6	13,6	57,2	50,2	183,4	142,4	912,6
1985	223	39,8	109	239	14,2	0,8	0	6,2	12,4	26,2	91,8	3,8	766,2
1986	117,8	103,2	141	22	67,2	18,4	44	13,6	34,2	319,9	46,8	51,2	979,3
1987	58,8	77,9	39,7	101,1	81,7	36,8	18,9	8	128,6	133,1	63,3	55	802,9
1989	13,8	122,6	15,6	66,2	35	60,6	32,2	58,4	45	73,8	75,4	51,2	649,8
1996	182,2	168,6	142	71,8	54,6	7,8	17,6	26,2	137,6	241,4	156,2	176,2	1.382,20
1997	92,4	70	84,4	85	12,6	6	29,4	56,4	104,6	118,2	201,8	125,4	986,2
1998	118,2	113,6	77,2	36	76,8	4,8	9	17,4	81,2	63,8	154,6	108,6	861,2
2003	215,2	122,8	52,2	192	74	143,8	6	176,4	67,6	88,2	73,6	182	1.393,80
2004	196,8	56,4	124,2	156,4	77,6	99	17,8	7,8	59,6	31,2	147,2	360,8	1.334,80
2005	198	165,2	66,6	48	68,2	33	3,8	31,6	62,2	79,4	85,6	187,2	1.028,80
2006	106,8	130,4	120	77,2	0	67,6	77,6	38,6	41,2	21,6	46	175,8	902,8
2007	79	94,6	93,4	74,8	59,4	142,8	0,6	1,2	15,8	59,6	121,8	131	874
2008	61	101,8	160,8	72,6	10,8	32,6	0	67	91,4	20,4	164	215,2	997,6

Tabella 4.3 – Precipitazioni mensili per la stazione pluviometrica di Cecita

Stazione pluviometrica di Pinutello

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Tot
1919	110	196	79	122	90	26	50	0	42	142	67	97	1.021,00
1920	80	62	36	66	43	64	0	9	12	272	125	55	824
1921	261	50	97	102	175	120	56	50	74	61	201	339	1.405,00
1923	152	91	60	148	45	53	0	70	41,6	40	69	292,5	1.062,10
1924	161,7	95	45	36,7	10	9	81	0	0	36,7	157,2	30,8	663,1
1925	21,1	117	45	40,3	93	20,3	0	0	42	161	330,9	107,2	977,8
1926	135	43	157	98	174	77,5	9	0	34,5	10	29,4	216,3	983,7
1927	153,2	99,4	83	59	88,8	18	0	0	37	248,7	103,1	284,2	1.174,40
1928	121	70	189,2	71	65	0	80	0	35	24	232	136	1.023,20
1929	191,2	234	54	48	102	44	0	170,5	143	185	348	78	1.597,70
1930	229	242	85	193	56	84	4	0	67	120,9	69	221	1.370,90
1931	144	224	90	117	67	0	0	0	56	28	50	220	996
1932	80	63	130	76	82	17	11	4	166	62	127	36	854
1933	227	177	92	61	71	69	7	44	40	117	252	282	1.439,00
1934	117	183,6	83	38	65	84	0	4	68	300	146	107	1.195,60
1935	154	75	92	10	0	0	38	0	15	58	143	216	801
1938	174,9	182,2	45,3	129,1	45,6	25,8	9,2	61,3	10,4	66,5	78,6	256,1	1.085,00
1939	104,6	51,2	144,3	39,8	93	85,2	0,2	64,1	233,3	99,6	74,2	176,4	1.165,90
1940	270,7	98,1	31,8	86,9	55,5	103,3	16,5	5,5	10,4	151	51,7	382,4	1.263,80
1941	137,1	232,1	11	102,3	73,2	64,4	12	0	94	217,2	193,1	47,8	1.184,20
1942	185,1	250,8	168,3	22,7	8,3	126,8	7	30,7	2	41,7	119,1	27,5	990
1943	195,9	126	36,6	83,5	63,1	28,2	0	0	57,1	192,8	240,4	53,4	1.077,00
1944	114,5	206,5	256,2	30	20	6,7	0	6	48,5	188,8	209,5	267,9	1.354,60
1945	414,2	72	68	10	7	28	21,7	0	238,5	12,2	278,7	243,4	1.393,70
1946	138,1	46,7	101,2	75,4	21,9	0	15,5	0	11	185,4	137,6	526,9	1.259,70
1947	169,7	165,2	15	111,4	93,8	12	76	24,9	2	121,6	81,7	179,8	1.053,10
1948	96,2	37,8	5,6	83,5	75,1	9,2	56,4	55,3	72,9	89,2	392,4	70,8	1.044,40
1949	97	56,5	108,3	16	43,5	10,5	19,5	42,5	20,7	105,1	175,9	26	721,5
1950	167,9	151,4	244,9	27,3	54,9	0	10	28	61	39,4	85,5	262	1.132,30
1951	208,4	113,3	241,5	34,9	71,3	0,8	42	21	100,6	275,2	108,9	176,4	1.394,30
1952	151,9	190,7	87,5	33	62,5	20	53,4	19,9	28,2	88,2	268,2	285,7	1.289,20
1953	134,6	186,3	42,8	90,5	106,6	56,2	0,6	31,4	75,1	256,2	141,8	40,4	1.162,50
1954	203	222,5	172	68,6	143,5	41	2,5	1,2	15,2	89	188,6	113,5	1.260,60
1955	170	158,2	103,5	132,5	0,8	29,9	49,1	36	220,2	325,9	100	71,4	1.397,50
1956	57	319,9	41,8	60,6	72,4	28,6	0	12,6	18	124,5	150,1	140,5	1.026,00
1957	294,4	53,9	68	29,8	111,9	0	5,5	38,1	57,6	253,4	254,4	103,2	1.270,20
1958	117,3	61,9	155,5	106,9	111,7	30,5	17	0	36,1	141,2	218,6	140,8	1.137,50
1959	178,9	38,5	209,8	113,1	124,4	45,1	26	57,1	76,8	93,1	274,3	164,2	1.401,30
1960	171,2	114	145,4	113,6	67,5	9,7	32,4	0	95,4	74,8	93,7	211,8	1.129,50
1961	179,3	92,9	126,4	76,9	71,1	18,5	4,5	4,4	0	93	113,4	115,6	896
1962	123,5	78,8	153,6	85,8	27	13,5	23,9	3,6	81,3	51,2	123,7	348,1	1.114,00
1963	129	230,8	132,2	80,5	95,9	22,7	43,5	45,5	37,4	196,6	44,6	179,6	1.238,30
1964	205,3	73,6	173,6	112,4	30	80,2	51,9	25,3	36	154,2	108,3	189,5	1.240,30
1965	187,4	222,3	76,2	94,2	15,2	3,6	0	35,2	153,3	73,7	177,8	182,7	1.221,60
1966	251,5	63,8	123,7	238,7	71,6	43,2	3,5	8,4	96	117,8	255,8	312	1.586,00
1967	171,4	110,6	103,3	134,4	72,3	15,9	26,1	24	99,1	47,4	66,2	192,3	1.063,00
1968	295	69,4	42,6	17,6	69,2	100,1	0	68,4	41	34,9	114,3	266,3	1.118,80
1969	112,1	131,2	119,6	45,3	38,4	26,7	24,1	51,1	84,8	124,4	90,1	308	1.155,80
1970	133,1	145,1	99,2	20,9	65,9	8,5	15,5	16,3	108	246,1	89,7	127	1.075,30
1971	193,5	140,2	237,7	82,5	0,7	10,4	57,2	10,4	104,6	133,1	177	67	1.214,30
1972	247,2	110,4	79,7	68,6	53	0	29,6	42,5	70	127,6	41,4	100,6	970,6
1973	237,7	244,7	213,3	235,7	19,9	6,7	10,5	8,5	113,9	289	93	73,7	1.546,60
1974	30,8	182,3	45	196,3	74,7	4	5,2	54,6	97,7	162,4	172,6	111,1	1.136,70
1975	61,3	264,3	89,6	30,5	87,8	31,9	3,1	41,3	13,7	126,8	140,2	76,1	966,6
1976	93,4	104,6	44,1	81,5	58,3	126,3	69,3	21,9	20,4	161,8	250,3	259,3	1.291,20
1977	80,6	63,7	42,3	94,7	7,7	1,7	0	102,5	88,9	59,2	158,7	190,6	890,6
1978	157	135,3	155	92,5	77,6	11,7	0	6,8	77,7	202,5	22,2	174,3	1.112,60
1979	296,9	225	57,6	79,1	91,9	77,2	7	29,7	20,9	85,1	160,1	95,7	1.226,20
1980	133,9	51,9	131,2	79,9	119	35,6	0,5	3,4	14,3	293,7	210,5	298,4	1.372,30
1981	333,8	82,6	4,7	29,7	66,9	2,5	14,8	22,4	57,4	34,3	90,7	328,2	1.068,00
1982	139	95,6	110,7	42,7	21,4	28	21	35,4	15	155,1	38	123,5	825,4
1983	50	149,6	53,7	15,1	5,7	77,5	29,5	9	92,3	205,4	123,9	426,7	1.238,40
1984	97,2	119,2	156,5	204,8	19,9	20,3	1	99,7	73,6	52,2	338	222,1	1.404,50
1985	317,4	71	140,8	354,8	92	1,5	0	6,5	16,6	37,7	181,8	15,3	1.235,40
1987	120	116,4	104,2	132,1	89,7	25	4,3	8,1	87,1	172,7	158,2	81,6	1.099,40
1988	207,7	183,8	139,3	82,4	6	4,6	0	3,5	50,5	108	224,1	142	1.151,90
1989	26	215,5	141,4	90,3	54,1	58,4	20,3	46,6	46,9	131,2	106,8	65,4	1.002,90
1990	46,2	58	39,7	183	39,7	0	8,3	161,5	23	102,2	287,5	449,8	1.398,90
1992	30,3	11,9	58,3	208,5	30,9	101,4	49,5	103,8	22,4	125,5	150,8	355,1	1.248,40
1993	149	43	124,4	36,2	121,3	4,7	0	0	30,1	117,4	153,6	120,7	900,4
1994	137,4	263,4	5,5	122,4	46,7	15,3	43,6	13,3	23,5	131,6	70,2	90,3	963,2
1995	146,8	94,2	203,5	88,1	35,6	0,6	7,9	107,5	74,8	22,4	94,6	187	1.063,00
1996	187,4	190,1	166,8	81,3	74,9	13,2	12	33,5	132,6	274,1	153,6	233,2	1.552,70
1997	95,4	37,5	102,9	96,1	31,3	11,5	6,5	34,7	105,4	102	202	131,3	956,6

Tabella 4.4 – Precipitazioni mensili per la stazione pluviometrica di Pinutello

Stazione pluviometrica di Acri

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Tot
1922	174	147	146	69	73	15	1	0	39	65	102	70	901
1923	244	127	102	95	17	33	2	90	26	55	130,5	293,8	1.215,30
1924	215	197,5	65	74,5	18,2	8,7	51,1	2,1	0	89,7	126,5	27,7	876
1925	9	113,5	66,2	63	162,5	34	2	0	49,5	114,5	287	148,5	1.049,70
1926	99	38	95	74	133	87,5	58	4,5	29	37	65,5	268,5	989
1927	137	76,5	65	54,5	79,5	46	0	7	23	175	110,5	319	1.093,00
1928	115	57,5	165,7	55	98	0	32	0	77,5	45	211,5	188	1.045,20
1929	231	192	97	91	90	41	0	62	82	84	355	69	1.394,00
1930	122	241	90	139,5	85,5	29	10	1	36	124,5	74,5	281,5	1.234,50
1931	102,5	187	81,5	90,5	48,5	1	3	0	73,5	27,5	95,5	160,7	871,2
1932	66	100	117,5	52,5	48,5	12	29,5	1,5	43	44,5	123,5	48,5	687
1933	240,5	171	38,9	53,7	43	48,1	1,6	52,1	44,7	166,6	301,1	347,2	1.508,50
1934	79,5	164,2	126,7	29,7	85,2	44	17	11,2	45,8	232,8	89,6	116,8	1.042,50
1935	148,4	131	125,2	13,2	14,4	10,6	28,2	2,6	38,6	108,2	121	266,4	1.007,80
1936	52,4	100,8	76,8	90,4	54	16	0	11,2	80,6	121,6	206,4	79,1	889,3
1937	64,4	232,6	125	83	79	1,4	4	36,2	65,8	73,2	176,2	263,9	1.204,70
1938	160,8	167,6	18,8	131,2	50,4	2,2	15	27,4	5,2	99	58,7	202,8	939,1
1939	99	44,4	134,2	37,6	93	41,4	0,4	35,4	164,2	98,4	47,6	211,7	1.007,30
1940	263	116,6	38	91,4	82,9	59,7	21,1	12,5	19,2	224,5	28,4	244	1.201,30
1941	132	202,4	13,5	71,6	56,6	38,3	10	10	35,2	171,2	137,2	62,4	940,4
1942	208	160,2	145,8	11	13,5	54,9	8,3	40,4	12,4	29	87,9	34,6	806
1943	209,4	129,3	47,6	43,5	66,7	22,7	0	0,3	14,3	133,6	179	159,8	1.006,20
1944	82,1	279,9	162,3	6,2	0,6	5,2	0	11	33	107	47,3	66	800,6
1945	260,5	7	10,2	0	6	7	0	2,5	94	12	153,8	121,8	674,8
1946	145	11,5	45,1	29,5	4,6	0	23	0	13,6	147,8	83,7	415,8	919,6
1947	198,2	166,6	43,3	67,6	21	36	28	33,4	40,7	48,3	104,3	150,1	937,5
1948	135,5	98,9	11	56,1	59,1	25,5	8	13,7	92,1	86,1	262,6	55,6	904,2
1949	66,5	21,4	118,1	12,3	32,4	26,3	15,2	38,6	15,3	55,1	200,5	40,9	642,6
1950	115,1	13,3	55,6	33	58,6	2,2	8	57,5	68,6	53,2	60,5	231,8	757,4
1951	224,1	121,5	221,8	31,3	70,4	3,2	14,4	23,7	65,5	193,1	87,2	169,1	1.225,30
1952	113,1	251,9	84,7	35	73,4	1,3	48,9	40,7	17,4	81,3	259,1	279,2	1.286,00
1953	123,1	201,6	22,6	75,2	88,8	55	0,2	136	61,8	181,2	104,2	32,7	1.082,40
1954	210,8	168,9	131,4	57,2	151,8	4,8	1,4	1,3	26,2	63,1	154,2	115,8	1.086,90
1955	137,6	134,4	82	99,6	1	17,2	65,4	37,2	259	203,2	101,6	46,8	1.185,00
1956	57,9	316	28,4	49,8	77	26,4	0	15,2	17,2	104,4	149,4	102,6	944,3
1957	267,5	55,7	56,2	19,5	78,7	0	3,1	43,3	47,8	174,3	125,8	95,8	967,7
1958	95	45	169,5	125	38,6	37,6	2	0	56,6	101,2	229,1	137	1.036,60
1959	170,9	4,4	240,4	88,8	115,8	24,2	14	34	48,1	94,3	238,5	193,8	1.267,20
1960	206,6	148,6	148,9	107,9	56,8	11	25,8	0	90,8	153,4	102,4	240,8	1.293,00
1961	168,6	59,4	121,6	119,7	96,6	12,6	2	5,8	0	75,6	137,8	101,4	901,1
1962	115,7	74,2	130,8	45,6	22,8	10,2	15,4	0,2	42,1	20,5	155,3	311	943,8
1963	125,2	213,9	167,1	51,8	82,5	36,1	44,3	40,2	25,6	159,1	49,6	198,5	1.193,90
1964	131,6	60	168,8	114,2	23,8	40,3	15,2	28,2	36,4	105,6	73	205,6	1.002,70
1965	157	221,9	49,6	73,6	10	8,6	0	13,8	91,4	51,9	183,2	147,1	1.008,10
1966	245,6	88,6	81,2	159,7	59,8	34,4	2,6	11,4	72,9	81,4	289,9	307,4	1.434,90
1967	148,7	95,4	80	127,4	46,6	15,2	14	23,6	47	36,6	54	203,5	892
1968	305,2	36,9	39	19,2	60	89,2	0	68,6	35,8	13,4	76,8	255,6	999,7
1969	76,8	130,3	94,2	20	56	33,6	44,4	36,4	82,8	75,8	86,1	300	1.036,40
1970	158,9	98,7	114,1	24,8	36,7	8	23,2	11,7	111,7	250,7	91,9	112,3	1.042,70
1971	188,2	148,9	153	120,1	6,1	10,8	74,8	4,9	72,2	93,5	135,7	95,9	1.104,10
1972	155,9	167	111,5	73,5	69,5	0,7	29,6	69,8	62,6	144,1	43,2	127,2	1.054,60
1973	163,6	238,4	245,2	137,8	15	5,4	36,8	22,4	73,4	234	85,2	128,4	1.385,60
1974	36,2	146,4	33,6	179,1	112,6	4,4	18,6	17,8	68,2	173,8	162,6	59,4	1.012,70
1975	21	164,6	96,8	31,4	59	9	1,4	84,2	6,2	176,8	100,2	58,8	809,4
1976	54,5	69,3	76,1	62,6	64,4	33,6	20,7	9,2	26,8	173,2	249,6	181,4	1.021,40
1977	39	73,8	19,4	84,8	7	4,2	0	31,4	76,2	42,6	138,6	136,2	653,2
1978	162	146	138,4	123	74	6,6	0	19,8	60,2	185,5	53,2	159,6	1.128,30
1979	231,6	236,8	65,4	72,6	61,4	19,6	28	28,8	9,4	82,8	190,2	80,2	1.106,80
1980	144,6	34,4	124,6	104,8	102,2	27,2	0,4	3,6	1,2	338,6	253,6	214,6	1.349,80
1981	265,1	70,4	15,2	47,6	84	4,2	22	10	43,9	48,8	103	315,4	1.029,60
1982	161,4	94,8	168	46,4	10,8	25,4	4,8	16,2	34,8	180	63	146	951,6
1983	58	137	98	34,5	13,4	63,6	8,7	5,8	77	101,9	101	331,4	1.030,30
1984	123,6	123	161,6	105,4	19,6	8,2	0	25,8	113,4	66,6	188	110,6	1.045,80
1985	208,2	56,2	120,4	301,2	98	1,6	0	2,6	0	17	191,4	9	1.005,60
1986	168	214,6	177,6	29	38,6	34,6	28,3	0,6	15,4	264,3	38,8	40	1.049,80
1987	158,1	91,9	41	56,5	53,5	22,2	19,4	3,2	37,6	137,2	22,4	33,2	676,2
1993	95	91,4	127	28,8	79,6	11,8	0	0,8	16	97,2	105,4	120,4	773,4
1994	134,6	208,2	2	171,6	40,8	10,4	53	18,8	15,8	77,4	82,4	55,4	870,4
1996	137,6	179	150,8	91,4	60,6	5,6	3,2	63,2	125,2	182,8	184,2	160,6	1.344,20
1998	108,4	106,6	65,8	42,2	73,4	5,6	5,8	63,2	77,4	72,8	167	102,2	890,4
2005	151,2	160,2	60,2	67,2	54,8	24,4	2	41,6	91,6	88,2	127	289,6	1.158,00
2006	123,2	153,8	149,4	60,8	6,4	70,4	34,2	58,4	68	15,4	44,8	368,2	1.153,00
2007	74,6	67,6	112	62,8	39,8	74,6	9,6	0,2	14,4	89	135,8	131,4	811,8
2008	72,8	122,4	151,8	54	15,4	26	1,6	31	121,4	35,2	141,2	231,6	1.004,40

Tabella 4.5 – Precipitazioni mensili per la stazione pluviometrica di Acri

Per ciascuna serie storica sopra riportata è stata eseguita la generazione stocastica di una serie di 360 anni di piogge mensili mediante i metodi esposti teoricamente nei precedenti paragrafi.

Sulla base di questi risultati sono stati calcolati, utilizzando il semplice metodo dei topoi, 360 anni di volumi meteorici mensili affluiti a ciascuno dei bacini idrografici significativi del sistema riportati in figura 4.36.

Alla fine sono stati determinati i deflussi mensili relativi ai bacini idrografici suddetti, semplicemente moltiplicando gli afflussi meteorici appena citati per i valori medi mensili dei coefficienti di deflusso (riportati sugli Annali Idrologici dell'ex Servizio Idrografico) delle seguenti stazioni idrometriche:

- Garga a Torre Garga (per il calcolo dei deflussi del bacino del fiume Neto chiuso alla diga di Ariamacina);
- Mucone a Cecita (per il calcolo dei deflussi del bacino del t. Mucone chiuso alla diga di Cecita);
- Trionto a Difesa (per il calcolo dei deflussi degli altri bacini idrografici).

La successiva tabella riporta i valori medi dei coefficienti di deflusso mensile delle stazioni idrometriche sopra elencate.

Valori medi dei coefficienti di deflusso mensile			
	Garga a Torre Garga	Mucone a Cecita	Trionto a Difesa
Gennaio	0,36	0,52	0,54
Febbraio	0,47	0,64	0,67
Marzo	1,01	1,14	0,97
Aprile	1,35	1,79	0,83
Maggio	0,93	1,11	0,92
Giugno	0,91	0,75	0,85
Luglio	0,94	1,25	0,59
Agosto	0,64	0,42	0,39
Settembre	0,35	0,18	0,15
Ottobre	0,23	0,17	0,16
Novembre	0,26	0,3	0,24
Dicembre	0,3	0,44	0,36

Tabella 4.6 – Valori medi dei coefficienti di deflusso mensile per alcune stazioni idrometriche

4.4.2.2 Generazione delle temperature medie mensili

E' stata considerata la serie storica di temperature medie mensili registrate nella stazione termometrica (attualmente gestita dal Centro Funzionale Multirischi ARPACAL) di Cecita posta a

quota 1180,00 m s.l.m.m., la cui posizione geografica rispetto ai bacini significativi del sistema è riportata nella precedente figura 4.37.

La successiva tabella riporta i valori della serie storica in oggetto:

Stazione termometrica di Cecita

Anno	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic	Media
1955	3,3	3,6	3,5	4,2	12,4	15,5	18,7	15,8	12,7	9,4	5,7	3,2	9,5
1956	1,5	-1,8	1,5	6,3	10,3	13,9	18,6	20,1	15,9	8,3	4,2	1,5	9
1957	-0,8	3,4	4,3	7,8	10	18,5	17,9	18,4	13,9	10,3	6,2	1,2	10,2
1958	1	5	2,6	5,6	13,1	15,4	18,4	20,4	15,1	9,7	6,3	4,1	10,5
1959	1,6	1,8	6,1	6,1	10,6	14	16,4	16	13,3	7,6	5,5	2,5	9,1
1960	2,1	4	4,5	5,8	11,4	15,2	16,4	18,2	12,8	12,5	7,8	3,5	10,1
1961	0,7	1,9	4,3	9,2	11	14,4	16,1	16,8	14,9	11	7,9	2,8	10
1962	3,5	0,6	3,3	6,6	11	14,1	17,2	19,1	14,6	10,6	5,8	1	9,4
1963	-0,4	0,8	1,5	6,8	9,5	14,6	17,8	18,3	15,5	9,1	9	3,2	9,4
1964	-1,6	0,3	4,5	5,5	12	16,7	16,5	17	13,4	9,6	6,5	2,4	9,5
1965	0,7	-2,5	2,5	4,2	10,2	16,2	19,3	16,7	14,1	9,3	6,4	2,6	9
1966	-0,6	4,4	1,1	7,1	9,2	14,8	16,5	18,1	15,1	12,8	5,4	1,4	9,6
1967	0,4	2	3,2	5,9	11,6	12,9	17,9	19,1	14,8	12,9	8,5	2,9	10,2
1968	-0,3	5,1	4	10,1	14,8	14,8	17,2	17	14,9	10,7	7,1	3,2	10,8
1969	0,4	1,3	3,9	6,3	13,9	13	13,8	15,5	13,6	8,2	5,7	0,9	8,7
1970	2,4	0,1	2,9	5,3	7,2	13,6	15,1	15,3	13,2	8,4	5,2	2,4	8
1971	0,2	-0,5	0,7	7,3	12,1	15,2	16,3	19,4	12,5	7,8	4	1,2	8,7
1972	1,9	2,3	6	8,1	9,8	16,4	15,3	16,5	13,3	7,3	7,3	3,5	9,6
1973	1	-0,4	0	4,3	13,1	15,2	18,5	17,6	16,2	11,1	6,3	3,8	9,6
1976	0,6	1,3	2	5,4	11,1	13	15,6	14,2	12,1	9,7	4,2	1,8	8,2
1979	-0,9	1,9	3,7	4,7	11	15,3	16,8	16,5	13,1	11,4	5,4	3,6	9,6
1980	0,5	2	2,6	3,7	7,9	13,3	16,9	17,8	14,1	9,6	7,3	-1,3	8,5
1981	-4,1	-2	4,5	7	10	16,8	17	17,6	15,7	11,7	3,7	2,8	9,5
1983	0,9	-1,9	3,1	8	11,7	13,1	17,5	17,1	13,8	8,8	5	0,6	8,8
1984	0,5	-0,3	0,7	3,9	10,3	12	15,3	14,8	11,7	9	4,2	-0,5	7,4
1987	3	3,9	1,3	7,7	10,5	15,8	19,8	19,6	18,3	12,6	7,4	5,6	11,1
1995	0,6	4,1	2,3	5,5	10,9	15,1	18,2	16,2	13,2	8,8	3,5	5	9,3
1996	2,7	0,4	2,4	6,1	11,5	14,7	16,8	17,9	11,6	8,4	6,6	3,1	9
1997	3,6	2,7	2,7	3	11,6	16,9	17,6	15,8	13,9	9,2	7,1	3	9,4
1998	1,7	3,2	1,2	7,9	10,6	16,3	19	18,9	13,7	10,9	4,4	0,1	9,7
2000	-1,5	0,5	3,9	8,3	12,6	15,9	18	18,7	14,1	10,4	7,8	4,1	10,4
2002	-0,8	4,6	6	7,2	11,8	16,8	18	16,7	12,6	9,7	8,1	3,5	10,5
2003	2,5	-2,2	2,3	6,2	13,2	17,2	19,1	18,8	13	11,2	6,8	2,2	9,8

Tabella 4.7 – Temperature medie mensili per la stazione termometrica di Cecita

Si noti che il Centro Funzionale Multirischi ARPACAL gestisce anche la stazione termometrica Nocelle – Arvo posta in prossimità della diga di Nocelle a circa 1315 m s.l.m.m. Purtroppo la serie storica di tale stazione è costituita da soli 20 anni non continui di osservazioni, risultando non utilizzabile per analisi statistiche.

Nel prosieguo si è quindi deciso di tenere conto della sola stazione termometrica di Cecita.

Sulla base della serie storica di questa stazione è stata eseguita la generazione stocastica di una serie di 360 anni di temperature medie mensili mediante i metodi esposti teoricamente nei precedenti paragrafi.

Da questi risultati è stata determinata la serie di 360 anni di tasso di evaporazione mensile da specchi liquidi $E_{i,j}$ (espressa in mm/mese), mediante la semplice formula di Visentini:

$$E_{i,j} = 2,25 \cdot T_{i,j} \quad (4.15)$$

dove $T_{i,j}$ è la temperatura media del mese j dell' i -esimo anno generato stocasticamente.

4.5 Applicazione dei modelli di ottimizzazione al sistema Arimacina-Cecita-Mucone

4.5.1 Posizione generale del problema

Il problema della ottimizzazione delle regole di gestione di sistemi di invasi può essere posto, nella sua forma più generale, secondo la forma matematica seguente (Labadie, 2004):

$$\max_{\mathbf{X}} \text{ (or min) } \sum_{t=1}^T \alpha_t \cdot f_t[\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)] \quad (4.16)$$

dove:

- $\mathbf{X}(t)$ è il vettore degli n valori che la variabile decisionale o di controllo assume durante l'intervallo di tempo t (cioè, i rilasci da ciascuno degli n invasi del sistema nel medesimo intervallo di tempo);
- T è l'orizzonte di tempo complessivo preso in considerazione;
- $\mathbf{S}(t)$ è il vettore degli n valori che la variabile di stato assume all'inizio dell'intervallo di tempo t (cioè, i volumi effettivamente presenti in ciascuno degli n invasi del sistema all'inizio del medesimo intervallo di tempo);
- $f_t[\mathbf{S}(t), \mathbf{X}(t)]$ è la funzione obiettivo che deve essere massimizzata o minimizzata;
- α_t è il fattore di sconto per la determinazione del valore attuale dei profitti o dei costi registrati nell'intervallo di tempo futuro t ;

La relazione precedente deve essere affiancata all'equazione di bilancio di massa:

$$\mathbf{S}(t+1) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t) - \mathbf{I}[\mathbf{S}(t), \mathbf{S}(t+1)] - \mathbf{R}(t) \quad \text{per } t = 1, \dots, T \quad (4.17)$$

dove:

- $\mathbf{D}(t)$ è il vettore degli n valori dei deflussi in ingresso a ciascuno degli n invasi nell'intervallo di tempo t ;

- $I[\mathbf{S}(t), \mathbf{S}(t+1)]$ è il vettore che tiene conto delle perdite per sfioro ed evaporazione nell'intervallo di tempo t ;
- $\mathbf{R}(t)$ è il vettore che tiene conto delle richieste da parte dell'utenza nell'intervallo di tempo t ;
- \mathbf{C} è la matrice di "connettività" del sistema di invasi (la quale può tenere conto anche di eventuali ritardi nel routing dei deflussi tra i diversi invasi interconnessi);

ed ai vincoli:

$$\mathbf{S}_{MIN}(t+1) \leq \mathbf{S}(t+1) \leq \mathbf{S}_{MAX}(t+1) \quad \text{per } t = 1, \dots, T \quad (4.18)$$

$$\mathbf{X}_{MIN}(t) \leq \mathbf{X}(t) \leq \mathbf{X}_{MAX}(t) \quad \text{per } t = 1, \dots, T \quad (4.19)$$

che esprimono, rispettivamente, i limiti d'invaso per i diversi usi (generalmente plurimi) ai quali è destinato ciascun invaso, e limiti sui rilasci.

4.5.2 Identificazione della funzione obiettivo

4.5.2.1 Funzione obiettivo relativa alla produzione idroelettrica

L'obiettivo in esame è quello di **massimizzare** la produzione idroelettrica relativa ai tre impianti del sistema Ariamacina-Cecita lungo tutto il periodo di simulazione. La funzione obiettivo FO1 relativa a tale scopo è:

$$FO1 = \sum_{t=1}^T E_V(t) + E_{MI}(t) + E_{MII}(t) \quad (4.20)$$

dove:

- T è il numero totale di mesi del periodo di simulazione ($T = 12 \cdot N_{ANNI}$ dove N_{ANNI} è il numero di anni del periodo di simulazione);
- $E_V(t)$ rappresenta la produzione idroelettrica (espressa in kWh) nel mese t dell'impianto di Vaccarizzo;

- $E_{MI}(t)$ rappresenta la produzione idroelettrica (espressa in kWh) nel mese t dell'impianto di monte sul Mucone ("Mucone I salto");
- $E_{MII}(t)$ rappresenta la produzione idroelettrica (espressa in kWh) nel mese t dell'impianto di valle sul Mucone ("Mucone II salto");

Il problema pertanto è quello di esplicitare i termini energetici della (4.20) in funzione delle incognite del modello di ottimizzazione, cioè i rilasci idrici mensili $X_A(t)$ dal serbatoio di Ariamacina e $X_C(t)$ da quello di Cecita (espressi in Mm^3).

I paragrafi seguenti affrontano il problema in questione.

Potenza ed energia prodotte da un impianto idroelettrico

La potenza istantanea $P(t)$ espressa in [kW] prodotta da un generico impianto a turbine è data da:

$$P(t) = 9,81 \cdot Q(t) \cdot \Delta H_{disp}(t) \cdot \{ \eta_C(t) \cdot \eta_T[Q(t)] \cdot \eta_G \} \quad (4.21)$$

dove:

- 9,81 è il peso specifico del fluido trasportato, l'acqua, espresso in kN/m^3 ;
- $Q(t)$ è la portata di rilascio all'istante t espressa in m^3/s ;
- $\Delta H_{disp}(t)$ è il dislivello, espresso in m, presente all'istante t tra la quota del pelo libero del serbatoio $z_M(t)$ e quella di restituzione a valle della turbina $z_V(t)$:

$$\Delta H_{disp}(t) = z_M(t) - z_V(t) \quad (4.22)$$

- $\eta_C(t)$ è il rendimento del sistema galleria-condotta forzata pari a:

$$\eta_C(t) = \frac{\Delta H_{utile}(t)}{\Delta H_{disp}(t)} \quad (4.23)$$

dove $\Delta H_{utile}(t)$ è il salto energetico effettivamente utilizzabile dalla turbina all'istante t . Tale valore, considerando le perdite continue $pc(t)$ che si verificano nel sistema galleria-condotta forzata, è dato dalla relazione:

$$\Delta H_{utile}(t) = \Delta H_{disp}(t) - pc(t) \quad (4.24)$$

in cui il termine $pc(t)$ è funzione $g(\cdot)$ della portata istantanea di rilascio oltre che dei valori (noti) che assumono i diametri, le scabrezze e lunghezze delle stesse condotte/canali:

$$pc = g(\dots, Q(t), \dots) \quad (4.25)$$

Il rendimento del sistema galleria-condotta forzata è quindi pari:

$$\eta_c(t) = \frac{\Delta H_{utile}(t)}{\Delta H_{disp}(t)} = \frac{\Delta H_{disp}(t) - pc(t)}{\Delta H_{disp}(t)} = 1 - \frac{pc(t)}{\Delta H_{disp}(t)} \quad (4.26)$$

- $\eta_T [Q(t)]$ è il rendimento della turbina, dipendente dalla portata di rilascio $Q(t)$ secondo una particolare funzione legata al tipo di turbina in utilizzo (Pelton, Frnacis, etc...):

$$\eta_T = \eta_T [Q(t)] \quad (4.27)$$

- $\eta_G =$ è il rendimento del generatore pari a circa 0,97 – 0,98.

Legata alla potenza istantanea $P(t)$ è l'energia netta $E_n(t)$ prodotta in un intervallo di tempo dt , espressa in kWh:

$$E_n(t) = \eta_{TR} \cdot (1 - asb) \cdot P(t) \cdot dt \quad (4.28)$$

dove:

- η_{TR} è il rendimento del trasformatore (pari a circa 0,98);
- asb è il coefficiente di assorbimento energia per l'alimentazione dei servizi ausiliari di centrale (circa 0,0006).

Date le formule precedenti, l'energia $E_{\Delta t}$ espressa in kWh prodotta in un generico intervallo di tempo finito Δt , sarà teoricamente pari a:

$$E_{\Delta t} = 9,81 \cdot (1 - asb) \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \int_t^{t+\Delta t} \Delta H_{disp}(t) \cdot \eta_c(t) \cdot \eta_T [Q(t)] \cdot Q(t) \cdot dt \quad (4.29)$$

L'integrale posto a secondo membro della (4.29) è risolvibile solo sulla base della conoscenza delle funzioni del tempo in esso presenti.

Una formula semplificata per il calcolo dell'energia netta $E(t)$ prodotta in un generico mese t ($t = 1, 2, \dots, 12$) è data invece da:

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \overline{\eta_C}(t) \cdot \overline{\eta_T}[\overline{Q}(t)] \cdot \overline{Q}(t) \cdot \overline{\Delta H_{disp}}(t) \cdot n(t) \quad (4.30)$$

dove $\overline{Q}(t)$, $\overline{\eta_C}(t)$, $\overline{\eta_T}[\overline{Q}(t)]$ e $\overline{\Delta H_{disp}}(t)$ rappresentano rispettivamente i valori medi mensili della portata turbinata, del rendimento del sistema galleria-condotta forzata, del rendimento della turbina e del dislivello disponibile, mentre $n(t)$ è il numero di ore di funzionamento della turbina nel mese t , pari a:

$$n(t) = ng(t) \cdot n_g \quad (4.31)$$

dove $ng(t)$ è il numero di giorni nel mese t , mentre n_g è il numero di ore di funzionamento al giorno previsto per la turbina.

Si noti³ che:

$$n_g = 10 \div 12 \text{ ore}$$

corrispondenti alle ore di consumo di picco giornaliero (approssimativamente dalle 8:00 alle 20:00).

³ Tutti i produttori di energia elettrica rinnovabile con potenza < 10 Mw o di qualsiasi potenza purchè non programmabili (idroelettrico da acqua fluente), possono decidere di vendere l'energia prodotta al gestore della rete alla quale sono collegati (e non alla BORSA ELETTRICA come è d'obbligo per gli impianti > 10 Mw) al prezzo al quale l'ACQUIRENTE UNICO vende l'energia ai suoi distributori.

D'altro canto, i produttori di energia rinnovabile con impianti a potenza > 10 Mw DEVONO vendere la propria energia sulla BORSA ELETTRICA.

Il prezzo della borsa elettrica è il "PREZZO UNICO NAZIONALE". Tale prezzo varia da zona a zona del paese e varia di ora in ora nel giorno.

Consultando il sito del Gestore dei Mercati Energetici, <http://www.mercatoelettrico.org/It/Default.aspx>, si nota che, a riguardo della variabilità oraria, il costo è maggiore tra le 8:00 e le 20:00.

<http://www.mercatoelettrico.org/It/Statistiche/ME/DatiSintesi.aspx>

Per evidenziare la dipendenza di $E(t)$ dalle incognite del modello di ottimizzazione, cioè il volume rilasciato mensile $X(t)$ espresso in Mm^3 (anziché dalla portata media $\bar{Q}(t)$), considerando l'ovvia

relazione $\bar{Q}(t) = \frac{X(t) \cdot 10^6}{ng(t) \cdot n_g \cdot 3600}$ si ottiene:

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \bar{\eta}_C(t) \cdot \bar{\eta}_T[X(t)] \cdot \frac{X(t) \cdot 10^6}{ng(t) \cdot n_g \cdot 3600} \cdot \overline{\Delta H_{disp}}(t) \cdot ng(t) \cdot n_g \quad (4.32)$$

cioè:

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \bar{\eta}_C(t) \cdot \bar{\eta}_T[X(t)] \cdot \frac{X(t) \cdot 10^6}{3600} \cdot \overline{\Delta H_{disp}}(t) \quad (4.33)$$

A questo punto è necessario esplicitare nello specifico la dipendenza dei parametri $\overline{\Delta H_{disp}}(t)$, $\bar{\eta}_C(t)$ e $\bar{\eta}_T[X(t)]$ dalle variabili di stato $S(t)$ e decisionali $X(t)$:

- $\overline{\Delta H_{disp}}(t)$ è il valore medio del dislivello disponibile nel mese t (espresso in m), computato a partire dai valori di inizio mese $\Delta H_{disp}(t')$ e fine mese $\Delta H_{disp}(t'')$:

$$\overline{\Delta H_{disp}}(t) = \frac{\Delta H_{disp}(t') + \Delta H_{disp}(t'')}{2} \quad (4.34)$$

Assunta costante e pari a z_V la quota di restituzione a valle, si ha:

$$\Delta H_{disp}(t') = z_M(t') - z_V \quad (4.35)$$

$$\Delta H_{disp}(t'') = z_M(t'') - z_V \quad (4.36)$$

La (4.34) perciò sarà pari a:

$$\overline{\Delta H_{disp}}(t) = \frac{z_M(t') - z_V + z_M(t'') - z_V}{2} \quad (4.37)$$

ovvero a:

$$\overline{\Delta H}_{disp}(t) = \frac{z_M(t') + z_M(t'')}{2} - z_V \quad (4.38)$$

Tenendo conto del fatto che z_M , a sua volta, è una funzione $f(\cdot)$ del volume S del serbatoio: $z_M = f(S)$ secondo una relazione monomia del tipo:

$$S = S_0 \cdot (z_M - z_{MIN})^\beta \quad (4.39)$$

in cui S_0 e β dipendono dalla conformazione topografica dell'invaso (si veda paragrafo 4.1.5), si ha che:

$$z_M = \left(\frac{I}{S_0} \right)^{1/\beta} \cdot S^{1/\beta} + z_{MIN} \quad (4.40)$$

quindi la (4.38) si trasforma nella seguente:

$$\overline{\Delta H}_{disp}(t) = \frac{\left(\frac{I}{S_0} \right)^{1/\beta} \cdot \left[S^{1/\beta}(t') + S^{1/\beta}(t'') \right]}{2} - z_V \quad (4.41)$$

Se si assume come valore di invaso $S(t)$ del mese t quello iniziale $S(t')$ e tenendo conto del fatto che il valore finale di invaso $S(t'')$ del mese t coincide con il valore iniziale dell'invaso nel mese successivo $t+1$ si ha:

$$\overline{\Delta H}_{disp}(t) = \frac{\left(\frac{I}{S_0} \right)^{1/\beta} \cdot \left[S^{1/\beta}(t) + S^{1/\beta}(t+1) \right]}{2} - z_V \quad (4.42)$$

- $\overline{\eta}_c(t)$ è il rendimento medio del sistema galleria-condotta forzata nel mese t . Esso può essere posto pari a:

$$\bar{\eta}_c(t) = 1 - \frac{\bar{pc}(t)}{\Delta H_{disp}(t)} \quad (4.43)$$

Le perdite di carico medie $\bar{pc}(t)$ che si verificano lungo la galleria di derivazione e la successiva condotta forzata nel mese t , sono pari a:

$$\bar{pc}(t) = \bar{J}(t) \cdot L = \bar{J}_g(t) \cdot L_g + \bar{J}_{cf}(t) \cdot L_{cf} \quad (4.44)$$

dove:

$\bar{J}_g(t)$ è la cadente piezometrica media lungo la galleria di derivazione nel mese t ;

$\bar{J}_{cf}(t)$ è la cadente piezometrica media lungo la condotta forzata nel mese t ;

L_g è la lunghezza della galleria di derivazione;

L_{cf} è la lunghezza della condotta forzata.

Adottando come equazione del moto, la formula di Gauckler-Strickler:

$$Q = K \cdot R^{2/3} \cdot J^{1/2} \cdot A \quad (4.45)$$

(dove K è il coefficiente di scabrezza espresso in $m^{1/3}/s$, R il raggio idraulico espresso in m , J la cadente piezometrica e A è l'area, espressa in m^2 , della sezione trasversale pari, nel caso di correnti in pressione, a $\frac{\pi \cdot D^2}{4}$), si ha che:

$$J = \frac{Q^2}{K^2 \cdot R^{4/3} \cdot A^2} \quad (4.46)$$

quindi si ha:

$$\bar{pc}(t) = \left[\frac{L_g}{K_g^2 \cdot \left(\frac{D_g}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_g^4}{16}\right)} + \frac{L_f}{K_f^2 \cdot \left(\frac{D_f}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_f^4}{16}\right)} \right] \cdot \bar{Q}(t)^2 \quad (4.47)$$

cioè:

$$\overline{pc(t)} = \left[\frac{L_g}{K_g^2 \cdot \left(\frac{D_g}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_g^4}{16}\right)} + \frac{L_f}{K_f^2 \cdot \left(\frac{D_f}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_f^4}{16}\right)} \right] \cdot \frac{X(t)^2 \cdot 10^{12}}{ng(t) \cdot n_g \cdot 3600} \quad (4.48)$$

dove con D_g e D_f si sono indicati, rispettivamente, i diametri della galleria e della condotta forzata.

Considerando la relazione (4.42) e indicando, nella (4.48), con $c(t)$ il termine:

$$c(t) = \left[\frac{L_g}{K_g^2 \cdot \left(\frac{D_g}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_g^4}{16}\right)} + \frac{L_f}{K_f^2 \cdot \left(\frac{D_f}{4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot D_f^4}{16}\right)} \right] \cdot \frac{I}{ng(t) \cdot n_g \cdot 3600} \quad (4.49)$$

dalla (4.43) si ha:

$$\overline{\eta_c(t)} = I - \frac{2 \cdot [c(t) \cdot X(t)^2 \cdot 10^{12}]}{\left(\frac{I}{S_0}\right)^{1/\beta} \cdot [S^{1/\beta}(t) + S^{1/\beta}(t+I)] - 2 \cdot z_V + 2 \cdot z_{MIN}} \quad (4.50)$$

- Per quanto riguarda il termine relativo al rendimento di turbina $\overline{\eta_T}[X(t)]$ si può notare come esso dipenda dal tipo di turbina in uso.

Come esposto nel paragrafo 4.1.4, le turbine attualmente in uso nel sistema Ariamacina-Cecita sono del tipo Pelton e Francis.

La girante della turbina Pelton, inventata da Lester Allan Pelton nel 1879, consiste in un insieme di pale montate sul contorno di un disco circolare (Tamburrini, 2004). Si veda, al proposito, la foto successiva.



Figura 4.38 - Turbina Pelton (diga di Place Moulin)

Il disco ruota grazie al getto idrico che investe tali pale e che fuoriesce da uno o più ugelli (si veda la figura successiva).

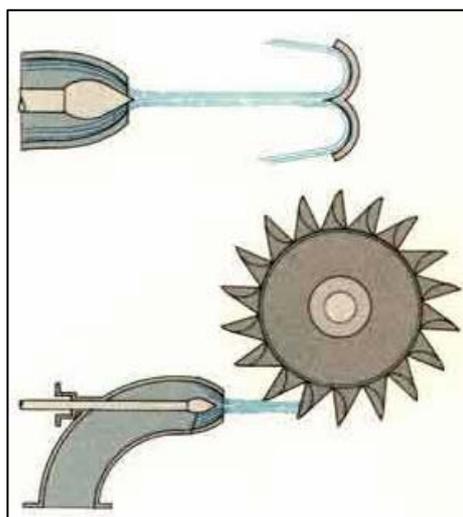


Figura 4.39 – Funzionamento della turbina Pelton (da www.waterwheelfactory.com)

La forma delle pale è quella di due cucchiai appaiati tra i quali si trova un tagliante che divide a metà il getto, per farlo uscire ai lati sotto forma di due getti separati ed equilibrare la spinta sui due lati della turbina.

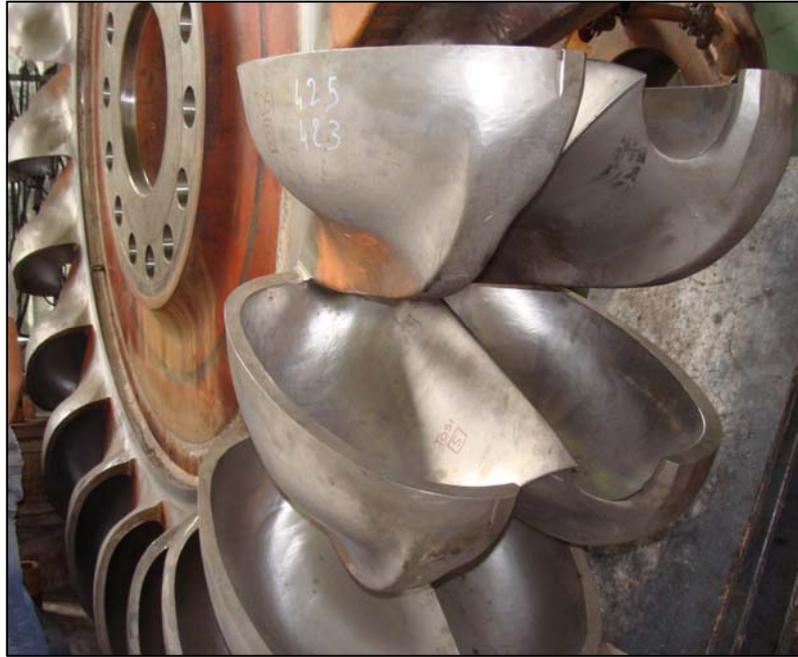


Figura 4.40 – Particolare delle pale di una turbina Pelton (diga di Place Moulin)

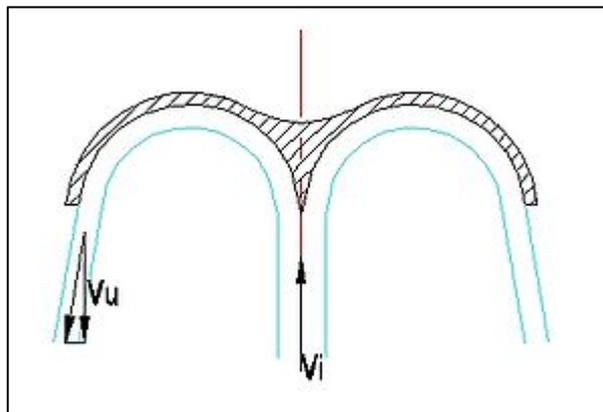


Figura 4.41 – Sezione della pala con getto incidente (da <http://it.wikipedia.org>)

Il flusso di acqua in uscita dall'ugello viene deviato di circa 180° dalle pale della turbina, che, come conseguenza, subiscono una spinta (verso l'alto nel disegno) come reazione alla deviazione del flusso stesso.

Come può osservarsi dalla cosiddetta “turbine selection chart” riportata nella figura successiva (letteralmente: diagramma per la scelta della turbina, riportante il tipo di turbina da utilizzare sulla base del salto netto espresso in m e della portata turbinata espressa in m^3/s), le turbine tipo

Pelton sono consigliate per bassi valori di portata (1-2 m³/s) e salti netti molto elevati (tra i 50 m e i 1000 m).

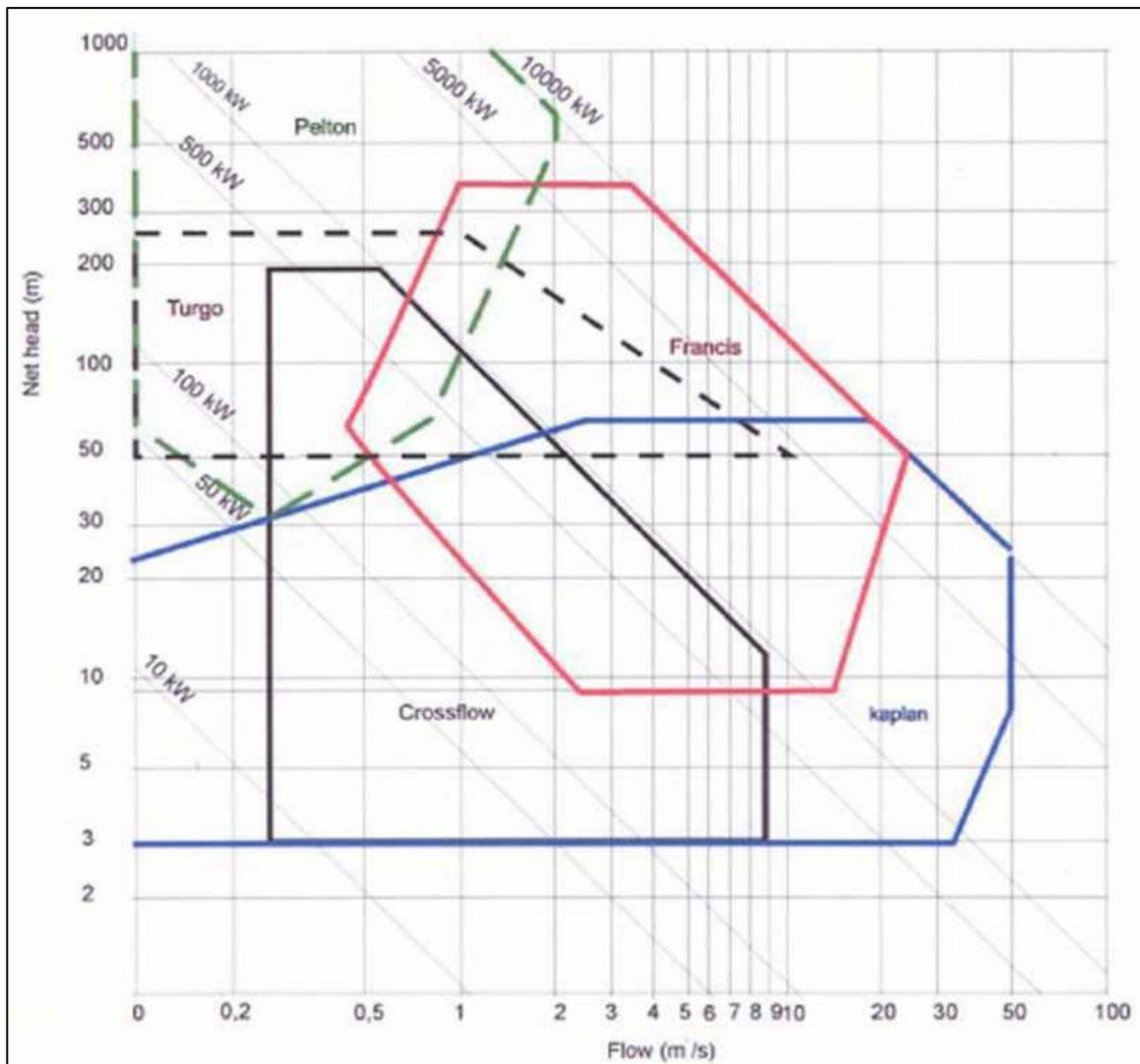


Figura 4.42 – Turbine selection chart.

L'area compresa all'interno della linea rossa rappresenta il campo di utilizzo delle turbine Francis.
L'area compresa all'interno della linea verde rappresenta il campo di utilizzo delle turbine Pelton
(da www.newmillshydro.freeserve.co.uk)

La figura successiva, infine, mostra la dipendenza dell'efficienza η_T di una turbina Pelton a singolo getto dalla portata turbinata: in particolare dal rapporto di quest'ultima con la massima portata turbinabile. Dal grafico succitato si nota come le turbine Pelton presentino efficienze molto elevate (pari al 90%) per un ampio range di valori di portata: cioè per portate comprese fra il 60% ed il 80% della massima turbinabile.

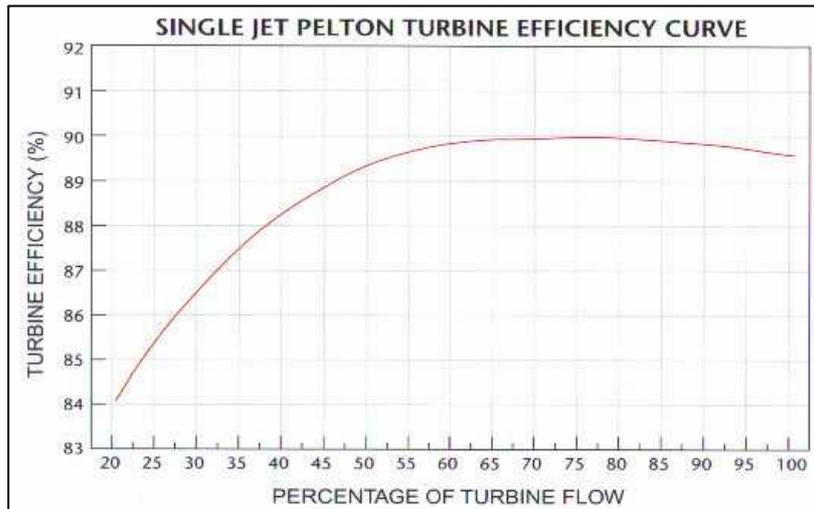


Figura 4.43 – Curva d’efficienza per turbina Pelton a singolo getto
(da www.newmillshydro.freeserve.co.uk)

Ai fini dell’applicazione automatica dei modelli di ottimizzazione, la curva in oggetto è stata interpolata (si veda la figura successiva) mediante l’equazione polinomiale di terzo grado:

$$\eta_T = 22,443 \cdot x^3 - 58,982 \cdot x^2 + 49,868 \cdot x + 77,512 \quad (4.51)$$

dove con il simbolo x si intende il rapporto tra la portata effettiva e quella massima turbinabile o, approssimativamente, tra volume effettivo mensile e volume massimo turbinabile:

$$\overline{\eta_T} = 22,443 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right]^3 - 58,982 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right]^2 + 49,868 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right] + 77,512 \quad (4.52)$$

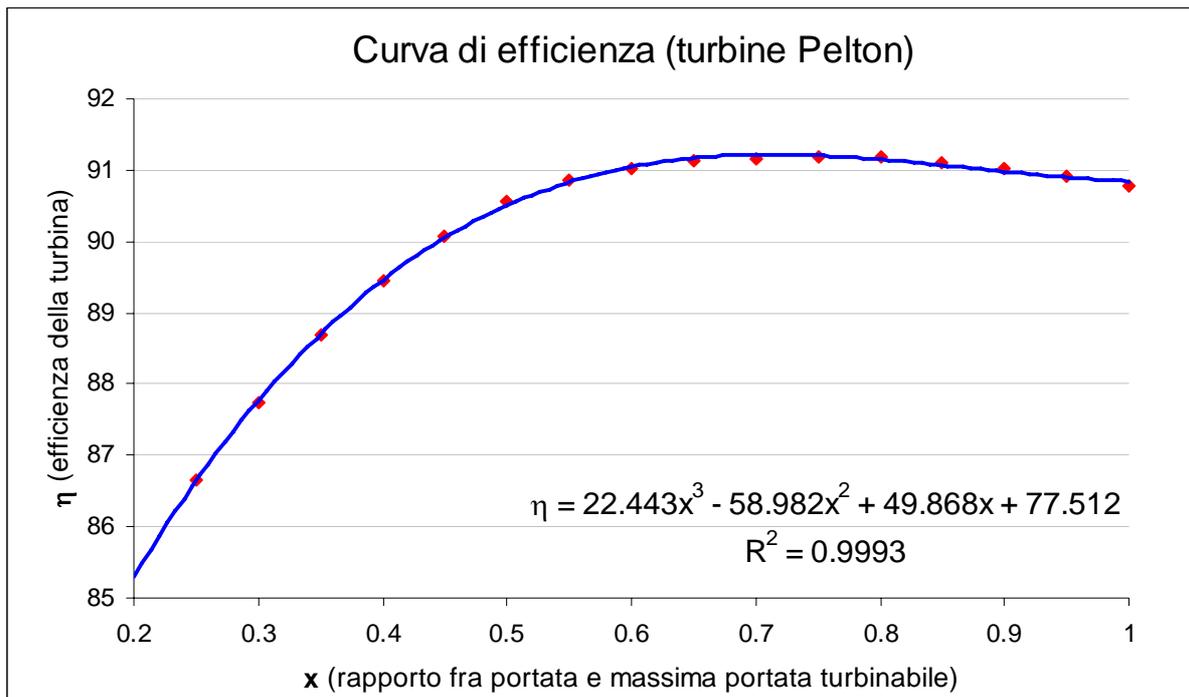


Figura 4.44 – Approssimazione della curva d’efficienza per turbina Pelton a singolo getto

La turbina Francis (si veda la foto successiva) è una turbina a reazione sviluppata nel 1848 da James B. Francis.



Figura 4.45 – Turbina Francis (da <http://it.wikipedia.org>)

È una turbina a flusso centripeto: l’acqua raggiunge la girante tramite un condotto a chiocciola che la lambisce interamente, poi un distributore, ovvero dei palettamenti sulla parte fissa, statorica, indirizzano il flusso per investire le pale della girante. La turbina è detta a reazione poiché non sfrutta solo la velocità ma anche la pressione del getto d’acqua che, quando giunge

nella girante, è ancora superiore a quella atmosferica. Infatti tramite il condotto convergente costituito dal canale tra le pale del distributore e da quello tra le pale della girante stessa si finisce di convertire la pressione ancora presente in velocità (energia cinetica).

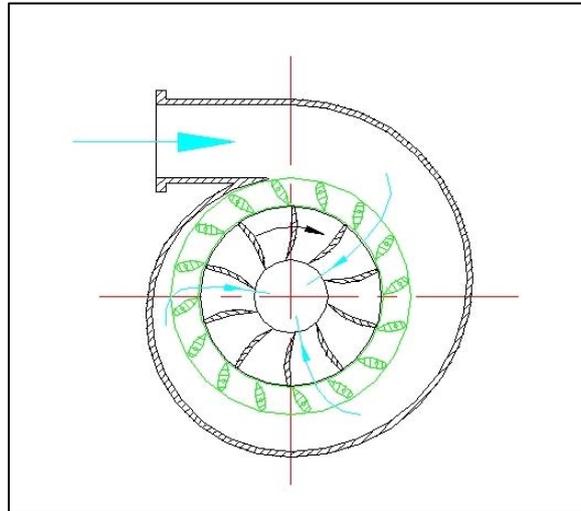


Figura 4.46 –Turbina Francis (da <http://it.wikipedia.org>)

Dall'esame della "turbine selection chart" riportata in precedenza, si può notare che le turbine Francis sono consigliate per salti netti da 10 m fino a 300÷400 m e portate da 2÷3 m³/s fino a 40÷50 m³/s.

La figura successiva, infine, mostra la dipendenza dell'efficienza η_T di una turbina Francis dalla portata turbinata: in particolare dal rapporto di quest'ultima con la massima portata turbinabile. Dal grafico succitato si nota come la turbina Francis ha un modesto campo di regolazione se non si vuole uscire dalle condizioni ottimali di efficienza. In particolare, valori di η_T superiori al 90% si ottengono per portate superiori al 75% della massima turbinabile.

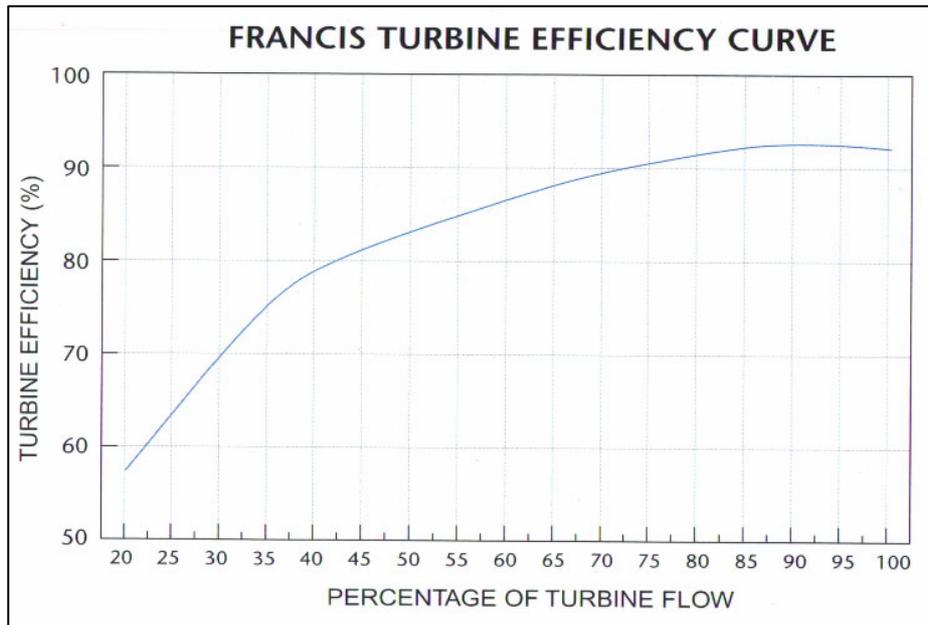


Figura 4.47 – Curva d’efficienza turbina Francis
(da www.newmillshydro.freeserve.co.uk)

Ai fini dell’applicazione automatica dei modelli di ottimizzazione, la curva in oggetto è stata interpolata (si veda la figura successiva) mediante l’equazione polinomiale di terzo grado:

$$\eta_T = 83,691 \cdot x^3 - 224,53 \cdot x^2 + 208,95 \cdot x + 24,636 \quad (4.53)$$

dove con il simbolo x si intende il rapporto tra la portata effettiva e quella massima turbinabile o, approssimativamente, tra volume effettivo mensile e volume massimo turbinabile:

$$\overline{\eta_T} = 83,691 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right]^3 - 224,53 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right]^2 + 208,95 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}} \right] + 24,636 \quad (4.54)$$

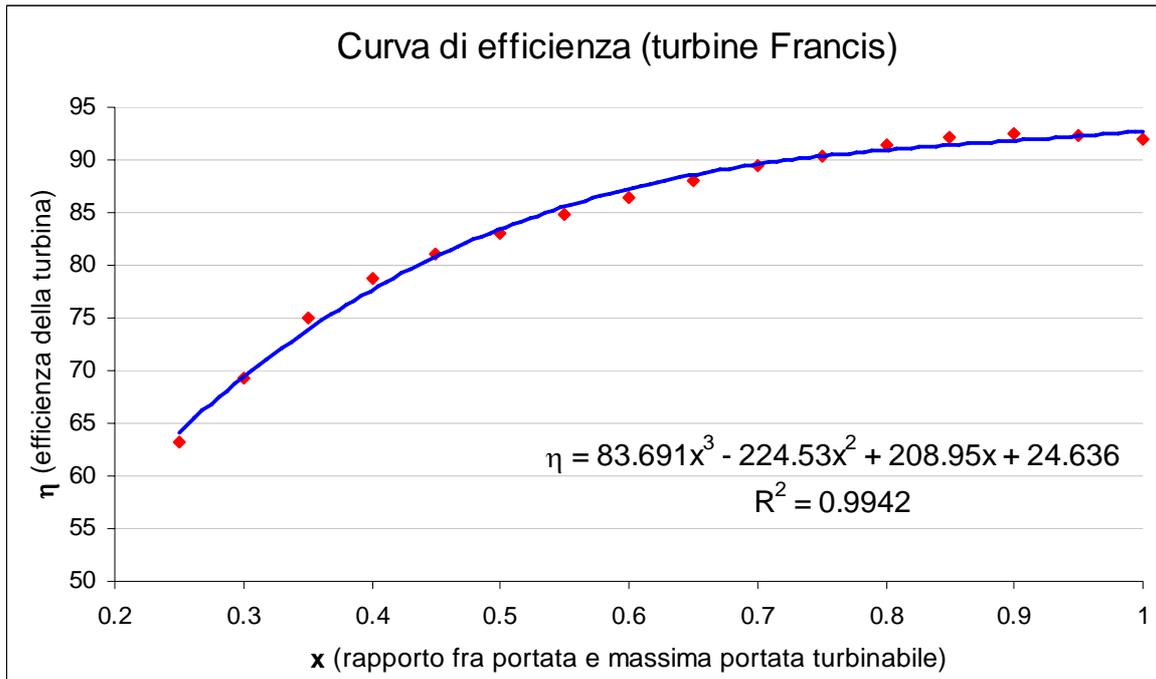


Figura 4.48 – Approssimazione della curva d'efficienza per turbina Francis

Funzione obiettivo

Riportando per comodità di esposizione la relazione (4.33):

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \overline{\eta_C}(t) \cdot \overline{\eta_T}[X(t)] \cdot \frac{X(t) \cdot 10^6}{3600} \cdot \overline{\Delta H_{disp}}(t) \quad (4.33)$$

e sviluppando alcuni semplici passaggi algebrici, si ha che:

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot \left(1 - \frac{\overline{pc}(t)}{\overline{\Delta H_{disp}}(t)} \right) \cdot \overline{\eta_T}[X(t)] \cdot \frac{X(t) \cdot 10^6}{3600} \cdot \overline{\Delta H_{disp}}(t) \quad (4.55)$$

$$E(t) = (1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR} \cdot [\overline{\Delta H_{disp}}(t) - \overline{pc}(t)] \cdot \overline{\eta_T}[X(t)] \cdot \frac{X(t) \cdot 10^6}{3600} \quad (4.56)$$

In definitiva, avendo indicato con A il termine costante pari a $\frac{(1 - asb) \cdot 9,81 \cdot \eta_G \cdot \eta_{TR}}{3600}$ si ha:

$$E(t) = A \cdot [\overline{\Delta H_{disp}}(t) - \overline{pc}(t)] \cdot \overline{\eta_T}[X(t)] \cdot X(t) \cdot 10^6 \quad (4.57)$$

in cui, come riportato nei paragrafi precedenti:

$$\overline{\Delta H_{disp}}(t) = \frac{\left(\frac{I}{S_0}\right)^{1/\beta} \cdot \left[S^{1/\beta}(t) + S^{1/\beta}(t+1)\right]}{2} - z_V \quad (4.41)$$

$$\overline{pc}(t) = c(t) \cdot X(t)^2 \cdot 10^{12} \quad (4.58)$$

$$\overline{\eta_T} = 22,443 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right]^3 - 58,982 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right]^2 + 49,868 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right] + 77,512 \quad (4.52) \quad \text{(turbina Pelton)}$$

$$\overline{\eta_T} = 83,691 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right]^3 - 224,53 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right]^2 + 208,95 \cdot \left[\frac{X(t)}{X_{MAX}}\right] + 24,636 \quad (4.54) \quad \text{(turbina Francis)}$$

Richiamando per comodità d'esposizione la funzione obiettivo (4.20) relativa alla produzione idroelettrica:

$$\sum_{t=1}^T E_V(t) + E_{MI}(t) + E_{MII}(t) \quad (4.20)$$

i vari termini contenuti nella sommatoria assumono le seguenti espressioni:

$$E_V(t) = A \cdot \left[\overline{\Delta H_{disp,V}}(t) - c_V(t) \cdot X_A(t) \cdot 10^{12}\right] \cdot \left\{ 83,691 \cdot \left[\frac{X_A(t)}{X_{MAX}}\right]^3 - 224,53 \cdot \left[\frac{X_A(t)}{X_{MAX}}\right]^2 + 208,95 \cdot \left[\frac{X_A(t)}{X_{MAX}}\right] + 24,636 \right\} \cdot X_A(t) \cdot 10^6 \quad (4.59)$$

$$E_{MI}(t) = A \cdot \left[\overline{\Delta H_{disp,MI}}(t) - c_{MI}(t) \cdot X_C(t) \cdot 10^{12}\right] \cdot \left\{ 22,443 \cdot \left[\frac{X_C(t)}{X_{A,MAX}}\right]^3 - 58,982 \cdot \left[\frac{X_C(t)}{X_{A,MAX}}\right]^2 + 49,868 \cdot \left[\frac{X_C(t)}{X_{A,MAX}}\right] + 77,512 \right\} \cdot X_C(t) \cdot 10^6 \quad (4.60)$$

$$E_{MII}(t) = A \cdot \left[\overline{\Delta H_{disp,MII}}(t) - c_{MII}(t) \cdot X_{MII}(t) \cdot 10^{12}\right] \cdot \left\{ 83,691 \cdot \left[\frac{X_{MII}(t)}{X_{MAX}}\right]^3 - 224,53 \cdot \left[\frac{X_{MII}(t)}{X_{MAX}}\right]^2 + 208,95 \cdot \left[\frac{X_{MII}(t)}{X_{MAX}}\right] + 24,636 \right\} \cdot X_{MII}(t) \cdot 10^6 \quad (4.61)$$

dove il termine $X_{MI}(t)$ è il volume convogliato nel sistema galleria-condotta forzata che serve l'impianto idroelettrico di Mucone valle ("Mucone II salto"). Tale variabile è funzione della seconda incognita del sistema, ovvero del rilascio $X_C(t)$ dal serbatoio di Cecita, secondo le indicazioni del paragrafo seguente.

4.5.2.2 Funzione obiettivo relativa al soddisfacimento irriguo

Come anticipato nel paragrafo 4.2, la superficie irrigata dall'impianto "Mucone" si estende per circa 14,30 km² (1430 ha), con una dotazione annua di 0,64 Mm³/km²·anno (6400 m³/ha·anno).

Le richieste irrigue annue, pertanto, risultano essere pari a:

$$1,43 \text{ km}^2 \cdot 0,64 \text{ Mm}^3/\text{km}^2 \cdot \text{anno} = 9,152 \text{ Mm}^3/\text{anno}$$

$$(1430 \text{ ha} \cdot 6400 \text{ m}^3/\text{ha} \cdot \text{anno} = 9.152.000 \text{ m}^3/\text{anno} = 9,152 \text{ Mm}^3/\text{anno})$$

Adottando i seguenti coefficienti di utilizzazione mensile (mostrati anche graficamente nella figura riportata successivamente alla suddetta tabella):

Mese	Coeff. di utilizzazione mensile
Gennaio	0,000
Febbraio	0,000
Marzo	0,000
Aprile	0,000
Maggio	0,045
Giugno	0,190
Luglio	0,320
Agosto	0,300
Settembre	0,120
Ottobre	0,025
Novembre	0,000
Dicembre	0,000
Sommano	1,000

Tabella 4.8 – Coefficienti di utilizzazione mensile per l'impianto irriguo "Mucone"

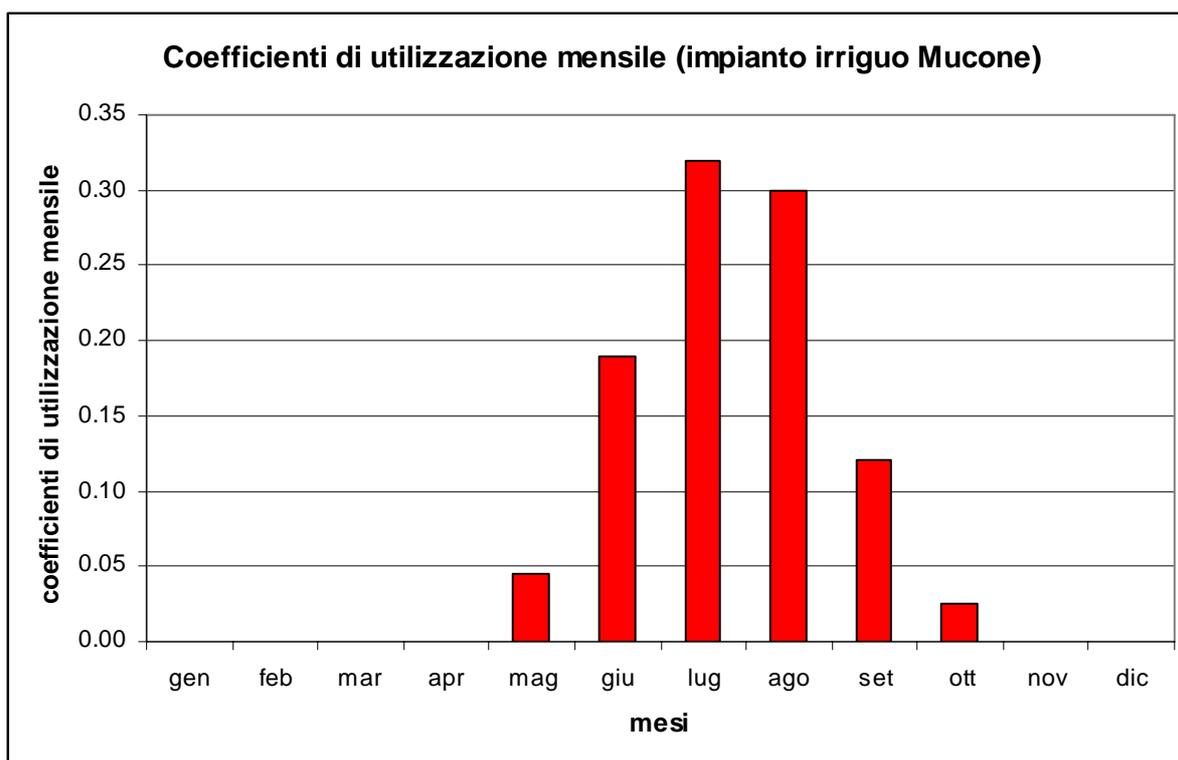


Figura 4.49 – Coefficienti di utilizzazione mensile per l'impianto di irrigazione Mucone

si ottengono i seguenti volumi idrici richiesti dall'impianto mese per mese (mostrati anche graficamente nella figura riportata successivamente alla seguente tabella):

Mese	Volumi (Mm ³)
Gennaio	0,000
Febbraio	0,000
Marzo	0,000
Aprile	0,000
Maggio	0,412
Giugno	1,739
Luglio	2,929
Agosto	2,746
Settembre	1,098
Ottobre	0,229
Novembre	0,000
Dicembre	0,000
Sommano	9,152

Tabella 4.9 – Volumi idrici richiesti mensilmente dall'impianto irriguo "Mucone"

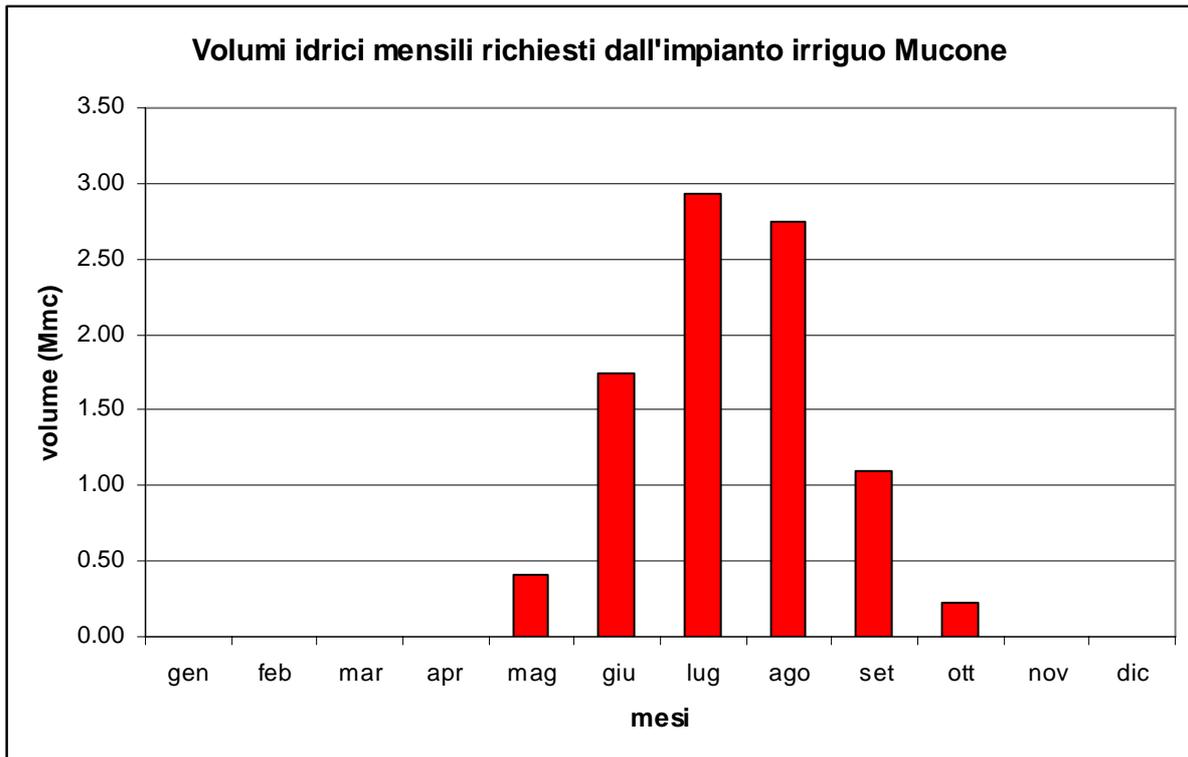


Figura 4.50 – Volumi idrici mensili richiesti dall'impianto di irrigazione Mucone

L'obiettivo da perseguire relativamente all'impianto di irrigazione Mucone è quello di minimizzare i deficit irrigui lungo tutto il periodo di simulazione.

Una funzione obiettivo (indicata nel prosieguo con FO_{irr}) relativa a tale scopo potrebbe essere:

$$FO_{irr} = \sum_{t=1}^T DEFICIT(t) = \sum_{t=1}^T \max[0; R(t) - ER(t)] \text{ per } 5 \leq [t - ((\text{ceiling}(t/12) - 1) * 12)] \leq 10 \quad (4.62)$$

dove:

- T è il numero totale di mesi del periodo di simulazione ($T = 12 \cdot N_{ANNI}$ dove N_{ANNI} è il numero di anni del periodo di simulazione);
- $R(t)$ rappresenta la richiesta irrigua dell'impianto nel mese i espressa in Mm^3 ;
- $ER(t)$ rappresenta il volume d'acqua (espresso sempre in Mm^3) disponibile nel mese i per il soddisfacimento delle richieste irrigue;

La (4.62) esprime, pertanto, la somma, estesa su tutto il periodo di simulazione, degli eventuali deficit irrigui mensili, limitatamente ai mesi del previsto periodo irriguo maggio-ottobre.

Nel presente lavoro, in particolare, si è preferito esprimere l'obiettivo irriguo appena introdotto, in termini di massimizzazione della funzione obiettivo, in analogia all'obiettivo idroelettrico. Al tal fine si è introdotta la seguente funzione obiettivo:

$$FO2 = \sum_{t=1}^T EROG_IRR(t) = \sum_{t=1}^T \min[R(t), ER(t)] \quad \text{per } 5 \leq [t - ((\text{ceiling}(t/12) - 1) * 12)] \leq 10 \quad (4.63)$$

la quale effettua la somma dei volumi idrici effettivamente erogati mensilmente all'impianto irriguo (indicati nella formula con il termine $EROG_IRR(t)$) in tutto il periodo di simulazione, limitatamente ai mesi del previsto periodo irriguo maggio-ottobre.

Si può notare che, tra le due funzioni obiettivo appena introdotte esiste la relazione $FO2 = E_{tot} + FO_irr$, avendo indicato con E_{tot} l'erogazione totale da effettuare nell'intero periodo di simulazione per soddisfare perfettamente le relative richieste irrigue.

Si ribadisce che, nel prosieguo, ai fini irrigui si farà esclusivo riferimento alla funzione obiettivo $FO2$ (e non alla FO_irr).

Il problema, in analogia all'obiettivo idroelettrico, è ora quello di esplicitare i termini $ER(t)$ della (4.62) in funzione delle incognite del modello di ottimizzazione, cioè i rilasci idrici mensili $X_A(t)$ dal serbatoio di Ariamacina e $X_C(t)$ da quello di Cecita (espressi in Mm^3).

Particolare attenzione va posta nel calcolo del termine $ER(t)$.

Facendo costante riferimento allo schema planimetrico della figura (4.51) riportata nella pagina successiva, e considerando le figure (4.35) e (4.36) del paragrafo 4.3, si ha che:

$$ER(t) = [D_{MI}(t) - DER_{MI}(t)] + D_{MII}(t) + [D_{CER}(t) - DER_{CER}(t)] + X_{MI}(t) + DER_{MI}(t) + DER_{CER}(t) - DMV_{MII}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t) + DIFF(t)$$

(4.64)

dove:

- $D_{MI}(t)$ è il volume defluito (in Mm^3) nel mese t , generato dalla porzione di bacino idrografico del t. Mucone a valle dello sbarramento di Cecita, chiuso in corrispondenza della sezione in cui avviene la derivazione verso la galleria presente a valle della centrale idroelettrica di Mucone monte ("Mucone I salto");
- $D_{MII}(t)$ è il volume defluito (in Mm^3) nel mese t , generato dalla porzione di bacino idrografico del t. Mucone a valle della derivazione precedente, chiuso in corrispondenza della sezione di restituzione della centrale idroelettrica di Mucone valle ("Mucone II salto");
- $D_{CER}(t)$ è il volume defluito (in Mm^3) nel mese t , generato dal bacino idrografico del t. Ceraco chiuso in corrispondenza della sezione in cui avviene la derivazione verso la galleria presente a valle della centrale idroelettrica di Mucone monte ("Mucone I salto");

- $DER_{MI}(t)$ è il volume derivato (in Mm^3) dal t. Mucone nel mese t verso la galleria presente a valle della centrale idroelettrica di Mucone monte (“Mucone I salto”);
- $DER_{CER}(t)$ è il volume derivato (in Mm^3) nel mese t , dal t. Ceraco verso la galleria presente a valle della centrale idroelettrica di Mucone monte (“Mucone I salto”);
- $X_{MI}(t)$ è il volume defluito (in Mm^3) nel mese t , nella condotta forzata che serve l’impianto idroelettrico di Mucone monte (“Mucone I salto”): tale termine è ovviamente uguale al rilascio dal serbatoio di Cecita $X_C(t)$;
- $DMV_{MII}(t)$ è il volume (in Mm^3) da rilasciare come minimo deflusso vitale nel mese t a valle della sezione di restituzione della centrale idroelettrica di Mucone valle (“Mucone II salto”);
- $DMV_C(t)$ è il volume (in Mm^3) da rilasciare come minimo deflusso vitale nel mese t a valle dello sbarramento di Cecita;
- $SF_C(t)$ è il volume sfiorato (in Mm^3) nel mese t dal serbatoio di Cecita;
- $DIFF(t)$ è il volume che viene restituito in alveo nel mese t dalle derivazioni sul t. Ceraco e sul t. Mucone che servono la galleria dell’impianto idroelettrico di Mucone valle (“Mucone II salto”), a causa del fatto che il sistema galleria + condotta forzata di tale impianto è caratterizzato da una portata massima di $20 \text{ m}^3/\text{s}$, cioè di un volume mensile massimo convogliabile di $25,92 \text{ Mm}^3$;

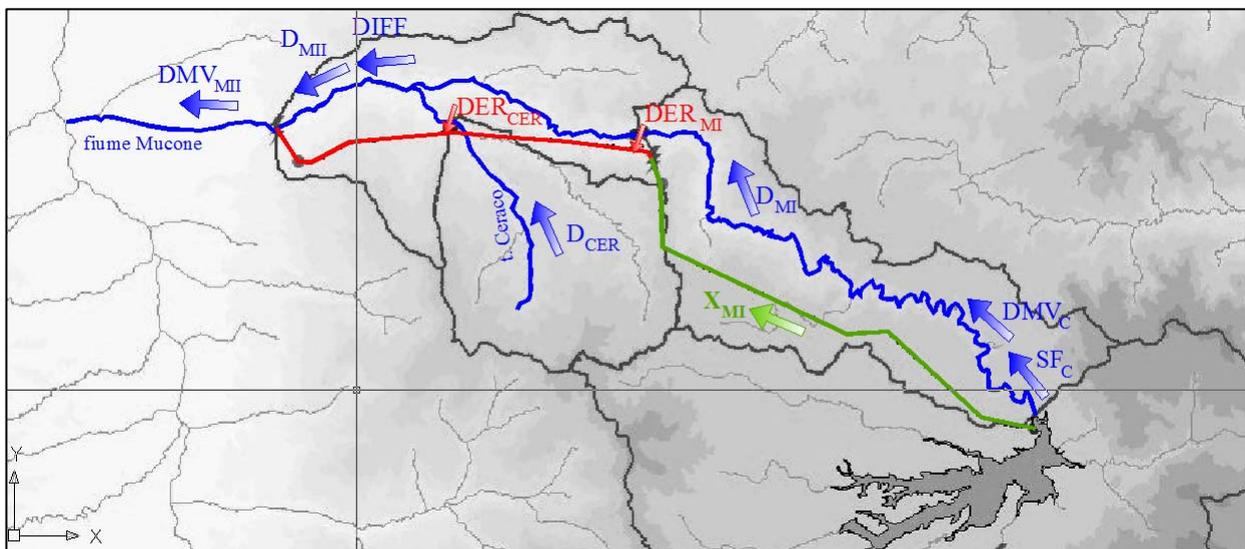


Figura 4.51 – Schema planimetrico degli impianti idroelettrici di Mucone con indicazione dei termini sovaelenati

Semplificando si ottiene:

$$ER(t) = D_{MI}(t) + D_{MII}(t) + D_{CER}(t) + X_C(t) - DMV_{MII}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t) + DIFF(t) \quad (4.65)$$

Si noti che tale valore non deve eccedere il volume erogabile massimo mensile, determinato tenendo conto del fatto che, come anticipato, la portata massima convogliabile all'impianto è 5530 l/s: $5530 \text{ l/s} \cdot 86400 \text{ s/g} \cdot 30 \text{ g} / 10^9 = 14,33 \text{ Mm}^3$

In definitiva la (4.65) si traduce nella seguente relazione:

$$ER(t) = \min [14,33; D_{MI}(t) + D_{MII}(t) + D_{CER}(t) + X_C(t) - DMV_{MII}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t) + DIFF(t)] \quad (4.66)$$

Si noti che a seguito delle derivazioni $DER_{MI}(t)$ del t. Mucone e $DER_{CER}(t)$ del t. Ceraco verso la galleria che serve l'impianto idroelettrico di Mucone valle ("Mucone II salto"), il volume convogliato mensile $X_{MII}(t)$ a tale impianto sarà diverso da quello convogliato all'impianto di monte "Mucone I salto" $X_C(t)$, in particolare si avrà:

$$X_{MII}(t) = X_C(t) + DER_{MI}(t) + DER_{CER}(t) \quad (4.67)$$

dove i termini relativi ai volumi derivati mensilmente $DER(t)$ sono stati calcolati ipotizzando un coefficiente di utilizzazione pari a 0,8.

In particolare, indicando con $DN_{(\cdot)}(t)$ il volume mensile defluito naturalmente a monte dell'opera di derivazione (\cdot) e conoscendo il volume $DMV_{(\cdot)}(t)$ da rilasciare a valle come minimo deflusso vitale, i volumi da derivare $DER_{(\cdot)}(t)$ sono stati calcolati secondo la regola seguente:

$$\begin{cases} DER_{(\cdot)}(t) = DN_{(\cdot)}(t) - DMV_{(\cdot)}(t) & \text{se } DMV_{(\cdot)}(t) \geq DN_{(\cdot)}(t) \cdot (1-0,8) \\ DER_{(\cdot)}(t) = 0,8 \cdot DN_{(\cdot)}(t) & \text{se } DMV_{(\cdot)}(t) < DN_{(\cdot)}(t) \cdot (1-0,8) \end{cases} \quad (4.68)$$

per l'opera di derivazione sul t. Mucone si ha che:

$$DN_{MI}(t) = D_{MI}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t) \quad (4.69)$$

quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} DER_{MI}(t) = D_{MI}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t) - DMV_{MI}(t) \text{ se } DMV_{MI}(t) \geq [D_{MI}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t)] \cdot (1-0,8) \\ \\ DER_{MI}(t) = 0,8 \cdot [D_{MI}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t)] \quad \text{se } DMV_{MI}(t) < [D_{MI}(t) + SF_C(t) + DMV_C(t)] \cdot (1-0,8) \end{array} \right. \quad (4.70)$$

mentre per il torrente Ceraco si ha:

$$DN_{CER}(t) = D_{CER}(t) \quad (4.71)$$

quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} DER_{CER}(t) = D_{CER}(t) - DMV_{CER}(t) \quad \text{se } DMV_{CER}(t) \geq D_{CER}(t) \cdot (1-0,8) \\ \\ DER_{CER}(t) = 0,8 \cdot D_{CER}(t) \quad \text{se } DMV_{CER}(t) < D_{CER}(t) \cdot (1-0,8) \end{array} \right. \quad (4.72)$$

4.5.2.3 Funzione obiettivo complessiva

I modelli di ottimizzazione utilizzati nelle applicazioni esposte nei paragrafi successivi, si basano su **problemi di ricerca del massimo**.

La funzione obiettivo finale FO sarà pertanto data da:

$$FO = w_1 \cdot FO1^s + w_2 \cdot FO2^s \quad (4.73)$$

in cui w_1 , w_2 e s sono i coefficienti del metodo AOF (si veda paragrafo 3.10.1.1), necessari per la identificazione della frontiera di Pareto. Si ricorda che, nel caso in cui l'esponente s si ponga pari a 1, il metodo AOF si riduce al più semplice metodo dei pesi. In tal caso agli altri parametri w_1 e w_2 vanno attribuiti valori tali che $0 < w_i < 1$ e $\sum_{i=1}^2 w_i = 1$ per $i = 1, 2$;

4.5.3 Il bilancio di massa mensile

L'equazione di bilancio di massa (4.17) per il sistema Ariamacina-Cecita si traduce nelle seguenti:

$$S_A(t+1) = S_A(t) + D_A(t) - DMV_A(t) - EVAP_A(t) - X_A(t) \quad (4.74) \text{ per l'invaso di Ariamacina}$$

$$S_C(t+1) = S_C(t) + D_C(t) - DMV_C(t) - EVAP_C(t) - X_A(t) + X_{AR}(t) \quad (4.75) \text{ per l'invaso di Cecita}$$

dove:

- $S_A(t)$ e $S_C(t)$ sono, rispettivamente, i volumi di invaso presenti all'inizio del mese t nei serbatoi di Ariamacina e Cecita (espressi in Mm^3);
- $D_A(t)$ e $D_C(t)$ sono, rispettivamente, i volumi defluiti nel mese t in ingresso agli invasi di Ariamacina e Cecita (espressi in Mm^3);
- $DMV_A(t)$ e $DMV_C(t)$ sono, rispettivamente, i volumi d'acqua da rilasciare nel mese t per deflusso minimo vitale dai serbatoi di Ariamacina e Cecita (espressi in Mm^3);
- $EVAP_A(t)$ e $EVAP_C(t)$ sono, rispettivamente, i volumi d'acqua evaporati nel mese t dai serbatoi di Ariamacina e Cecita (espressi in Mm^3);
- $X_A(t)$ e $X_C(t)$ sono le incognite del modello, cioè, i rilasci da effettuare nel mese t dai serbatoi di Ariamacina e Cecita (espressi in Mm^3).

Si esaminano, nel prosieguo, ciascuno dei termini delle (4.74) – (4.75)

- $D_A(t)$ e $D_C(t)$: per il calcolo effettuato con i modelli di ottimizzazione esposti da un punto di vista teorico nei precedenti paragrafi, sono stati utilizzati 10 serie di deflussi mensili trentennali generati stocasticamente secondo i metodi esposti nel paragrafo 4.4;
- $DMV_A(t)$ e $DMV_C(t)$: è stato considerato un contributo di $2 \frac{l}{s \cdot km^2}$ per ciascuno dei bacini idrografici afferenti i serbatoi in oggetto (si veda paragrafo 4.3);
- $EVAP_A(t)$ e $EVAP_C(t)$: il volume evaporato nel mese t dallo specchio d'acqua dell'invaso può essere calcolato in maniera semplificata mediante la formula:

$$EVAP(t) = \frac{e(t) \cdot \bar{A}(t)}{1000} \quad (4.76)$$

dove:

- $e(t)$ è l'evaporazione espressa in mm verificatasi nel mese t : essa è stata calcolata mediante la formula di Visentini:

$$e(t) = 2,25 \cdot T(t)^{1,5} \quad (4.77)$$

nella quale le temperature medie mensili $T(t)$ (espresse in °C) sono state generate secondo i metodi esposti nel paragrafo 4.4;

- $\bar{A}(t)$ è il valore medio (espresso in km²) che ha assunto nel mese t la superficie dello specchio d'acqua dell'invaso; esso è quindi pari a:

$$\bar{A}(t) = \frac{A(t) + A(t+1)}{2} \quad (4.78)$$

dove $A(t)$ è l'estensione dello specchio liquido all'inizio del mese t , mentre $A(t+1)$ è quella relativa alla fine del mese t (o all'inizio del mese successivo $t+1$)

- il valore 1000 al denominatore della (4.76) è un semplice fattore di equivalenza da introdurre per esprimere il termine $EVAP(t)$ in Mm³.

In definitiva la (4.76) sarà pari a:

$$EVAP(t) = \frac{e(t)}{2000} \cdot [A(t) + A(t+1)] \quad (4.79)$$

Note le equazioni approssimanti aree-quote $A = A_0 \cdot (z - z_{MIN})^y$ e volumi-quote $S = S_0 \cdot (z - z_{MIN})^\beta$ (si veda paragrafo 4.1.5), è possibile ricavare, per ciascun serbatoio, le equazioni che esprimono la diretta dipendenza tra aree e volumi d'invaso. Infatti dalla equazione volumi-quote si ha:

$$z - z_{MIN} = \left(\frac{S}{S_0} \right)^{1/\beta} \quad (4.80)$$

quindi:

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{S}{S_0} \right)^{\gamma/\beta} = \frac{A_0}{S_0^{\gamma/\beta}} \cdot S^{\gamma/\beta} \quad (4.81)$$

Utilizzando la (4.81), l'equazione (4.79) diventa:

$$EVAP(t) = \frac{A_0 \cdot e(t)}{2000 \cdot S_0^{\gamma/\beta}} \cdot \left[S(t)^{\gamma/\beta} + S(t+1)^{\gamma/\beta} \right] \quad (4.82)$$

Esaminati i diversi termini, le equazioni (4.74) e (4.75) si tramutano nelle seguenti:

$$\frac{A_{0,A} \cdot e_A(t)}{2000 \cdot S_{0,A}^{\gamma/\beta}} \cdot S_A(t+1)^{\gamma/\beta} + S_A(t+1) = S_A(t) - \frac{A_{0,A} \cdot e_A(t)}{2000 \cdot S_{0,A}^{\gamma/\beta}} \cdot S_A(t)^{\gamma/\beta} + D_A(t) - DMV_A(t) - EVAP_A(t) - X_A(t)$$

(4.83) per l'invaso di Ariamacina

$$\frac{A_{0,C} \cdot e_C(t)}{2000 \cdot S_{0,C}^{\gamma/\beta}} \cdot S_C(t+1)^{\gamma/\beta} + S_C(t+1) = S_C(t) - \frac{A_{0,C} \cdot e_C(t)}{2000 \cdot S_{0,C}^{\gamma/\beta}} \cdot S_C(t)^{\gamma/\beta} + D_C(t) - DMV_C(t) - EVAP_C(t) - X_C(t) + X_A(t)$$

(4.84) per l'invaso di Cecita.

Le equazioni (4.83) e (4.84) permettono il calcolo dei volumi d'invaso $S_A(t+1)$ e $S_C(t+1)$ al tempo $t+1$, noti che siano i valori dei volumi d'invaso, dei deflussi mensili, delle temperature medie mensili e dei rilasci nel mese precedente t .

Tali relazioni sono del tipo:

$$a_1 \cdot x^{a_2} + x = a_3 \quad (4.85)$$

dove: $x = S_{(\cdot)}(t+1)$, $a_1 = \frac{A_{0,(\cdot)} \cdot e_{(\cdot)}(t)}{2000 \cdot S_{0,(\cdot)}^{\gamma/\beta}}$ per cui si ha sempre $a_1 \geq 0$, $a_2 = \gamma/\beta$ (pari a 0,6 per l'invaso

di Ariamacina e 0,729 per l'invaso di Cecita) mentre a_3 è il termine noto (nell'ipotesi di conoscenza dei rilasci) che appare al secondo membro al tempo t .

Si noti che l'equazione (4.85), nel caso in cui $a_1 \geq 0$ e a_2 sufficientemente piccolo (ad esempio < 1), può essere approssimata in maniera eccellente da una relazione lineare del tipo:

$$b_1 \cdot x + b_2 = 0 \quad (4.86)$$

in cui b_1 e b_2 sono i coefficienti da stimare mediante ottimizzazione ai minimi quadrati. Ricavati i valori di tali coefficienti, immediato appare il calcolo da (4.86) dell'incognita x , cioè dell'invaso al tempo successivo $S_{(\cdot)}(t+1)$.

4.5.4. I vincoli del modello di ottimizzazione

Per quanto riguarda i vincoli sui volumi d'invaso $S(t)$ esposti dalla (4.18), per il serbatoio di Ariamacina si ha:

$$S_{min,A} = 0,562 \text{ Mm}^3 \text{ (volume di massimo svaso)}$$

$$S_{max,A} = 1,833 \text{ Mm}^3 \text{ (volume di massima regolazione)}$$

mentre per quello di Cecita:

$$S_{min,C} = 1,046 \text{ Mm}^3 \text{ (volume di massimo svaso)}$$

$$S_{max,C} = 108,22 \text{ Mm}^3 \text{ (volume di massima regolazione)}$$

Nei riguardi dei vincoli sui rilasci mensili $X(t)$ si noti che i valori massimi sono determinati dalle massime portate convogliabili dalle condotte forzate delle centrali idroelettriche in esame. In particolare si richiamano per comodità di esposizione tali valori:

portata massima convogliabile nella condotta forzata della centrale di Vaccarizzo: $6 \text{ m}^3/\text{s}$

portata massima convogliabile nelle condotte forzate delle centrali di Mucone I e II salto: $20 \text{ m}^3/\text{s}$

che, considerando un funzionamento delle turbine per 12 ore al giorno, porta a volumi massimi convogliabili mensili pari a:

per la centrale di Vaccarizzo: $X_{max,V} = 7,78 \text{ Mm}^3$;

per ciascuna delle centrali di Mucone I e II salto: $X_{max,v} = 25,92 \text{ Mm}^3$;

4.6 Ottimizzazione della gestione operativa del sistema Arimacina-Cecita-Mucone

In questo paragrafo è descritta la fase applicativa dei modelli di ottimizzazione SQP, DP e QL (esposti nei loro lineamenti teorici nel paragrafo 3), al problema della gestione operativa delle risorse idriche del sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.

Come anticipato nei precedenti paragrafi, le difficoltà insite nel problema di ottimizzazione di un sistema multi-invaso a scopo plurimo (quale è quello in oggetto) sono legate essenzialmente:

- al carattere aleatorio di alcune grandezze del sistema (deflussi, temperature, etc.);
- alla presenza di più obiettivi da conseguire.

Il primo problema (cioè il carattere aleatorio di alcune grandezze del sistema) è stato affrontato, nel caso di utilizzo delle tecniche di ottimizzazione deterministiche SQP e DP, mediante applicazione dell'approccio I.S.O. descritto nel paragrafo 3.11.1. L'algoritmo QL, invece, esemplifica una tipica applicazione E.S.O. (si veda paragrafo 3.11.2).

Il secondo problema (molteplicità degli obiettivi) è stato invece affrontato allo stesso modo per ciascuna delle tre tecniche di ottimizzazione considerate, procedendo alla determinazione della cosiddetta "frontiera di Pareto" (si veda paragrafo 3.10).

4.6.1 Ottimizzazione mediante Sequential Quadratic Programming (SQP)

Sono state estratte, dai dati generati stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4, quindici serie ventennali di valori di temperature medie mensili e deflussi mensili alle sezioni significative dei bacini idrografici in gioco nel sistema di invasi in esame.

Per la prima serie di dati in input si è proceduto alla determinazione della frontiera di Pareto mediante il metodo dei pesi esposto nei suoi lineamenti teorici nel paragrafo 3.10.1.1.

L'insieme delle soluzioni dominate, o frontiera di Pareto, è generata ottimizzando la funzione "scalarizzata" (3.125), riportata di seguito per comodità d'esposizione:

$$w_1 \cdot FO_1 + w_2 \cdot FO_2 \quad (4.87)$$

al variare dei pesi w_1 e w_2 nel range (0, 1) in modo che $w_1 + w_2 = 1$.

Fissata una combinazione di valori della coppia $(w_1=w_1^*, w_2=w_2^*)$, è stata effettuata l'ottimizzazione con il metodo SQP, ottenendo la serie dei rilasci turbinati mensili "ottimi" da ciascun serbatoio (è stato pertanto affrontato un problema di ottimizzazione con $240 \cdot 2 = 480$ incognite).

Una importante precisazione deve essere a questo punto riportata: il metodo SQP non garantisce la globalità dell'ottimo trovato; esso, infatti, è un metodo di "ricerca locale". Sarebbe stato necessario, pertanto, adottare la tecnica in esame all'interno di uno dei metodi di ottimizzazione globale presenti in letteratura (si veda il paragrafo 5).

In questa sede ci si è, invece, limitati, per ciascuna combinazione di valori della coppia w_1 e w_2 , a un approccio maggiormente empirico, basato sulla esecuzione di vari run di ottimizzazione a partire da punti iniziali differenti.

Le soluzioni "ottime" così trovate sono state successivamente applicate come regole ottimali di rilascio turbinato alla stessa serie di dati, ottenendo i valori delle funzioni obiettivo $FOI_{(w_1^*, w_2^*)}^{(l)}$ e $FO2_{(w_1^*, w_2^*)}^{(l)}$ (l'apice si riferisce alla serie di dati a cui si fa riferimento, il pedice ai valori dei pesi fissati): questo risultato può essere rappresentato graficamente nel cosiddetto "piano degli obiettivi" (il piano cioè che ha per ascisse e ordinate i valori delle funzioni obiettivo) dove la coppia $(FOI_{(w_1^*, w_2^*)}^{(l)}, FO2_{(w_1^*, w_2^*)}^{(l)})$ è individuata da un punto.

L'unione dei diversi punti corrispondenti, nel piano degli obiettivi, a ciascuna delle coppie $(FOI_{(w_1, w_2)}^{(l)}, FO2_{(w_1, w_2)}^{(l)})$ determinate per diverse combinazioni dei pesi (w_1, w_2) , individua la frontiera di Pareto.

I risultati così ottenuti sono riportati nella successiva tabella:

		SERIE VENTENNALE N°1 DI DEFLUSSI MENSILI E TEMPERATURE MEDIE MENSILI		
w_1	w_2	FOI (Gwh)	FO2	
			Erogazione ventennale all'impianto Mucone (Mmc)	Deficit irriguo
0,9	0,1	6470,9	175,28	4,25 %
0,8	0,2	6464,7	181,99	0,58 %
0,7	0,3	6457,7	183	0,03 %
0,6	0,4	6455,3	183,01	0,03 %
0,5	0,5	6453,2	183,03	0,02 %
0,4	0,6	6448,9	183,04	0,01 %
0,3	0,7	6443,1	183,06	0,00 %
0,2	0,8	6427,8	183,06	0,00 %
0,1	0,9	6402,8	183,06	0,00 %

Tabella 4.10 – Risultati dell'applicazione del metodo dei pesi
(ottimizzazione mediante approccio I.S.O. basato su SQP)

Come può notarsi, la performance della funzione obiettivo FO2 è stata indicata sia sotto forma di erogazione totale effettuata nel ventennio preso in considerazione, sia in termini di deficit irriguo prodotto nel periodo suddetto.

Per una sintesi grafica dei risultati riportati nella tabella precedente si osservi la seguente figura riportante la frontiera di Pareto:

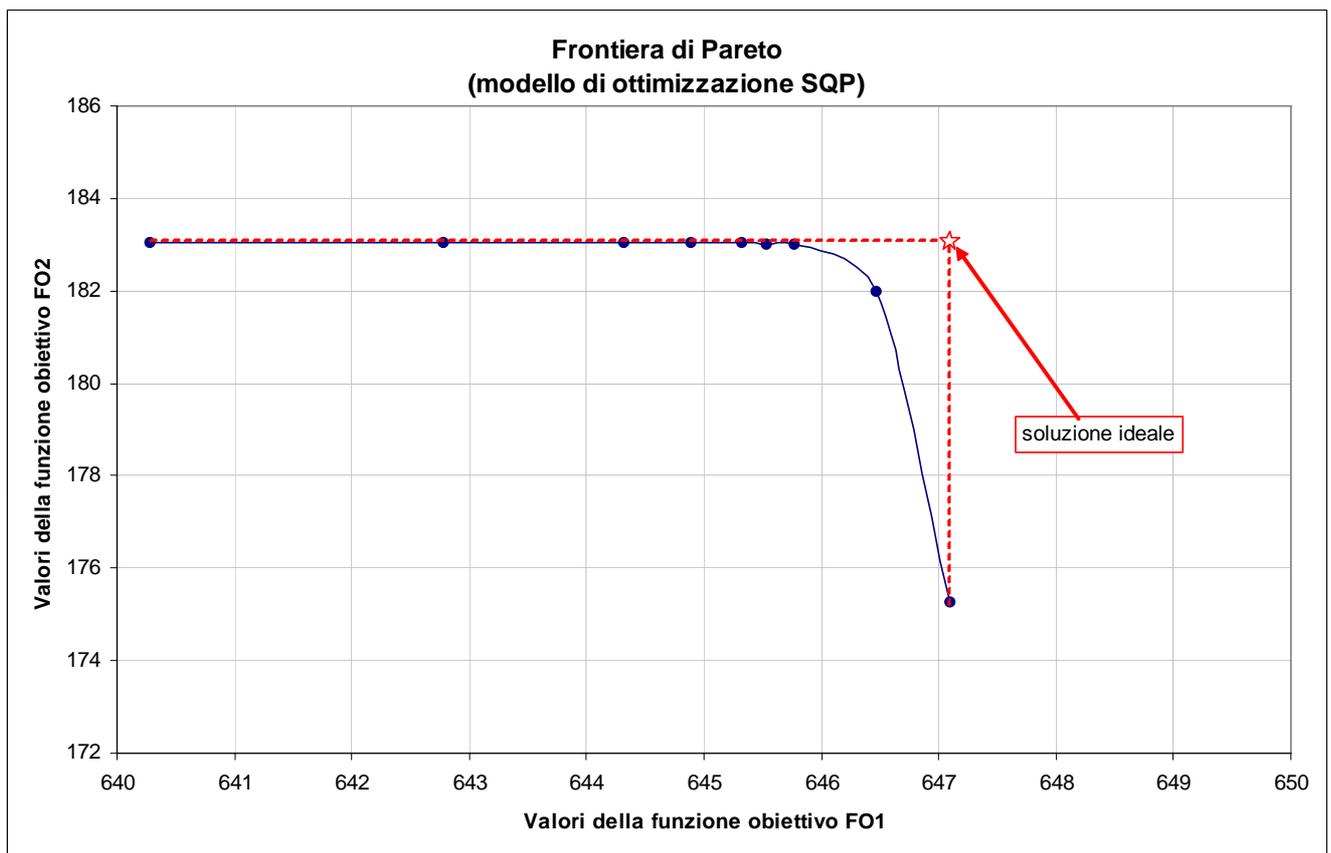


Figura 4.52 – Frontiera di Pareto per l’ottimizzazione con approccio I.S.O. basato su SQP

Nella figura è inoltre rappresentata la soluzione ideale mediante il simbolo grafico della stella rossa. A questo punto si pone il problema della scelta della soluzione ottima fra quelle presenti sulla frontiera di Pareto.

Esistono diversi metodi per la scelta della migliore soluzione. In questa sede si è scelto di applicare la cosiddetta “Compromise Programming” la quale identifica la soluzione non-dominata più vicina a quella ideale usando varie norme o metriche pesate L^p (Zeleny, 1974).

La sua formulazione è:

$$\min \sum_{i=1}^{n_{ob}} k_i^p \cdot \left(\frac{FO_i^* - FO_i}{FO_i^* - FO_i^{**}} \right) \quad (4.88)$$

dove:

- p è l'esponente della norma L^p ($1 \leq p \leq \infty$);
- n_{ob} è il numero di obiettivi da considerare;
- k_i sono i pesi con cui attribuire maggiore o minore importanza all' i -esimo obiettivo;
- FO_i^* è la soluzione ideale dell' i -esimo obiettivo (valore massimo dell' i -esimo obiettivo);
- FO_i^{**} è il valore minimo dell' i -esimo obiettivo;

Nel caso in esame la formula (4.88) è stata applicata per valori di $p = 1$ e $p = 2$, per differenti combinazioni dei pesi w_1 e w_2 . Le tabelle seguenti mostrano i risultati in termini del valore che la funzione espressa in (4.88) assume per le diverse combinazioni suddette dei parametri.

In rosso si indicano le soluzioni a cui corrispondono i valori minimi della (4.88).

$p = 1$		k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
w_1	w_2	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
0,9	0,1	0,0000		0,1000		0,2500		0,5000		0,7500		0,9000		1,0000	
0,8	0,2	0,0910	0,0957	0,1027		0,1143		0,1259		0,1329		0,1375			
0,7	0,3	0,1938	0,1752	0,1473	0,1008	0,0542	0,0263	0,0077							
0,6	0,4	0,2291	0,2068	0,1734	0,1178	0,0621	0,0287	0,0064							
0,5	0,5	0,2599	0,2343	0,1959	0,1319	0,0679	0,0295	0,0039							
0,4	0,6	0,3231	0,2910	0,2429	0,1628	0,0827	0,0346	0,0026							
0,3	0,7	0,4082	0,3674	0,3062	0,2041	0,1021	0,0408	0,0000							
0,2	0,8	0,6329	0,5696	0,4747	0,3164	0,1582	0,0633	0,0000							
0,1	0,9	1,0000	0,9000	0,7500	0,5000	0,2500	0,1000	0,0000							

$p = 2$		k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
w_1	w_2	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
0,9	0,1	0,0000		0,0100		0,0625		0,2500		0,5625		0,8100		1,0000	
0,8	0,2	0,0083	0,0069	0,0058	0,0068	0,0112	0,0154	0,0189							
0,7	0,3	0,0376	0,0304	0,0211	0,0094	0,0024	0,0004	0,0001							
0,6	0,4	0,0525	0,0425	0,0295	0,0131	0,0033	0,0006	0,0000							
0,5	0,5	0,0676	0,0547	0,0380	0,0169	0,0042	0,0007	0,0000							
0,4	0,6	0,1044	0,0845	0,0587	0,0261	0,0065	0,0010	0,0000							
0,3	0,7	0,1666	0,1350	0,0937	0,0417	0,0104	0,0017	0,0000							
0,2	0,8	0,4006	0,3244	0,2253	0,1001	0,0250	0,0040	0,0000							
0,1	0,9	1,0000	0,8100	0,5625	0,2500	0,0625	0,0100	0,0000							

Tabella 4.11 – Risultati dell'applicazione della "Compromise Programming"
(ottimizzazione mediante approccio I.S.O. basato su SQP)

Come si può osservare dall'analisi dei risultati delle tabelle precedenti, attribuendo uguale ($k_1 = k_2 = 0,5$) importanza all'obiettivo idroelettrico, sia considerando $p = 1$ e $p = 2$, la soluzione non dominata migliore è quella per $w_1 = 0,8$ e $w_2 = 0,2$.

Alla luce di questi risultati si sceglie la soluzione ottima ottenuta per:

$$w_1 = 0,8 \text{ e } w_2 = 0,2$$

4.6.1.1 Gestione operativa ottimale

Come anticipato nei precedenti paragrafi, il metodo SQP è prettamente deterministico: esso pertanto determina le incognite “ottime” del problema, cioè gli $N_anni \cdot 12$ valori di rilascio turbinato mensile da Ariamacina $X_A(i)$ e gli altri $N_anni \cdot 12$ valori di rilascio mensile da Cecita $X_C(i)$, (dove $i = 1, \dots, N_anni \cdot 12$, indicando con N_anni il numero di anni della serie di dati di deflusso e temperature in input al problema) “ottimi”, a rigore, solo per quella ben determinata serie di dati in input al problema usata per l’ottimizzazione stessa.

Fissati i valori “preferiti” dei pesi $w_1 = 0,8$ e $w_2 = 0,2$ della funzione scalarizzata (4.87), per ciascuna delle 15 serie di dati ventennali di deflussi mensili e temperature medie mensili in input al modello, è stato ricavato un set di soluzioni $[X_A(t)]_d$ (rilasci turbinati mensili da Ariamacina) e un altro set $[X_C(t)]_d$ (rilasci turbinati mensili da Cecita) con $d = 1, \dots, 15$, da ritenersi ottimali solo se applicati alle serie di dati in input (deflussi mensili e temperature medie mensili) utilizzata per ricavarli. Tale applicazione, pertanto, richiede la conoscenza a priori dei dati di input dell’intero periodo da ottimizzare: cioè, nell’ottica di una gestione “reale” del sistema, i valori “futuri” di tali dati.

Lo scopo finale però è quello di fornire al soggetto gestore un insieme di regole operative ottimali di carattere “generale”, applicabili nella normale gestione del sistema di invasi quando, ovviamente, non si hanno a disposizione i dati futuri di variabili quali deflussi e temperature.

Tali regole ottimali possono essere formulate in modo tale da far dipendere le variabili decisionali al tempo attuale t^* (cioè i rilasci turbinati mensili al tempo t^*) dai valori che alcune variabili del sistema (volumi di invaso presenti nei serbatoi, deflussi naturali, etc...) assumono per tempi $t \leq t^*$.

In particolare, proprio al fine di attribuire a tali regole operative caratteristiche “generali”, tali relazioni andranno formulate per “stagioni” preventivamente scelte.

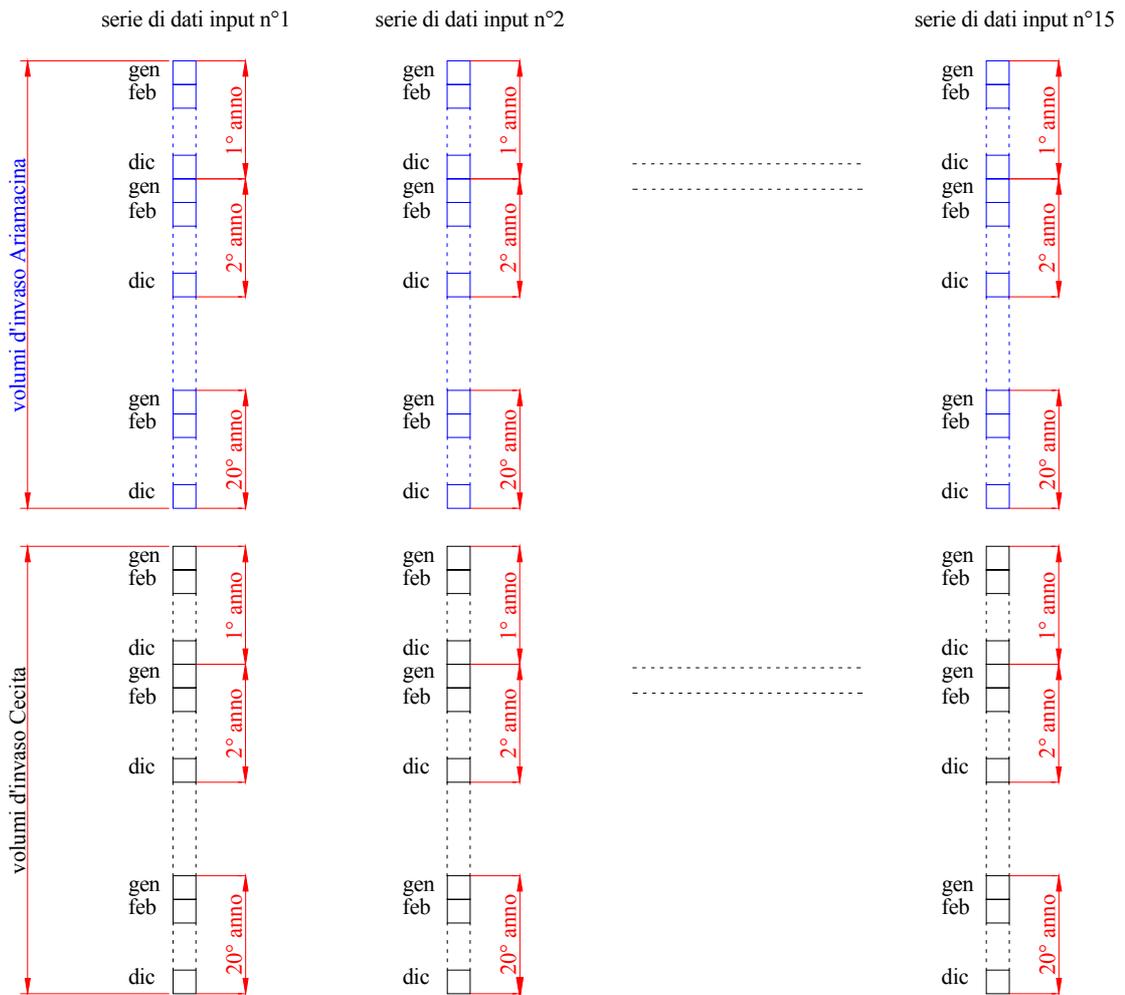
Nel caso dell’applicazione oggetto della presente tesi di dottorato, si è scelto di formulare 12 regole operative ottimali, cioè una per ciascun mese dell’anno.

Come affermato all’inizio del presente paragrafo, il risultato delle ottimizzazioni effettuate con la SQP è stato quello di ricavare 2 set di rilasci ottimi (uno per Ariamacina $[X_A(t)]_d$, l’altro per Cecita

$[X_C(t)]_d$, con $d = 1, \dots, 15$ e $t = 1, \dots, 360$) validi per ciascuna delle 15 serie di dati in input considerate nel modello, secondo lo schema grafico seguente:



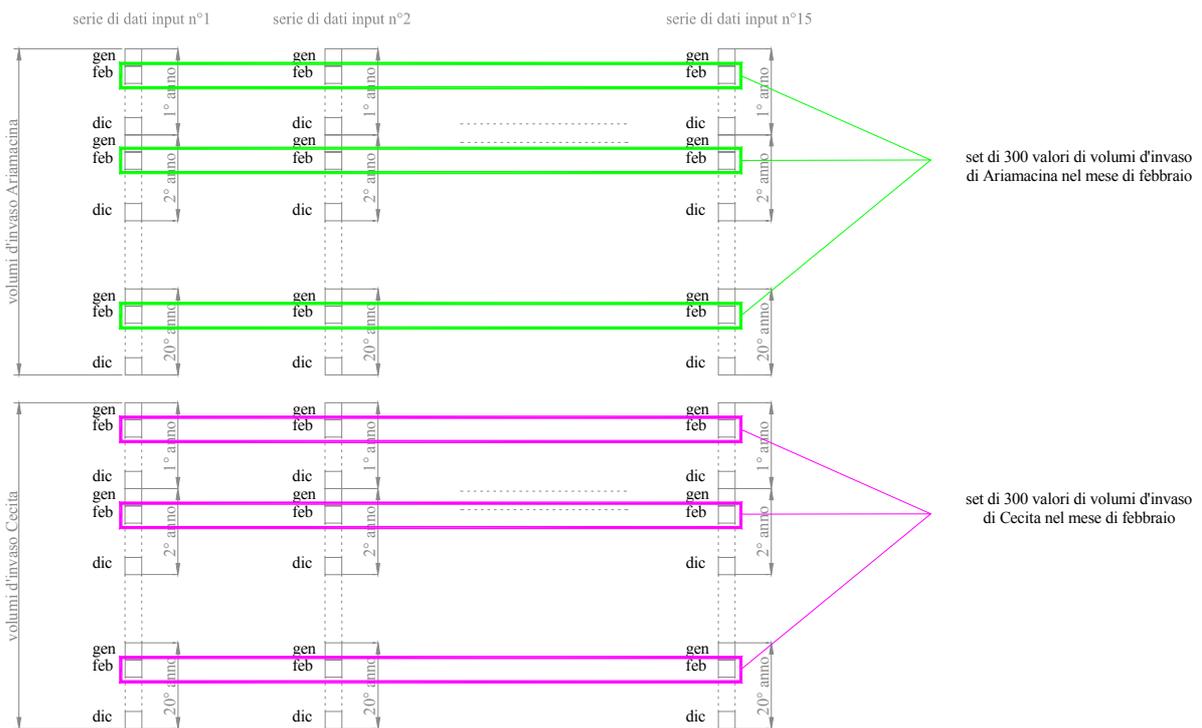
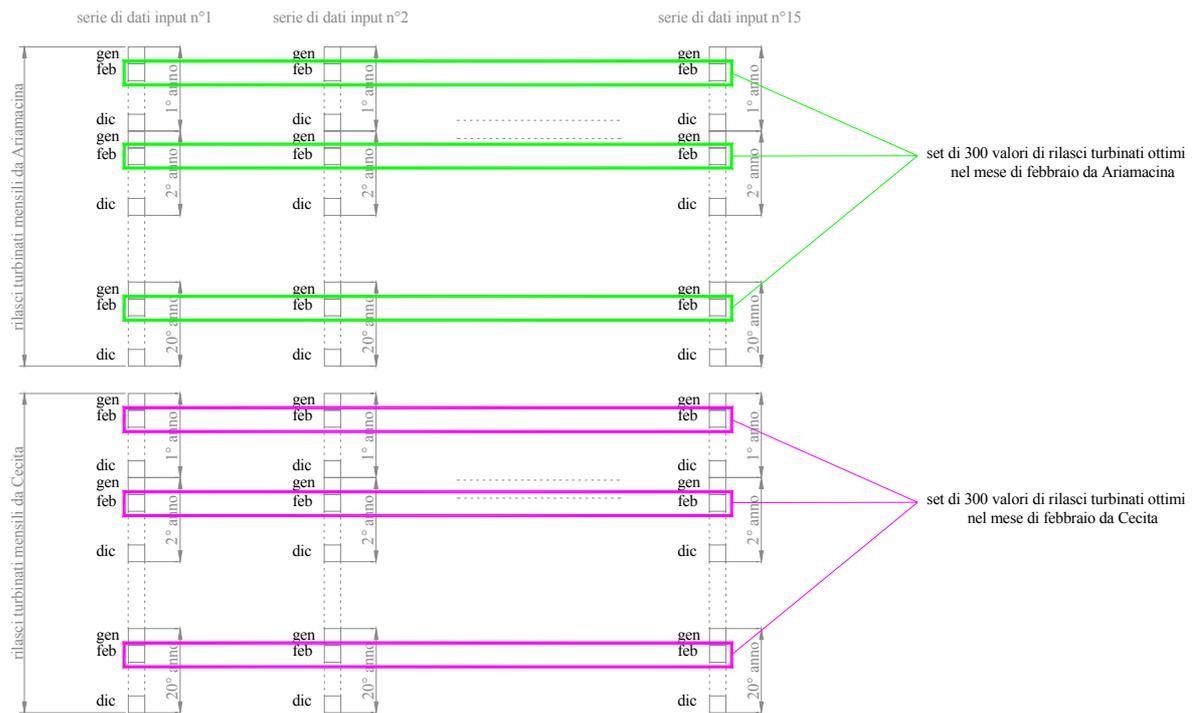
A tali set di rilasci turbinati mensili, corrispondono analoghi set di valori assunti dalle variabili di stato del sistema (volumi d'invaso, deflussi, etc..) a seguito dell'ottimizzazione, secondo lo schema:



Il primo passo è stato quello di accorpare tali dati ottenendo:

- un set per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle due variabili decisionali X_A e X_C : ogni set del genere è costituito dai 300 valori che la variabile considerata ha assunto nel generico mese per tutte le 15 serie di dati di input considerati nella simulazione;
- un set per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle altre variabili di sistema (invasi, deflussi, etc..) che potenzialmente potrebbero essere atte a "spiegare" le variazioni delle variabili decisionali: ogni set del genere è costituito dai 300 valori che la generica variabile considerata ha assunto nel generico mese per tutte le 15 serie di dati in input considerati nella ottimizzazione;

Per una esemplificazione delle operazioni descritte si riportano gli schemi grafici seguenti:



A questo punto si è proceduto alla scelta delle variabili di sistema potenzialmente atte ad essere utilizzate come variabili indipendenti nelle relazioni per la stima dei rilasci mensili ottimi.

Inizialmente si è ipotizzata la generica relazione:

$$X_A(t) = f_{1,t}[S_A(t), S_C(t), D_A(t-1), D_C(t-1)]$$

(4.89)

$$X_C(t) = f_{2,t}[S_A(t), S_C(t), D_A(t-1), D_C(t-1)]$$

con $t = 1, \dots, 12$, nelle quali i rilasci da effettuare nel mese t sono dipendenti sia dal valore dei volumi di invaso all'inizio dello stesso mese, sia dai valori di deflusso ai serbatoi nel mese precedente.

La “forza” che ha tale set di variabili indipendenti nello “spiegare” i rilasci ottimi è stata confrontata con il più semplice set costituito dai volumi di invaso, cioè ipotizzando la seguente legge di dipendenza:

$$X_A(t) = g_{1,t}[S_A(t), S_C(t)]$$

(4.90)

$$X_C(t) = g_{2,t}[S_A(t), S_C(t)]$$

L'analisi suddetta ha confermato l'equivalenza delle due relazioni (4.89) e (4.90): si è pertanto scelto di analizzare la più semplice relazione (4.90).

A tal uopo sono state ipotizzate diverse forme da attribuire alle funzioni $g_{1,t}$ e $g_{2,t}$ della (4.90) per ogni mese dell'anno:

dipendenza lineare: $X_{(i)}(t) = l_1(t) + l_2(t) \cdot S_A(t) + l_3(t) \cdot S_C(t)$

dipendenza quadratica: $X_{(i)}(t) = q_1(t) + q_2(t) \cdot S_A(t) + q_3(t) \cdot S_C(t) + q_4 \cdot S_A(t) \cdot S_C(t) + q_5 \cdot S_A(t)^2 + q_6 \cdot S_C(t)^2$

dipendenza non-lineare esponenziale: $X_{(i)}(t) = e_1(t) \cdot S_A(t)^{e_2(t)} + e_3(t) \cdot S_C(t)^{e_4(t)}$

dove:

- $t = 1, \dots, 12$ (i dodici mesi dell'anno);
- $l_i(t)$ $i = 1, \dots, 3$ sono i coefficienti della relazione lineare;
- $q_i(t)$ $i = 1, \dots, 6$ sono i coefficienti della relazione quadratica;
- $e_i(t)$ $i = 1, \dots, 3$ sono i coefficienti della relazione non-lineare esponenziale.

Fissato pertanto un generico mese $t = t^*$, le variabili indipendenti sono costituite dai due set di 300 valori assunti, per il mese t^* , dagli invasi $S_A(t^*)$ di Ariamacina e da quelli di Cecita $S_C(t^*)$, mentre i

300 valori dei rilasci ottimi nel mese t^* da Ariamacina $X_A(t^*)$ o da Cecita $X_C(t^*)$ rappresentano le osservazioni delle variabili dipendenti.

Definite in tal modo i valori assunti dalle variabili, sono state effettuate le regressioni multiple per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle tipologie di funzioni riportate in precedenza.

I risultati migliori dei *fit* così effettuati sono riportati nelle successive figure dove, per ciascuna delle due variabili dipendenti $X_A(t)$ e $X_C(t)$ e per ciascun mese dell'anno si mostrano i dati puntuali, la superficie ottenuta dall'analisi di regressione multipla di questi, la corrispondente funzione finale e il valore assunto dal m.s.e. (mean square error) del fit.

Si noti che non è stato possibile effettuare una scelta automatica della migliore superficie approssimante i punti sperimentali, sulla base del semplice parametro m.s.e.: in alcuni casi, infatti, a valori molto bassi di tali parametro (segni di un buon *fitting*) sono corrisposti superfici dalle forme più bizzarre, espressioni grafiche di regole operative di certo inverosimili.

Si prenda ad esempio, il caso del mese di ottobre per l'invaso di Cecita.

I valori assunti dal parametro m.s.e. delle regressioni sono:

	Lineare	Quadratica	Esponenziale
valori di m.s.e.	11,6018	5,6959	7,5366

i quali sembrerebbero suggerire la scelta di una superficie quadratica.

In realtà tale opzione risulterebbe in regole operative non realistiche come suggerisce la singolare forma della superficie approssimante.

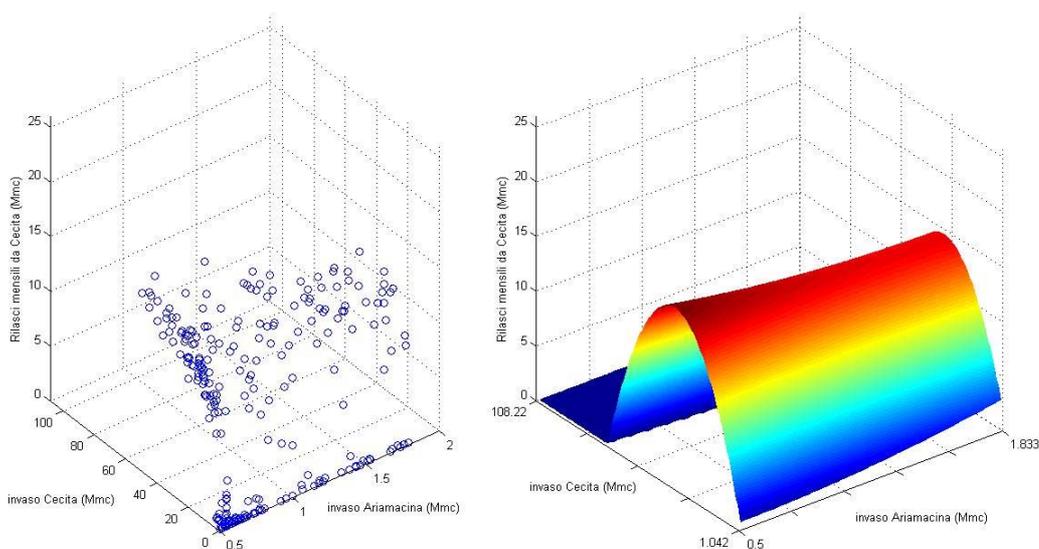
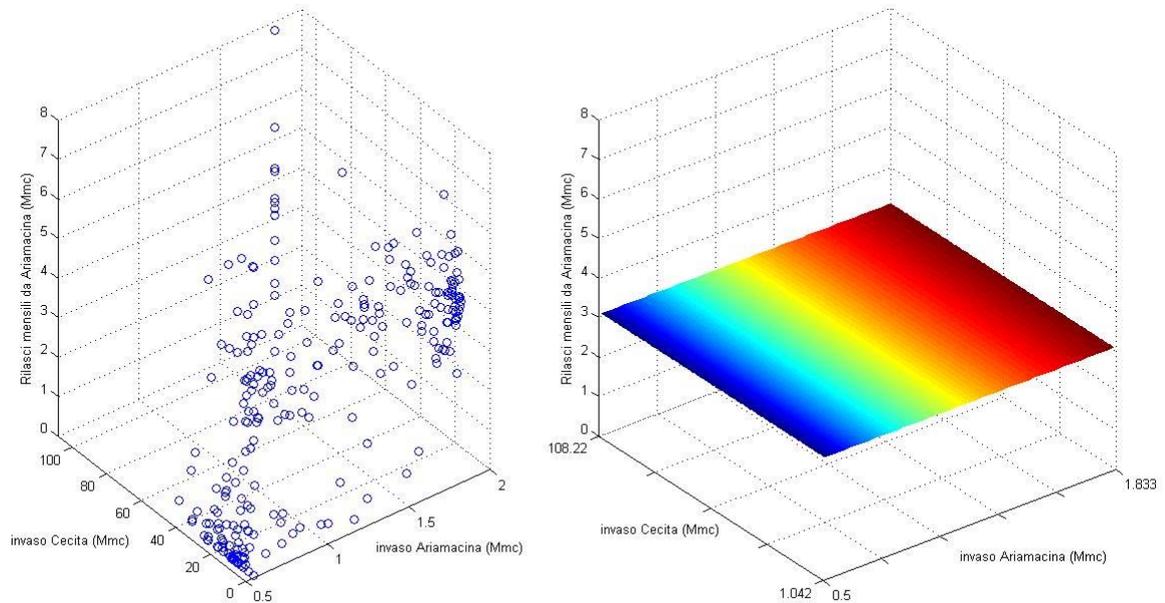


Figura 4.53 – Esempio di analisi di regressione multipla non realistica per l'ottimizzazione con approccio I.S.O. basato su SQP

Regressione multipla dei rilasci ottimi da Ariamacina (modello di ottimizzazione: SQP)

Mese di Gennaio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



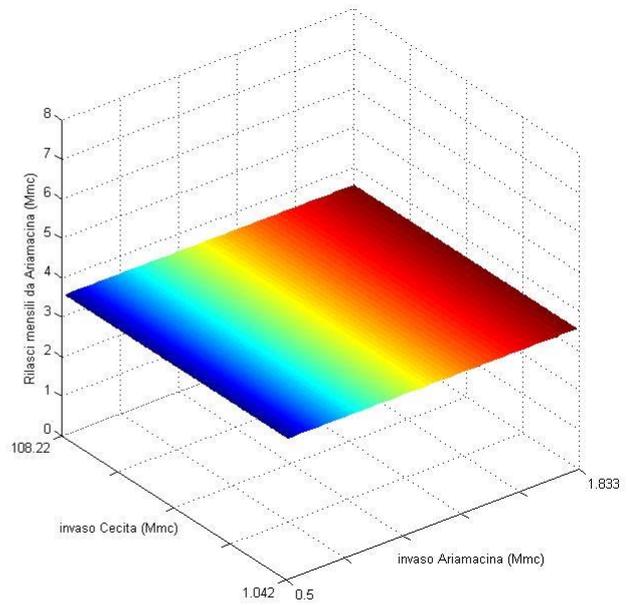
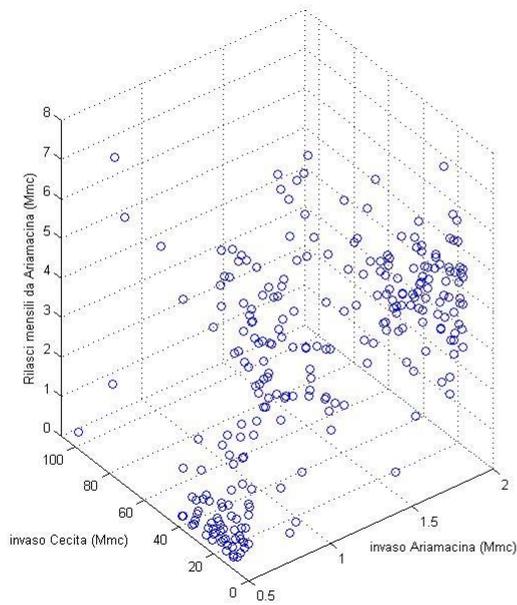
Equazione di regressione:

$$X_C = 1,5356 \cdot S_A^{0,0002009} + 1,5356 \cdot S_C^{0,0000000012906}$$

Mean Square Error: 4,1638

Mese di Febbraio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



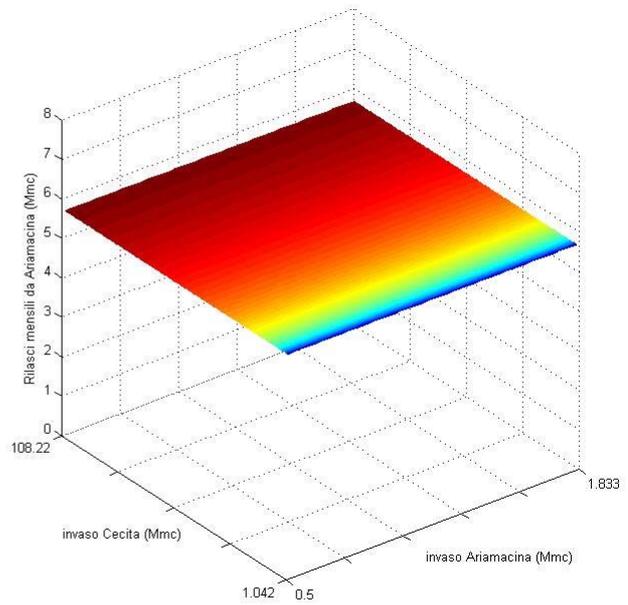
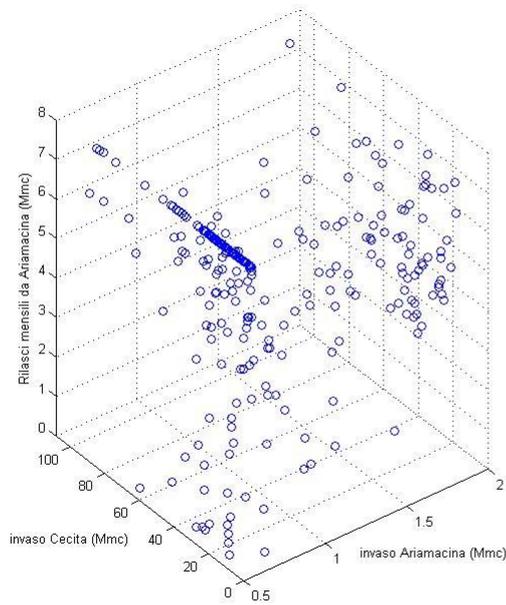
Equazione di regressione:

$$X_C = 1,7707 \cdot S_A^{0,0002695} + 1,7707 \cdot S_C^{0,0000000016517}$$

Mean Square Error: 4,1915

Mese di Marzo

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



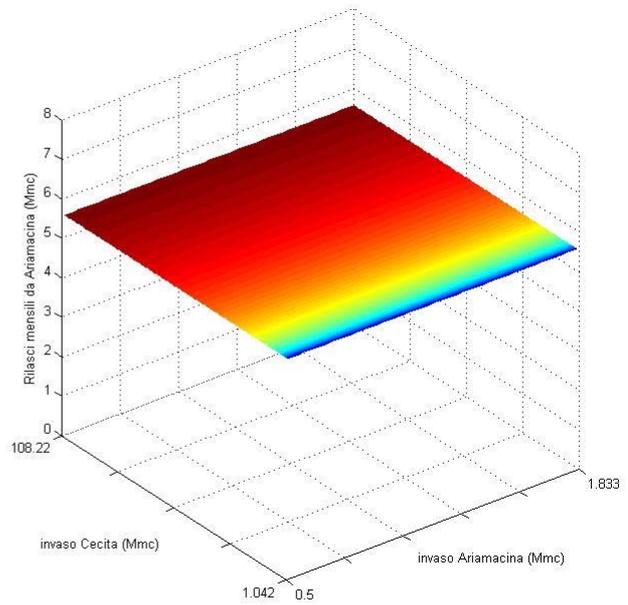
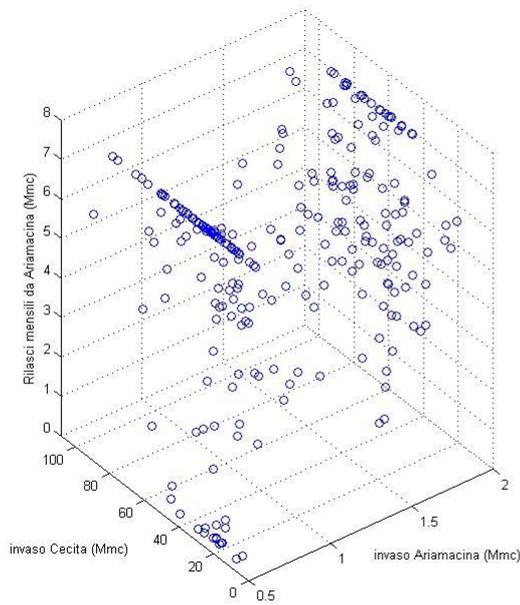
Equazione di regressione:

$$X_C = 2,8349 \cdot S_A^{0,000000036133} + 2,8349 \cdot S_C^{0,000012183}$$

Mean Square Error: 4,5319

Mese di Aprile

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



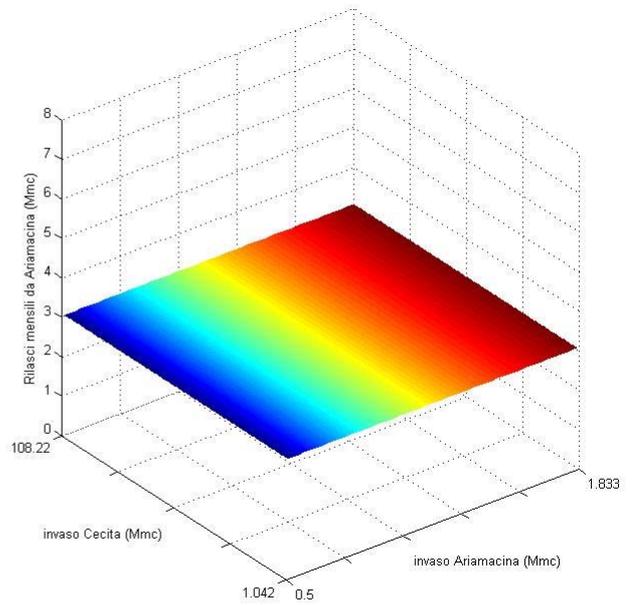
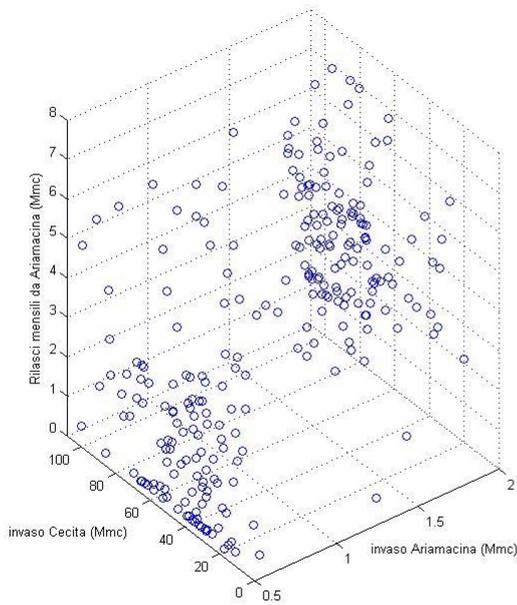
Equazione di regressione:

$$X_C = 2,7801 \cdot S_A^{0,0000000054156} + 2,7801 \cdot S_C^{0,000012398}$$

Mean Square Error: 5,2482

Mese di Maggio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



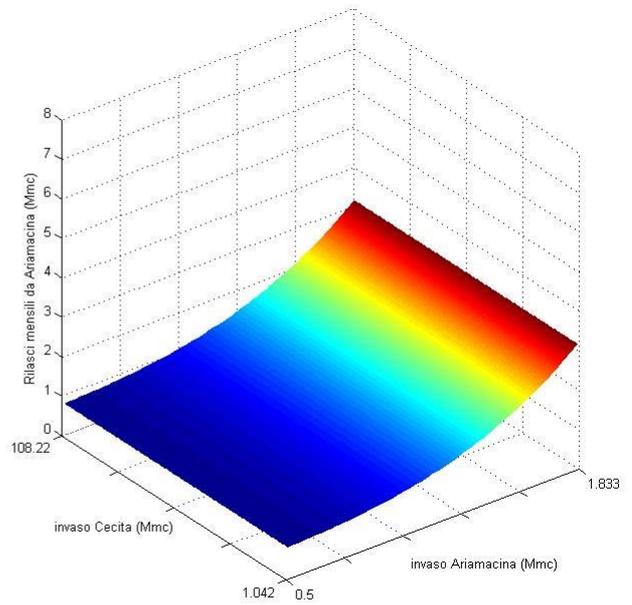
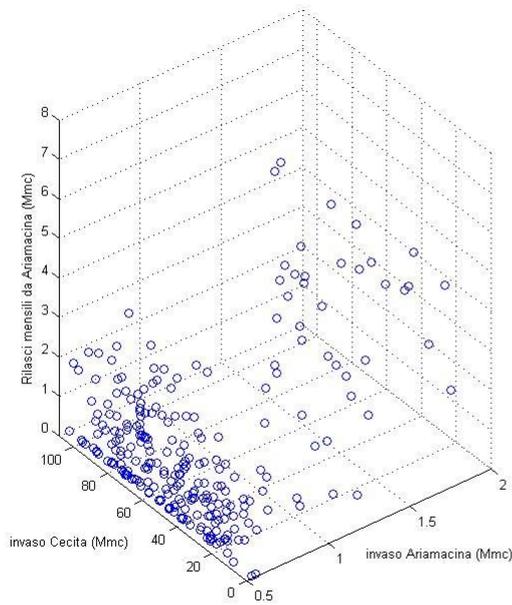
Equazione di regressione:

$$X_C = 1,5184 \cdot S_A^{0,013559} + 1,5184 \cdot S_C^{0,000000000049382}$$

Mean Square Error: 4,2115

Mese di Giugno

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



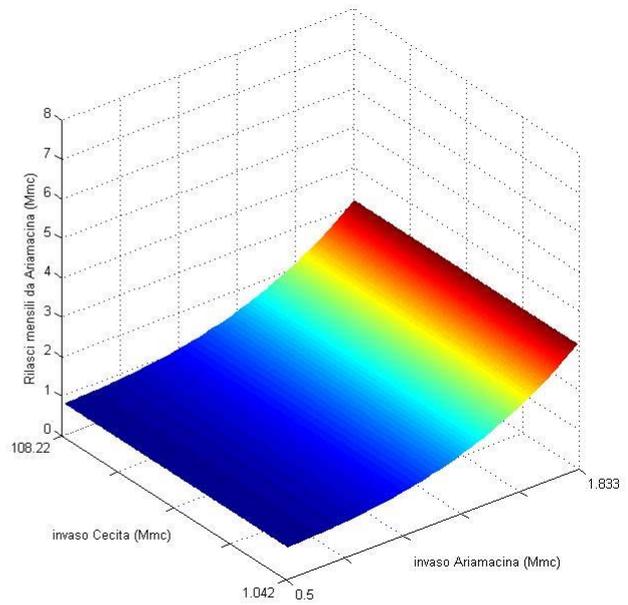
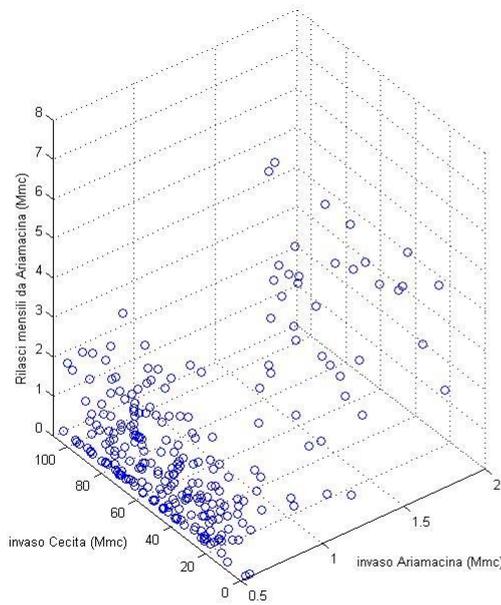
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,25114 \cdot S_A^{3,7266} + 0,75521 \cdot S_C^{0,00000032748}$$

Mean Square Error: 1,0592

Mese di Luglio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



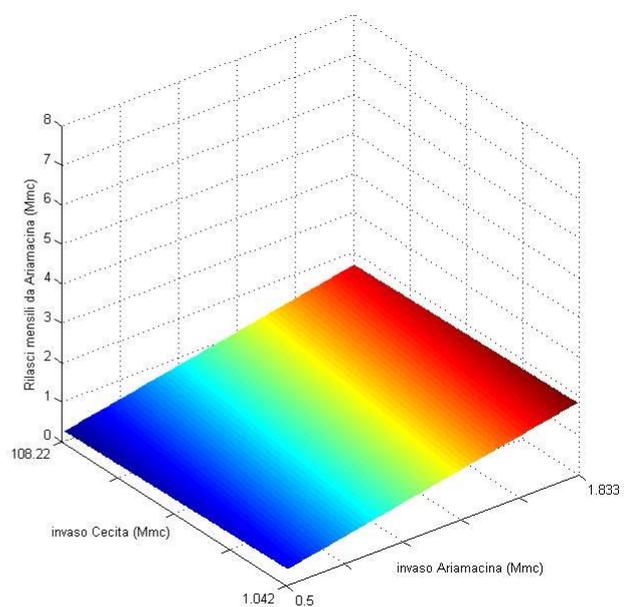
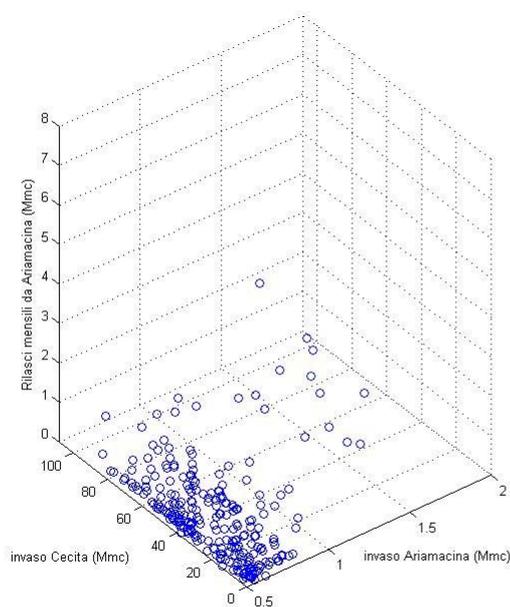
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,70841 \cdot S_A^{2,4841} + 0,25243 \cdot S_C^{0,00000011971}$$

Mean Square Error: 0,9665

Mese di Agosto

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



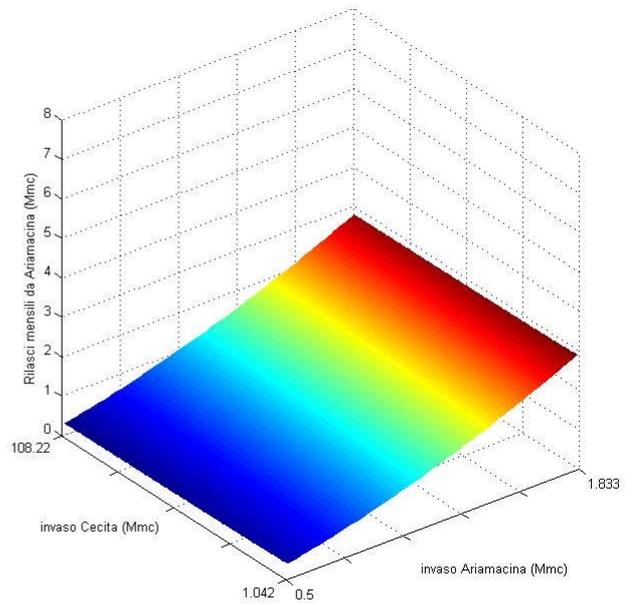
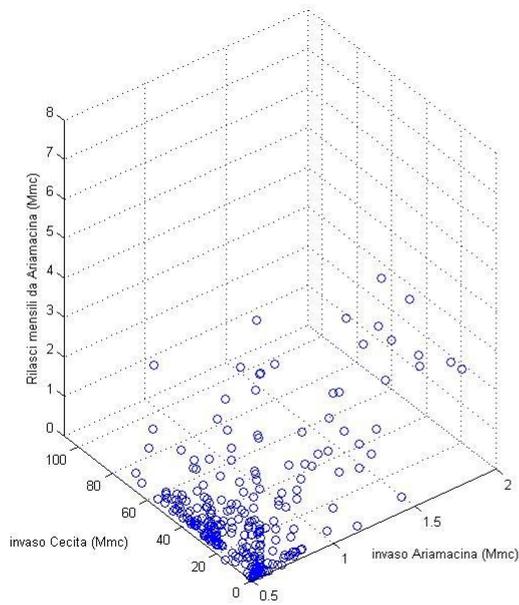
Equazione di regressione:

$$X_A = -0,24842 + 1,1279 \cdot S_A - 0,00138 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 0,4580

Mese di Settembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



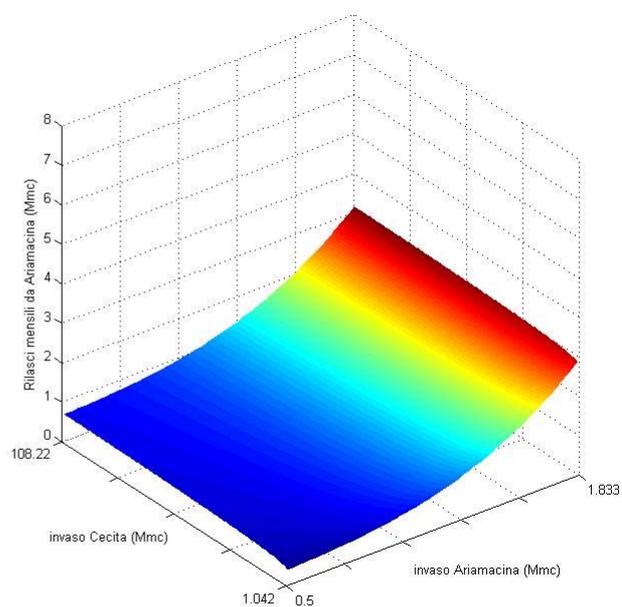
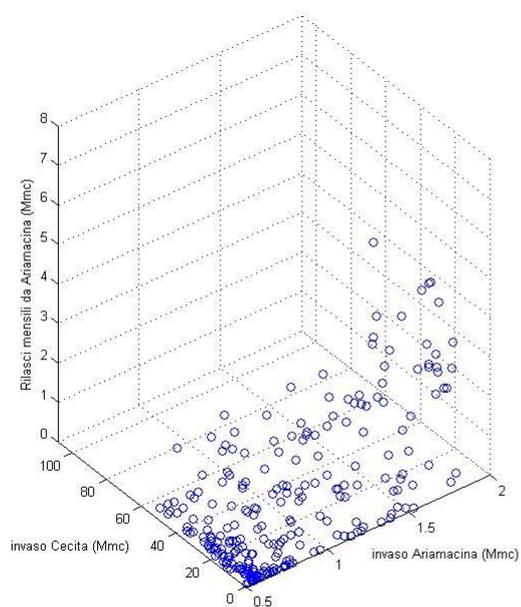
Equazione di regressione:

$$X_C = 1,0196 \cdot S_A^{1,7206} - 0,0097432 \cdot S_C^{0,48991}$$

Mean Square Error: 0,6418

Mese di Ottobre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



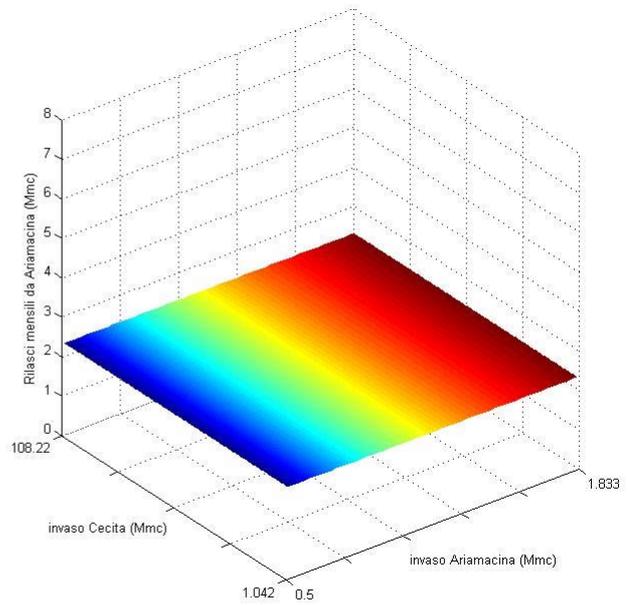
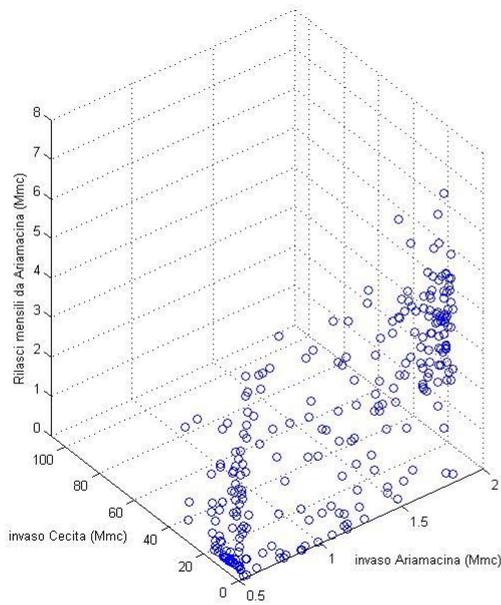
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,24586 \cdot S_A^{3,8373} + 0,34173 \cdot S_C^{0,13294}$$

Mean Square Error: 1,0997

Mese di Novembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



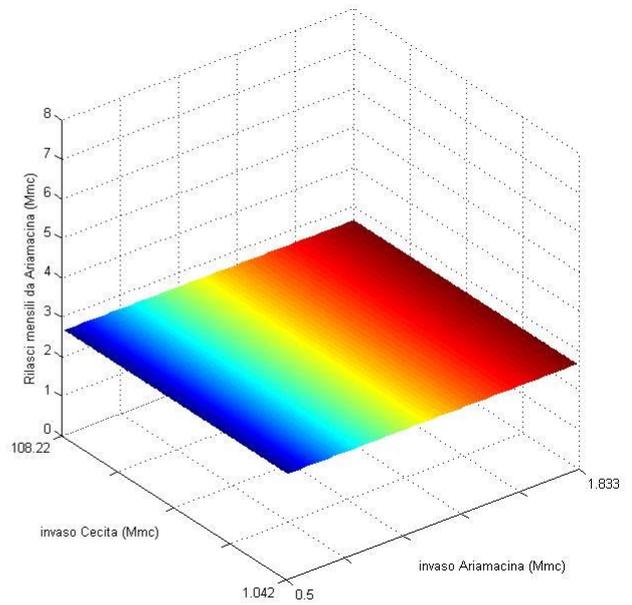
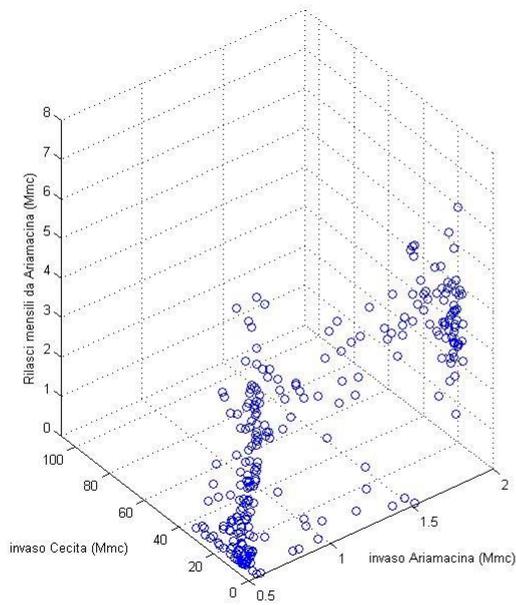
Equazione di regressione:

$$X_C = 1,1568 \cdot S_A^{0,00021565} + 1,1568 \cdot S_C^{0,00000000017913}$$

Mean Square Error: 3,0873

Mese di Dicembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



Equazione di regressione:

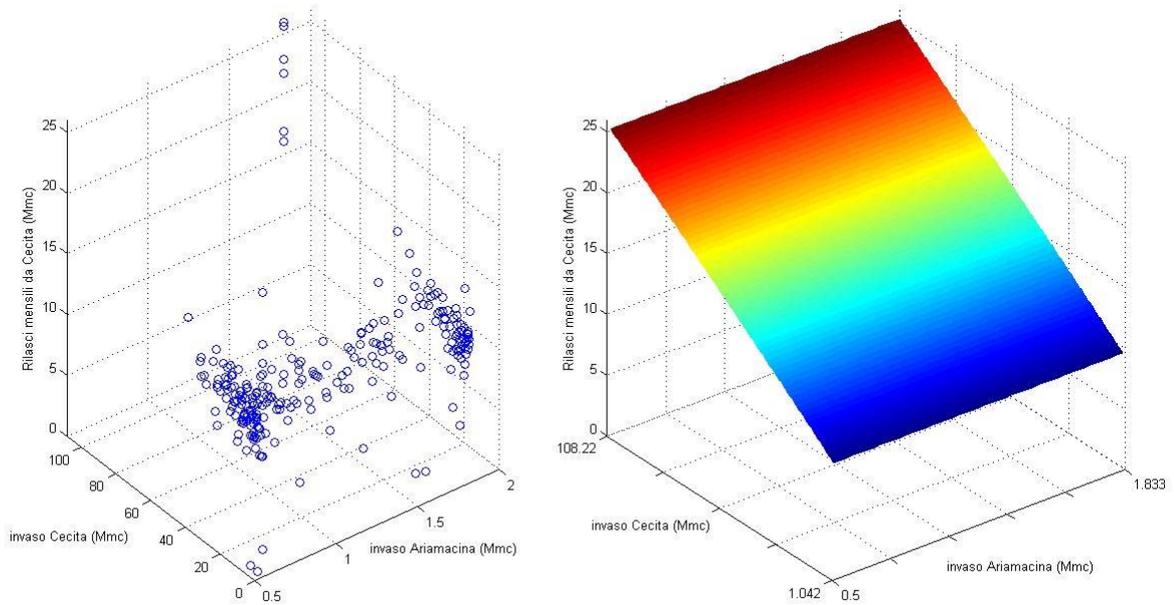
$$X_C = 1,3224 \cdot S_A^{0,00011424} + 1,3224 \cdot S_C^{0,0000000067369}$$

Mean Square Error: 3,2118

Regressione multipla dei rilasci ottimi da Cecita

Mese di Gennaio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



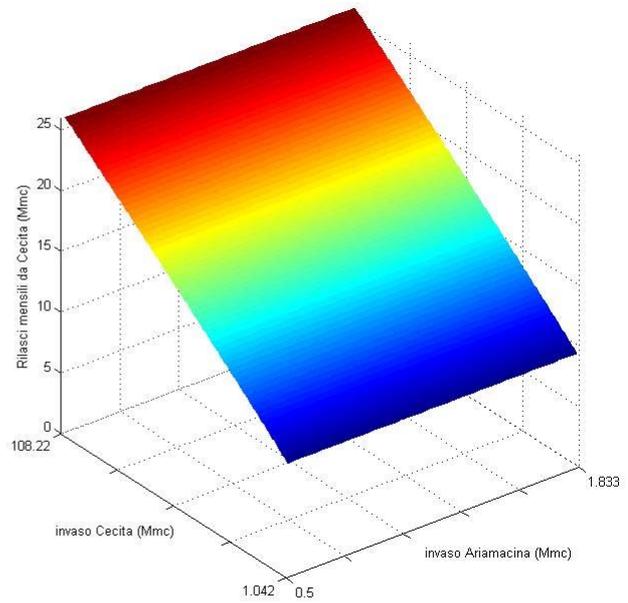
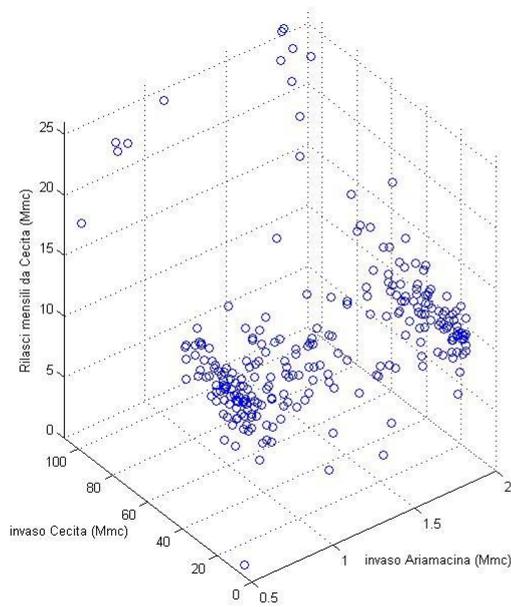
Equazione di regressione:

$$X_C = 9,3348 \cdot S_A^{0,000000036544} + 0,16569 \cdot S_C^{0,97347}$$

Mean Square Error: 7,3690

Mese di Febbraio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



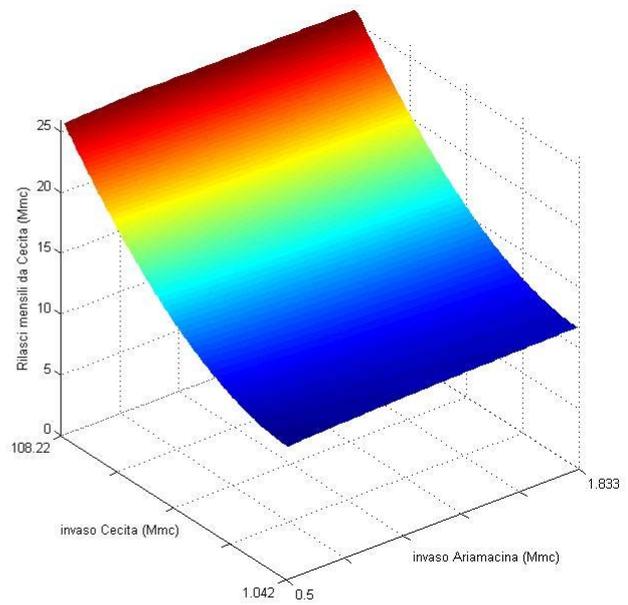
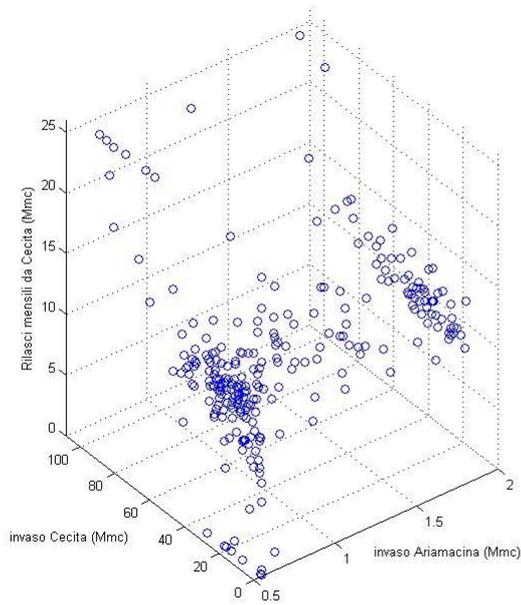
Equazione di regressione:

$$X_C = 9,0921 \cdot S_A^{0,000000028055} + 0,19001 \cdot S_C^{0,95924}$$

Mean Square Error: 6,7324

Mese di Marzo

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



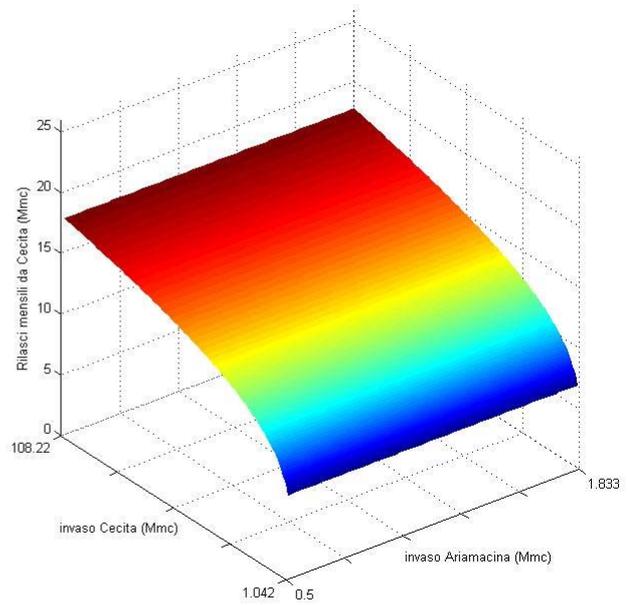
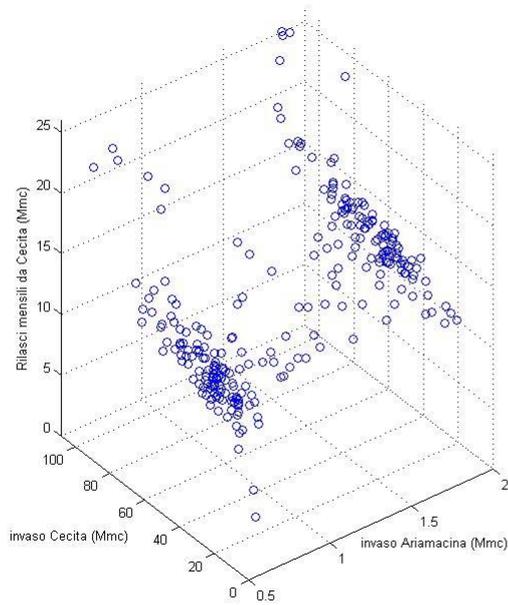
Equazione di regressione:

$$X_C = 11,208 \cdot S_A^{0,058478} + 0,0023578 \cdot S_C^{1,8667}$$

Mean Square Error: 11,1651

Mese di Aprile

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



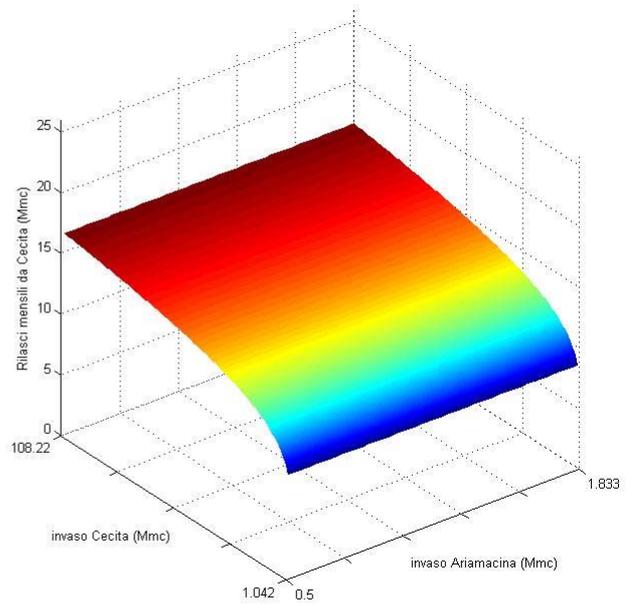
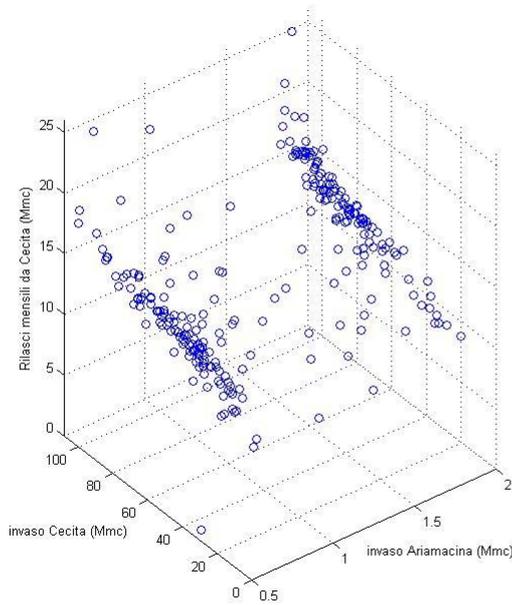
Equazione di regressione:

$$X_C = 3,4575 \cdot S_A^{0,0000000023407} + 3,3261 \cdot S_C^{0,3192}$$

Mean Square Error: 5,3472

Mese di Maggio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



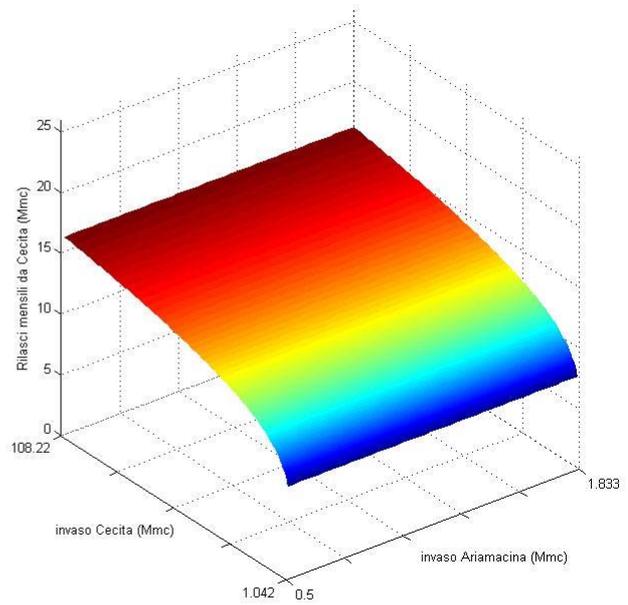
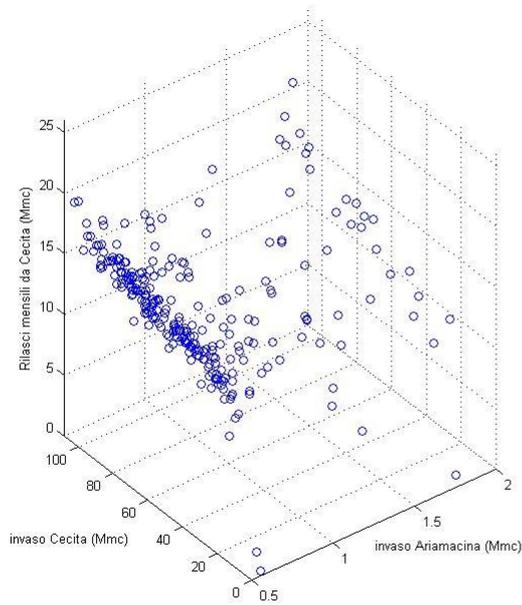
Equazione di regressione:

$$X_C = 3,8734 \cdot S_A^{0,0000000058825} + 4,5703 \cdot S_C^{0,21806}$$

Mean Square Error: 2,4092

Mese di Giugno

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



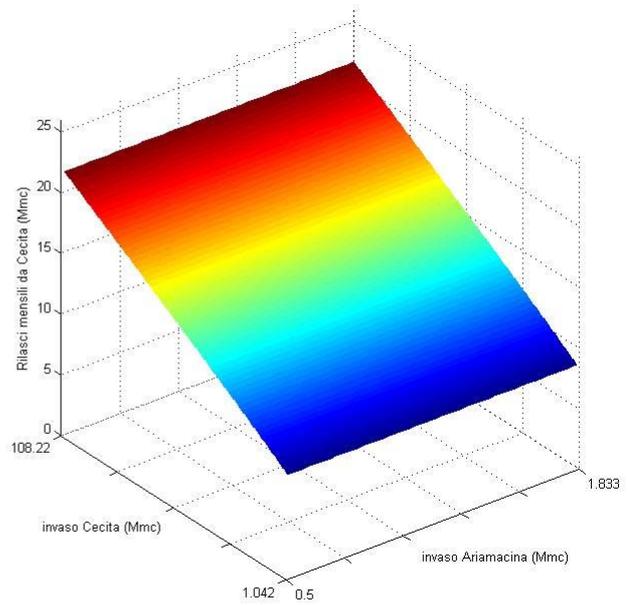
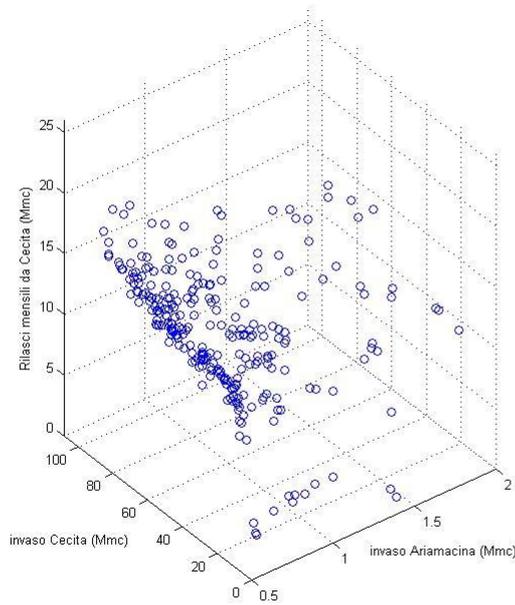
Equazione di regressione:

$$X_C = 3,7555 \cdot S_A^{0,000000019761} + 3,7562 \cdot S_C^{0,25709}$$

Mean Square Error: 2,5147

Mese di Luglio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



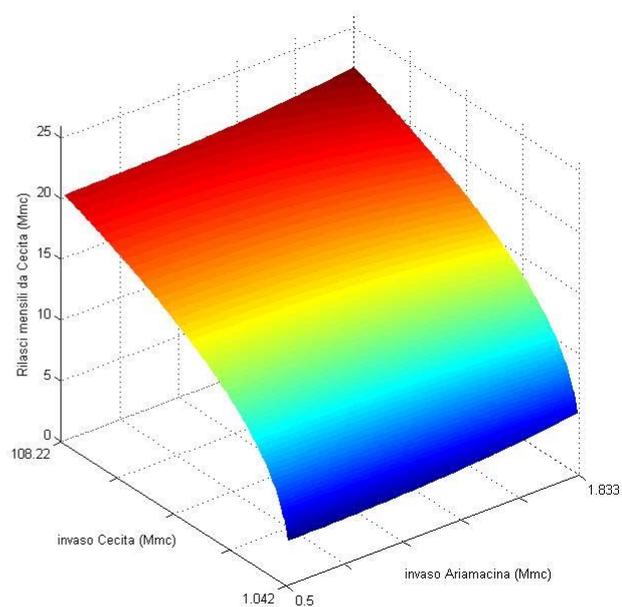
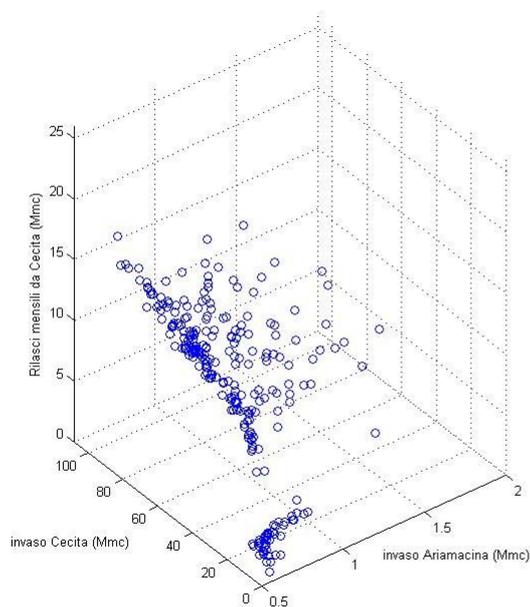
Equazione di regressione:

$$X_C = 8,353 \cdot S_A^{0,0000000070292} + 0,14871 \cdot S_C^{0,95938}$$

Mean Square Error: 4,6528

Mese di Agosto

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



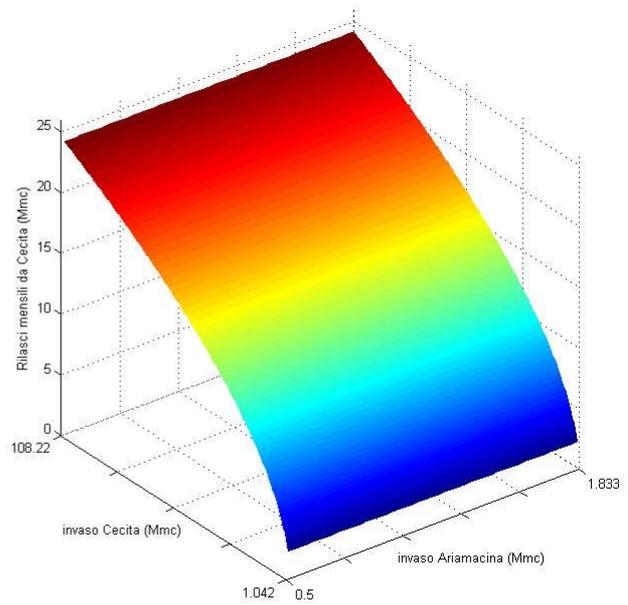
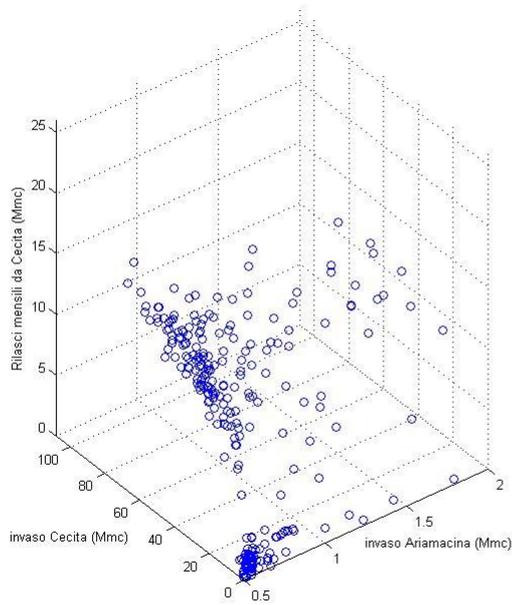
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,20385 \cdot S_A^{3,3249} + 3,4635 \cdot S_C^{0,37642}$$

Mean Square Error: 3,9414

Mese di Settembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



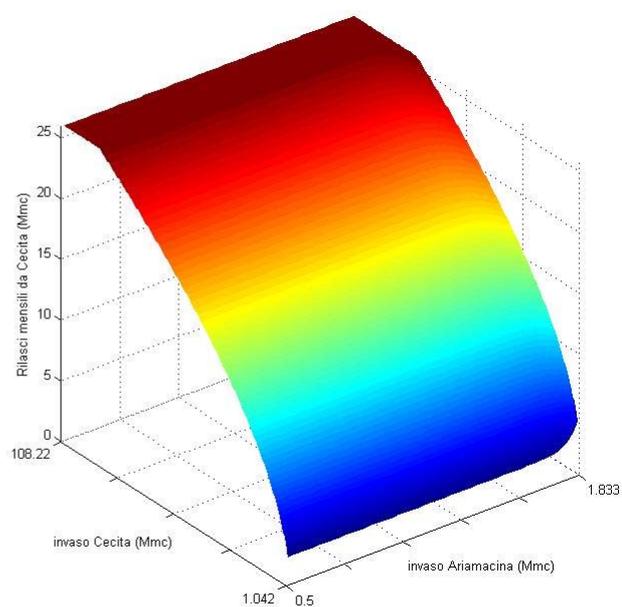
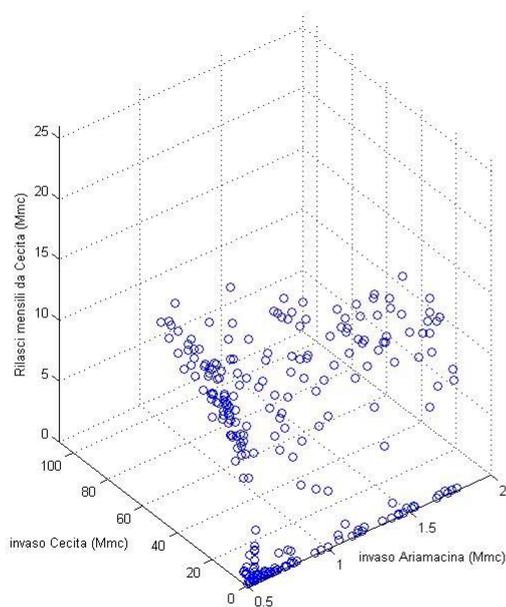
Equazione di regressione:

$$X_C = -0,19593 \cdot S_A^{0,00000095976} + 2,3063 \cdot S_C^{0,50307}$$

Mean Square Error: 4,3519

Mese di Ottobre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



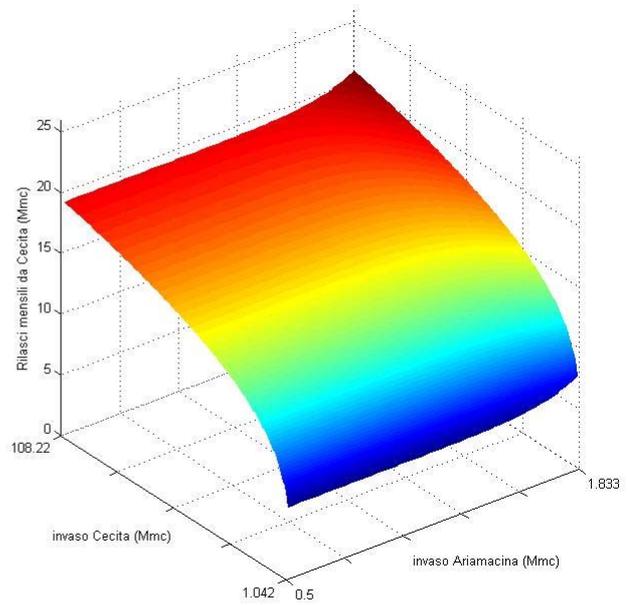
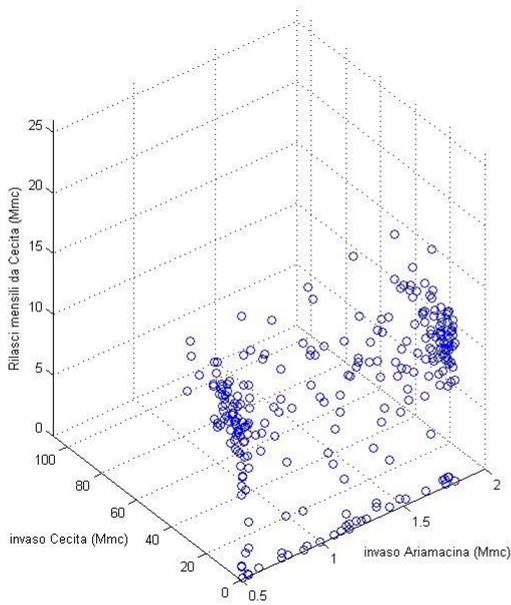
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,000000000032256 \cdot S_A^{41,13} + 2,1775 \cdot S_C^{0,54857}$$

Mean Square Error: 7,5366

Mese di Novembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



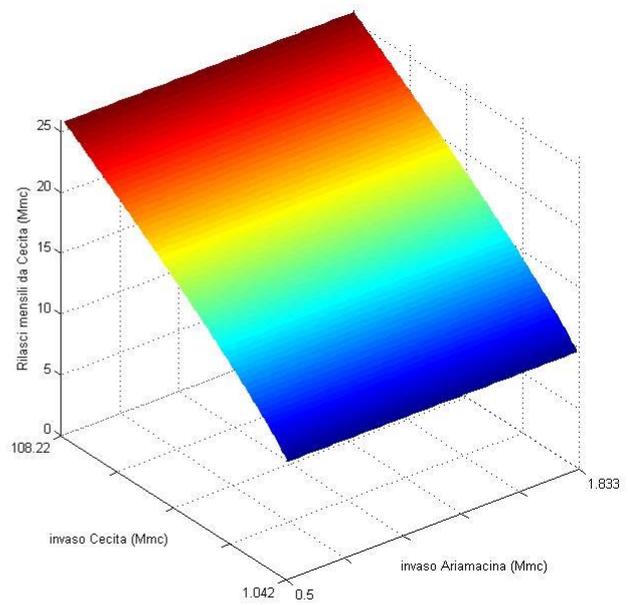
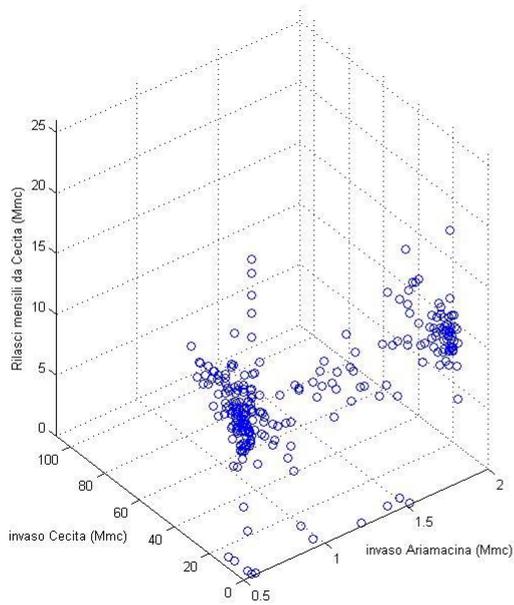
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,0013181 \cdot S_A^{11,908} + 5,7678 \cdot S_C^{0,2563}$$

Mean Square Error: 13,0083

Mese di Dicembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione SQP)



Equazione di regressione:

$$X_C = 9,2592 \cdot S_A^{0,000000036921} + 0,31798 \cdot S_C^{0,8431}$$

Mean Square Error: 12,8893

4.6.2 Ottimizzazione mediante Dynamic Programming (DP)

Nel prosieguo si riportano i risultati ottenuti mediante applicazione del metodo di ottimizzazione del DP al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.

Le *action value functions* ottime $Q_t(s,a)$, possono essere ottenute utilizzando la *Dynamic Programming*, in particolare sfruttando la risoluzione all'indietro dell'equazione di ottimalità di Bellman deterministica, espressa per la funzione Q nella sua forma "stagionale" (equazione 3.91 del paragrafo 3.4.7):

$$Q_t(s,a) = r(s,a,s') + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q_{t+1}(s',a') \quad (3.91)$$

sottolineando che, in questo caso $t = 1, 2, \dots, 360$, quindi non più, come nel caso del *Q-Learning*, la stima di tante *action value functions* quante sono le stagioni (mesi) dell'anno, bensì una per ciascun mese dell'intero intervallo di riferimento T (nel caso in esame $T = 360$ mesi).

L'equazione appena esposta è stata risolta ricorsivamente all'indietro (quindi per $t = T, T-1, T-2, T-3, \dots, 1$, essendo T come detto pari a 360), per tutti gli n_s stati discreti s e le n_a azioni discrete a appartenenti alla generica matrice $Q_t(s,a)$, mediante apposito codice scritto in MatLab 7.0, assumendo la condizione al contorno (futura):

$$Q_{T+1}(s',a') = \varphi(s',a') = 0 \quad (4.91)$$

Si noti che tale metodo, così come espresso dalla formula precedente, è prettamente deterministico, quindi le funzioni $Q_t(s,a)$ stimate, conducono alla *policy* ottima, solo se applicate allo stesso periodo che è stato utilizzato per la sua stima.

L'algoritmo *Q-Learning*, all'opposto, è in grado di fornire stime di $Q_t(s,a)$ che, pur non conoscendosi a priori le caratteristiche stocastiche dell'ambiente (cioè dei deflussi al serbatoio e le evaporazioni da specchio liquido) che invece vengono apprese direttamente mediante la sperimentazione dell'ambiente con i modelli di simulazione, dovrebbero condurre a *policy* ottime valide anche per sequenze di deflussi diverse da quella usata per la stima.

Applicando, pertanto, la *policy* ottima ottenuta dalla DP deterministica, sullo stesso periodo utilizzato per la sua stima, si ottiene il massimo valore possibile della funzione obiettivo.

In sintesi il vantaggio di usare *Q-Learning* rispetto alla DP deterministica è immediato e risiede nella "generalità" della *policy* ottima trovata; la DP deterministica, invece, determina una *policy* che è ottima solo per quella sequenza di deflussi che è servita per la sua stessa stima.

Ovviamente potrebbe anche applicarsi la versione stocastica della DP: essa però è afflitta dalla cosiddetta “maledizione della dimensionalità” (*curse of dimensionality*, frase coniata dallo stesso Bellman): all’aumentare dei livelli di discretizzazione di stati ed azioni, aumenta esponenzialmente il tempo computazionale necessario per l’esecuzione dei calcoli di ottimizzazione: se n_s sono i livelli di discretizzazione degli stati ed n_a quelli delle azioni, il tempo computazionale richiesto è proporzionale a $n_s^{n_a}$.

Tale “difetto” della DP stocastica, invece, non risulta nel *Q-Learning*, in quanto i tempi computazionali, come affermato nel precedente paragrafo, sono direttamente proporzionali al numero di episodi necessari per la sua implementazione (numero di episodi che comunque deve crescere all’aumentare dei livelli di discretizzazione di stati e azioni).

L’applicazione della DP richiede, oltre alla conoscenza dei dati di input del sistema definite nei precedenti paragrafi (richieste irrigue mensili, serie mensili di deflussi naturali, temperature medie mensili, rilasci mensili per DMV, caratteristiche tecniche e geometriche degli impianti idroelettrici, curve volumi-quote ed aree-quote degli invasi, vincoli sui rilasci) la calibrazione di un solo parametro intrinseco all’algoritmo stesso: cioè γ . Ovviamente, in analogia alla QL, sarà anche necessario discretizzare opportunamente lo spazio degli stati e quello delle azioni.

Sono state effettuate numerose simulazioni utilizzando come forzanti esterne al sistema il primo trentennio dei dati di deflussi e temperature generate stocasticamente (paragrafo 4.4) e variando i valori di γ e il livelli di discretizzazione del sistema; le 360 *action value function* ottime così ottenute sono state poi applicate alle stesse forzanti esterne, ottenendo i valori di *FO1* e *FO2* riportati nella tabella seguente:

Livelli di discretizzazione del sistema										
γ	Invasi: 2 x 5 Azioni: 3 x 6		Invasi: 2 x 10 Azioni: 5 x 8		Invasi: 3 x 20 Azioni: 10 x 15		Invasi: 4 x 20 Azioni: 15 x 20		Invasi: 5 x 25 Azioni: 20 x 25	
	FO1	FO2	FO1	FO2	FO1	FO2	FO1	FO2	FO1	FO2
	1	9234,8	222,67	9541,6	210,86	9720,3	214,73	9822,5	240,90	9883,9
0,95	9237,3	222,67	9517	211,63	9687,5	211,15	9793,7	220,36	9839	223,82
0,90	9225,2	222,67	9490,9	209,42	9615,9	213,12	9712,3	210,86	9735,1	219,43
0,80	9222,3	222,01	9454,8	208,11	9525,6	201,49	9562,2	204,17	9583,1	201,62
0,70	9222,3	222,01	9428,7	199,48	9472,2	195,62	9502,9	198,73	9521,5	194,73
0,50	9215,5	221,55	9392,4	199,48	9423,6	192,20	9429,3	191,84	9423,5	196,51
0,25	9214,4	221,55	9366,7	200,44	9402	187,05	9415,9	184,64	9407	189,29
0,10	9207,9	221,55	9360,5	199,44	9394,3	187,20	9402,2	185,22	9403,8	186,96
Le simulazioni sono state effettuate per la FO ottenuta ponendo $w_1 = 0,8$ $w_2 = 0,2$										

Tabella 4.12 – Valori delle funzioni obiettivo FO1 e FO2 al variare del parametro γ e dei livelli di discretizzazione di stati e azioni (ottimizzazione mediante approccio I.S.O. basato su DP)

Come si può osservare, i risultati migliori delle funzioni obiettivo si ottengono per valori di γ prossimi all'unità e, come era lecito aspettarsi, per maggiori livelli di discretizzazione del sistema. Ovviamente, una migliore rappresentazione dello stato fisico del sistema in esame comporta maggiori tempi computazionali: ed infatti si passa dai 37 sec a simulazione con livelli di discretizzazione (2 x 10) per gli invasi e (5 x 8) per le azioni, ai 2770 sec a simulazione con livelli di discretizzazione (5 x 25) per gli invasi e (20 x 25) per le azioni (su processore dual-core a 2,50 GHz, con RAM 4 GB).

D'altra parte, sempre dall'esame della tabella riepilogativa sopra riportata, è evidente che, al di là di un certo livello di discretizzazione, i risultati delle FO1 e FO2 migliorino molto poco.

L'applicazione del modello DP al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone è stata effettuata considerando il livello di discretizzazione:

5 x 25 per gli invasi (cioè $m_A = 5$ e $m_C = 25$)

20 x 25 per le azioni (cioè $l_A = 20$ e $l_C = 25$)

Inoltre, per i calcoli eseguiti e presentati nel prosieguo, si è deciso di scegliere $\gamma = 1$.

4.6.2.1 Generazione delle soluzioni non-dominate e scelta della soluzione di preferenza

Per la generazione delle soluzioni non dominate è stato applicato il metodo dei pesi esposto nei suoi lineamenti teorici nel paragrafo (3.10.1.1).

Sono state quindi eseguite, per la prima serie trentennale di deflussi mensili e temperature medie mensili generate stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4, diverse simulazioni di ottimizzazione mediante il modello DP per differenti valori assunti dai pesi w_1 e w_2 della funzione da ottimizzare scalarizzata (qui richiamata per comodità d'esposizione):

$$w_1 \cdot FO_1 + w_2 \cdot FO_2 \quad (4.87)$$

al variare dei pesi w_1 e w_2 nel range (0, 1) in modo che $w_1 + w_2 = 1$.

Le soluzioni ottime ottenute sono state poi applicate allo stesso periodo, ottenendo diversi valori di FO_1 e FO_2 .

I risultati così ottenuti sono riportati nella successiva tabella:

VALORI DEI PESI		VALORI DELLE FUNZIONI OBIETTIVO PER LA SERIE TRENTENNALI DI DEFLUSSI E TEMPERATURE MENSILI N° 1	
w_1	w_2	FO1 (Gwh)	FO2 (Mmc)
0,999999	0,000001	9885,60	236,50
0,9999	0,0001	9885,60	236,50
0,999	0,001	9885,60	236,50
0,99	0,01	9885,60	236,50
0,9	0,1	9883,90	239,00
0,8	0,2	9883,90	239,00
0,6	0,4	9881,40	239,03
0,4	0,6	9881,00	239,86
0,2	0,8	9881,00	239,86
0,1	0,9	9881,00	239,86
0,01	0,99	9881,00	239,86
0,001	0,999	9881,00	239,86
0,0001	0,9999	9881,00	239,86
0,000001	0,999999	9881,00	239,86

Tabella 4.13 – Risultati dell'applicazione del metodo dei pesi (ottimizzazione mediante approccio I.S.O. basato su DP)

La frontiera di Pareto così ottenuta è rappresentata graficamente nella successiva figura:

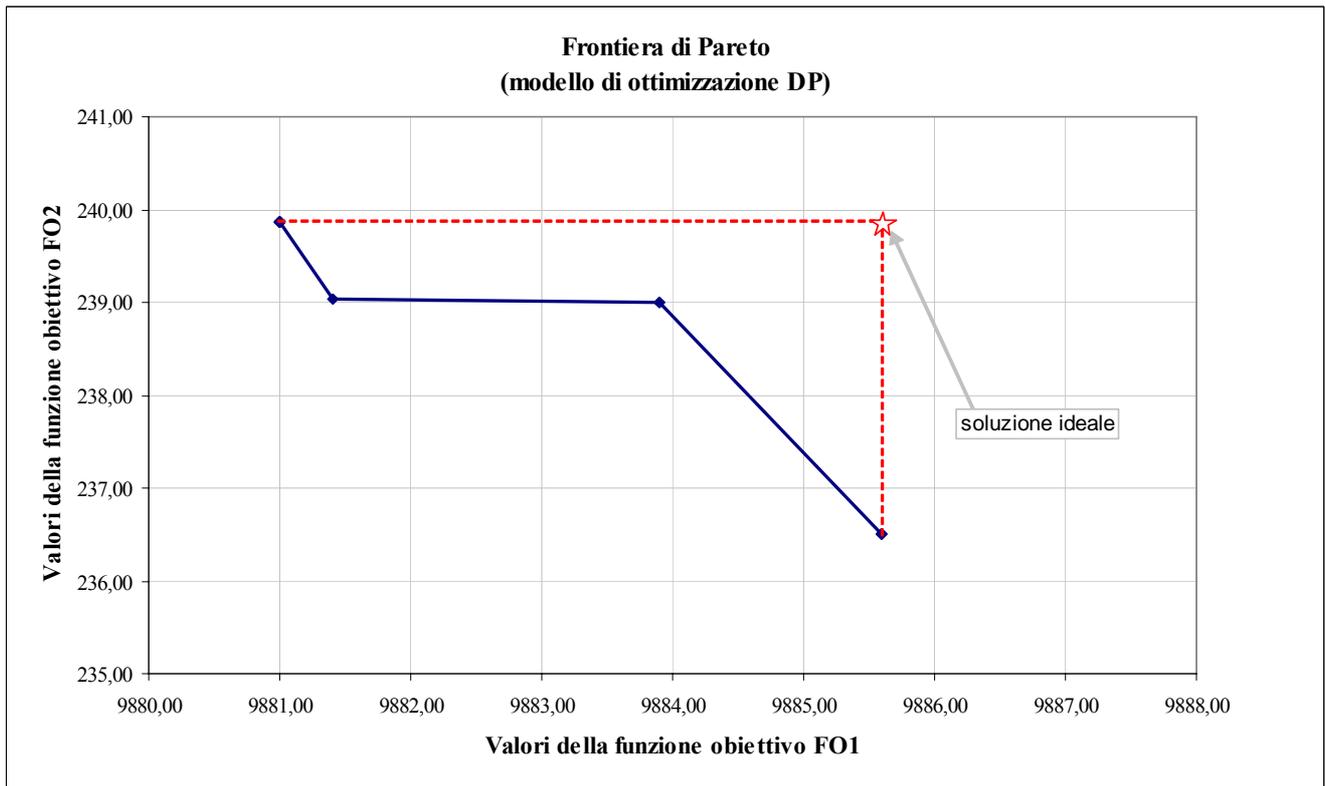


Figura 4.54 – Frontiera di Pareto per l’ottimizzazione con approccio I.S.O. basato su DP

Nella sopra riportata figura è inoltre rappresentata la soluzione ideale, mediante il simbolo grafico della stella rossa.

A questo punto si pone il problema della scelta della soluzione ottima fra quelle presenti sulla frontiera di Pareto.

Esistono diversi metodi per la scelta della migliore soluzione. In questa sede si è scelto di applicare la cosiddetta “Compromise Programming” la quale identifica la soluzione non-dominata più vicina a quella ideale usando varie norme o metriche pesate L^p (Zeleny, 1974).

Si riporta per comodità d’esposizione la sua formulazione:

$$\min \sum_{i=1}^{n_{ob}} k_i^p \cdot \left(\frac{FO_i^* - FO_i}{FO_i^* - FO_i^{**}} \right)^p \quad (4.88)$$

dove:

- p è l’esponente della norma L^p ($1 \leq p \leq \infty$);
- n_{ob} è il numero di obiettivi da considerare;
- k_i sono i pesi con cui attribuire maggiore o minore importanza all’ i -esimo obiettivo;

- FO_i^* è la soluzione ideale dell' i -esimo obiettivo (valore massimo dell' i -esimo obiettivo);
- FO_i^{**} è il valore minimo dell' i -esimo obiettivo;

Nel caso in esame la formula (4.88) è stata applicata per valori di $p = 1$ e $p = 2$, per i differenti valori dell'esponente s e per ciascuna serie di dati generata. Le tabelle seguenti mostrano i risultati ottenuti in termini del valore della funzione espressa in (4.88).

In rosso si indicano le soluzioni a cui corrispondono i valori minimi della (4.88).

$p = 1$		k_1	k_2												
w_1	w_2	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
0,999999	0,000001	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00							
0,9999	0,0001	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00							
0,999	0,001	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00							
0,99	0,01	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	1,00							
0,9	0,1	0,37	0,36	0,34	0,31	0,29	0,27	0,26							
0,8	0,2	0,37	0,36	0,34	0,31	0,29	0,27	0,26							
0,6	0,4	0,91	0,85	0,75	0,58	0,41	0,31	0,25							
0,4	0,6	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,2	0,8	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,1	0,9	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,01	0,99	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,001	0,999	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,0001	0,9999	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							
0,000001	0,999999	1,00	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,00							

$p = 2$		k_1	k_2												
w_1	w_2	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
0,999999	0,000001	0,00	0,01	0,06	0,25	0,56	0,81	1,00							
0,9999	0,0001	0,00	0,01	0,06	0,25	0,56	0,81	1,00							
0,999	0,001	0,00	0,01	0,06	0,25	0,56	0,81	1,00							
0,99	0,01	0,00	0,01	0,06	0,25	0,56	0,81	1,00							
0,9	0,1	0,14	0,11	0,08	0,05	0,05	0,06	0,07							
0,8	0,2	0,14	0,11	0,08	0,05	0,05	0,06	0,07							
0,6	0,4	0,83	0,68	0,47	0,22	0,09	0,06	0,06							
0,4	0,6	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,2	0,8	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,1	0,9	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,01	0,99	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,001	0,999	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,0001	0,9999	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							
0,000001	0,999999	1,00	0,81	0,56	0,25	0,06	0,01	0,00							

Tabella 4.14 – Risultati dell'applicazione della "Compromise Programming"
(ottimizzazione mediante approccio I.S.O. basato su DP)

Come si può osservare dall'analisi dei risultati delle tabelle precedenti, attribuendo uguale importanza all'obiettivo idroelettrico rispetto a quello irriguo (cioè $k_1 = k_2 = 0,5$), sia considerando $p = 1$ sia $p = 2$, la soluzione non dominata migliore è quella ottenuta per valori $w_1 = 0,8$ e $w_2 = 0,2$.

Alla luce di questi risultati si sceglie la soluzione ottima ottenuta per:

$$w_1 = 0,8 \quad w_2 = 0,2$$

4.6.2.2 Gestione operativa ottimale

Come anticipato, l'applicazione della DP è avvenuta in campo deterministico: fissando pertanto i valori "preferiti" dei pesi $w_1 = 0,8$ e $w_2 = 0,2$ della funzione scalarizzata (4.87), per ciascuna delle 10 serie di dati trentennali di deflussi mensili e temperature medie mensili in input al modello, è stato ricavato un set di soluzioni $[X_A(t)]_d$ (rilasci turbinati mensili da Ariamacina) e un altro set $[X_C(t)]_d$ (rilasci turbinati mensili da Cecita) con $d = 1, \dots, 10$, da ritenersi ottimale solo se applicato alla serie di dati in input (deflussi mensili e temperature medie mensili) utilizzata per ricavarli. Tale applicazione, pertanto, richiede la conoscenza a priori dei dati di input dell'intero periodo da ottimizzare: cioè, nell'ottica di una gestione "reale" del sistema, i valori "futuri" di tali dati.

Lo scopo finale però è quello di fornire al soggetto gestore un insieme di regole operative ottimali di carattere "generale", applicabili nella normale gestione del sistema di invasi quando, ovviamente, non si hanno a disposizione i valori futuri di variabili quali deflussi e temperature.

Tali regole ottimali possono essere formulate in modo tale da far dipendere le variabili decisionali al tempo attuale t^* (cioè i rilasci turbinati mensili al tempo t^*) dai valori che alcune variabili del sistema (volumi di invaso presenti nei serbatoi, deflussi naturali, etc...) assumono per tempi $t \leq t^*$.

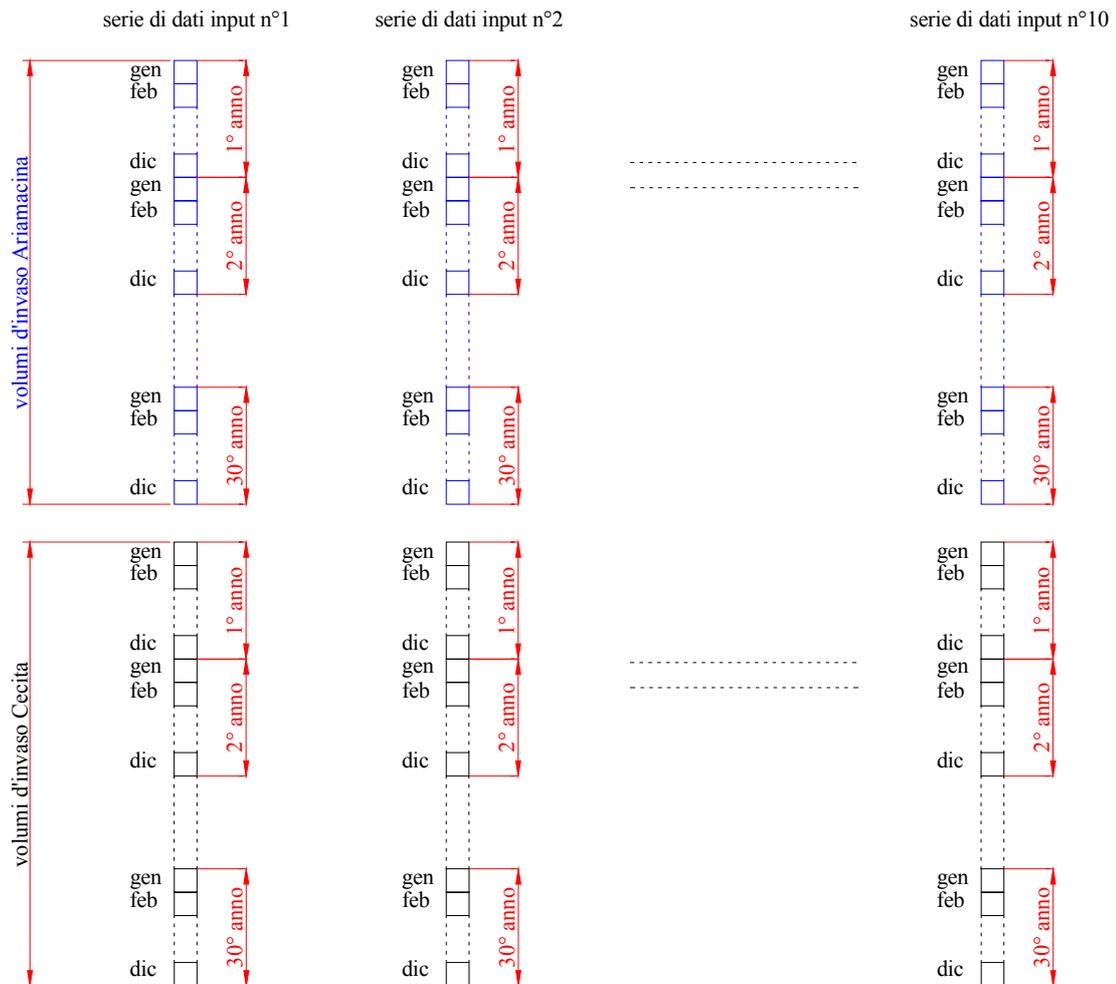
In particolare, proprio al fine di attribuire a tali regole operative caratteristiche "generali", tali relazioni andranno formulate per "stagioni" preventivamente scelte.

Nel caso dell'applicazione oggetto della presente tesi di dottorato, si è scelto di formulare 12 regole operative ottimali, cioè una per ciascun mese dell'anno.

Come affermato all'inizio del presente paragrafo, il risultato delle ottimizzazioni effettuate con la DP è stato quello di ricavare 2 set di rilasci ottimi (uno per Ariamacina $[X_A(t)]_d$, l'altro per Cecita $[X_C(t)]_d$, con $d = 1, \dots, 10$ e $t = 1, \dots, 360$) validi per ciascuna delle 10 serie di dati in input considerate nel modello, secondo lo schema grafico seguente:



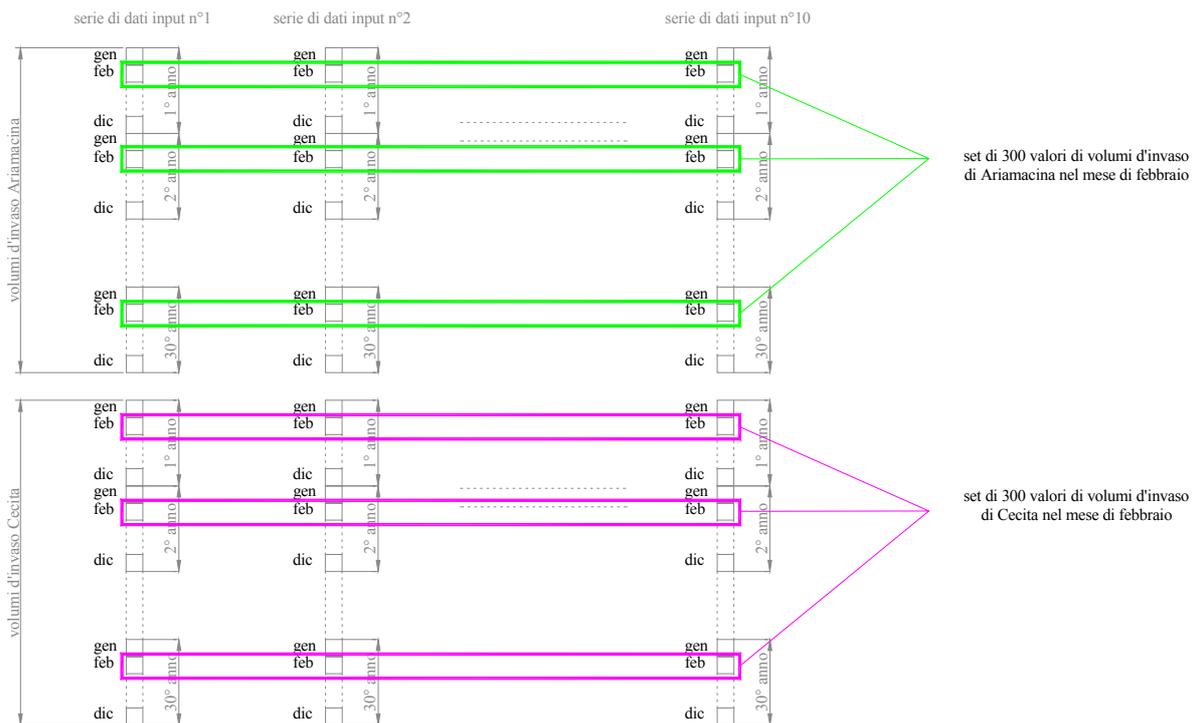
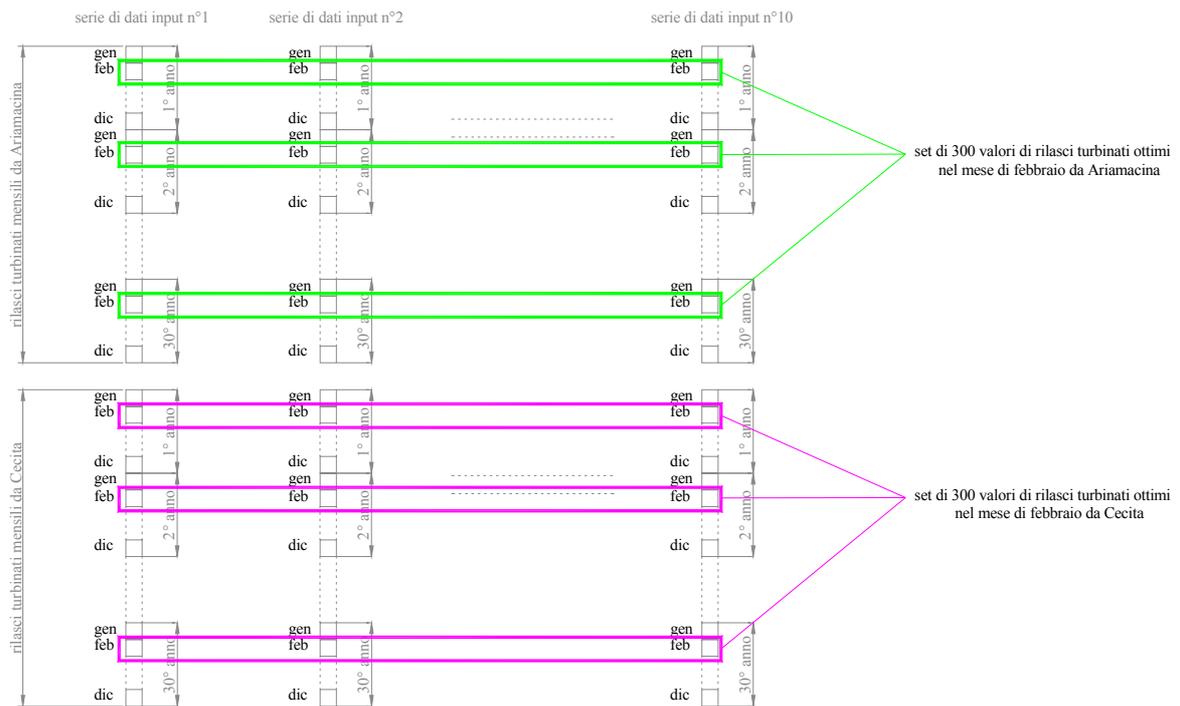
A tali set di rilasci turbinati mensili, corrispondono analoghi set di valori assunti dalle variabili di stato del sistema (volumi d'invaso, deflussi, etc..) a seguito dell'ottimizzazione:



Il primo passo è stato quello di accorpate tali dati ottenendo:

- un set per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle due variabili decisionali X_A e X_C : ogni set del genere è costituito dai 300 valori che la variabile considerata ha assunto nel generico mese per tutte le 10 serie di dati di input considerati nella simulazione;
- un set per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle altre variabili di sistema (invasi, deflussi, etc..) che potenzialmente potrebbero essere atte a "spiegare" le variazioni delle variabili decisionali: ogni set del genere è costituito dai 300 valori che la generica variabile considerata ha assunto nel generico mese per tutte le 10 serie di dati in input considerati nella ottimizzazione;

Per una esemplificazione delle operazioni descritte si riportano gli schemi grafici seguenti:



A questo punto si è proceduto, in stretta analogia alla ottimizzazione mediante SQP, alla scelta delle variabili di sistema potenzialmente atte ad essere utilizzate come variabili indipendenti nelle relazioni per la stima dei rilasci mensili ottimi.

Inizialmente si è ipotizzata la generica relazione (4.89) che qui si riporta per comodità d'esposizione:

$$X_A(t) = f_{1,t}[S_A(t), S_C(t), D_A(t-1), D_C(t-1)]$$

(4.89)

$$X_C(t) = f_{2,t}[S_A(t), S_C(t), D_A(t-1), D_C(t-1)]$$

con $t = 1, \dots, 12$, nelle quali i rilasci da effettuare nel mese t sono dipendenti sia dal valore dei volumi di invaso all'inizio dello stesso mese, sia dai valori di deflusso ai serbatoi nel mese precedente.

La “forza” che ha tale set di variabili indipendenti nello “spiegare” i rilasci ottimi è stata confrontata con il più semplice set costituito dai volumi di invaso, cioè ipotizzando la seguente legge di dipendenza:

$$X_A(t) = g_{1,t}[S_A(t), S_C(t)]$$

(4.90)

$$X_C(t) = g_{2,t}[S_A(t), S_C(t)]$$

L'analisi suddetta ha confermato l'equivalenza delle due relazioni (4.89) e (4.90): si è pertanto scelto di analizzare la più semplice relazione (4.90).

A tal uopo sono state ipotizzate diverse forme da attribuire alle funzioni $g_{1,t}$ e $g_{2,t}$ della (4.90) per ogni mese dell'anno:

dipendenza lineare: $X_{(i)}(t) = l_1(t) + l_2(t) \cdot S_A(t) + l_3(t) \cdot S_C(t)$

dipendenza quadratica: $X_{(i)}(t) = q_1(t) + q_2(t) \cdot S_A(t) + q_3(t) \cdot S_C(t) + q_4 \cdot S_A(t) \cdot S_C(t) + q_5 \cdot S_A(t)^2 + q_6 \cdot S_C(t)^2$

dipendenza non-lineare esponenziale: $X_{(i)}(t) = e_1(t) \cdot S_A(t)^{e_2(t)} + e_3(t) \cdot S_C(t)^{e_4(t)}$

dove:

- $t = 1, \dots, 12$ (i dodici mesi dell'anno);
- $l_i(t)$ $i = 1, \dots, 3$ sono i coefficienti della relazione lineare;
- $q_i(t)$ $i = 1, \dots, 6$ sono i coefficienti della relazione quadratica;
- $e_i(t)$ $i = 1, \dots, 3$ sono i coefficienti della relazione non-lineare esponenziale.

Fissato pertanto un generico mese $t = t^*$, le variabili indipendenti sono costituite dai due set di 300 valori assunti, per il mese t^* , dagli invasi $S_A(t^*)$ di Ariamacina e da quelli di Cecita $S_C(t^*)$, mentre i

300 valori dei rilasci ottimi nel mese t^* da Ariamacina $X_A(t^*)$ o da Cecita $X_C(t^*)$ rappresentano le osservazioni delle variabili dipendenti.

Definite in tal modo i valori assunti dalle variabili, sono state effettuate le regressioni multiple per ciascun mese dell'anno e per ciascuna delle tipologie di funzioni riportate in precedenza.

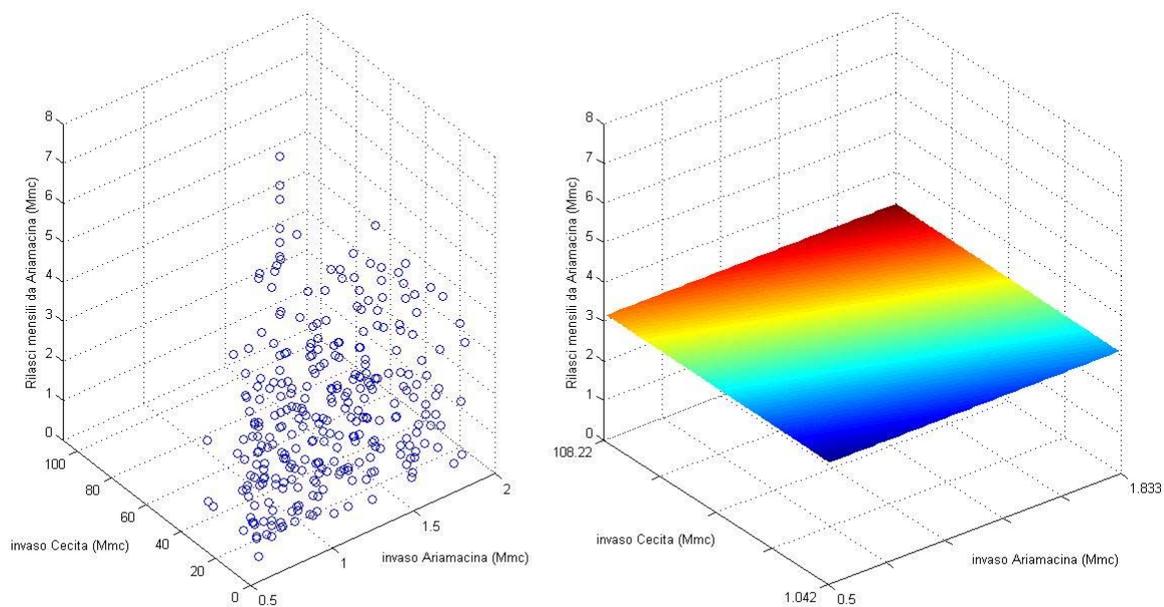
I risultati migliori dei *fit* così effettuati sono riportati nelle successive figure dove, per ciascuna delle due variabili dipendenti $X_A(t)$ e $X_C(t)$ e per ciascun mese dell'anno si mostrano i dati puntuali, la superficie ottenuta dall'analisi di regressione multipla di questi, la corrispondente funzione finale e il valore assunto dal m.s.e. (mean square error) del fit.

Analogamente al caso della SQP, anche in questa sede non è stato possibile effettuare una scelta automatica della migliore superficie approssimante i punti sperimentali, sulla base del semplice parametro m.s.e. Valgono a tal proposito le medesime considerazioni riportate nel paragrafo 4.6.1.

Regressione multipla dei rilasci ottimi da Ariamacina (modello di ottimizzazione: DP)

Mese di Gennaio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)

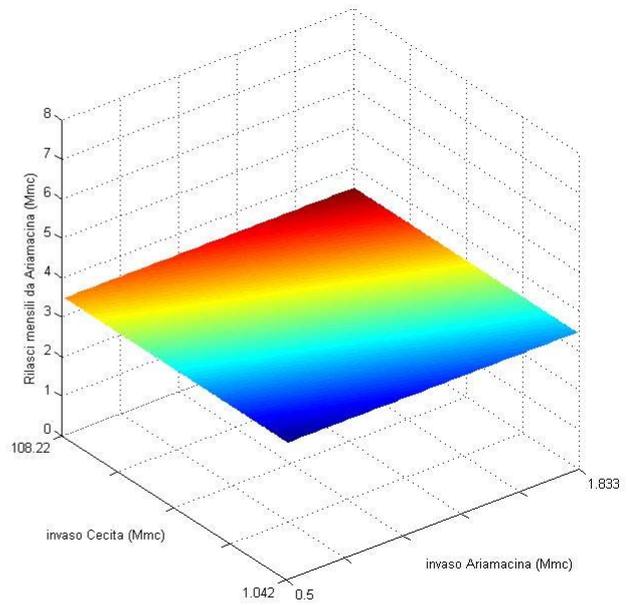
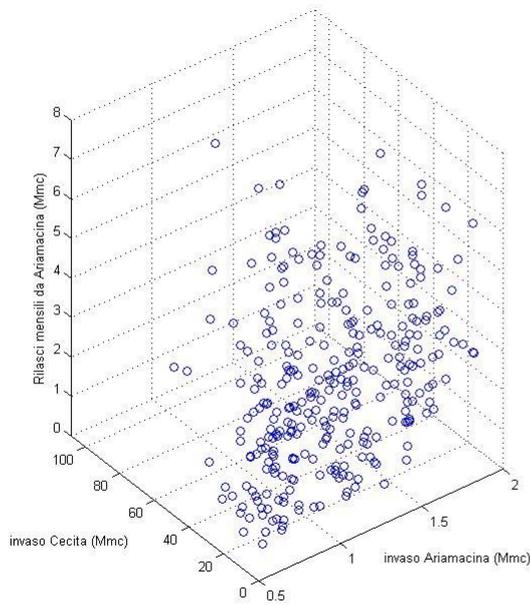


$$\text{Equazione di regressione: } X_A = 3,0269 - 0,02487 \cdot S_A + 0,00086 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 3,5441

Mese di Febbraio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



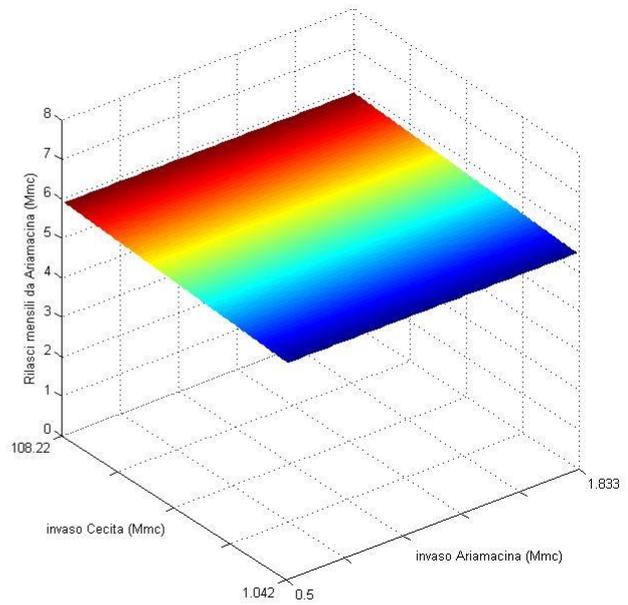
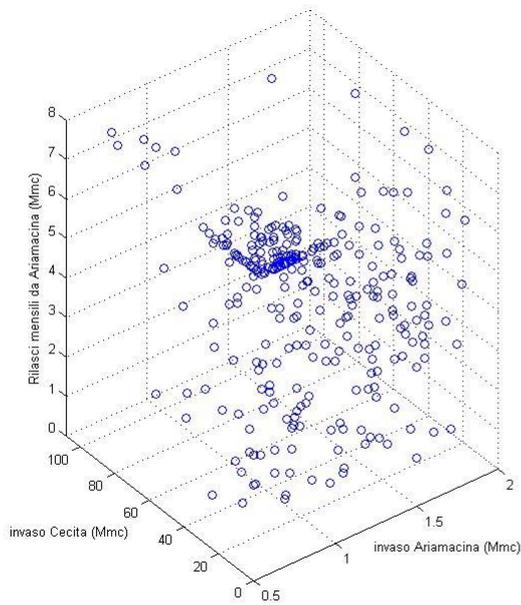
Equazione di regressione:

$$X_A = 3,4358 + 0,006381 \cdot S_A + 0,000199 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 3,8039

Mese di Marzo

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



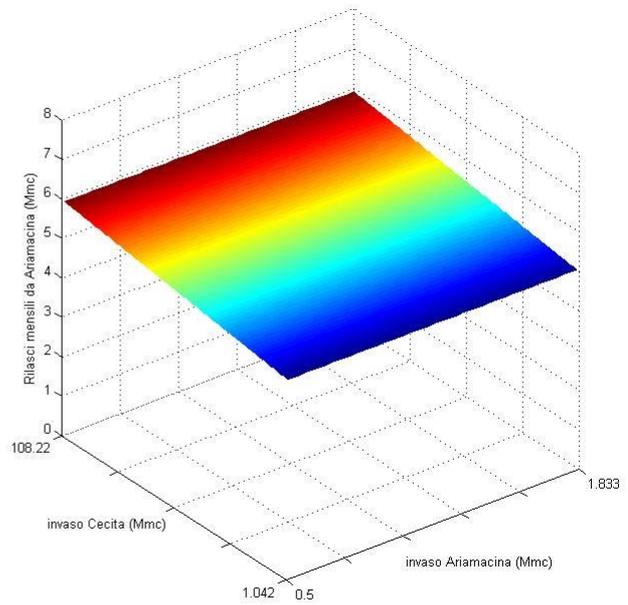
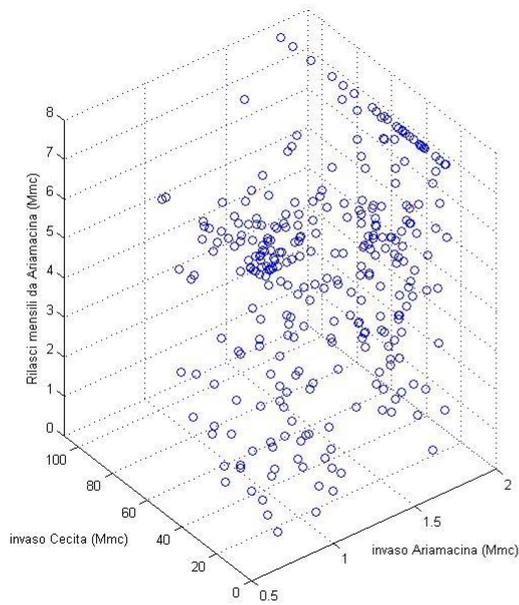
Equazione di regressione:

$$X_A = 5,4522 + 0,00009832 \cdot S_A + 0,00393 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 4,6828

Mese di Aprile

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



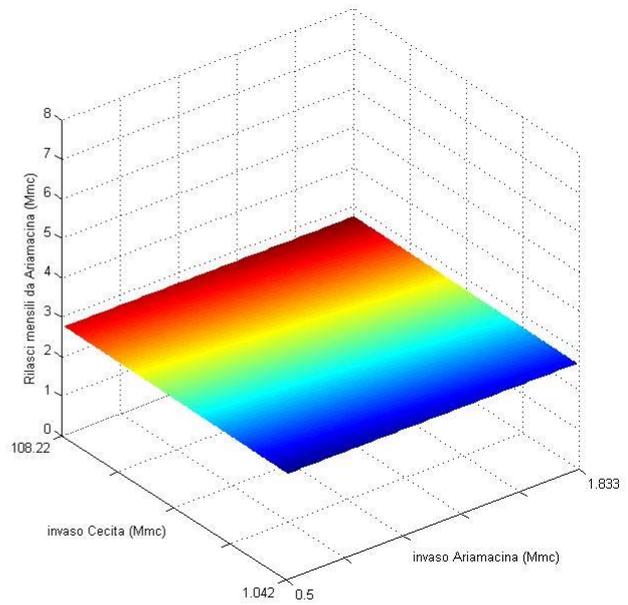
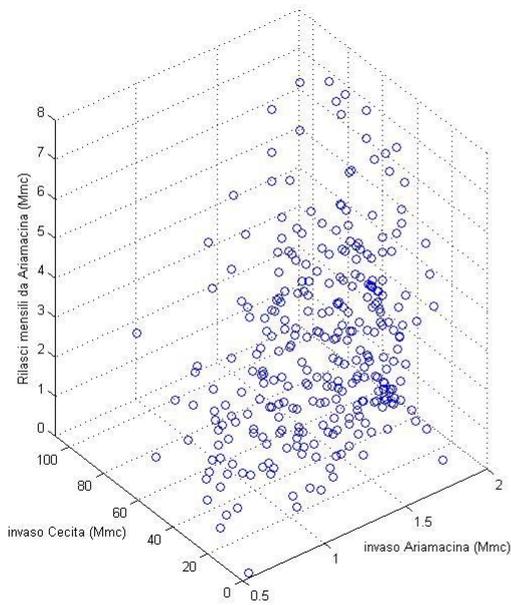
Equazione di regressione:

$$X_A = 5,0151 - 0,00388 \cdot S_A + 0,008154 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 5,5944

Mese di Maggio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



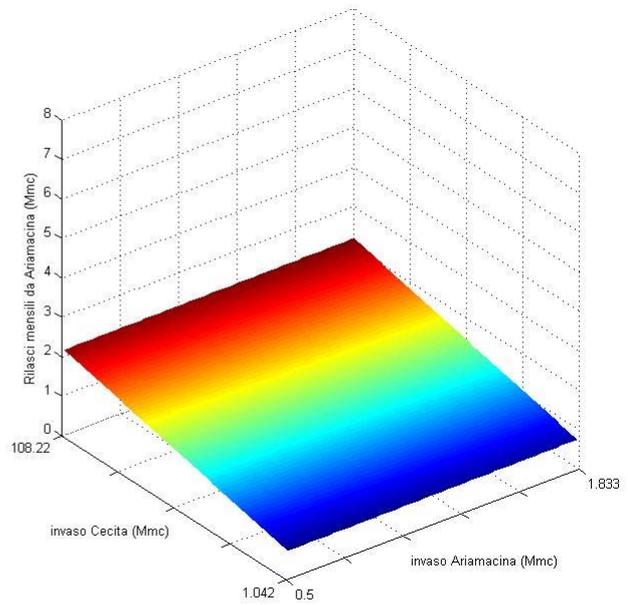
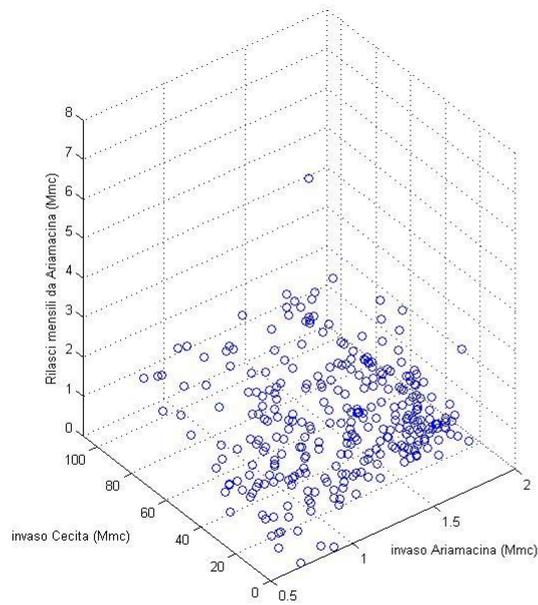
Equazione di regressione:

$$X_A = 2,6478 + 0,00697 \cdot S_A + 0,000782 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 3,4748

Mese di Giugno

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



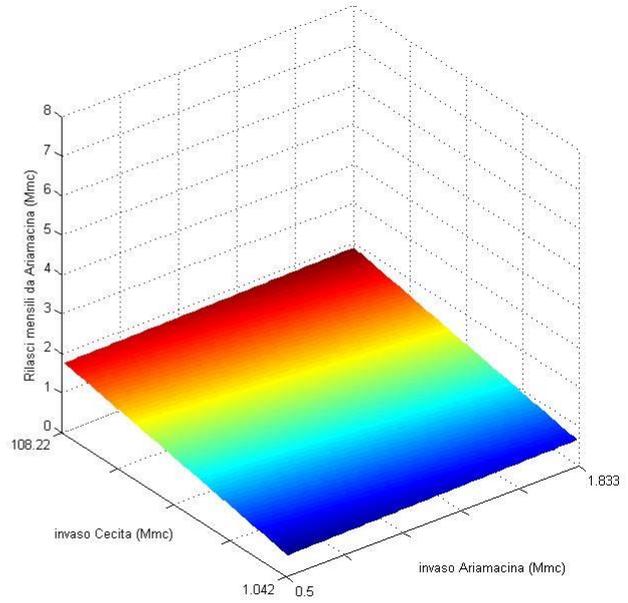
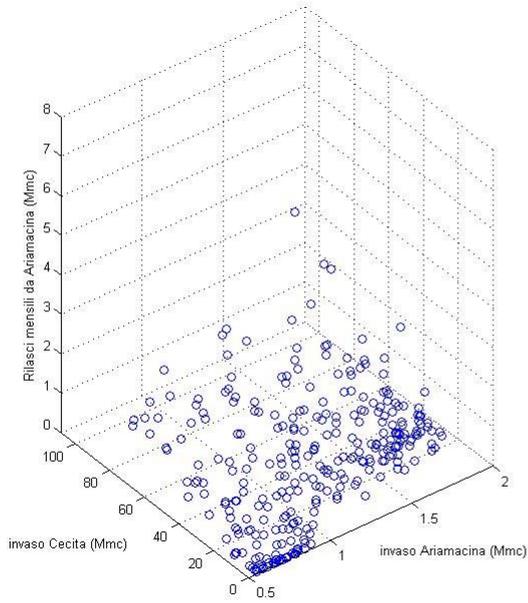
Equazione di regressione:

$$X_A = 0,65382 + 0,032985 \cdot S_A + 0,01357 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 1,9661

Mese di Luglio

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



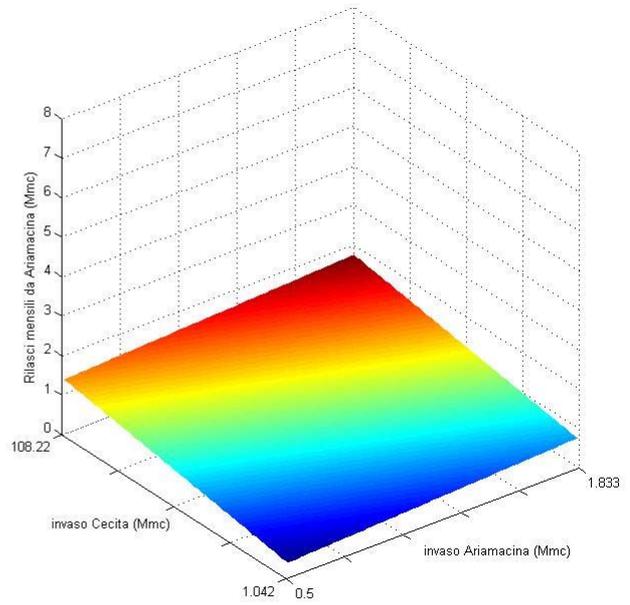
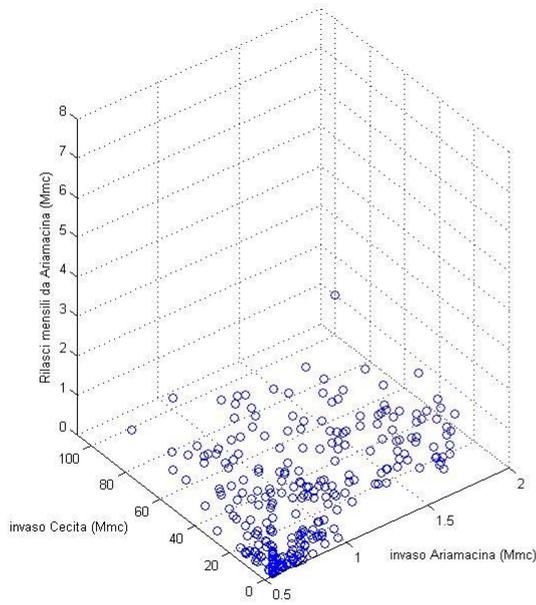
Equazione di regressione:

$$X_A = 0,43327 + 0,10699 \cdot S_A + 0,011475 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 0,4831

Mese di Agosto

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



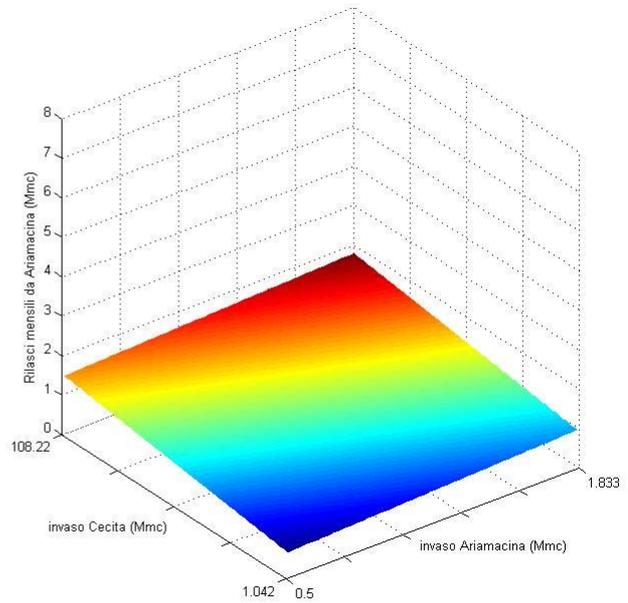
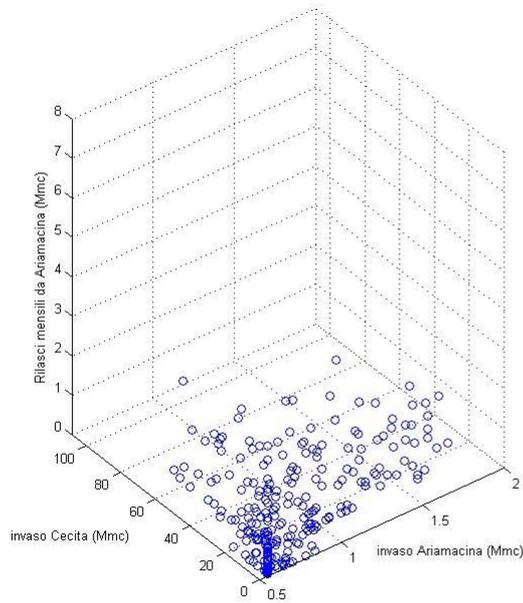
Equazione di regressione:

$$X_A = 0,18762 + 0,296 \cdot S_A + 0,00934 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 0,1683

Mese di Settembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



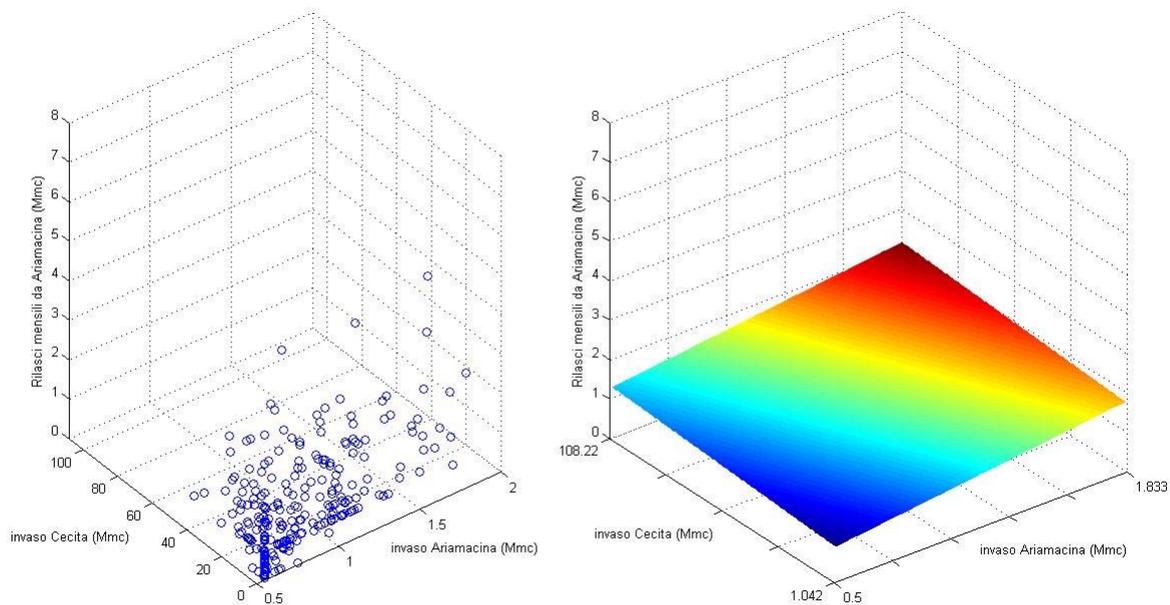
Equazione di regressione:

$$X_A = 0,47582 + 0,2537 \cdot S_A + 0,007751 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 0,3354

Mese di Ottobre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



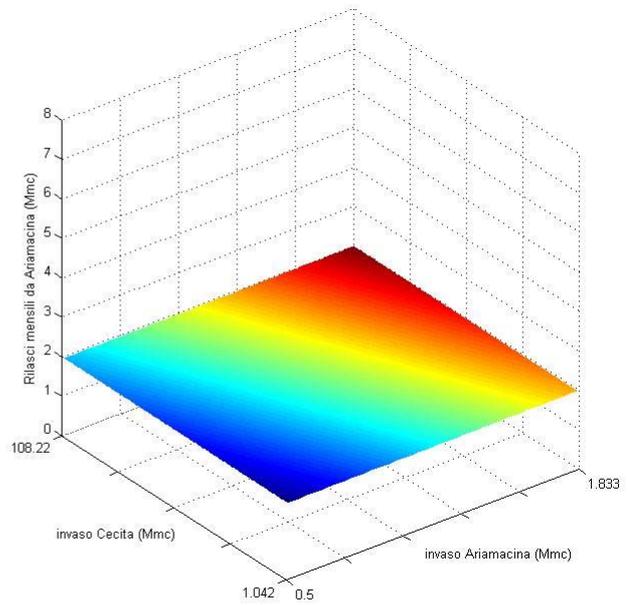
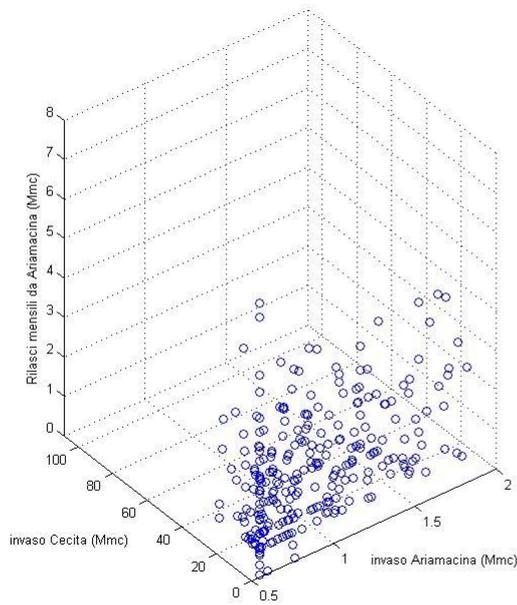
Equazione di regressione:

$$X_A = 0,47262 + 0,70021 \cdot S_A + 0,003749 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 0,5702

Mese di Novembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



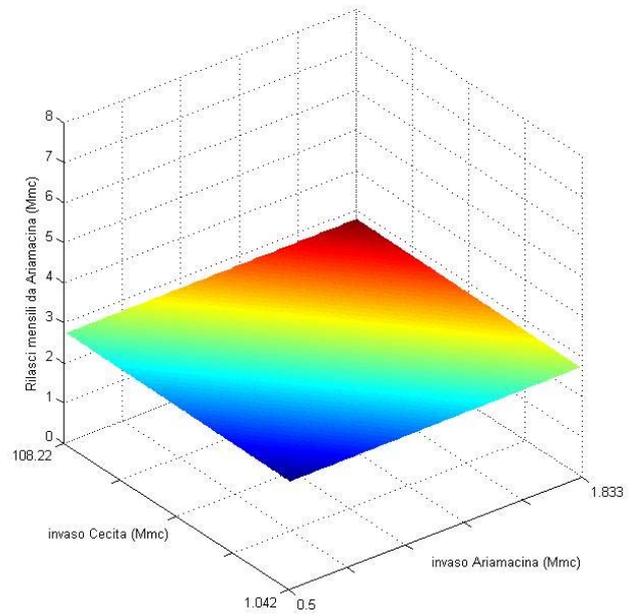
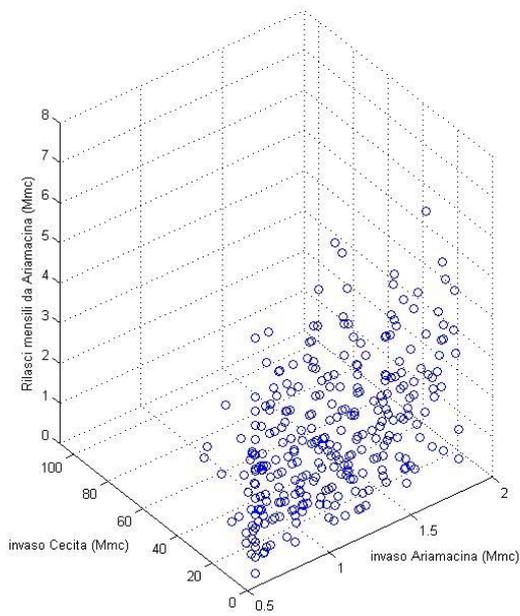
Equazione di regressione:

$$X_A = 1,885 + 0,043038 \cdot S_A + 0,0002143 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 1,7343

Mese di Dicembre

(Rilasci mensili ottimi da Ariamacina ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



Equazione di regressione:

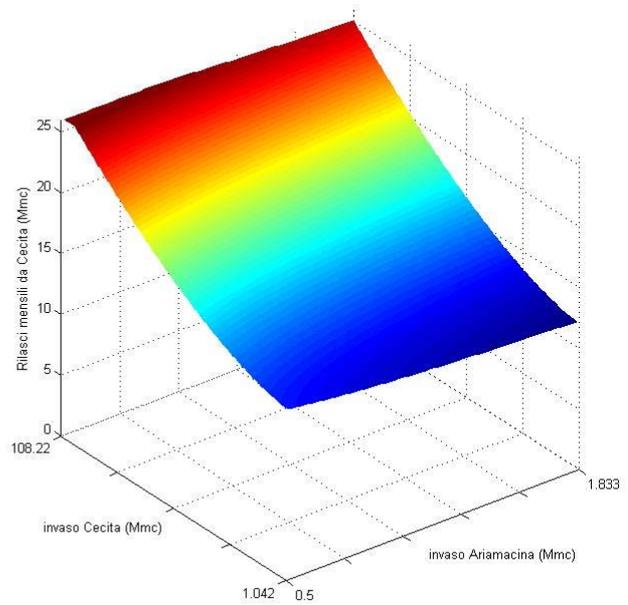
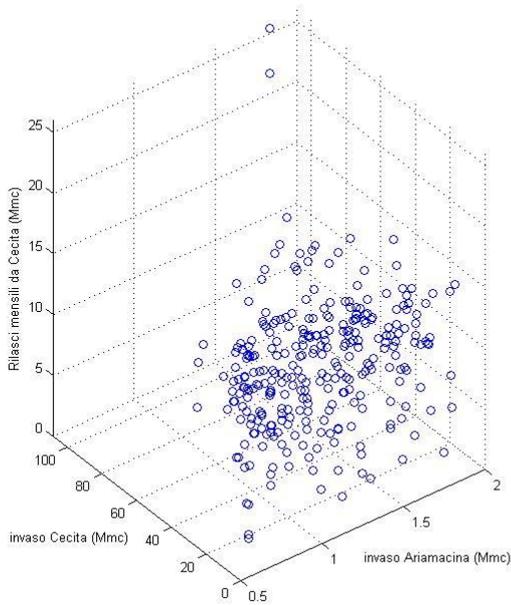
$$X_A = 2,6299 + 0,051362 \cdot S_A + 0,0005335 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 2,5276

Regressione multipla dei rilasci ottimi da Cecita

Mese di Gennaio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



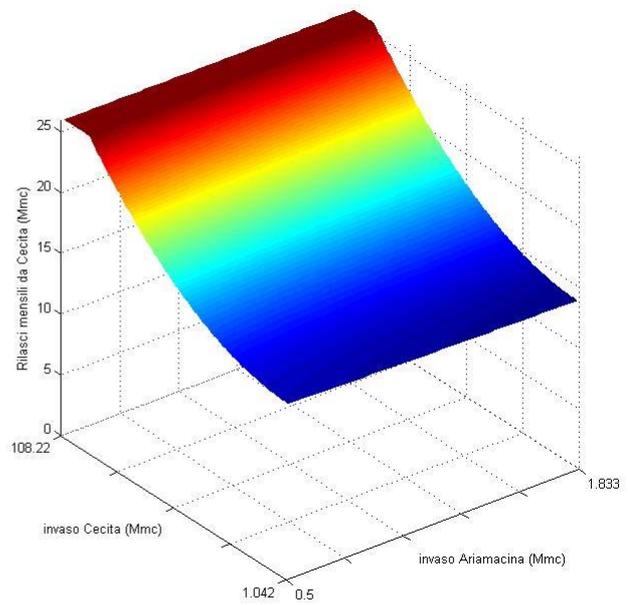
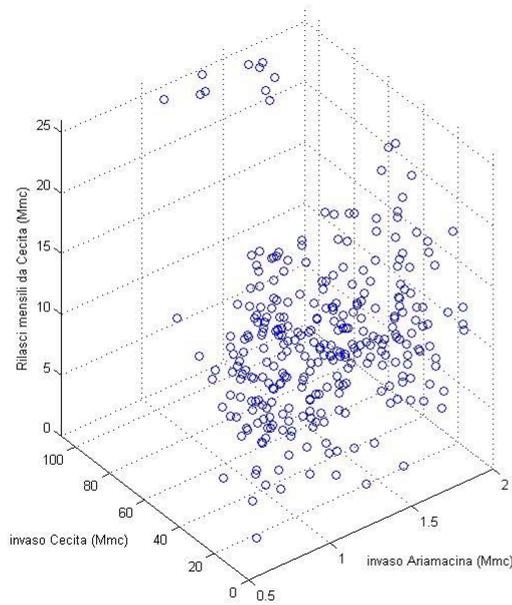
Equazione di regressione:

$$X_C = 12,9995 \cdot S_A^{-0,12002} + 0,008352 \cdot S_C^{1,5683}$$

Mean Square Error: 17,6408

Mese di Febbraio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



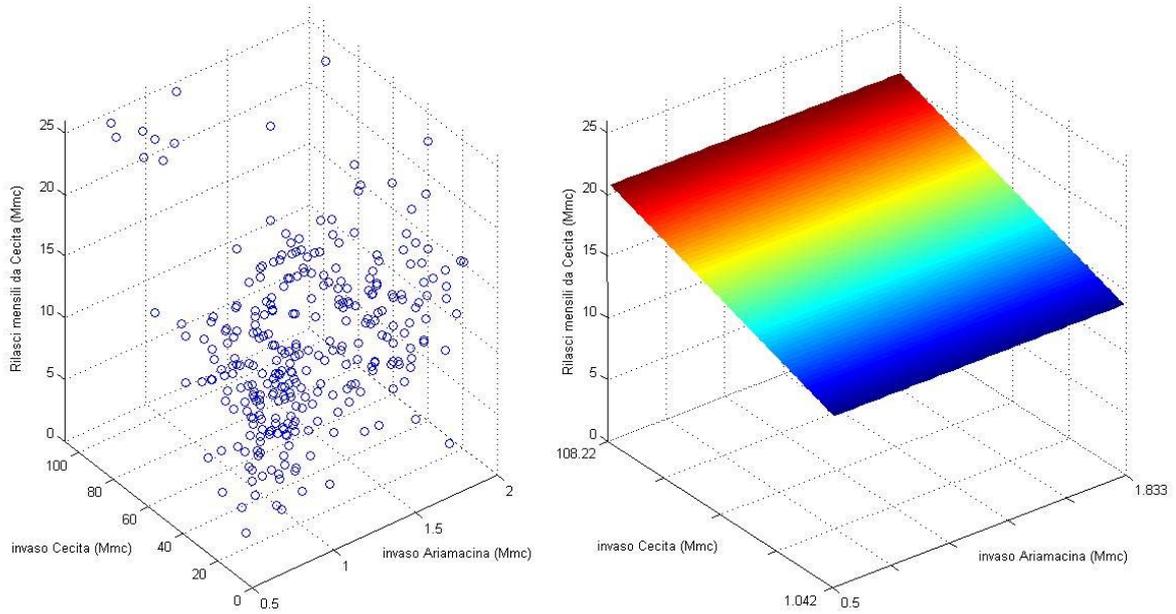
Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 14,112 \cdot S_A^{-0,033571} + 0,0013912 \cdot S_C^{1,9755}\}$$

Mean Square Error: 20,8831

Mese di Marzo

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



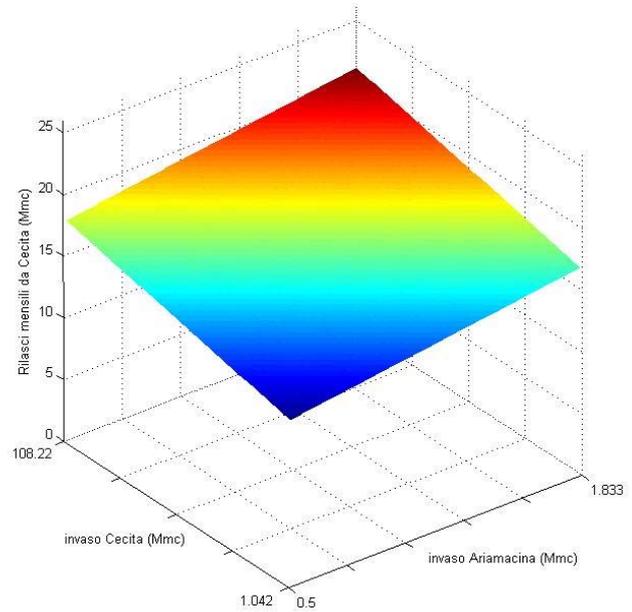
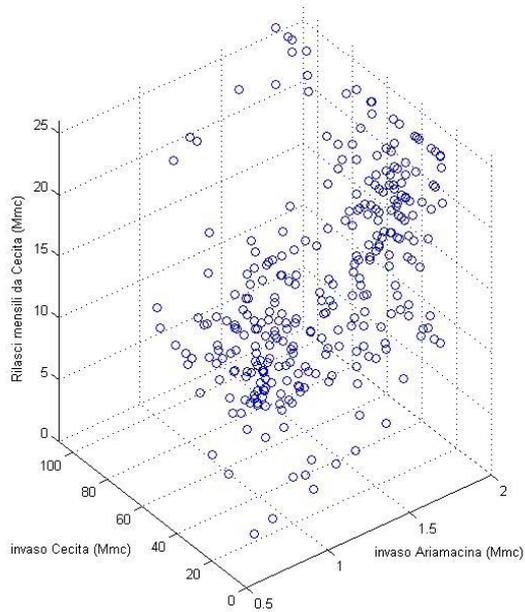
Equazione di regressione:

$$X_C = 13,688 + 0,010656 \cdot S_A + 0,064645 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 25,886

Mese di Aprile

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



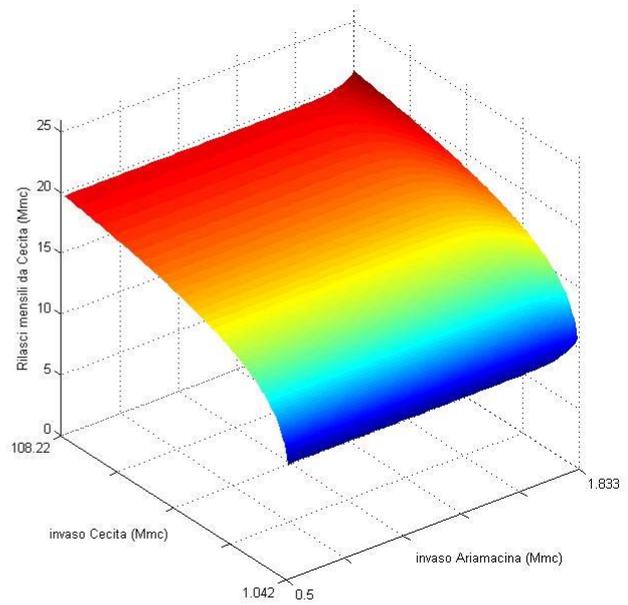
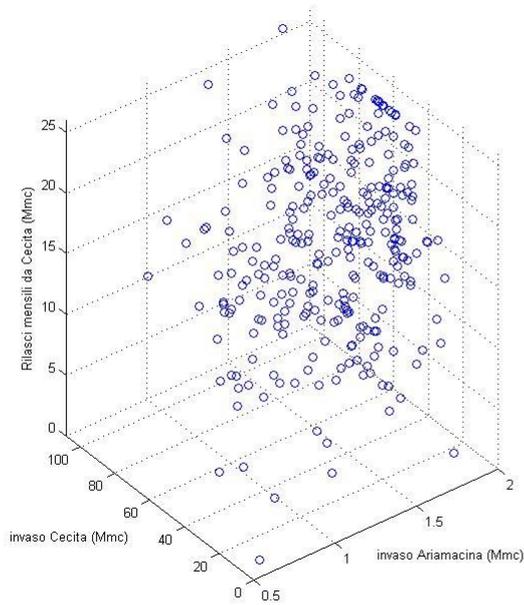
Equazione di regressione:

$$X_C = 11,938 + 2,6242 \cdot S_A + 0,040541 \cdot S_C$$

Mean Square Error: 20,523

Mese di Maggio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



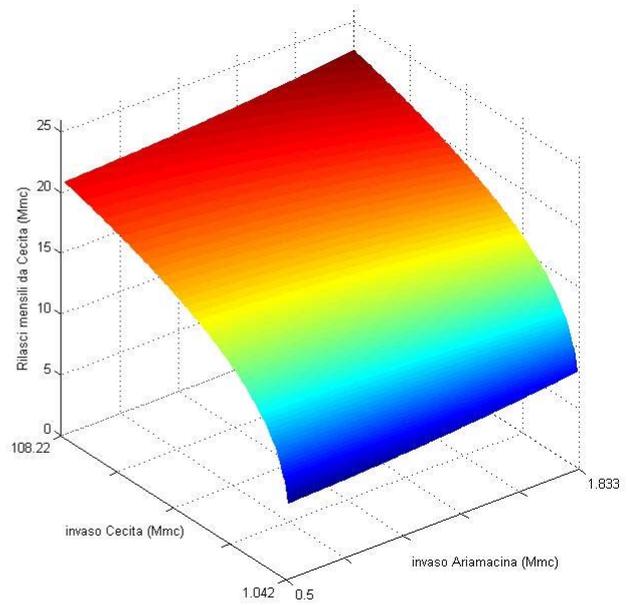
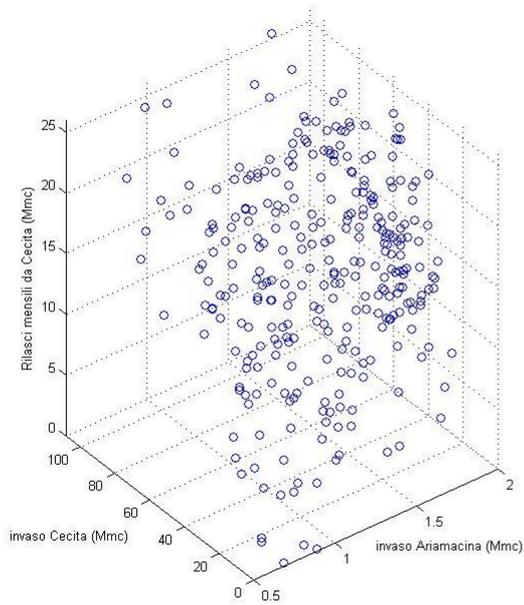
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,00000001010585 \cdot S_A^{30,751} + 9,3113 \cdot S_C^{0,15948}$$

Mean Square Error: 17,9195

Mese di Giugno

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



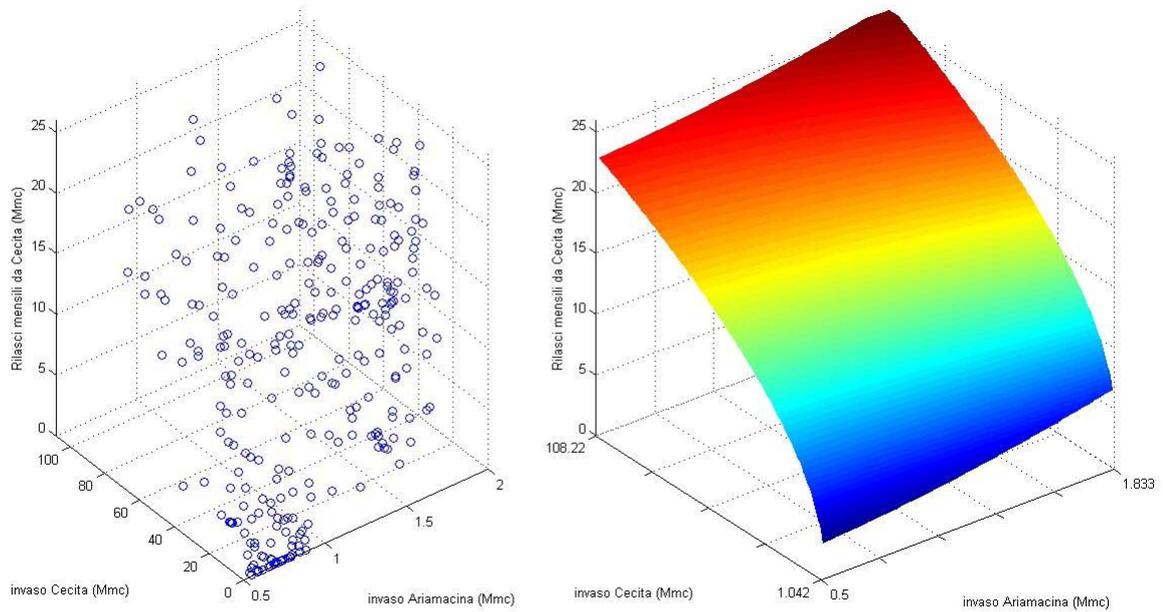
Equazione di regressione:

$$X_C = 0,5499 \cdot S_A^{2,1269} + 5,8978 \cdot S_C^{0,26749}$$

Mean Square Error: 21,5096

Mese di Luglio

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



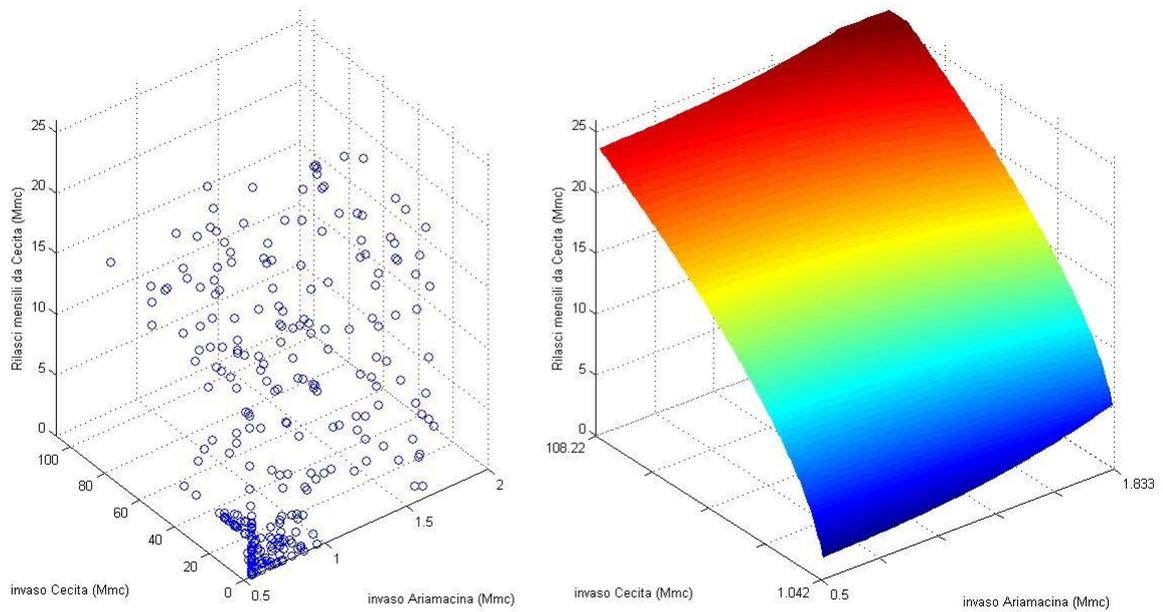
Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 1,1985 \cdot S_A^{1,9897} + 2,4369 \cdot S_C^{0,47376}\}$$

Mean Square Error: 24,6122

Mese di Agosto

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



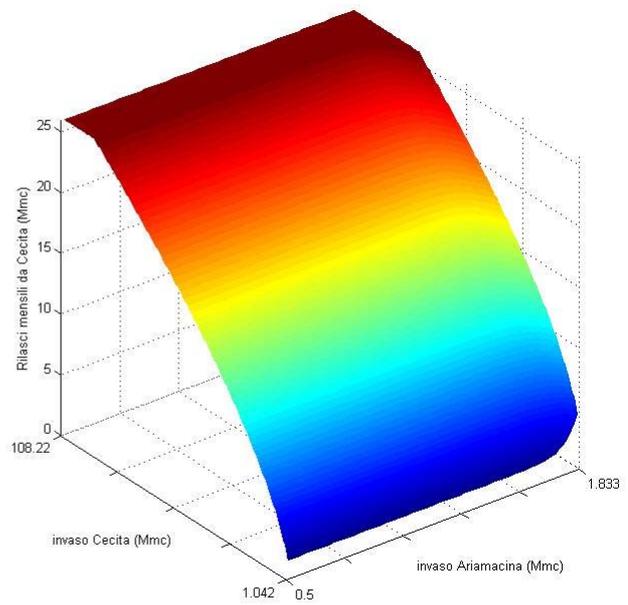
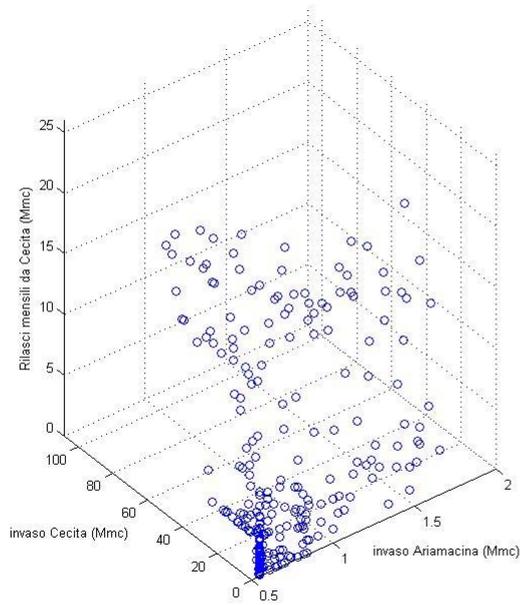
Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 0,53858 \cdot S_A^{3,1367} + 1,5861 \cdot S_C^{0,57544}\}$$

Mean Square Error: 16,7375

Mese di Settembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



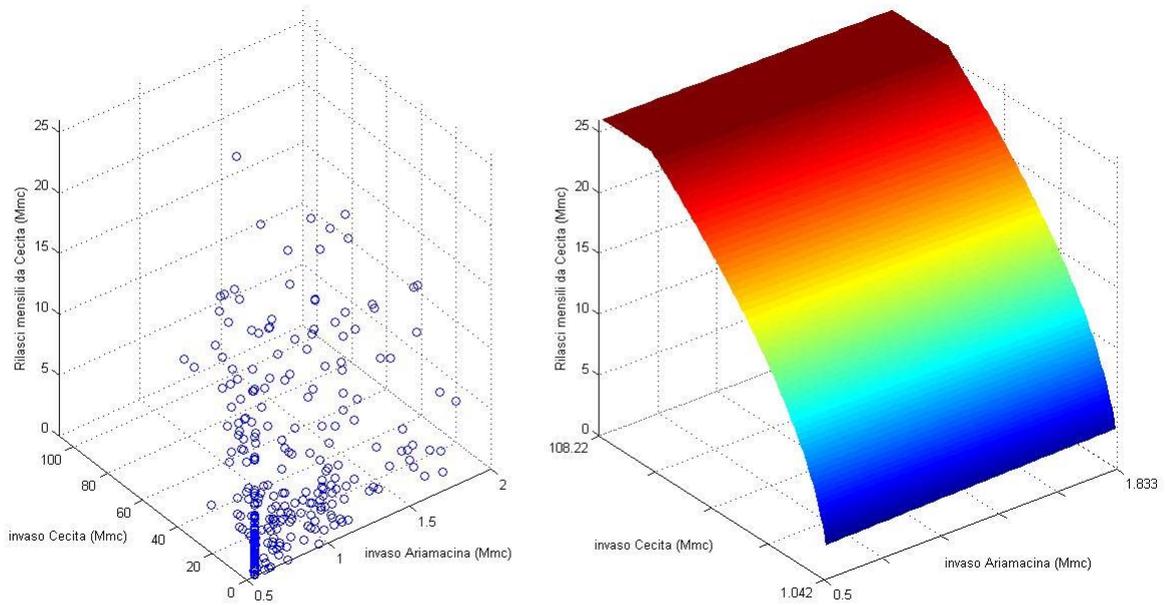
Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 0,0000000211166 \cdot S_A^{34,821} + 1,3996 \cdot S_C^{0,64292}\}$$

Mean Square Error: 9,7136

Mese di Ottobre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



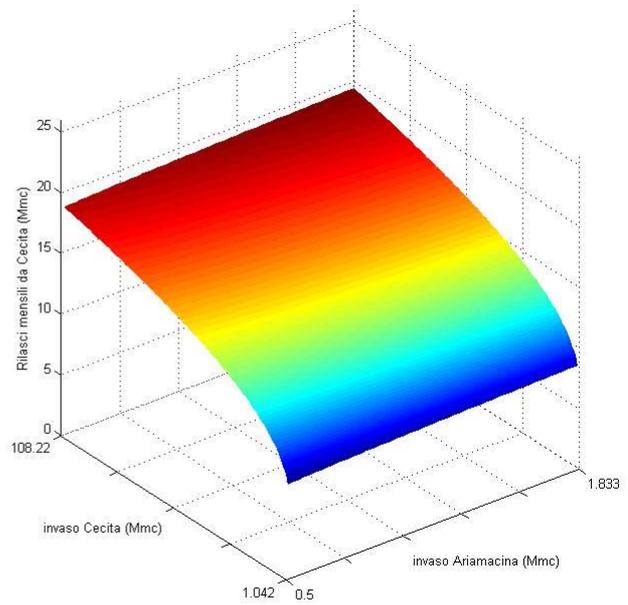
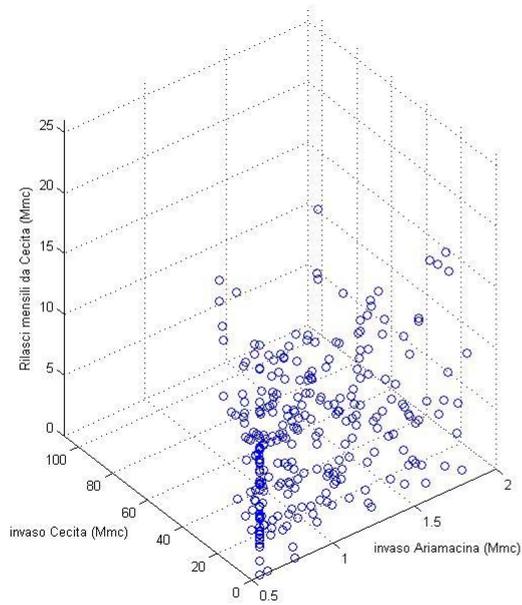
Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 0,57731 \cdot S_A^{0,7586} + 2,2891 \cdot S_C^{0,54377}\}$$

Mean Square Error: 7,9091

Mese di Novembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



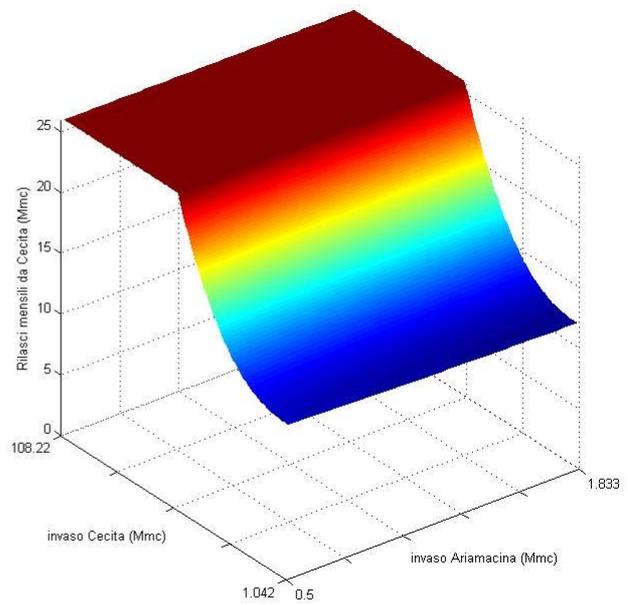
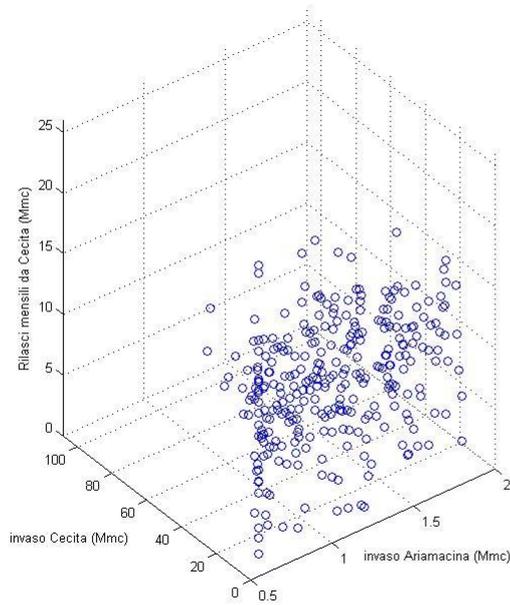
Equazione di regressione:

$$X_C = 5,543 \cdot S_A^{0,11164} + 2,4902 \cdot S_C^{0,36159}$$

Mean Square Error: 19,9991

Mese di Dicembre

(Rilasci mensili ottimi da Cecita ottenuti con modello di ottimizzazione DP)



Equazione di regressione:

$$X_C = \min\{25,92; 12,322 \cdot S_A^{-0,047963} + 0,00067863 \cdot S_C^{2,4776}\}$$

Mean Square Error: 20,7623

4.6.3 Ottimizzazione mediante Reinforcement Learning (algoritmo QL)

Nel prosieguo si riportano i risultati ottenuti mediante applicazione del metodo di ottimizzazione del Reinforcement Learning, mediante la tecnica QL, al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone.

E' stato elaborato in matlab 7.0 un codice per l'implementazione del *reinforcement learning*, ed in particolare di uno dei suoi algoritmi di risoluzione esposto nei paragrafi precedenti cioè il *Q-Learning*, al problema di ricerca del massimo esposto nel precedente paragrafo 4.5.1.

Come ampiamente esposto nei paragrafi dal 3.4 al 3.9, il *reinforcement learning* ha come obiettivo la stima della cosiddetta *action value function* ottima $Q(s,a)$ (da qui in avanti si tralascia l'asterisco per l'indicazione della *action value function* ottima essendo tutti i calcoli eseguiti votati solo alla stima di quella, mentre per le azioni ottime si mantiene ancora l'apice asterisco) la quale fornisce la misura della appetibilità di effettuare l'azione a a partire da uno stato s del sistema, tenendo conto del fatto che sia il campo delle azioni possibili, sia quello degli stati sono opportunamente discretizzati.

Una volta nota la *action value function* ottima suddetta, la *policy* ottima determinata dall'algoritmo è quella che, posti nel generico stato s , sceglie l'azione a^* tale che:

$$a^* = \underset{a}{\operatorname{arg\,max}}[Q(s,a)] \quad (4.92)$$

cioè l'azione a^* che massimizza $Q(s,a)$ per s fissato.

L'algoritmo *Q-Learning* stima, come detto, la $Q(s,a)$ mediante la regola di aggiornamento (si veda paragrafo 3.8.2.2, relazione 3.121 di seguito riportata per comodità d'esposizione):

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a' \in A(s')} Q(s',a') - Q(s,a) \right] \quad (3.121)$$

La particolare natura del problema in esame, è caratterizzata da “forzanti” esterne al sistema di tipo stocastico, cioè i deflussi mensili $D_{(j)}(t)$ al serbatoio (\cdot) e i volumi evaporati mensilmente $EVAP_{(j)}(t)$ dallo specchio liquido, che hanno comunque un andamento ciclico con periodo di 12 mesi.

Nel caso in esame, pertanto, è necessario rifarsi alla formulazione “stagionale” dell'algoritmo *Q-Learning* (si veda ancora il paragrafo 3.8.2.2, relazione 3.122 di seguito riportata per comodità d'esposizione):

$$Q_t(s_t, a_t) \leftarrow Q_t(s_t, a_t) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a_{t+1} \in A(s_{t+1})} Q_{t+1}(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_t(s_t, a_t) \right] \quad (3.122)$$

in cui si stimano tante *action value functions* quanti sono i sottoperiodi “stagionali” in cui si pensa possa essere suddiviso l’intero intervallo di tempo di riferimento T.

In particolare, considerando come sotto periodo stagionale il mese, si considerano 12 *action value functions*, una per ogni mese dell’anno.

Quindi la regola di aggiornamento può essere espressa più compiutamente:

$$Q_t(s_t, a_t) \leftarrow Q_t(s_t, a_t) + \alpha \cdot \left[r + \gamma \cdot \max_{a_{t+1} \in A(s_{t+1})} Q_{t+1}(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q_t(s_t, a_t) \right] \quad (4.93)$$

per t = 1, 2, ..., 12

L’algoritmo del QL applicato al problema in esame fornirà pertanto, la stima delle 12 funzioni $Q(s, a)$ seguenti:

$$\begin{aligned} & Q_{\text{gennaio}}(s, a) \\ & Q_{\text{febbraio}}(s, a) \\ & \dots \\ & Q_{\text{dicembre}}(s, a) \end{aligned}$$

La *policy* ottima che massimizza la funzione obiettivo FO è quella che, posti, in un generico mese t , nello stato s , sceglie di effettuare l’azione $a_t^*(s)$ tale che:

$$a_t^*(s) = \arg \max_{a_t} [Q_t(s, a)] \quad (4.94)$$

La procedura di risoluzione dell’algoritmo impone, oltre alla conoscenza dei dati di input del sistema definite nei precedenti paragrafi (richieste irrigue mensili, serie mensili di deflussi naturali, temperature medie mensili, rilasci mensili per DMV, caratteristiche tecniche e geometriche degli impianti idroelettrici, curve volumi-quote ed aree-quote degli invasi, vincoli sui rilasci) anche la scelta iniziale dei valori da attribuire alla seguente serie di parametri intrinseci all’algoritmo stesso:

1. γ (che deve essere compreso tra $[0, 1]$);
2. α (che deve essere compreso tra $[0, 1]$);

3. ε (che deve essere compreso tra $[0, 1]$);

Devono inoltre essere definiti i livelli di discretizzazione degli stati del sistema, cioè dei volumi d'invaso dei serbatoi di Cecita e Ariamacina che, lo si ricorda per comodità di esposizione, variano tra i seguenti valori massimi e minimi:

- invaso di Ariamacina:
 - volume di massimo svaso $0,562 \text{ Mm}^3$;
 - volume di massima regolazione $1,833 \text{ Mm}^3$;
- invaso di Cecita:
 - volume di massimo svaso $1,046 \text{ Mm}^3$;
 - volume di massima regolazione $108,22 \text{ Mm}^3$;

e delle azioni eseguibili, cioè i volumi di rilascio dai serbatoi suddetti che, come indicato nel paragrafo 4.5.4, possono assumere i seguenti valori massimi mensili:

- invaso di Ariamacina: $7,78 \text{ Mm}^3/\text{mese}$;
- invaso di Cecita: $25,92 \text{ Mm}^3/\text{mese}$;

Nel prosieguo si indicheranno con m_A e m_C i livelli di discretizzazione dei volumi di invaso rispettivamente di Ariamacina e Cecita, così come con l_A e l_C i livelli di discretizzazione dei volumi di rilascio mensile dagli stessi serbatoi.

La *action value function* $Q_t(s,a)$ è descritta da una matrice con $n_s = m_A \cdot m_C$ righe (rappresentanti di tutte le possibili combinazioni degli stati del sistema) e $n_a = l_A \cdot l_C$ colonne (rappresentanti di tutte le possibili combinazioni delle azioni di rilascio eseguibili dal sistema)

Un volta fissati i valori di tutti i parametri indicati, si può procedere alla implementazione della procedura di risoluzione QL.

In particolare il primo passo consiste nella inizializzazione arbitraria degli $n_s \cdot n_a$ valori della matrice $Q_t(s,a)$: in questa sede si è scelto di porli pari tutti a zero.

Poi si implementano un numero di episodi K , in ciascuno dei quali:

- A. si pone la variabile temporale t pari a 1;
- B. si fissa in maniera random (da distribuzione uniforme) uno stato del sistema $s = s_t$;
- C. si sceglie in maniera random (mediante distribuzione ε -greedy) l'azione da compiere $a = a_t$;
- D. si determina il ritorno immediato dopo avere calcolato lo stato successivo s_{t+1} che si genera, in base alle caratteristiche del sistema fisico ed ai particolari valori $D_{(t)}(t)$ e $EVAP_{(t)}(t)$ delle forzanti esterne, partendo da s_t e da a_t ;
- E. si applica la regola di aggiornamento (4.93);

F. si fissa $t = t + 1$ e si sceglie il nuovo stato $s = s_t$ sempre in maniera random (da distribuzione uniforme) e si riparte dal punto A, sino a quando non si giunge al termine della serie storica di deflussi trentennale.

L'algoritmo ripete i passi A – F sino a quando i valori stimati di $Q_t(s,a)$ presentano un aggiornamento residuo e/o quando le azioni ottime a_t^* rimangono stazionarie da un episodio all'altro.

Per potere valutare il comportamento di convergenza del modello QL implementato per il sistema di invasi in esame, è stato eseguito un elevato numero di simulazioni al variare dei parametri suddetti. Ovviamente, un livello di discretizzazioni di stati e azioni elevato, sebbene rappresenti in maniera più fedele il comportamento reale del sistema, genera una *action value function* $Q_t(s,a)$ con un gran numero di celle necessitando, ai fini della convergenza di modello, di un maggior numero di episodi.

L'analisi della convergenza del modello QL al variare dei parametri suddetti è stata pertanto eseguita attribuendo un livello di discretizzazione di stati ed azioni molto basso (2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni) esigenti, come anticipato, un minor numero di episodi per una stima sufficientemente affidabile della *action value function*. I risultati così ottenuti per tale livello di discretizzazione *rough* (letteralmente: grossolano, grezzo) sono stati poi di grande aiuto nella scelta della combinazione ottima di parametri intrinseci da utilizzare nelle simulazione di ottimizzazione a più elevato livello di discretizzazione.

Ai fini dell'analisi del comportamento di convergenza con livello di discretizzazione *rough* del sistema sono stati considerati i seguenti valori tipici dei parametri intrinseci del modello:

$$\alpha = \{0,05; 1; 0,5; 0,1\}$$

$$\gamma = \{0,95; 0,5; 0,1\}$$

$$\varepsilon = \{1; 0,4; 0,1\}$$

Fissando una qualunque combinazione d'essi, sono state ottenute le stime $Q_t(s,a)$ e quindi le azioni ottime $a_t^*(s)$ per ciascun mese dell'anno.

Tale policy ottima è stata poi ri-applicata allo stesso periodo preso in considerazione per la stima delle $Q_t(s,a)$, ottenendo il valore delle funzioni obiettivo FO , $FO1$ e $FO2$.

Nel prosieguo si riporta l'analisi dei risultati significativi conseguiti per alcune delle combinazioni dei parametri intrinseci suddetti.

In particolare, al fine di verificare eventuali comportamenti di tendenziale convergenza dell'algoritmo, si è stabilito di applicare, ogni 1000 episodi simulati, la stima $a_t^*(k)$ della policy ottima ottenuta sino a all'episodio k , alla serie di dati di input utilizzata per la stima stessa, ottenendo un valore di FO complessiva (con w_1 e w_2 fissati pari a 1).

Al termine delle simulazioni sono stati ricavati grafici mostranti l'andamento della funzione obiettivo complessiva FO al variare del numero di episodi.

Le altre caratteristiche delle simulazioni suddette (i cui risultati sono riportati nell'immediato proseguo) sono:

- la serie di dati di input (deflussi mensili e temperature medie mensili) scelta è il primo trentennio della serie di dati generati stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4;
- lo stato iniziale del sistema è stato fissato in modo tale da presentare gli invasi alla quota di massima regolazione;
- si è scelto come criterio di interruzione dell'aggiornamento QL il verificarsi di almeno 5.000 episodi con assenza di cambiamenti della policy.

La figura successiva mostra l'andamento della FO generata al variare del numero di episodi per le tre combinazioni:

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,5 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,1 \quad \varepsilon = 0,4$$

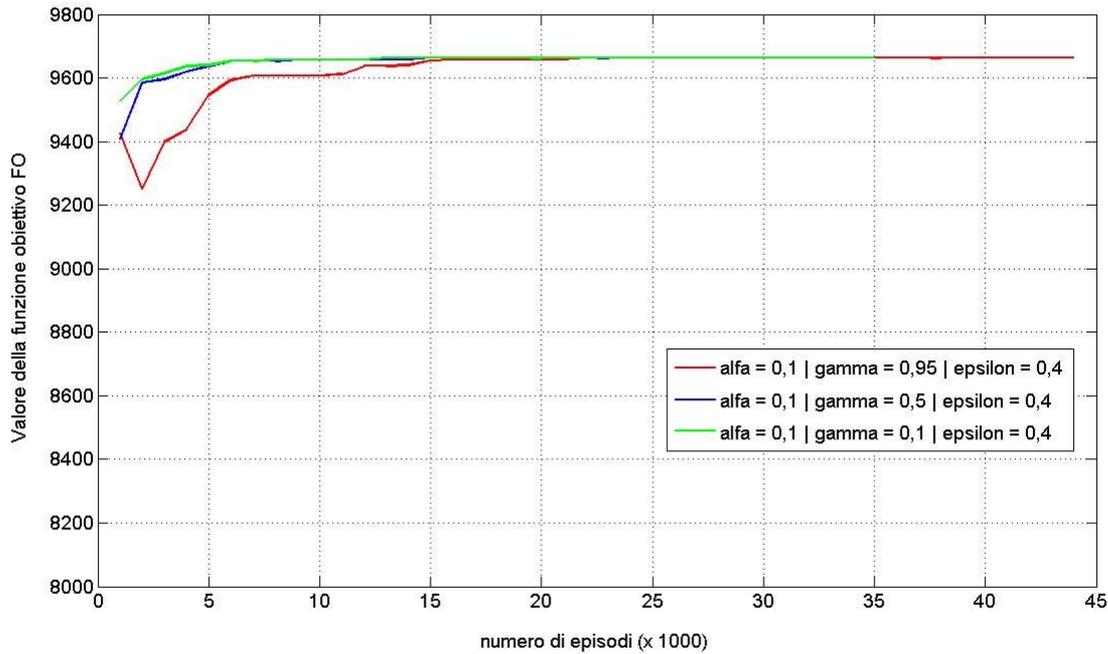


Figura 4.55 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni)

Dall’esame della figura sopra riportata sembra evidente un chiaro comportamento di convergenza verso un ben definito valore di FO (pari a 9.662,1) comune a tutte e tre le combinazioni analizzate. In particolare, per i valori più bassi di γ tale convergenza appare più veloce rispetto a quella ottenuta per $\gamma=1$.

Si noti che il criterio di convergenza è stato raggiunto:

- per $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,95$ $\epsilon = 0,4$ dopo un numero di episodi pari a 44.869 con un tempo computazionale di circa 3.200 sec;
- per $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,5$ $\epsilon = 0,4$ dopo un numero di episodi pari a 28.237 con un tempo computazionale di circa 2.150 sec;
- per $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,1$ $\epsilon = 0,4$ dopo un numero di episodi pari a 35.066 con un tempo computazionale di circa 2.920 sec;

Analoghi risultati (con valore finale di FO pari sempre a 9.662,1) sono stati ottenuti per le combinazioni:

$$\alpha = 0,05 \quad \gamma = 0,95 \quad \epsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,05 \quad \gamma = 0,5 \quad \epsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,05 \quad \gamma = 0,1 \quad \varepsilon = 0,4$$

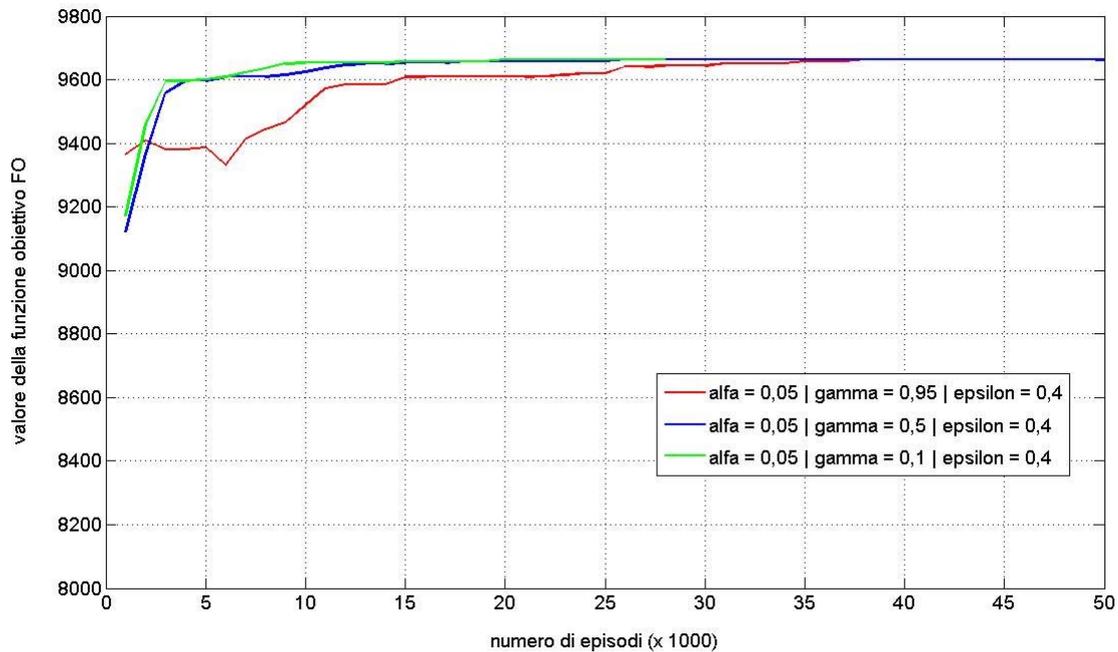


Figura 4.56 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell'algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2×5 per gli stati e 3×6 per le azioni)

Si noti che il criterio di convergenza è stato raggiunto solo per la combinazione $\alpha = 0,05 \quad \gamma = 0,1 \quad \varepsilon = 0,4$ dopo un numero di episodi pari a 28.064 con un tempo computazionale di circa 1.836 sec.

Le altre combinazioni sono state interrotte dopo 50.000 episodi.

Il raffronto, riportato nella successiva figura, tra questi ultimi tre casi (linee rosse) e i precedenti tre (ottenuti fissando $\alpha = 0,1$ – linee blu) mostra che il comportamento di convergenza, oltre a tendere verso un unico valore di FO comune a tutti, appare più veloce nel caso di $\alpha = 0,1$.

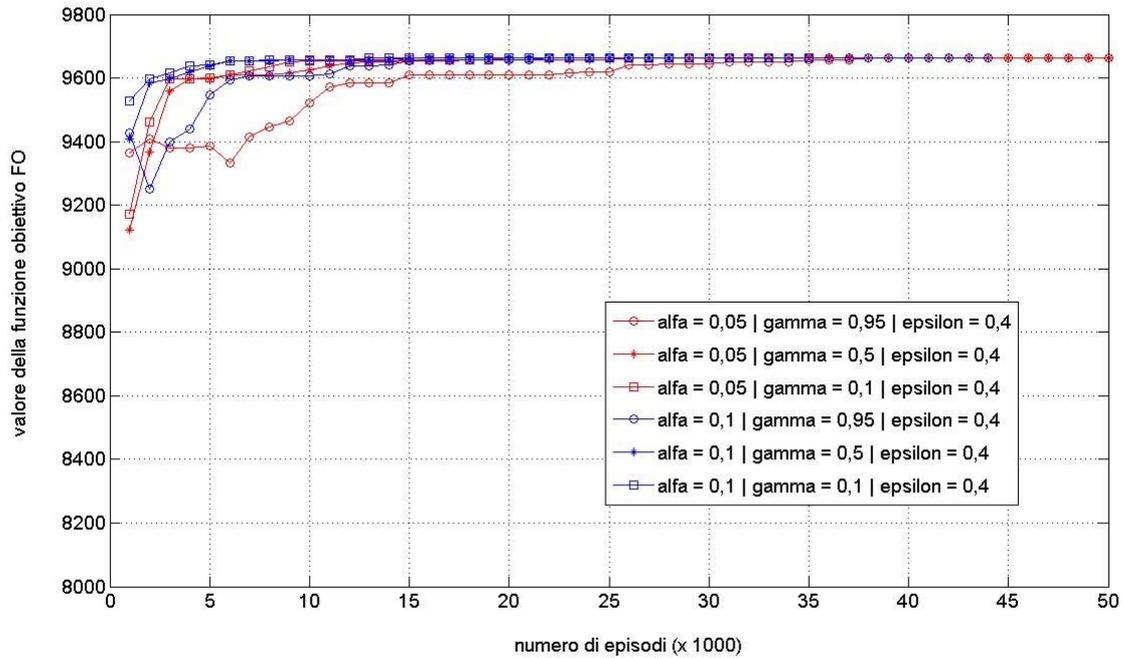


Figura 4.57 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2×5 per gli stati e 3×6 per le azioni): confronti dei risultati mostrati nelle figure 4.55 e 4.56

Interessante è inoltre l’analisi dei comportamenti di convergenza del modello per valori di α elevati (cioè $\geq 0,5$, visto che per $\alpha < 0,5$ i risultati conseguiti sono stati simili a quelli ottenuti per $\alpha = 0,1$). In particolare, nella successiva figura, sono riportati gli andamenti di FO per le combinazioni:

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,5 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,1 \quad \varepsilon = 0,4$$

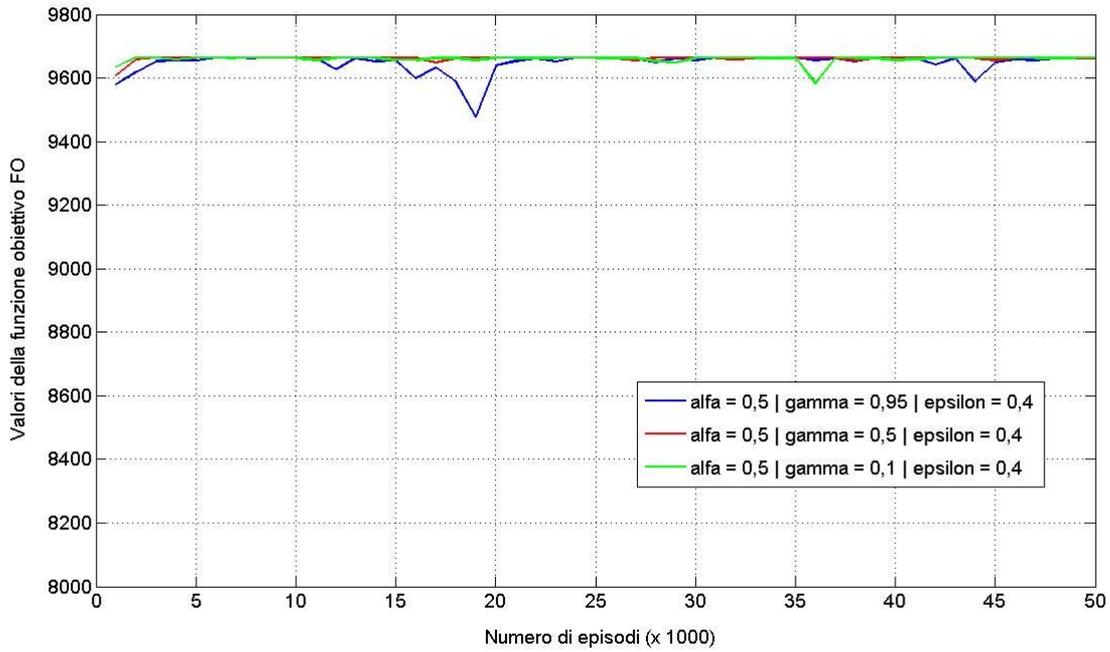


Figura 4.58 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni)

e per le combinazioni:

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,5 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,1 \quad \varepsilon = 0,4$$

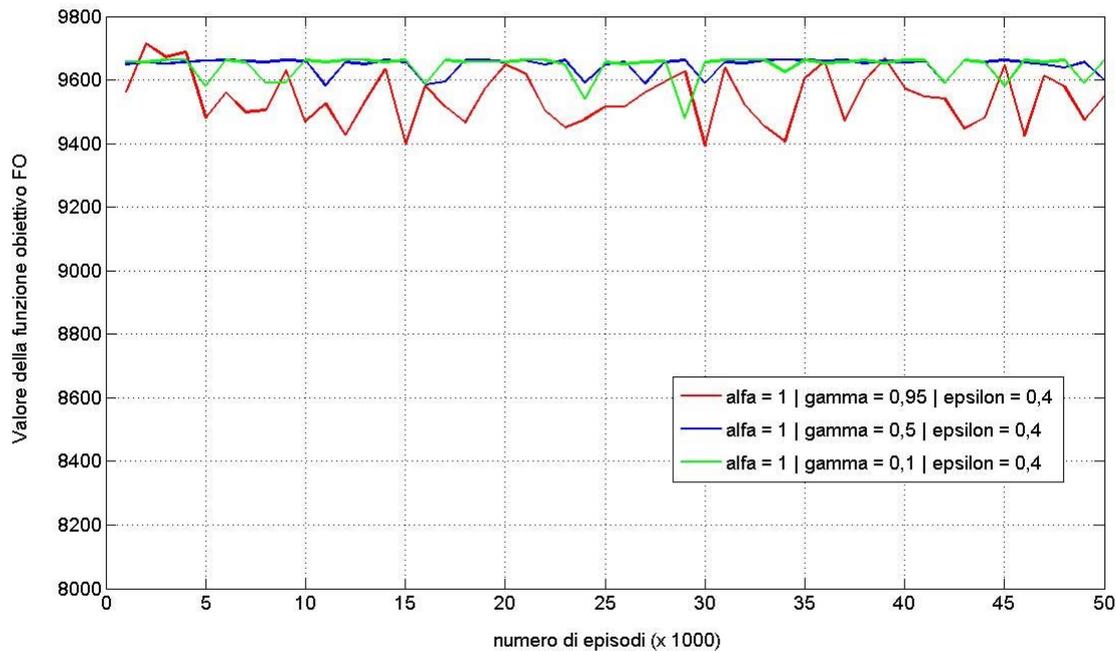


Figura 4.59 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell'algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2×5 per gli stati e 3×6 per le azioni)

In entrambi i grafici, l'analisi dell'andamento della FO non fa emergere un comportamento di graduale convergenza (come ottenuto con le precedenti simulazione per $\alpha < 0,5$) verso il valore finale 9.662,1, ma solo una continua oscillazione al di sotto di tale valore, oscillazione tanto più marcata quanto maggiore è il valore di γ . Si noti che il criterio di convergenza non è stato raggiunto da nessuna combinazione. Le simulazioni sono state quindi interrotte dopo 50.000 episodi.

La figura successiva, riportante il confronto tra i risultati ottenuti per $\alpha = 1$ (linee verdi) e $\alpha = 0,1$ (linee blu), esemplifica il concetto appena espresso:

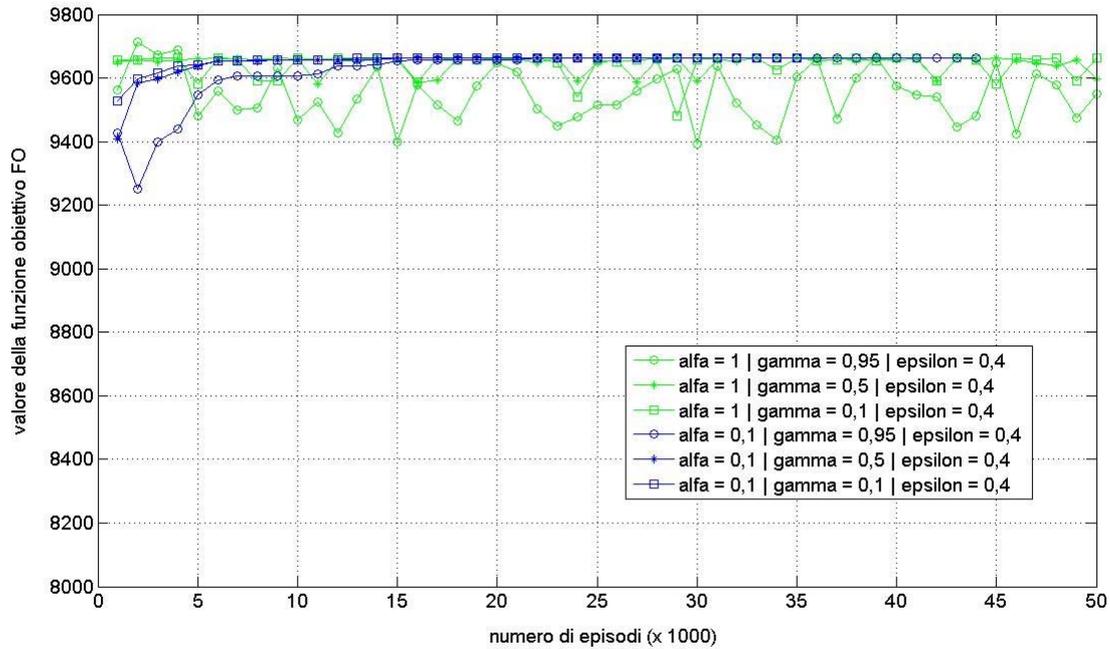


Figura 4.60 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2×5 per gli stati e 3×6 per le azioni): confronti dei risultati mostrati nelle figure 4.55 e 4.59

E’ stata infine testata la sensitività del modello QL implementato al sistema Ariamacina-Cecita-Mucone, rispetto al parametro ϵ .

La figura successiva riporta il confronto degli andamenti di FO al variare del numero di episodi, per le tre seguenti combinazioni:

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,95 \quad \epsilon = 0,95$$

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,95 \quad \epsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,95 \quad \epsilon = 0,1$$

cioè avendo fissato i parametri $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,95$ e facendo variare ϵ da 0,95 a 0,1:

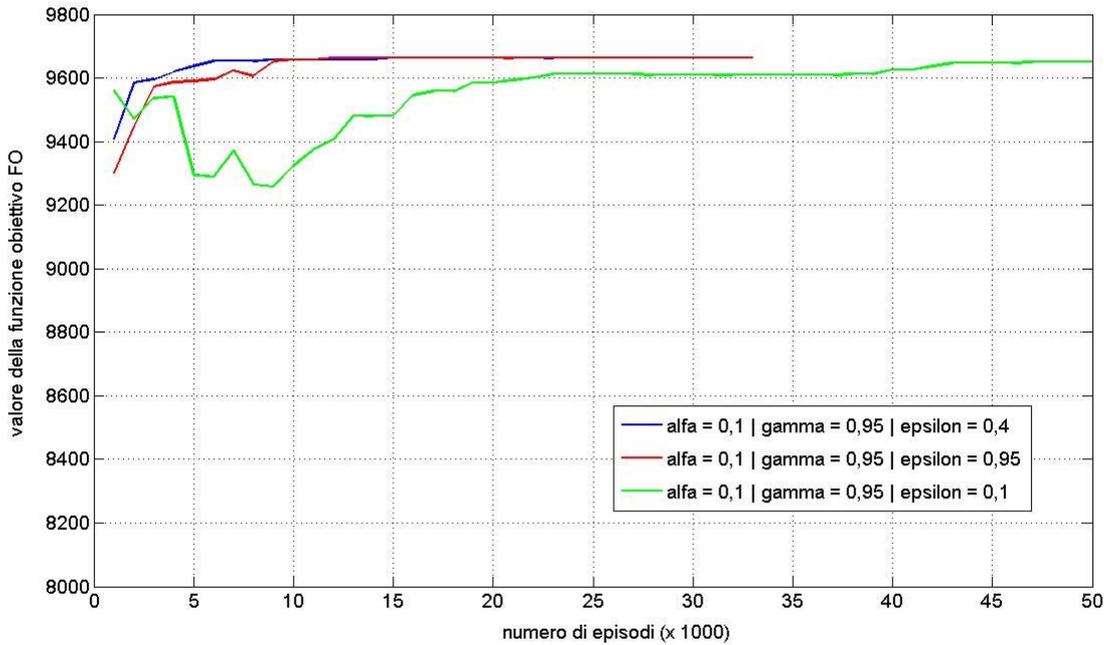


Figura 4.61 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni)

Si noti che per la combinazione $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,95$ $\varepsilon = 0,95$ l’algoritmo ha raggiunto il criterio di convergenza dopo un numero di episodi pari a 33.441 (tempo computazionale 2.240 sec), mentre la combinazione $\alpha = 0,1$ $\gamma = 0,95$ $\varepsilon = 0,1$ non ha raggiunto il criterio di convergenza: la simulazione, pertanto, è stata interrotta dopo 50.000 episodi.

Dall’esame della figura sopra riportata appare evidente la dipendenza da ε del comportamento di convergenza: in particolare valori molto bassi di ε (a cui corrispondono basse probabilità di scelta di azioni non *greedy* al passo C dell’algoritmo di implementazione del QL e per cui si privilegia, pertanto, lo sfruttamento (*exploitation*) della conoscenza già acquisita rispetto alla esplorazione (*exploration*) di nuove soluzioni) conducono a una convergenza molto più lenta.

Al fine di analizzare la sensitività del modello rispetto al parametro ε , si è scelto di verificare il comportamento di convergenza anche per altri valori di α e γ .

In particolare per le combinazioni:

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,95$$

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 0,5 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,1$$

si è ottenuto:

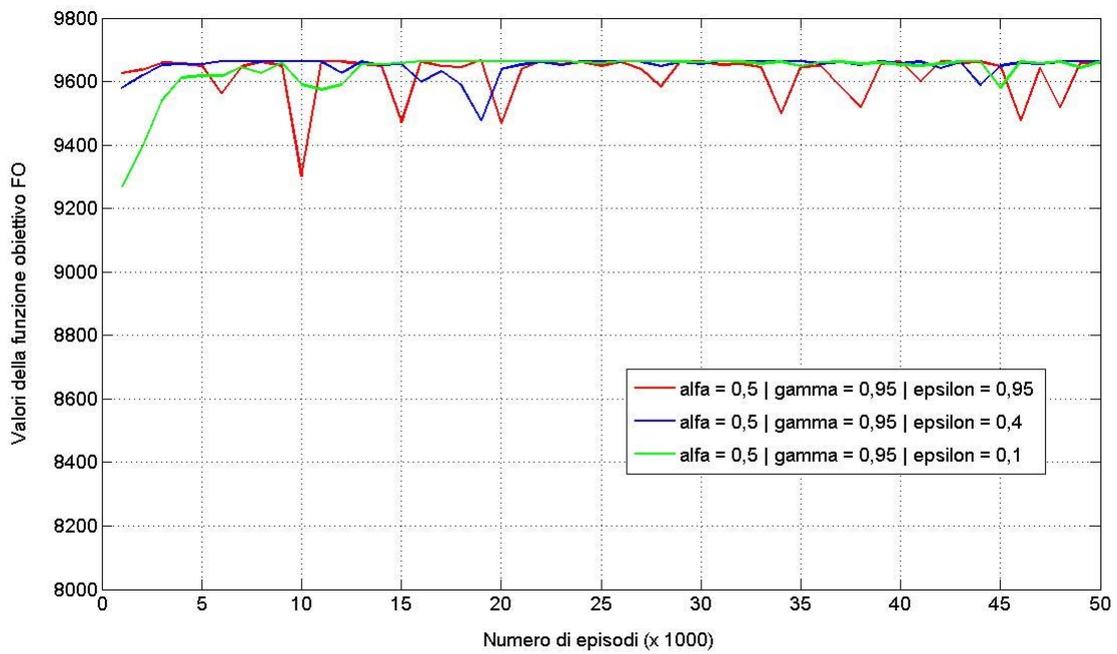


Figura 4.62 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell'algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni)

mentre per le combinazioni:

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,95$$

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4$$

$$\alpha = 1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,1$$

si è ottenuto:

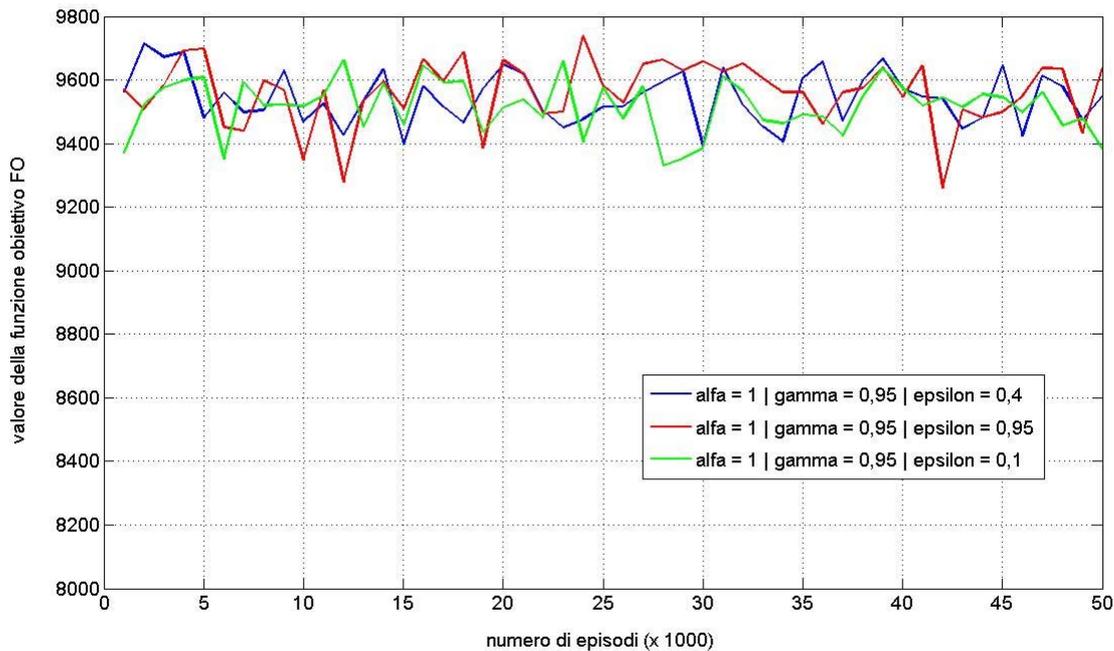


Figura 4.63 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi e dei valori dei parametri dell’algoritmo QL (per bassi livelli di discretizzazione: 2 x 5 per gli stati e 3 x 6 per le azioni)

In entrambi i casi la dipendenza del comportamento di convergenza di QL rispetto al parametro ε appare molto meno importante rispetto ai casi precedenti.

Dopo la fase di “training” con discretizzazioni “rough” di stati ed azioni appena esposta, si è quindi deciso di applicare l’algoritmo QL a un livello di discretizzazione più fine, cioè [3 x 20] per gli stati e [10 x 15] per le azioni.

Come dati di input (deflussi mensili e temperature medie mensili) del modello di ottimizzazione in esame si è scelta la prima serie di dati trentennali generata stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4.

Lo stato iniziale del sistema è stato fissato imponendo entrambi gli invasi alla quota di massima regolazione.

A questo punto è stato implementato l’algoritmo di ottimizzazione QL con diverse combinazioni dei valori dei parametri intrinseci α , γ , ε .

Al pari del caso precedente di discretizzazione “rough”, e in coerenza con le considerazioni riportate nel paragrafo 3.8.1, i migliori comportamenti di convergenza sono stati ottenuti per valori di α inferiori o eguali a 0,5 (in particolare per $\alpha = 0,1$), ma non è stata mai raggiunta (neanche per un numero di episodi elevatissimo) la condizione di stazionarietà delle azioni ottime a_t^* . D’altra

parte, l'algoritmo ha mostrato un comportamento tendenzialmente convergente nei termini e nei modi specificati nell'immediato prosieguo.

L'algoritmo di ottimizzazione QL è stato implementato con valori dei parametri intrinseci pari a:

$$\{\alpha = 0,1 \quad \gamma = 0,95 \quad \varepsilon = 0,4\}$$

e per un numero di episodi pari a $5 \cdot 10^6$ (si ricorda che ciascun episodio comporta la simulazione del sistema per un periodo di 30 anni; di conseguenza, per ogni episodio considerato, la generica matrice $Q_t(s,a)$ riferita al mese t (con $t = 1, 2, \dots, 12$) è aggiornata 30 volte; un numero di episodi pari a $5 \cdot 10^6$ implica, pertanto, che ciascuna delle 12 matrici $Q_t(s,a)$ venga aggiornata $150 \cdot 10^6$ volte).

Al fine di verificare eventuali comportamenti di tendenziale convergenza dell'algoritmo, si è stabilito di applicare, ogni 1000 episodi simulati, la stima $a_t^*(k)$ della policy ottima ottenuta sino a all'episodio k , alla prima serie generata stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4, ottenendo un valore di FO complessiva (con w_1 e w_2 fissati pari a 1), $FO1$ e $FO2$.

Al termine della simulazione sono stati ricavati tre grafici ciascuno mostrante l'andamento della funzione obiettivo complessiva FO e delle funzioni obiettivo "parziali" $FO1$ e $FO2$ al variare del numero di episodi.

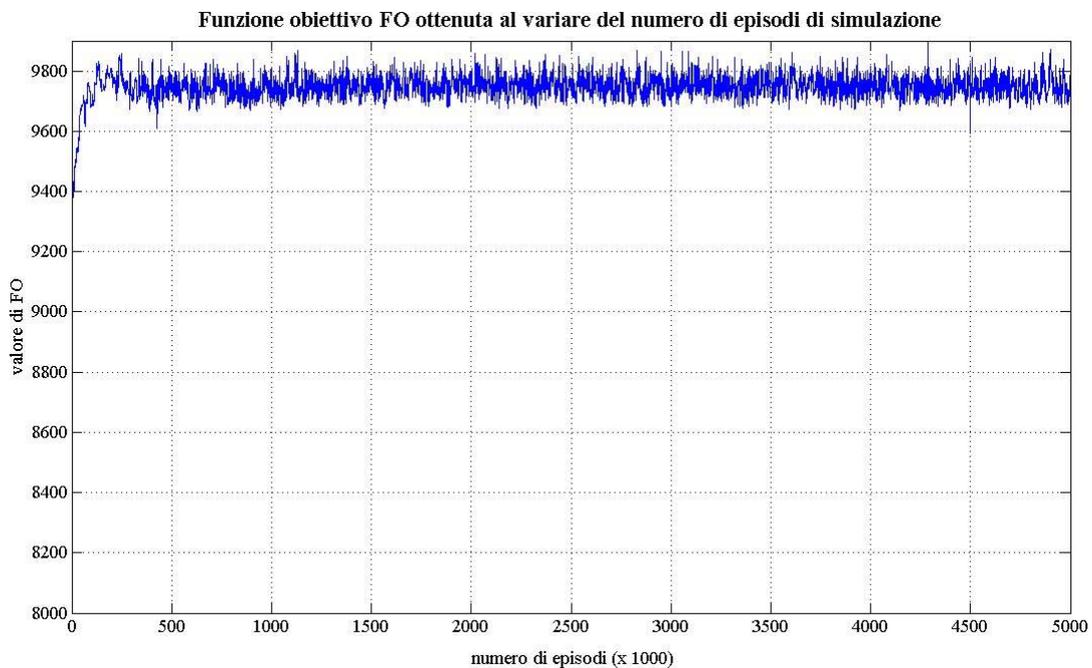


Figura 4.64 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1, w_2=1, s=1$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

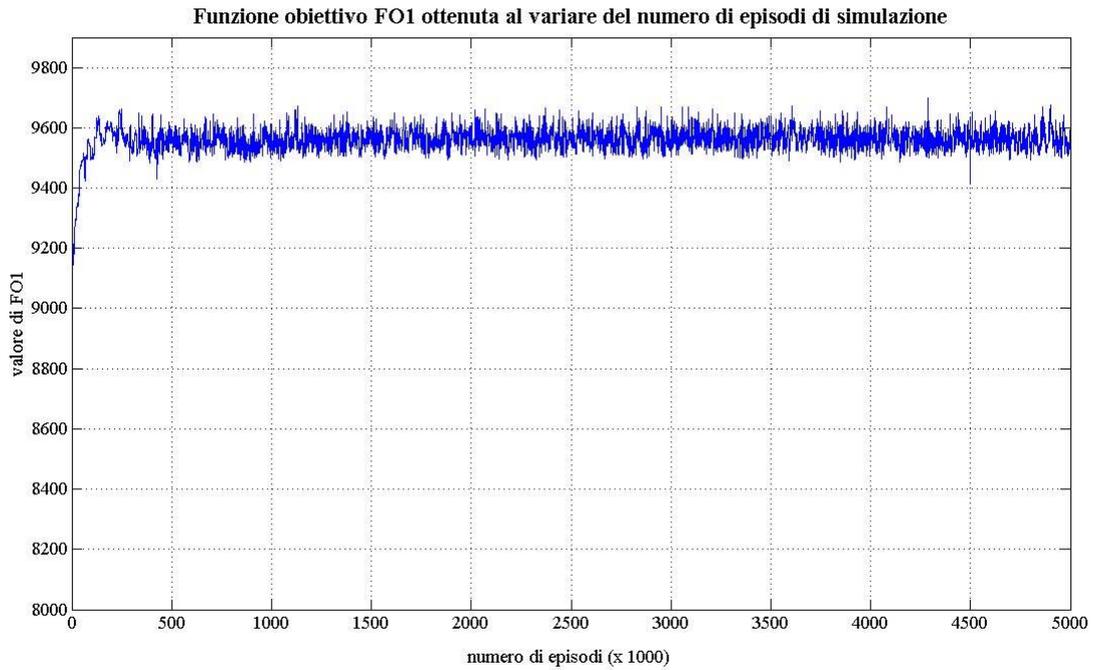


Figura 4.65 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 1$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

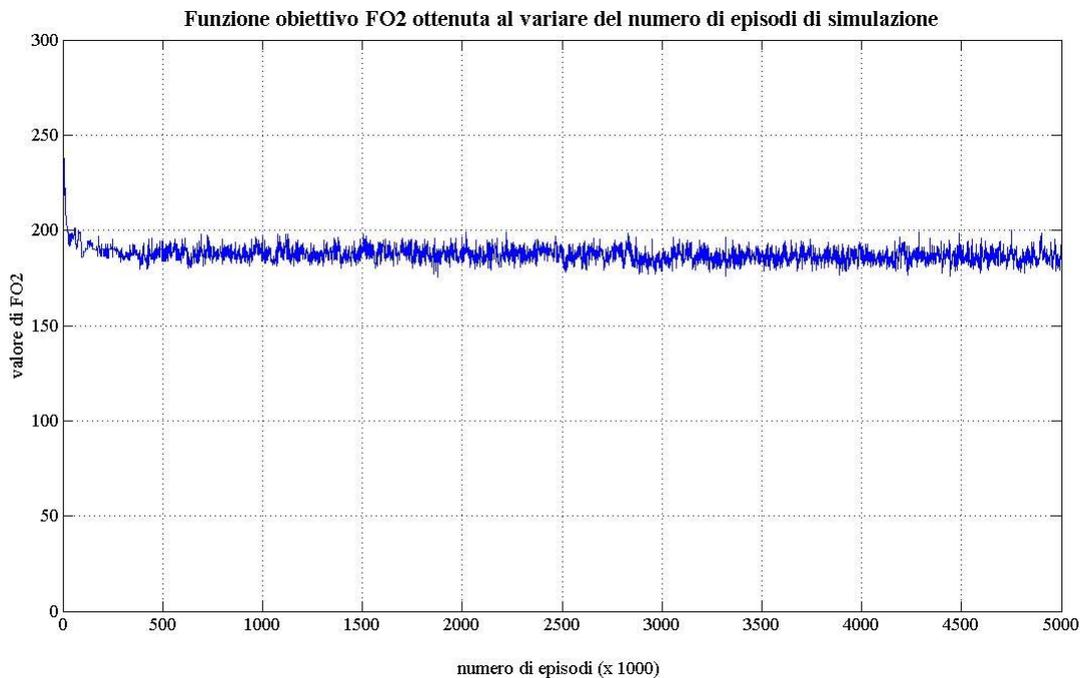


Figura 4.66 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 1$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

Come può osservarsi dalla figure sopra riportate l'algoritmo QL, pur non convergendo verso valori stazionari delle azioni ottime a_t^* , al di là di un certo numero di episodi (all'incirca $0,5 \cdot 10^6$) genera

azioni ottime ancora variabili da episodio a episodio ma tali che, applicate alla prima serie di dati trentennali generate stocasticamente secondo quanto riportato nel paragrafo 4.4, producano valori delle FO , $FO1$ e $FO2$ che oscillano lievemente intorno a medie stabili e ben definite.

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO , $FO1$ e $FO2$ (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9561,30$$

$$FO2 = 186,10$$

$$FO = 9747,40$$

4.6.3.1 Generazione delle soluzioni non-dominate e scelta della soluzione di preferenza

Per la generazione delle soluzioni non dominate è stato applicato il metodo delle funzioni aggregate esposto nei suoi lineamenti teorici nel paragrafo 3.10.1.1.

Sono state quindi eseguite, per la prima serie trentennale di deflussi e temperature mensili generata stocasticamente secondo quanto esposto nel paragrafo 4.4, diverse simulazioni per differenti valori assunti dall'esponente s della funzione da ottimizzare (formula 3.127, di seguito riportata per comodità d'esposizione):

$$u(f) = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot f_i(\mathbf{x})^s \quad (3.127)$$

avendo fissato i valori $w_1 = w_2 = 1$ (si noti che nessun'altra generazione di punti ottimi secondo Pareto si è verificata variando, a parità di s , i valori dei pesi w_i).

In particolare sono stati considerati i seguenti valori dell'esponente s :

$s = 1$ (simulazione i cui risultati sono stati mostrati nel precedente paragrafo);

$s = 25$

$s = 35$

$s = 50$

$s = 75$

$s = 100$

$s = 125$

$s = 150$

Per ciascuna di queste simulazioni, nel prosieguo sono riportati i grafici dei valori delle funzioni obiettivo al variare del numero di episodi di simulazione, in maniera analoga al caso $s = 1$ mostrato nel paragrafo precedente.

Simulazione per $s = 25$

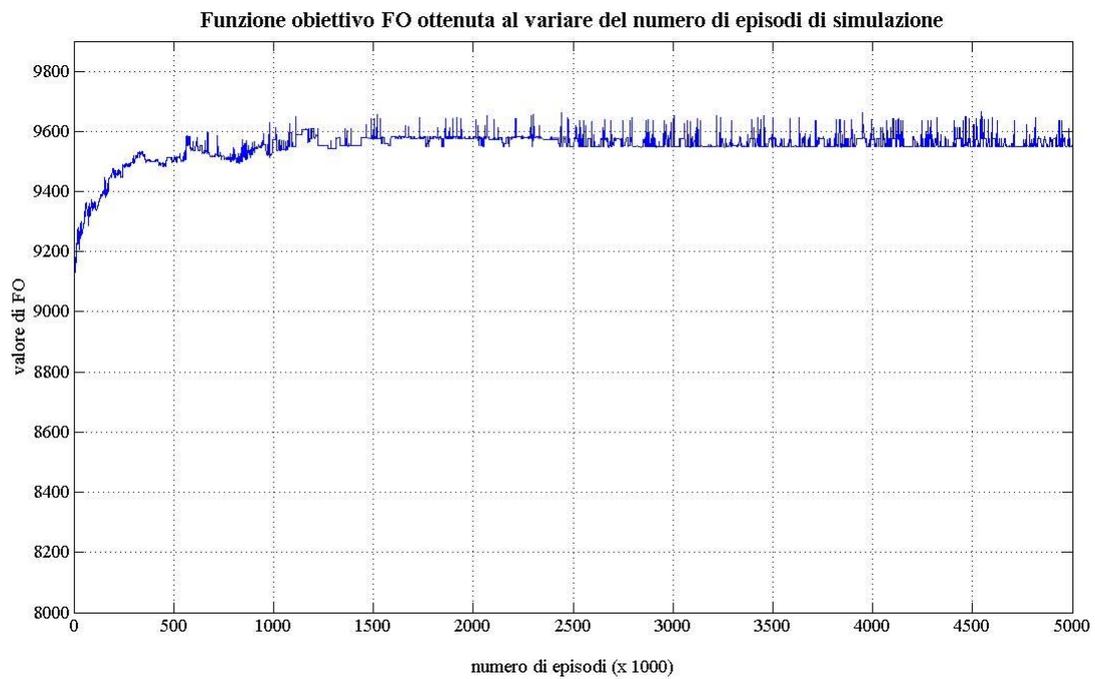


Figura 4.67 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 25$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

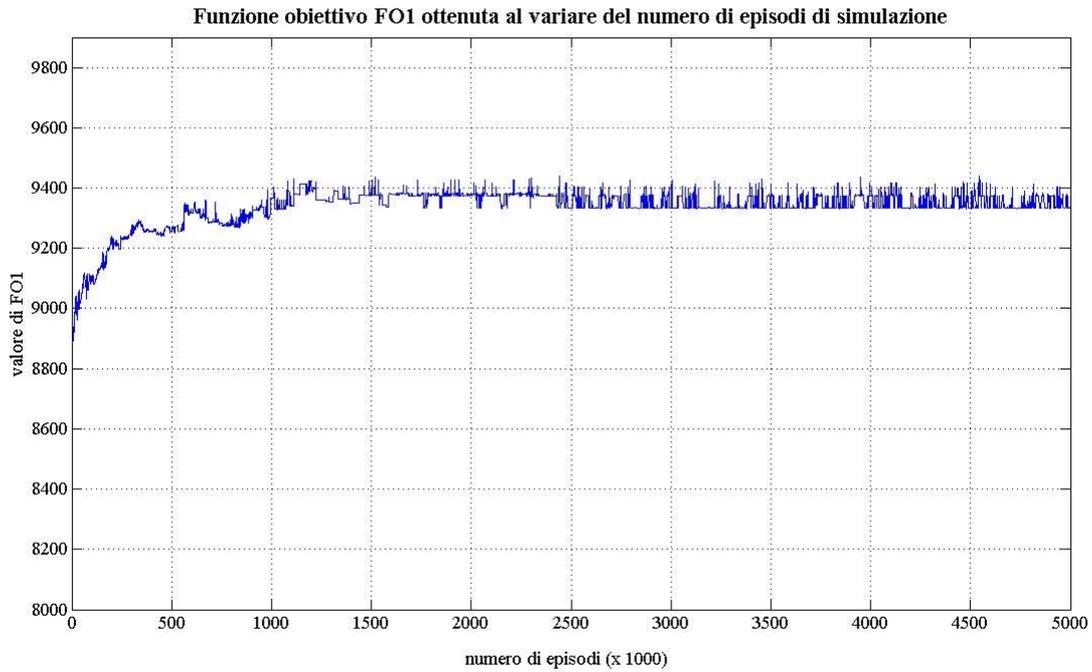


Figura 4.68 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 25$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

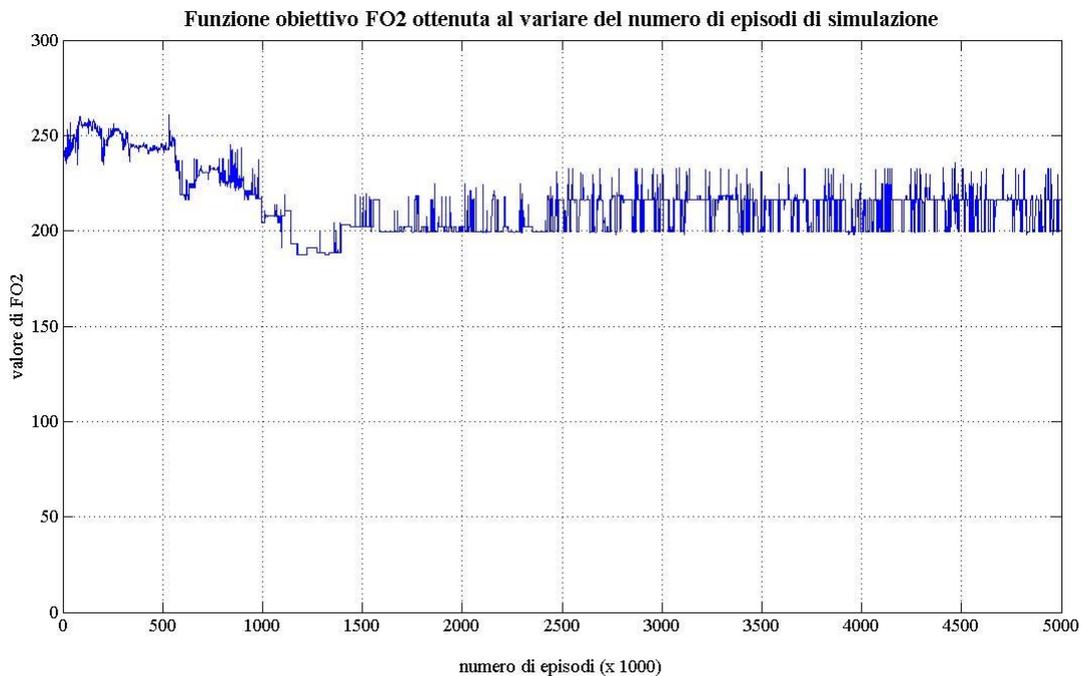


Figura 4.69 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 25$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9349,60$$

$$FO2 = 212,40$$

$$FO = 9562,00$$

Simulazione per $s = 35$

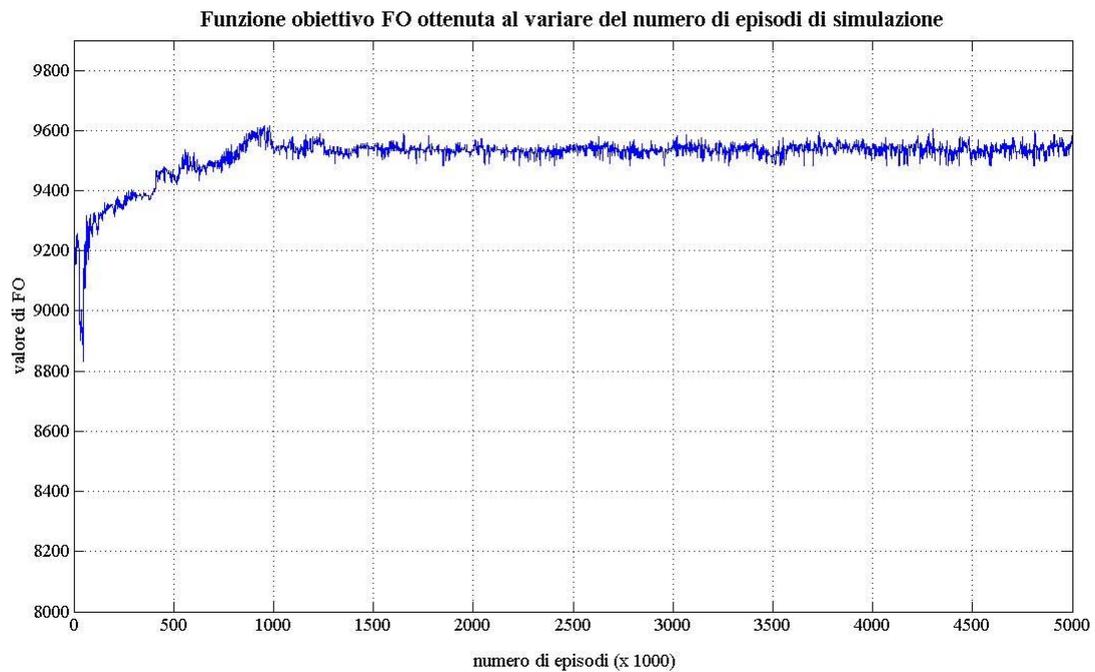


Figura 4.70 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 35$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

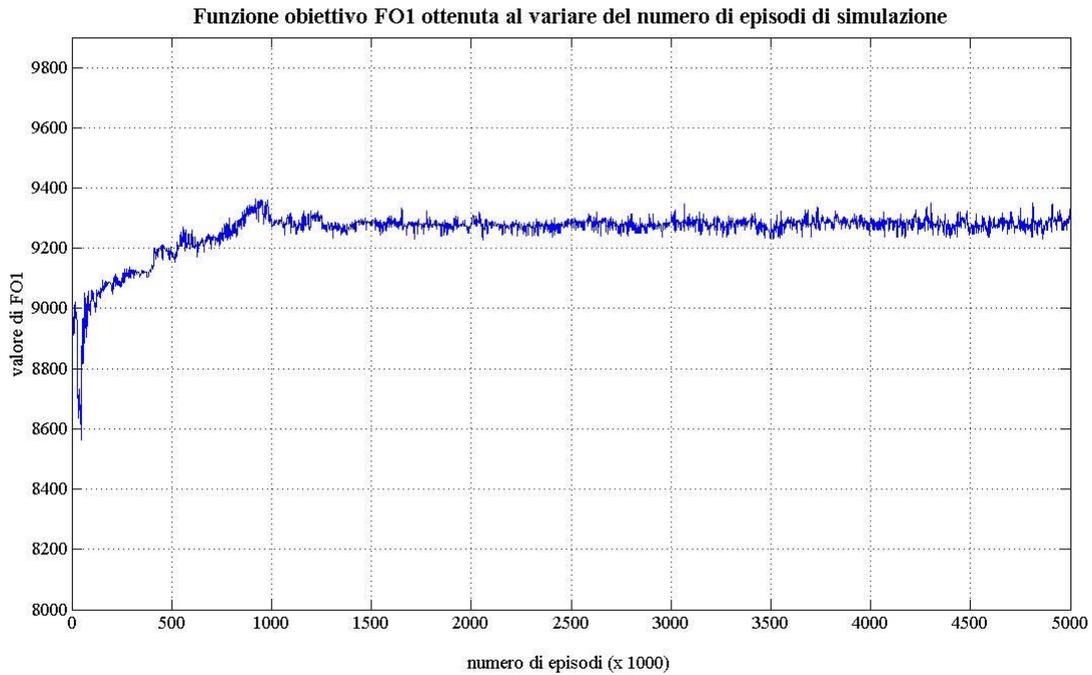


Figura 4.71 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 35$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

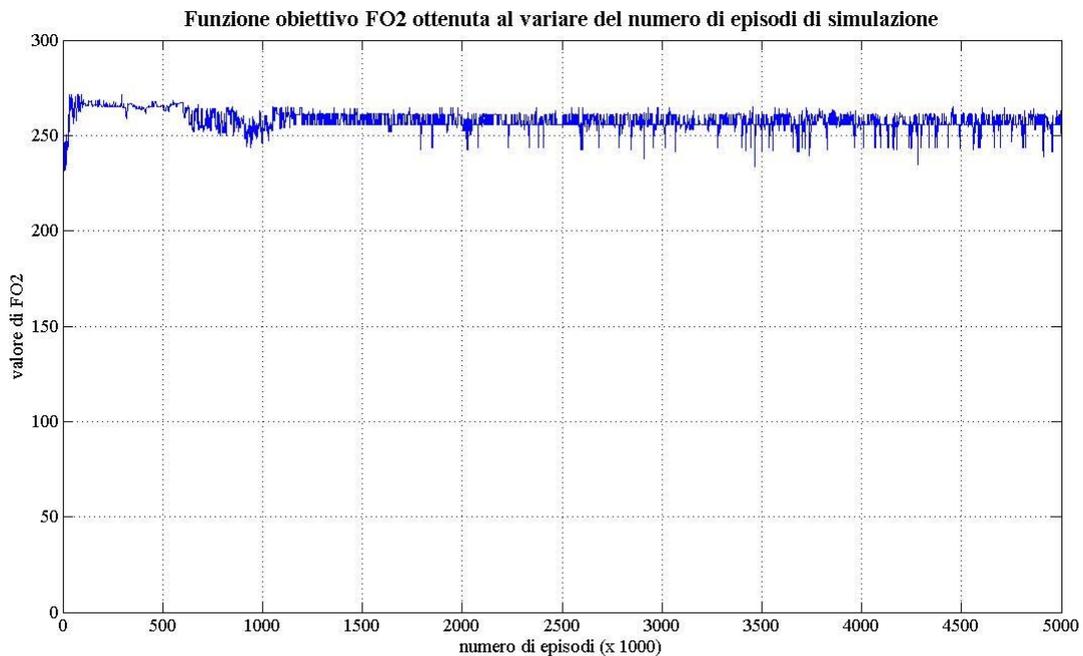


Figura 4.72 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 35$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9280,50$$

$$FO2 = 256,49$$

$$FO = 9537,00$$

Simulazione per $s = 50$

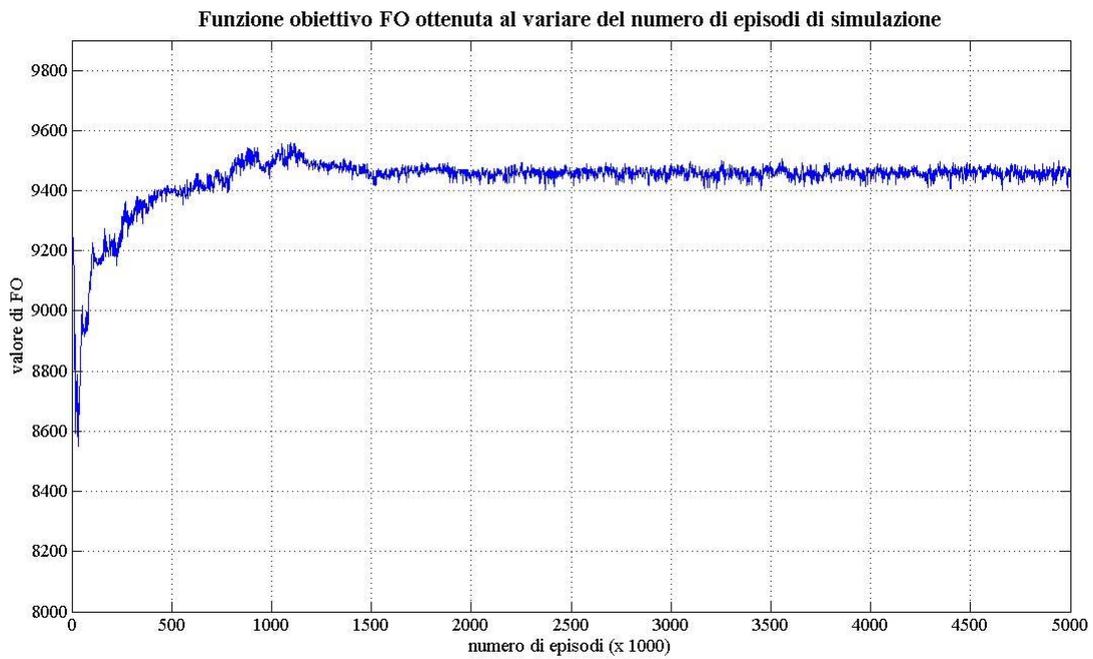


Figura 4.73 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 50$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

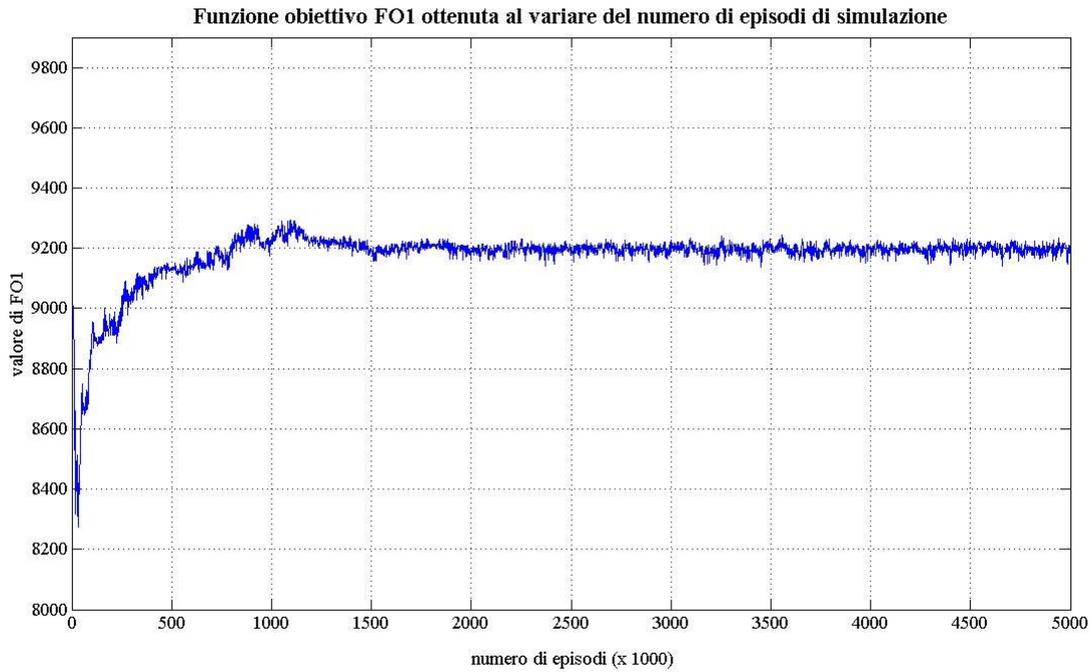


Figura 4.74 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 50$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

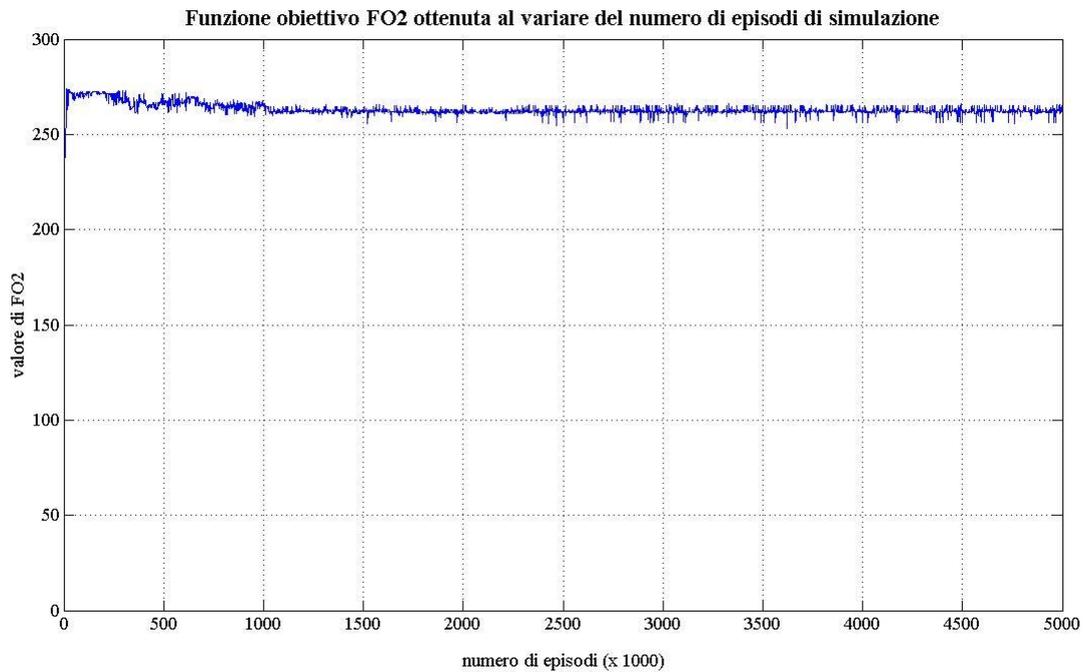


Figura 4.75 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 50$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9197,30$$

$$FO2 = 262,23$$

$$FO = 9459,50$$

Simulazione per $s = 75$

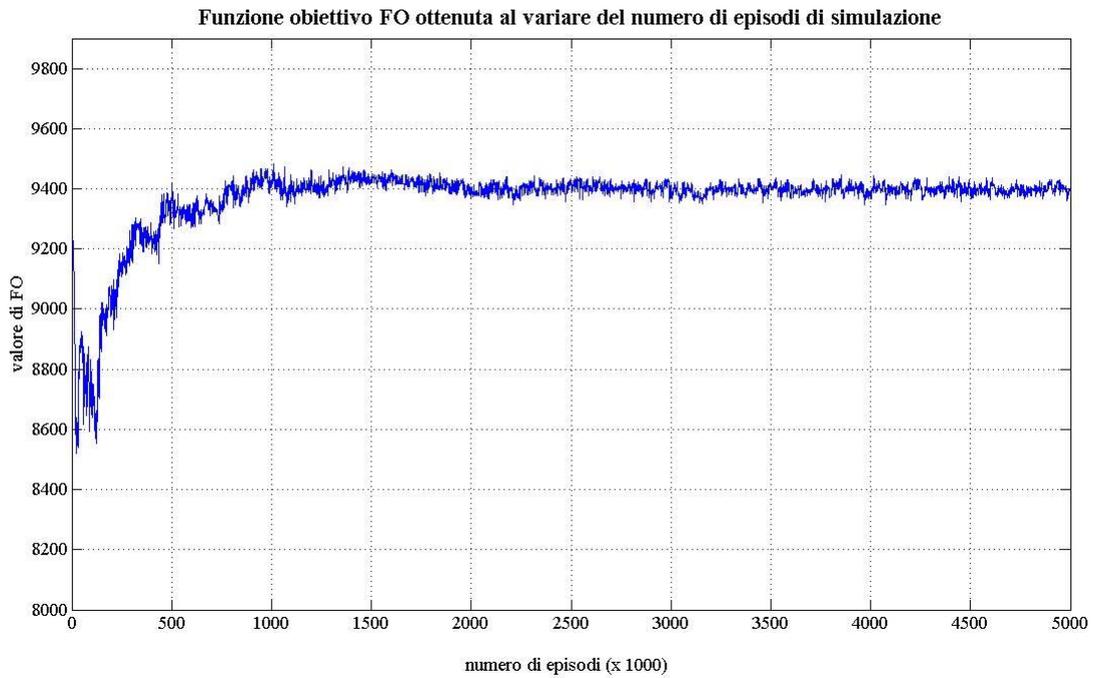


Figura 4.76 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 75$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

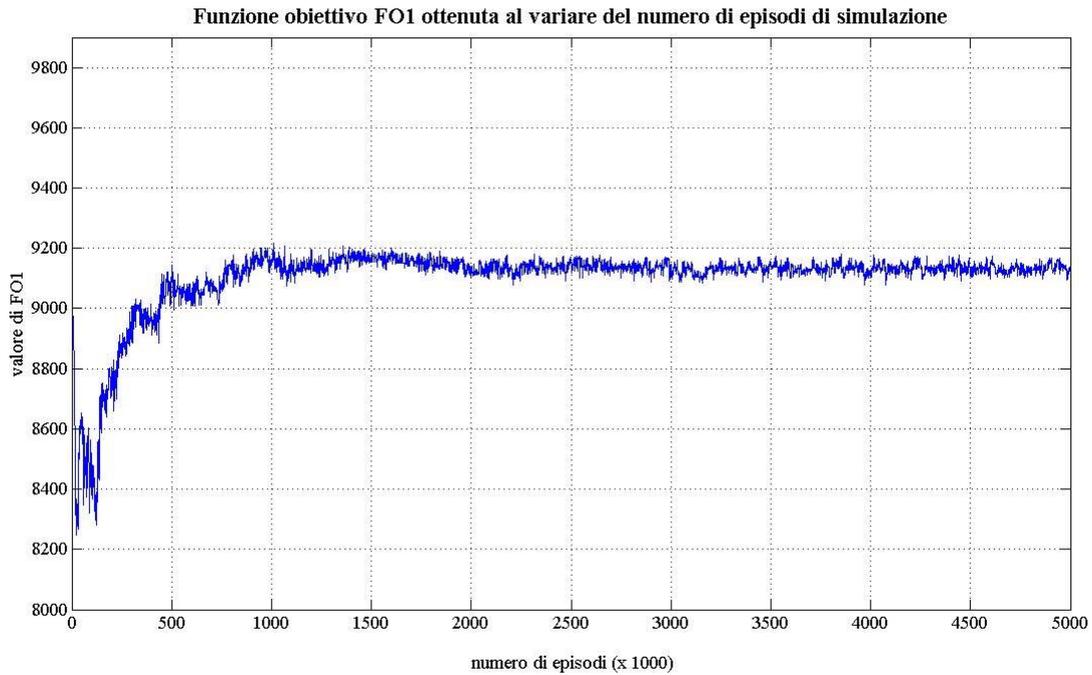


Figura 4.77 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 75$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

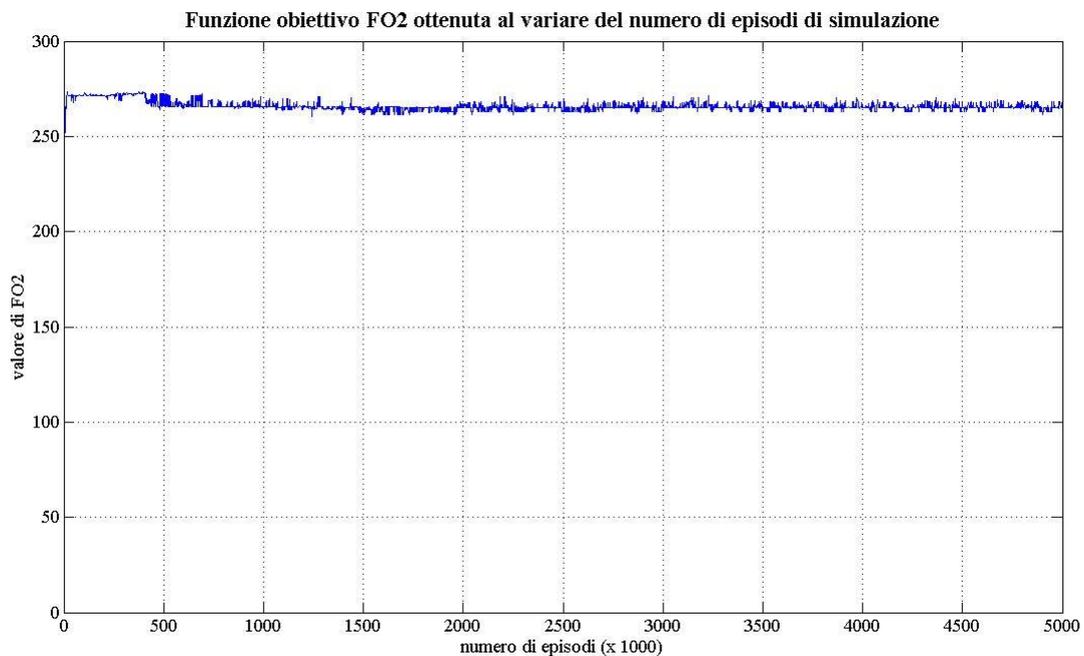


Figura 4.78 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 75$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9133,40$$

$$FO2 = 265,35$$

$$FO = 9398,80$$

Simulazione per $s = 100$

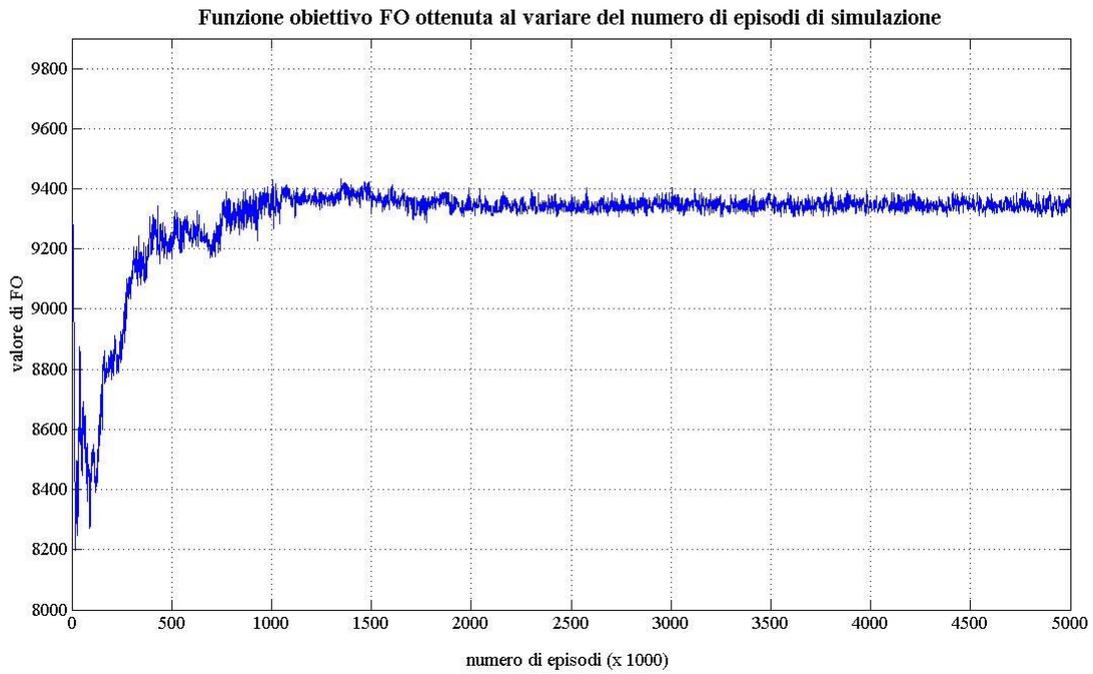


Figura 4.79 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 100$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

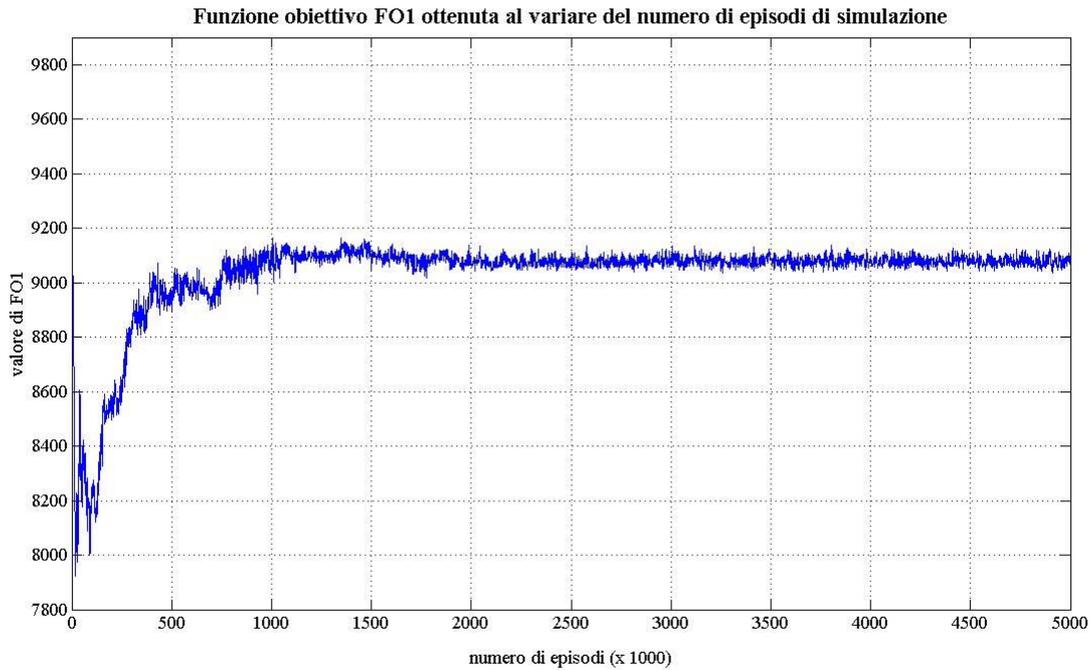


Figura 4.80 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 100$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

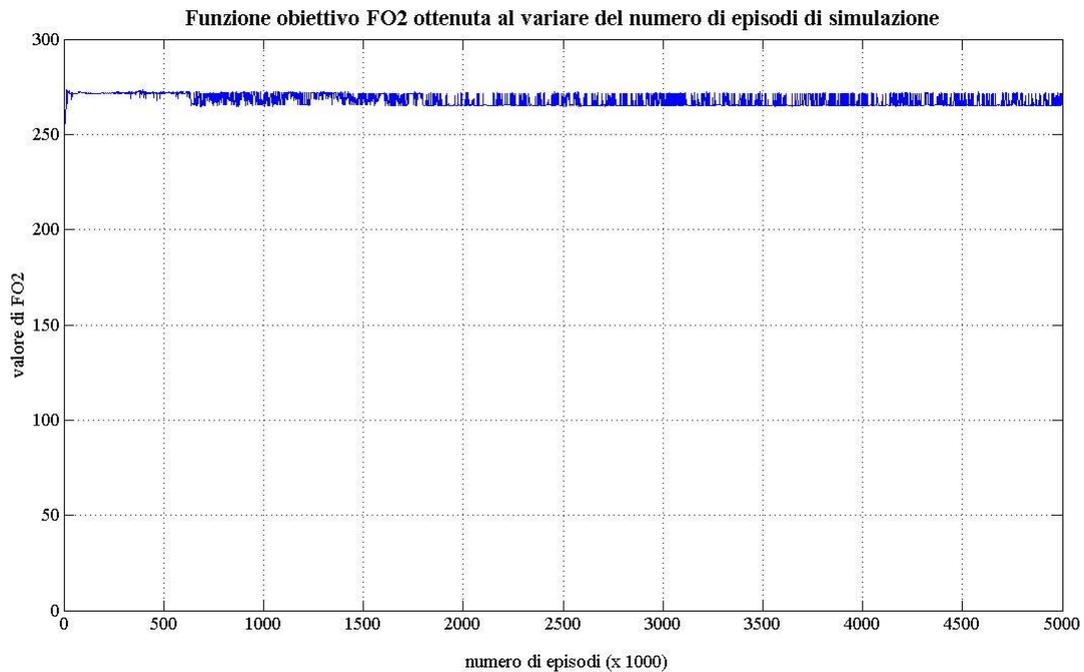


Figura 4.81 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 100$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9078,3$$

$$FO2 = 266,75$$

$$FO = 9345,00$$

Simulazione per $s = 125$

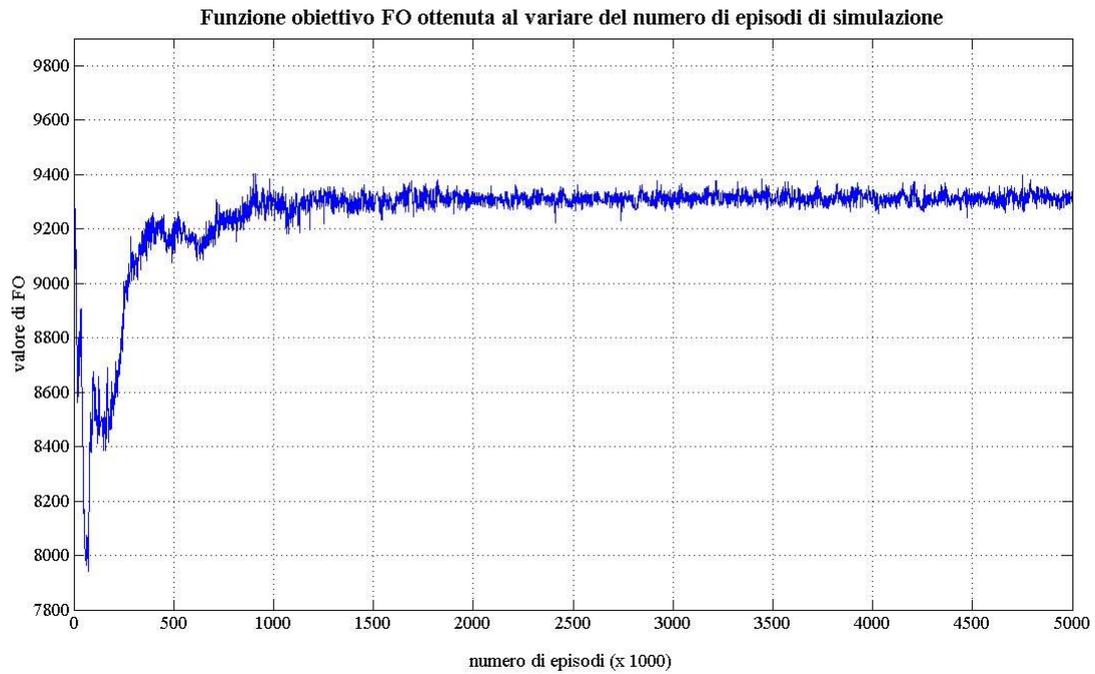


Figura 4.82 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 125$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

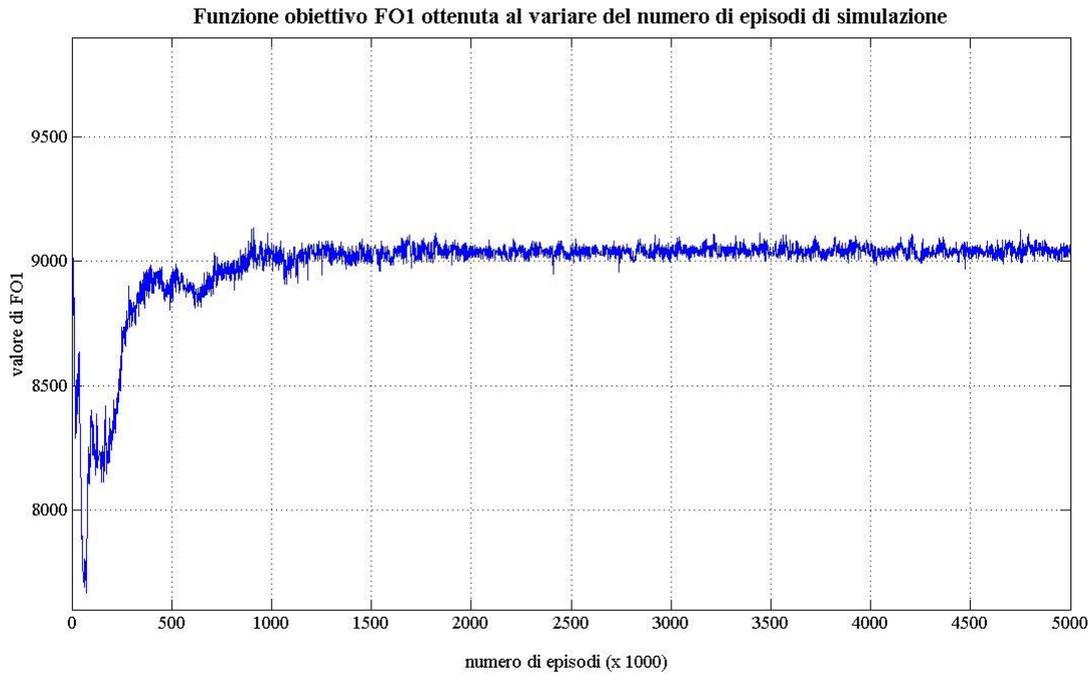


Figura 4.83 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 125$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

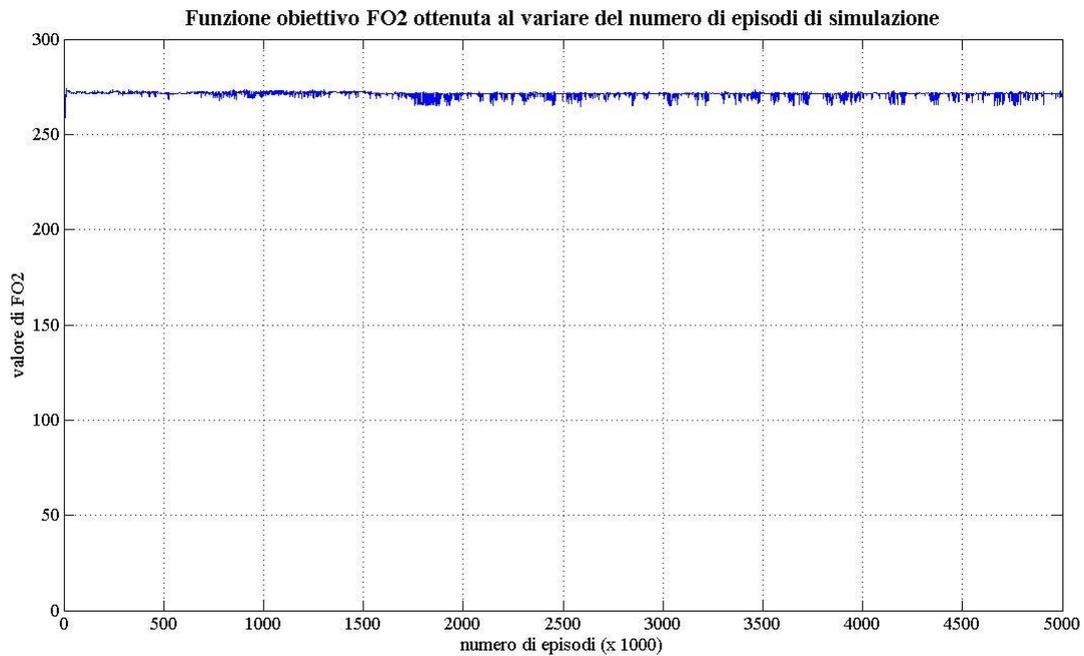


Figura 4.84 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 125$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 9041,3$$

$$FO2 = 271,00$$

$$FO = 9312,3$$

Simulazione per $s = 150$

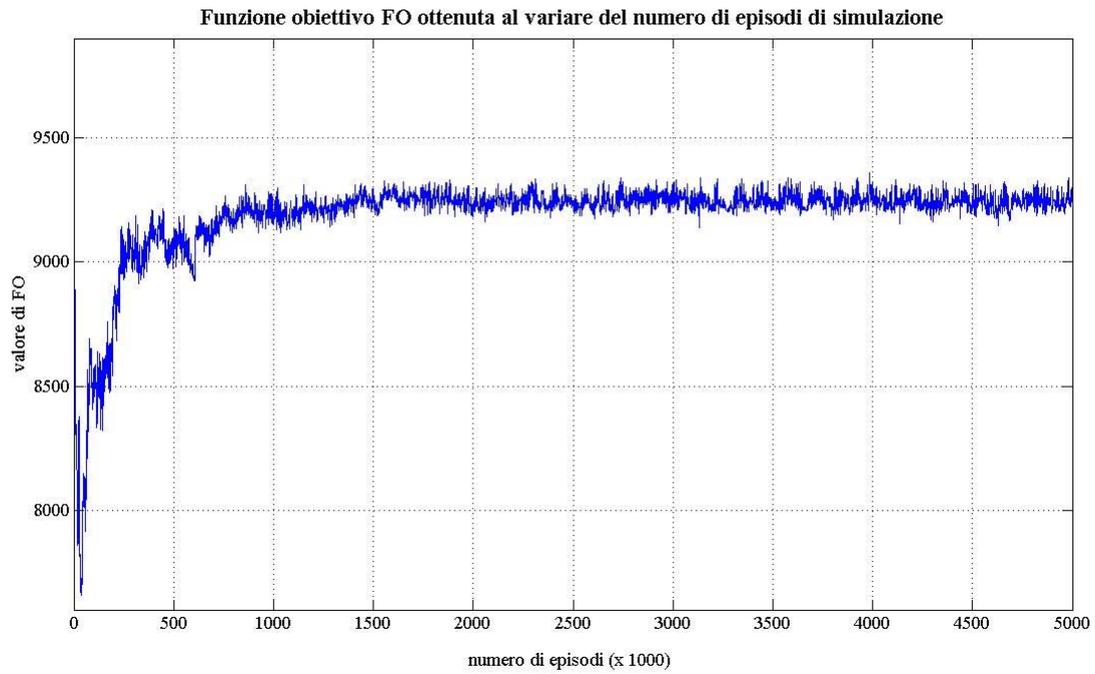


Figura 4.85 – Andamento della funzione obiettivo FO al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 150$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

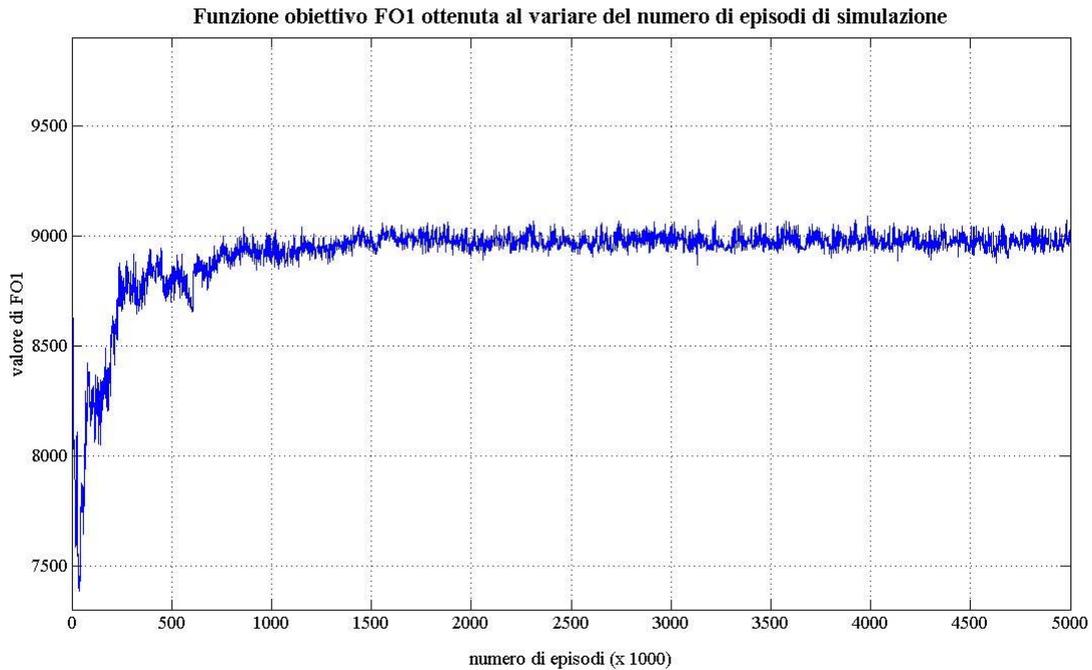


Figura 4.86 – Andamento della funzione obiettivo FO1 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 150$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

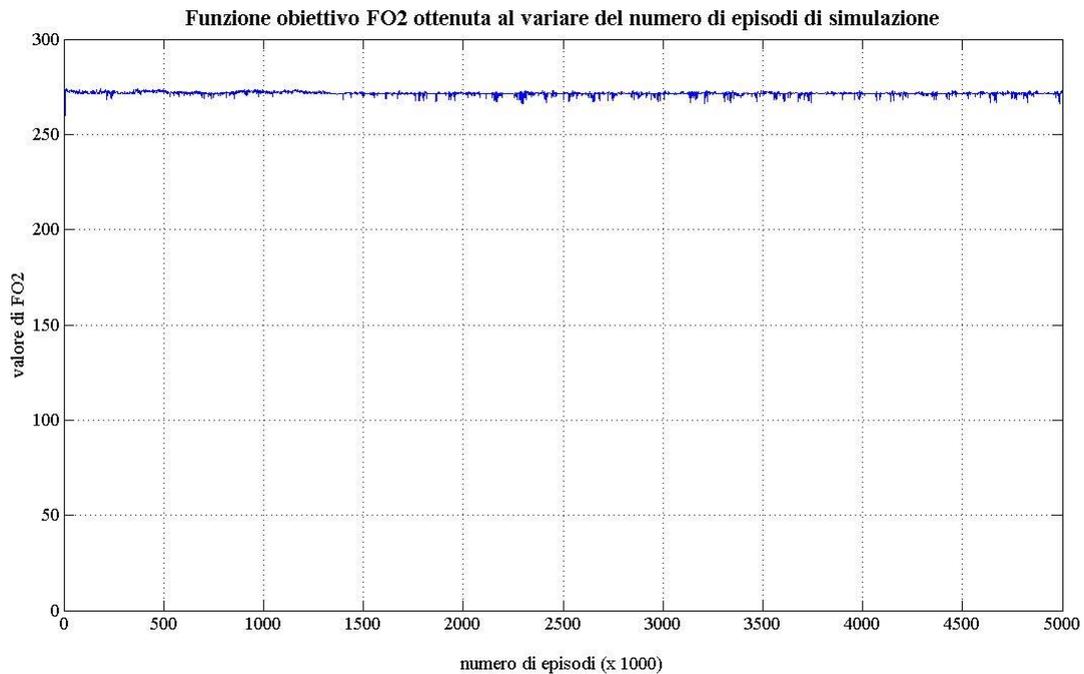


Figura 4.87 – Andamento della funzione obiettivo FO2 al variare del numero di episodi per algoritmo QL (per $w_1=1$, $w_2 = 1$, $s = 150$ e per livelli di discretizzazione pari a 3×20 per gli stati e 10×15 per le azioni)

In particolare considerando le medie degli ultimi 1000 valori di FO, FO1 e FO2 (cioè le medie dei valori delle tre funzioni obiettivo ottenuti negli episodi n° 4.001.000, 4.002.000, 4.003.000, ..., 4.999.000, 5.000.000) si ha:

$$FO1 = 8971,9$$

$$FO2 = 271,45$$

$$FO = 9243,3$$

I risultati appena esposti sono sintetizzati nella successiva tabella:

<i>s</i>	<i>FO1</i>	<i>FO2</i>
1	9561,30	186,10
25	9349,60	212,40
35	9280,50	256,49
50	9197,30	262,23
75	9133,40	265,35
100	9078,3	266,75
125	9041,3	271,00
150	8971,9	271,45

*Tabella 4.15 – Risultati dell'applicazione del metodo della funzioni aggregate A.O.F.
(ottimizzazione mediante approccio E.S.O. basato su QL)*

e nel successivo grafico riportante la frontiera di Pareto così ottenuta:

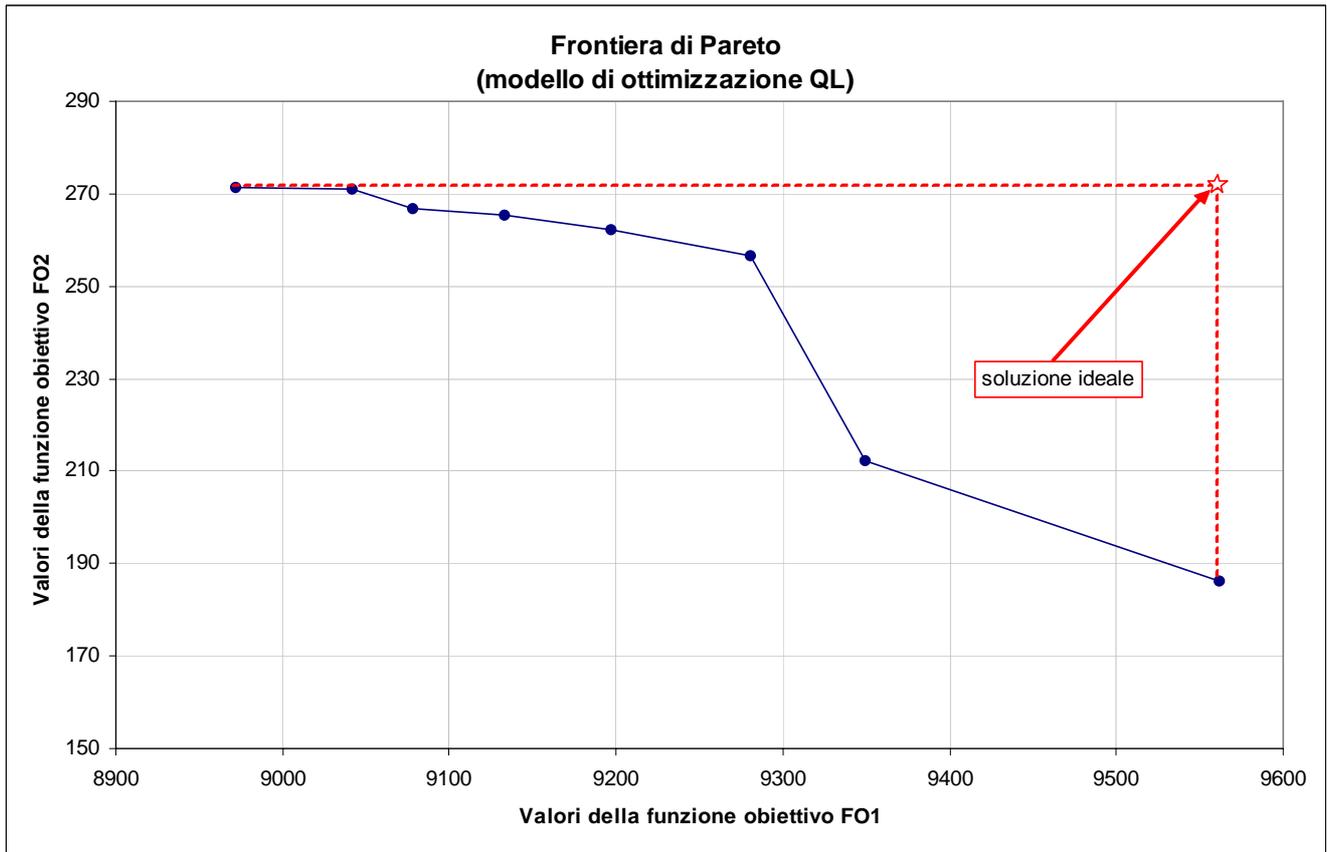


Figura 4.88 – Frontiera di Pareto per ottimizzazione con approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL

Nella figura è inoltre rappresentata la soluzione ideale, mediante il simbolo grafico della stella rossa.

A questo punto si pone il problema della scelta della soluzione ottima fra quelle presenti sulla frontiera di Pareto.

Esistono diversi metodi per la scelta della migliore soluzione. In questa sede si è scelto di applicare la Compromise Programming la quale identifica la soluzione non-dominata più vicina a quella ideale usando varie norme o metriche pesate L^p (Zeleny, 1974).

La sua formulazione è:

$$\min \sum_{i=1}^{n_{ob}} k_i^p \cdot \left(\frac{FO_i^* - FO_i}{FO_i^* - FO_i^{**}} \right)^p \quad (4.88)$$

dove:

- p è l’esponente della norma L^p ($1 \leq p \leq \infty$);

- n_{ob} è il numero di obiettivi da considerare;
- k_i sono i pesi con cui attribuire maggiore o minore importanza all' i -esimo obiettivo;
- FO_i^* è la soluzione ideale dell' i -esimo obiettivo (valore massimo dell' i -esimo obiettivo);
- FO_i^{**} è il valore minimo dell' i -esimo obiettivo;

Nel caso in esame la formula (4.88) è stata applicata per valori di $p = 1$ e $p = 2$ e per i differenti valori dell'esponente s . Le tabelle seguenti mostrano i risultati ottenuti in termini del valore della funzione espressa in (4.88).

In rosso si indicano le soluzioni a cui corrispondono i valori minimi della (4.88).

$p = 1$	k_1	k_2												
s	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
1	0,00		0,10		0,25		0,50		0,75		0,90		1,00	
25	0,39		0,41		0,43		0,48		0,53		0,56		0,58	
35	0,39		0,37		0,34		0,29		0,25		0,22		0,20	
50	0,53		0,49		0,42		0,32		0,22		0,15		0,11	
75	0,63		0,57		0,49		0,35		0,21		0,13		0,08	
100	0,75		0,68		0,57		0,39		0,22		0,11		0,04	
125	0,82		0,74		0,62		0,42		0,21		0,09		0,01	
150	1,00		0,90		0,75		0,50		0,25		0,10		0,00	

$p = 2$	k_1	k_2												
s	1	0	0,9	0,1	0,75	0,25	0,5	0,5	0,25	0,75	0,1	0,9	0	1
1	0,00		0,01		0,06		0,25		0,56		0,81		1,00	
25	0,15		0,12		0,11		0,12		0,20		0,27		0,33	
35	0,15		0,12		0,09		0,05		0,03		0,03		0,04	
50	0,28		0,23		0,16		0,07		0,02		0,01		0,01	
75	0,40		0,32		0,22		0,10		0,03		0,01		0,01	
100	0,56		0,46		0,32		0,14		0,04		0,01		0,00	
125	0,68		0,55		0,38		0,17		0,04		0,01		0,00	
150	1,00		0,81		0,56		0,25		0,06		0,01		0,00	

Tabella 4.16 – Risultati dell'applicazione della "Compromise Programming"
(ottimizzazione mediante approccio E.S.O. basato su QL)

Come si può osservare dall'analisi dei risultati delle tabelle precedenti, attribuendo uguale importanza all'obiettivo idroelettrico rispetto a quello irriguo (cioè $k_1 = k_2$), sia considerando $p = 1$ e $p = 2$, le soluzioni non dominate migliori sono quelle ottenute per valori di s pari a 35.

Alla luce di questi risultati si sceglie la soluzione ottima ottenuta per:

$$s = 35, w_1 = 1, w_2 = 1$$

4.6.3.2 Gestione operativa ottimale

Come anticipato nel paragrafo 3.8, l'algoritmo QL genera direttamente le 12 *action value function* ottime

$$Q_{\text{gennaio}}(s,a)$$

$$Q_{\text{febbraio}}(s,a)$$

....

$$Q_{\text{dicembre}}(s,a)$$

mediante le quali è possibile dedurre la *policy* ottima che massimizza la funzione obiettivo FO: come anticipato questa *policy* è quella che, posti, in un generico mese t , nello stato s , sceglie di effettuare l'azione $a_t^*(s)$ tale che:

$$a_t^*(s) = \underset{a_t}{\operatorname{arg\,max}} [Q_t(s,a)] \quad (4.94)$$

Le figure successive mostrano le 12 *policy* ottime per l'invaso di Ariamacina e Cecita, ottenute, come ampiamente discusso nel paragrafo precedente, per $s = 35$, $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$.

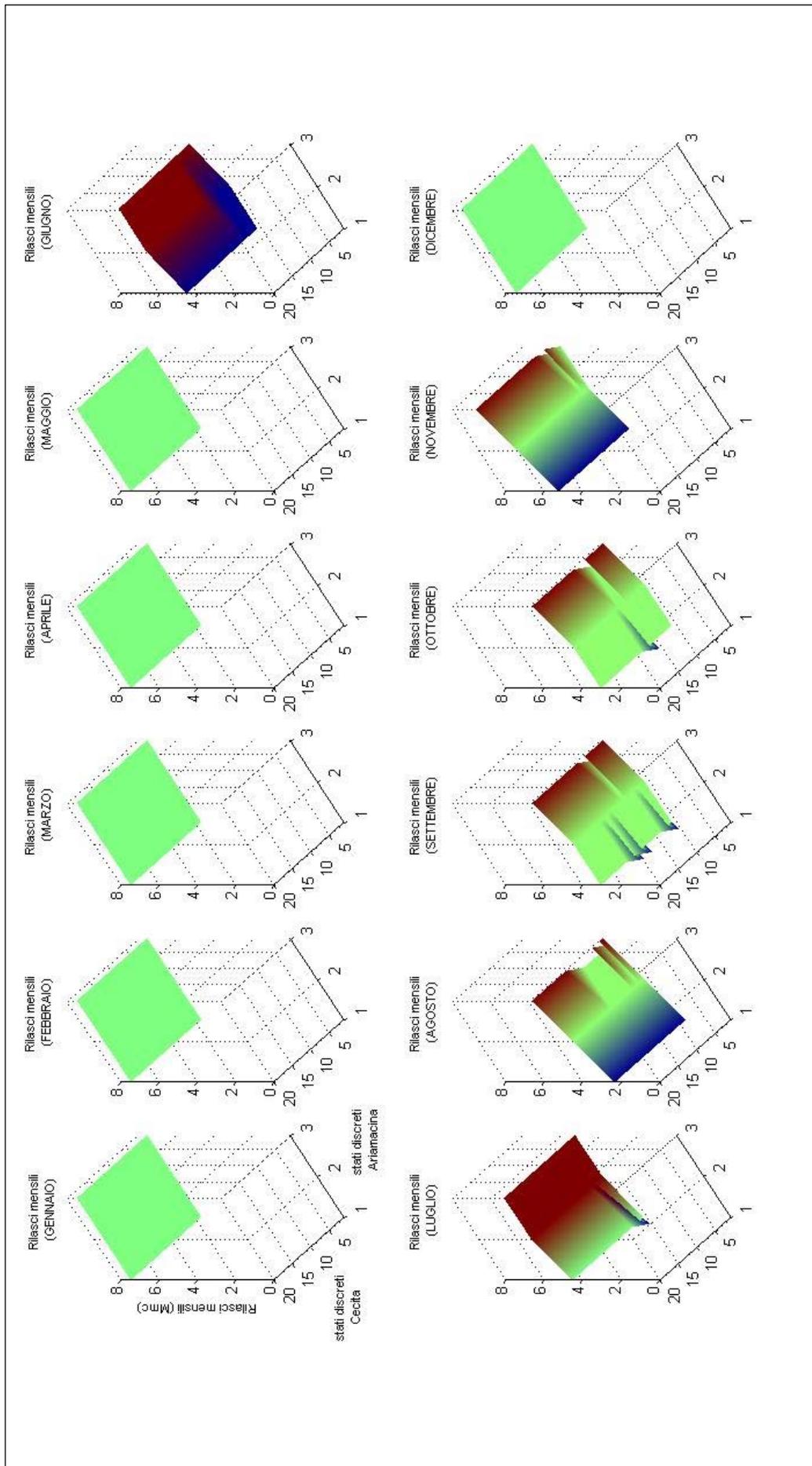


Figura 4.89 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Ariamacina (approccio E.S.O. basato sull'algoritmo QL con $s = 35$)

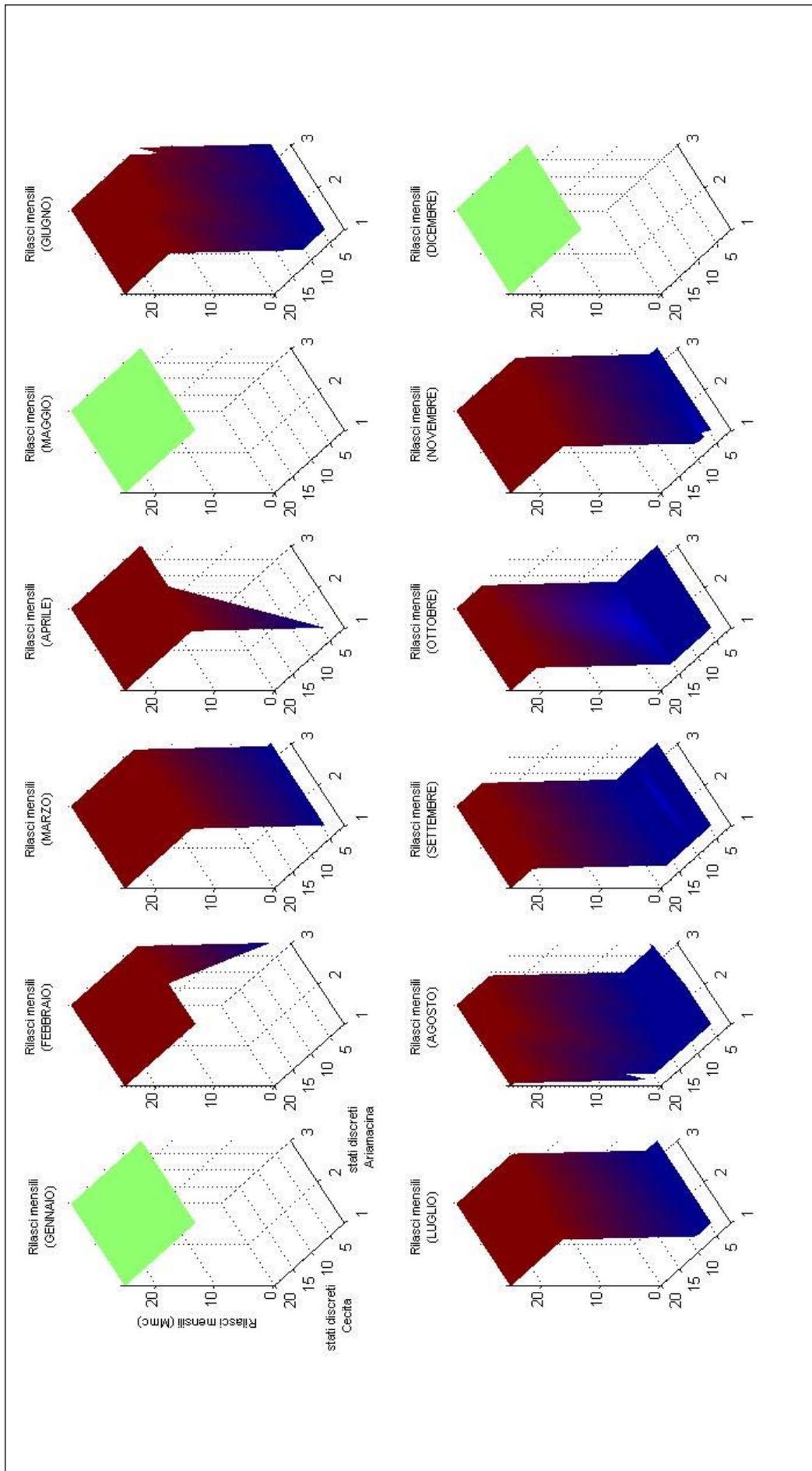


Figura 4.90 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Cecita (approccio E.S.O. basato sull'algoritmo QL con $s = 35$)

Risultati interessanti che mettono in risalto alcune importanti proprietà dell'algorithmo QL possono desumersi dall'esame dei successivi grafici, mostranti le regole operative ottimali ricavate sempre per $s = 35$, $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$, ma con numero di iterazioni inferiori.

Le due successive figure, in particolare, mostrano i risultati ottenuti per un numero di episodi pari a 10^6 .

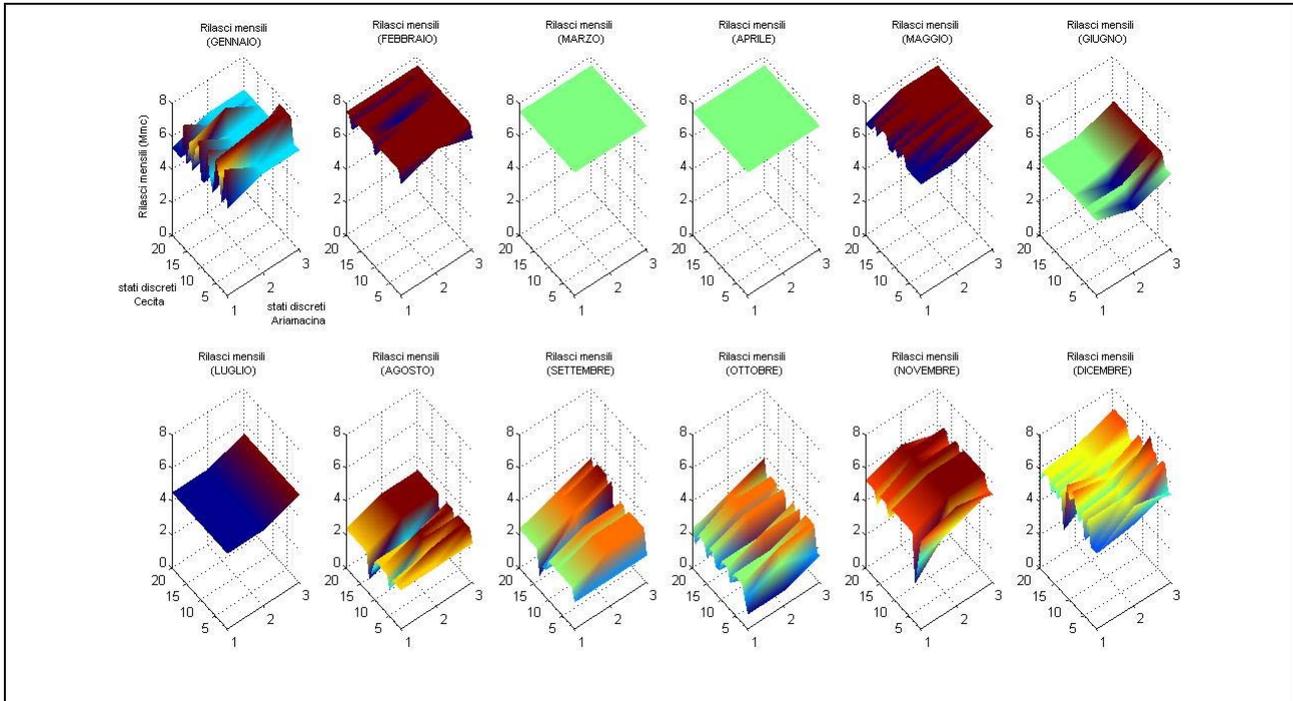


Figura 4.91 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Ariamacina (approccio E.S.O. basato sull'algorithmo QL con $s = 35$ e numero di episodi pari a 10^6)

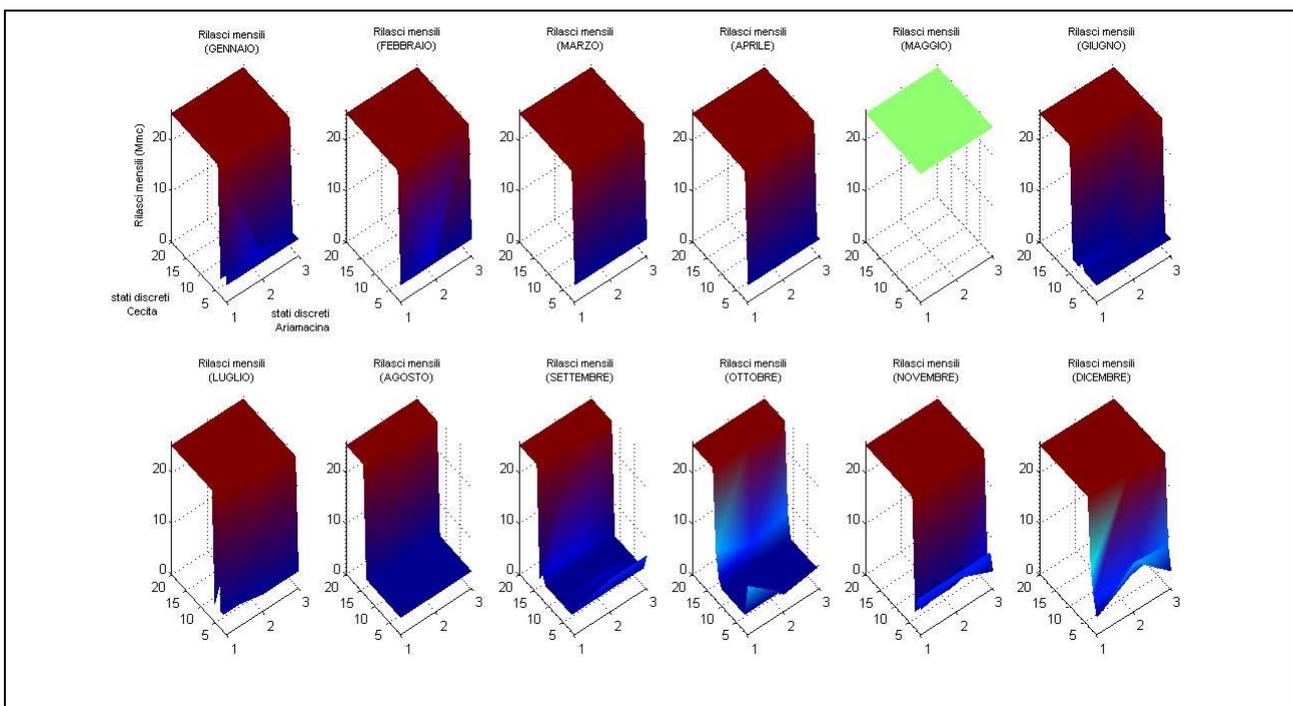


Figura 4.92 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Cecita (approccio E.S.O. basato sull'algorithmo QL con $s = 35$ e numero di episodi pari a 10^6)

Mentre, le due figure seguenti mostrano i risultati ottenuti per un numero di episodi pari a $2,5 \cdot 10^6$.

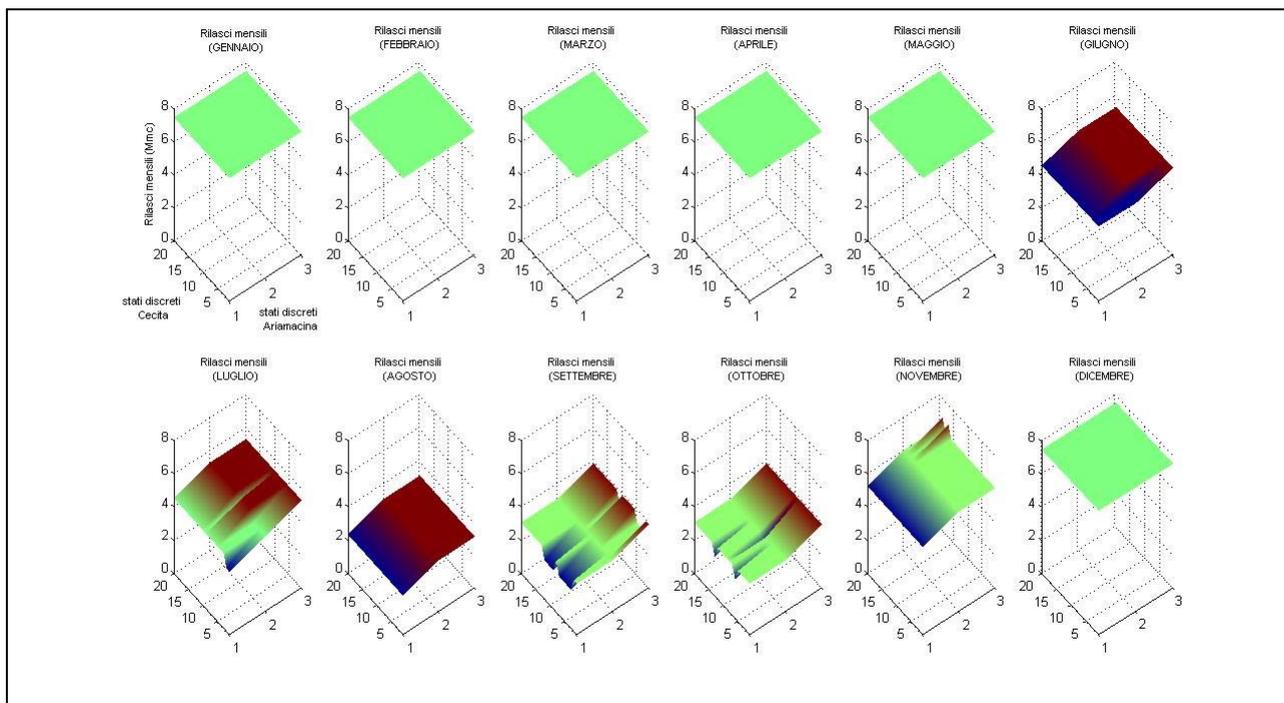


Figura 4.93 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Ariamacina (approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 35$ e numero di episodi pari a $2,5 \cdot 10^6$)

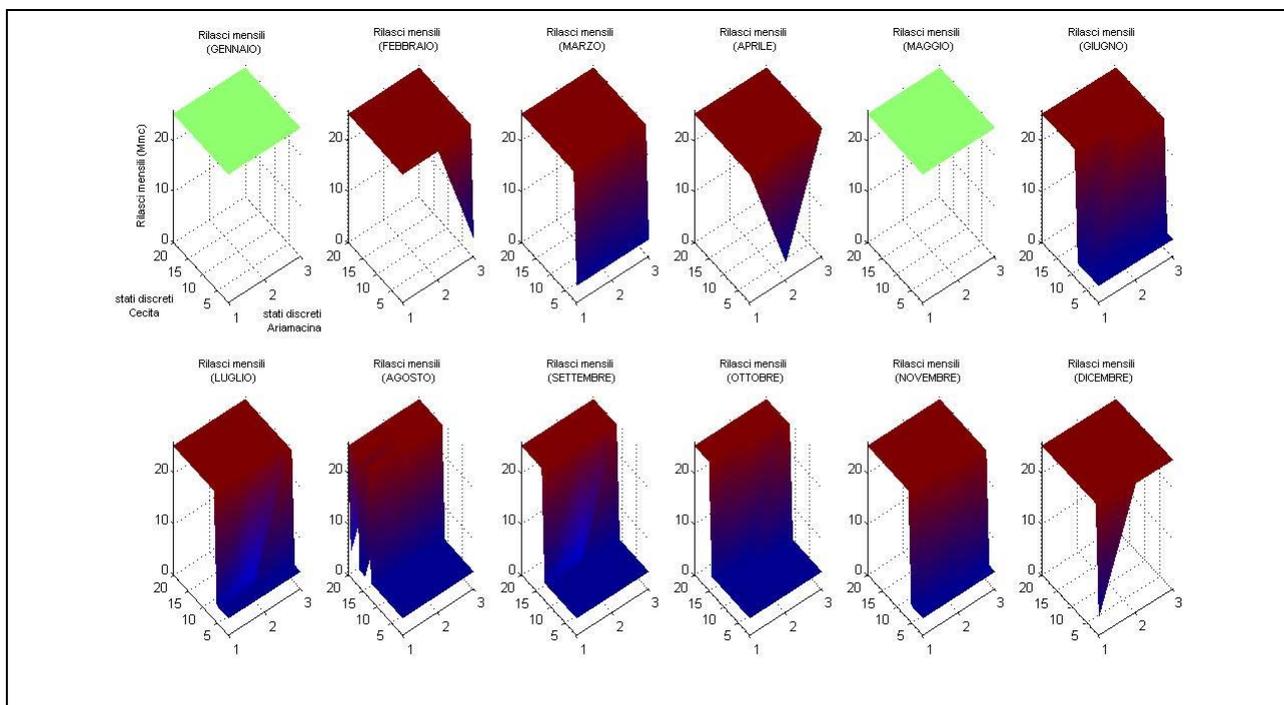


Figura 4.94 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Cecita (approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 35$ e numero di episodi pari a $2,5 \cdot 10^6$)

Appare evidente che in caso di numero di episodi basso (pari a 10^6) le regole operative ottimali ottenute applicando l’algoritmo QL siano “instabili” soprattutto per l’invaso di Ariamacina.

Tali “disturbi” appaiono poi sempre meno significativi all’aumentare del numero di episodi considerati, sino ad ottenere i risultati definitivi alquanto “smooth” della figura 4.89.

Altre considerazioni interessanti possono essere desunte ricavando le regole operative ottimali mensili dei due invasi per valori dell’esponente s della funzione aggregata (3.127) differenti da quello considerato sinora ($s = 35$). Le due successive figure, in particolare, riportano le regole operative ottimali mensili per gli invasi di Ariamacina e Cecita per $s = 1$:

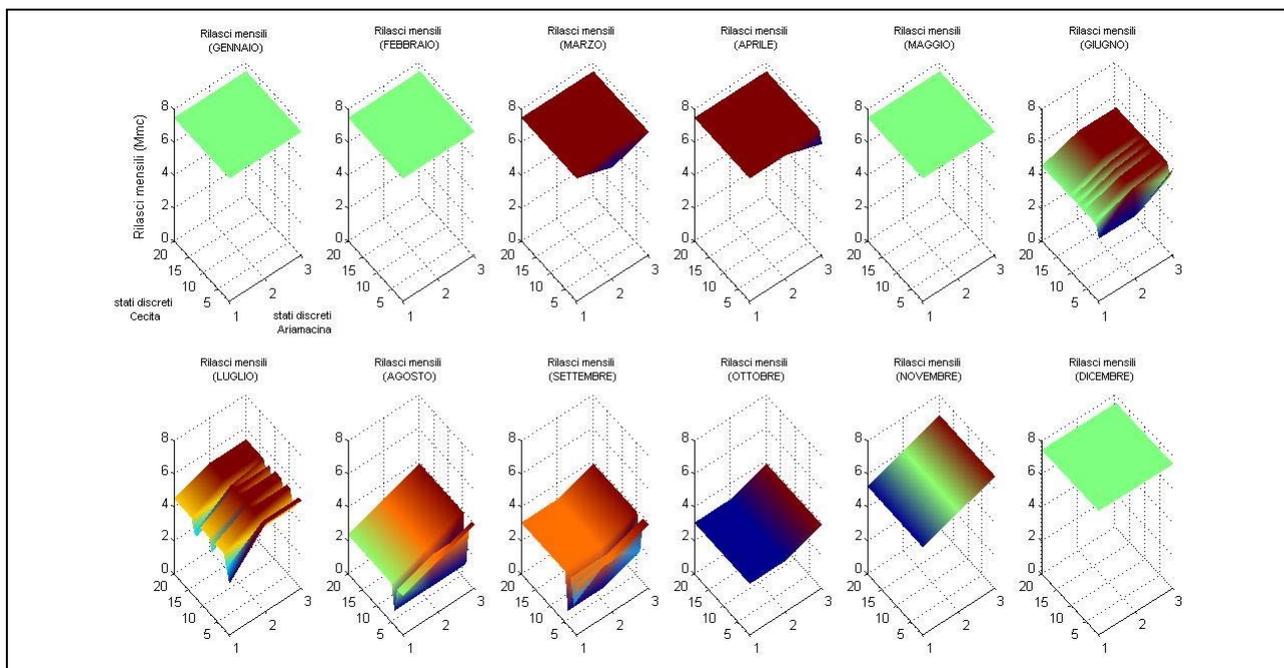


Figura 4.95 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Ariamacina
(*approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 1$*)

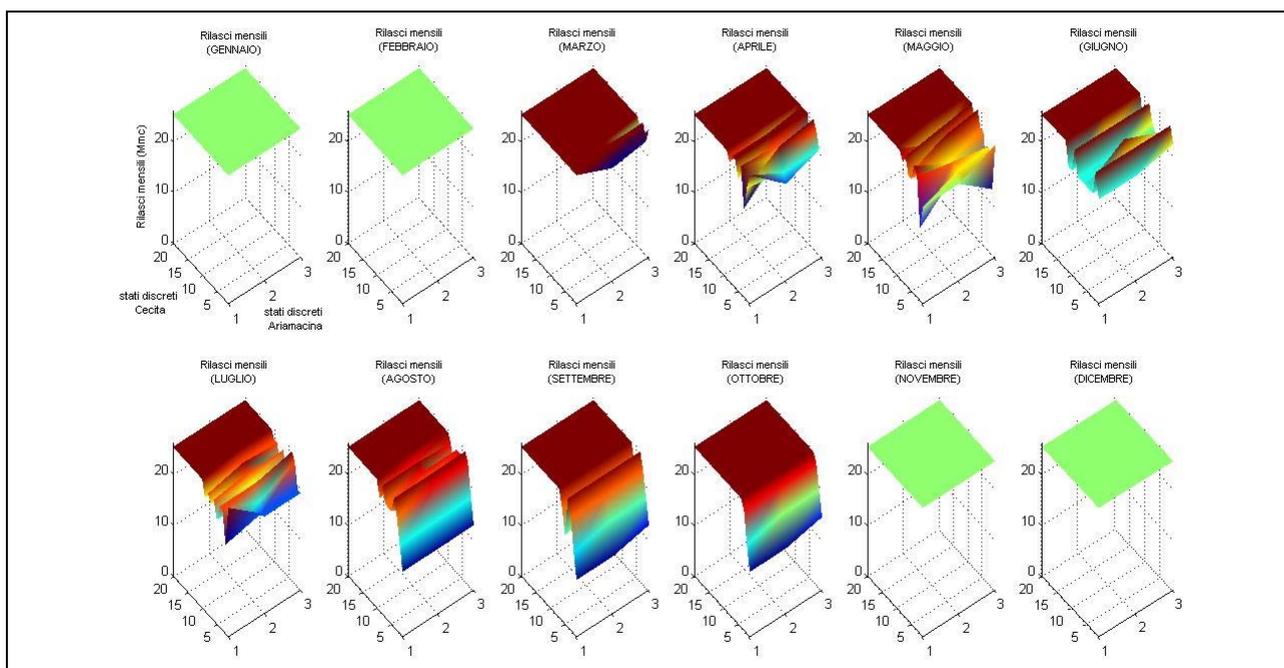


Figura 4.96 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Cecita
(*approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 1$*)

Le figure seguenti, invece, riportano le regole operative ottimali mensili per gli invasi di Ariamacina e Cecita per $s = 75$:

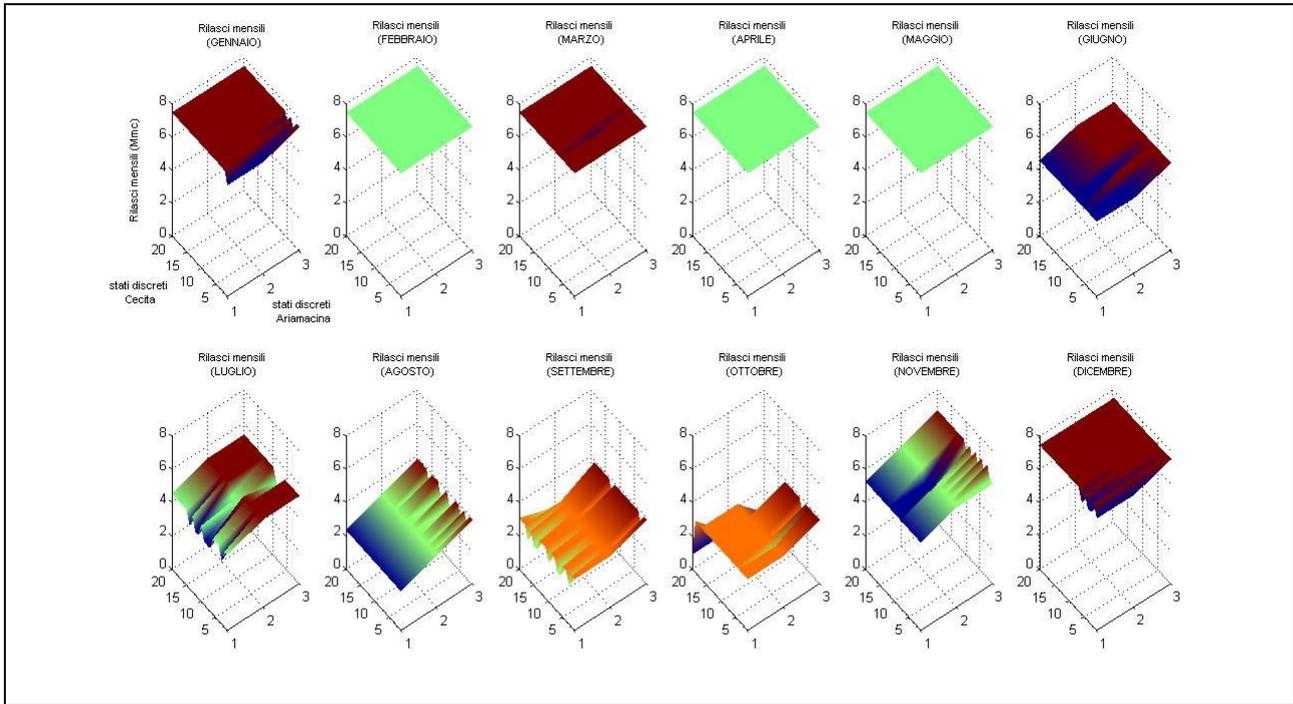


Figura 4.97 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Ariamacina
(approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 75$)

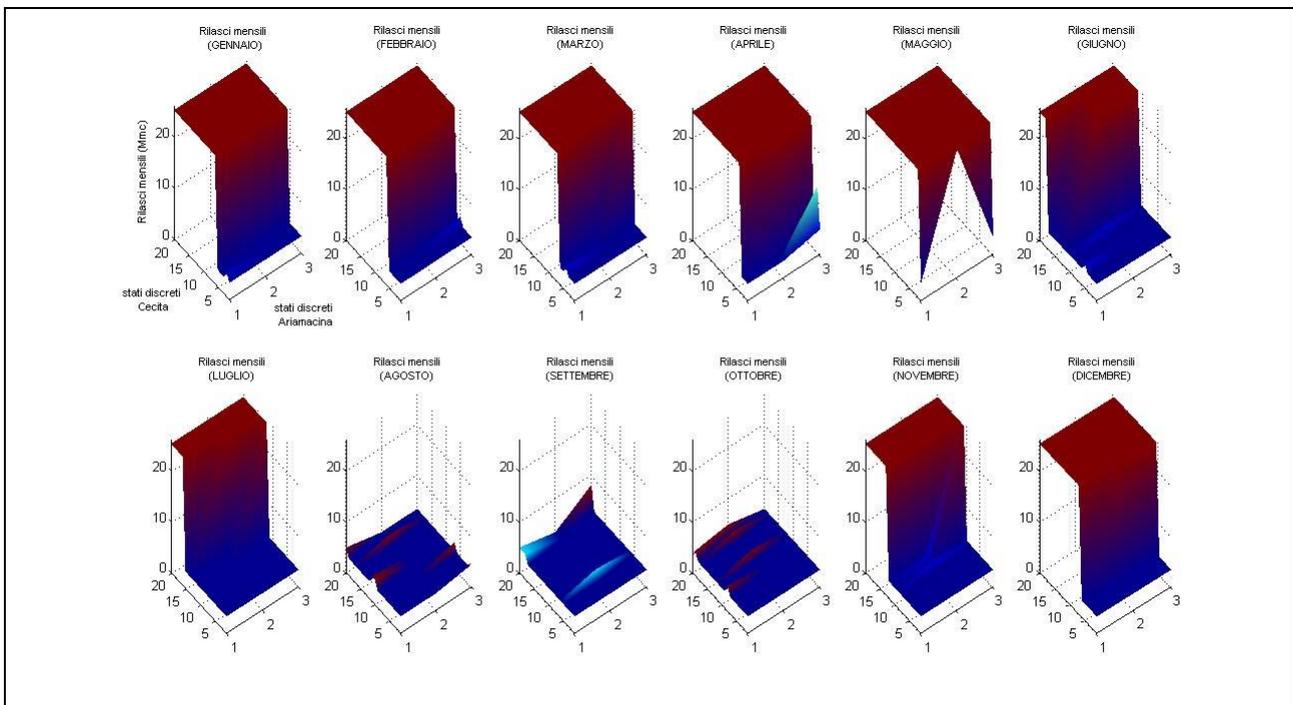


Figura 4.98 – Rilasci operativi ottimali mensili per l’invaso di Cecita
(approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL con $s = 75$)

Le figure seguenti, infine, riportano le regole operative ottimali mensili per gli invasi di Ariamacina e Cecita per $s = 125$:

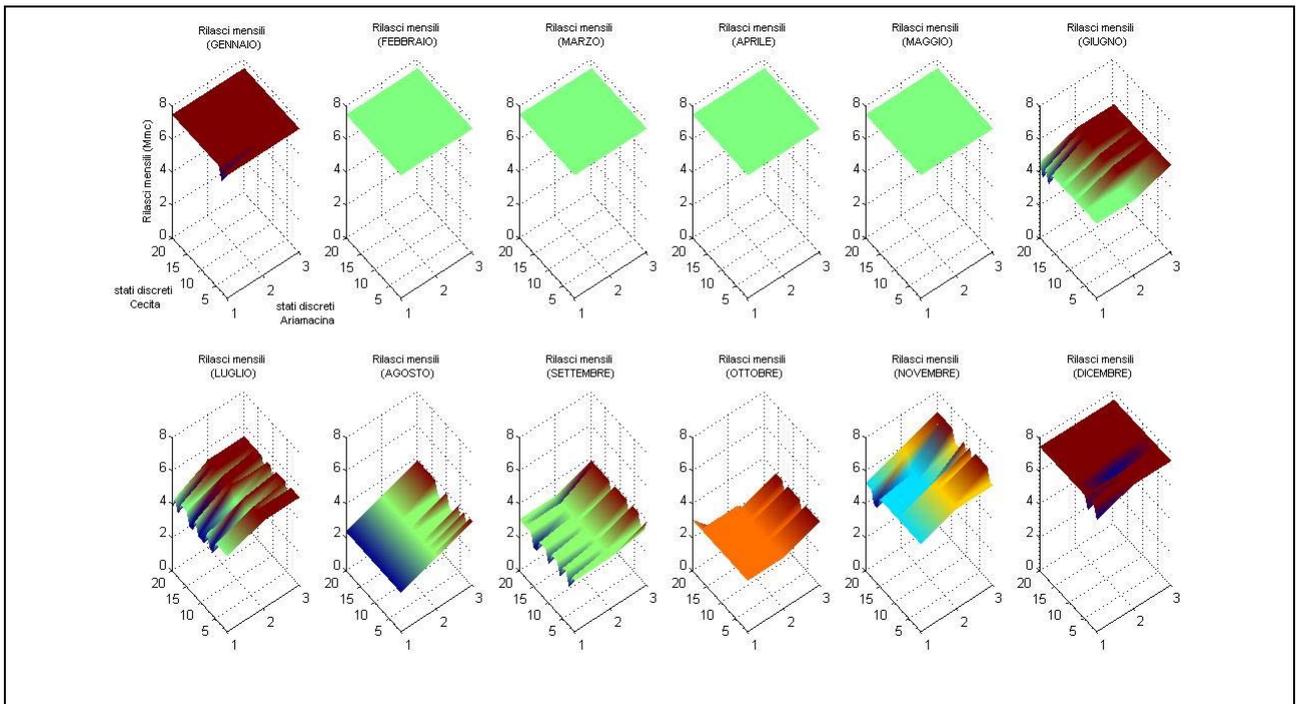


Figura 4.99 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Ariamacina
(approccio E.S.O. basato sull'algoritmo QL con $s = 125$)

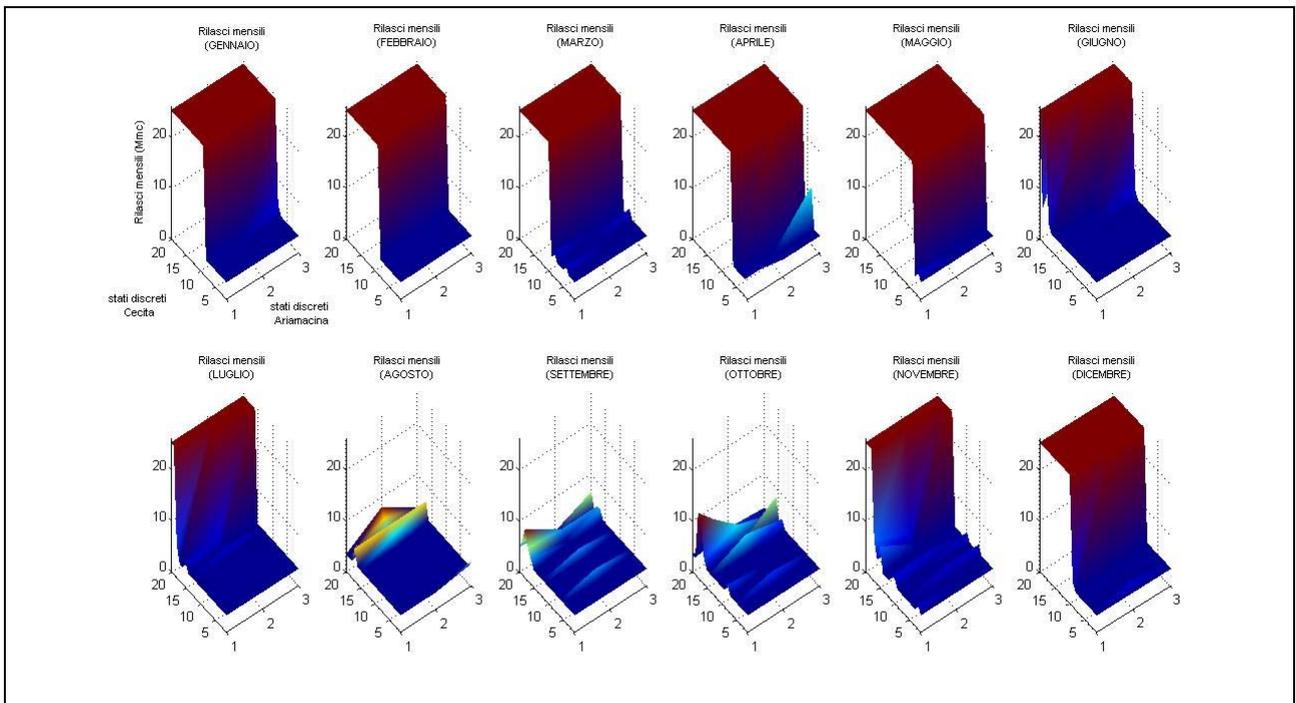


Figura 4.100 – Rilasci operativi ottimali mensili per l'invaso di Cecita
(approccio E.S.O. basato sull'algoritmo QL con $s = 125$)

Analizzando le figure suddette si può osservare come l'andamento oscillatorio delle regole ottimali di alcuni mesi sia estremamente ridotto per valori bassi dell'esponente e più accentuato al crescere dello stesso parametro.

In particolare può notarsi come il comportamento “medio” delle regole operative ottimali mensili per l’invaso di Ariamacina si mantenga più o meno costante al netto dell’oscillazione apparentemente casuale di cui sopra, la quale può quindi intendersi come una sorta di “rumore bianco” che si amplifica all’aumentare di s .

Tale comportamento testimonia, incidentalmente, la relativa bassa incidenza che la regolazione dell’invaso di Ariamacina ha sul comportamento complessivo del sistema: la predilezione per uno dei due obiettivi (produzione idroelettrica o soddisfacimento irriguo) è quasi totale appannaggio della regolazione dell’invaso di Cecita (come ci si aspettava): si noti infatti che all’aumentare dell’esponente s cambino solo le regole operative di quest’ultimo serbatoio. In particolare se si vogliono ridurre al minimo i deficit irrigui (a scapito della produzione idroelettrica) sarà necessario seguire *policies* basate su una generale riduzione dei rilasci turbinati (anche durante i mesi estivi e autunnali), in modo da aumentare i volumi d’invaso disponibili durante la stagione irrigua, come mostrato dai grafici per $s = 75$ e $s = 125$ (in corrispondenza dei quali, come dimostrato nella tabella 4.15, si ottiene un miglior soddisfacimento delle esigenze irrigue).

Si noti che tale analisi di variazione delle regole operative ottimali mensili in funzione degli obiettivi da privilegiare è stata effettuata solo per l’ottimizzazione con approccio E.S.O. basato sull’algoritmo QL: un analogo studio per le ottimizzazioni con approccio I.S.O. basate su SQP o DP infatti, sarebbe risultato estremamente oneroso, in quanto per ciascuna coppia di valori di w_1 e w_2 del metodo dei pesi, sarebbe stato necessario effettuare 12 analisi di regressione multipla (una per ciascun mese dell’anno) per ognuno dei due invasi in oggetto.

Nel caso dell’approccio E.S.O. trattato in questo paragrafo, invece, le regole operative ottimali mensili sopra esposte sono il risultato diretto del processo di ottimizzazione.

4.7 Applicazione delle regole ottimali: confronto fra i risultati ottenuti dai diversi modelli

Le regole operative ottimali ottenute per ciascuna delle tre tecniche di ottimizzazione (SQP, DP, QL) considerate nella presente tesi di dottorato consistono, come analizzato nei precedenti paragrafi, in 12 funzioni (una per ogni mese dell’anno) del tipo (si vedano i paragrafi 4.6.1.1 e 4.6.2.2):

$$\begin{aligned}
 X_A(t) &= g_{1,t}[S_A(t), S_C(t)] \\
 X_C(t) &= g_{2,t}[S_A(t), S_C(t)]
 \end{aligned}
 \qquad t = 1, 2, \dots, 12 \quad (4.90)$$

Cioè, i rilasci ottimi $X_{(\cdot)}(t)$ dal generico invaso (\cdot) nel mese t , dipendono dai valori che hanno assunto all'inizio dello stesso mese gli invasi nei due serbatoi del sistema $S_A(t)$ e $S_C(t)$, secondo le relazioni indicate nei paragrafi precedenti.

L'analisi delle regole operative ottimali mensili così ottenute per le diverse tecniche, permette di esprimere le seguenti considerazioni:

- per l'invaso di Ariamacina: le regole operative ottimali proposte dalle ottimizzazioni secondo approccio I.S.O. basate su SQP e DP sono molto simili per quasi tutti i mesi dell'anno e consistono nella quasi completa indipendenza dei rilasci dai valori dei volumi d'invaso (si vedano i grafici delle regressioni multiple dei paragrafi 4.6.1.1 e 4.6.2.2). L'azione ottima, pertanto, dipende solo dal mese di riferimento, assumendo valori più elevati nella stagione primaverile (in particolare in marzo e aprile) e valori più bassi nella stagione estiva. Diversa invece, appare la strategia determinata dalla ottimizzazione secondo approccio E.S.O. basato su QL (si veda figura 4.89): in questo caso, infatti, si prevede il rilascio mensile massimo possibile per la stagione invernale e per quella primaverile (quindi anche in questo caso completa indipendenza dei rilasci dai valori dei volumi d'invaso); rilasci mensili inferiori e dipendenti (in misura blanda) dal volume d'invaso effettivo di Ariamacina nelle restanti stagioni;
- per l'invaso di Cecita: le regole operative ottimali proposte dalle ottimizzazioni secondo approccio I.S.O. basate su SQP e DP sono molto simili per quasi tutti i mesi dell'anno e consistono nella dipendenza dei rilasci turbinati dai volumi d'invaso effettivo del solo serbatoio di Cecita mediante andamenti esponenziali o lineari crescenti (si vedano i grafici delle regressioni multiple dei paragrafi 4.6.1.1 e 4.6.2.2). Affine appare la strategia determinata dalla ottimizzazione secondo approccio E.S.O. basato su QL (si veda figura 4.90): in questo caso, infatti, si prevede il rilascio mensile massimo possibile (con conseguente completa indipendenza dei rilasci dai valori dei volumi d'invaso) solo per alcuni mesi della stagione invernale e di quella primaverile; nei restanti mesi si prevedono rilasci dipendenti dal volume d'invaso effettivo del solo serbatoio di Cecita (anche in questo caso mediante andamenti esponenziali o lineari crescenti);

Per operare una opportuna verifica, ma anche per eseguire un confronto fra i diversi metodi esaminati, le relazioni ottime di ciascun modello sono state applicate su un periodo di 60 anni caratterizzato da valori di deflusso e temperature (generate stocasticamente secondo quanto esposto

nel paragrafo 4.4) diversi da quelli dei periodi ventennali e trentennali considerati nella fase di ottimizzazione.

I risultati così ottenuti in termini di *FO1* e *FO2* per ciascun modello sono:

<i>Modello</i>	<i>FO1</i> (Gwh)	<i>FO2</i>	
		<i>Erogazione</i> <i>60-ennale all'impianto</i> (Mmc)	<i>Deficit</i> <i>irriguo</i>
SQP	19396,68	526,26	4,17 %
DP	19355,21	489,14	10,93 %
QL	18819,00	466,87	14,99 %

Tabella 4.17 – Confronto fra i risultati dell'applicazione delle regole operative ottimali mensili determinate con le tre tecniche di ottimizzazione SQP, DP e QL a un periodo di 60 anni i cui deflussi mensili e temperature medie mensili sono stati generati stocasticamente

dove la percentuale di deficit irriguo è calcolata dal rapporto fra l'erogazione reale 60-ennale riportata nella terza colonna della tabella sopra riportata e la richiesta irrigua teorica (sempre negli stessi 60 anni).

I valori per anno assunti dalle funzioni obiettivo sono:

<i>Modello</i>	<i>FO1</i> (Gwh / anno)	<i>FO2</i>
		<i>Erogazione annuale</i> <i>all'impianto Mucone</i> (Mmc / anno)
SQP	323,28	8,77
DP	322,59	8,15
QL	313,65	7,78

Tabella 4.18 - Confronto fra i risultati (espressi per anno) dell'applicazione delle regole operative ottimali mensili determinate con le tre tecniche di ottimizzazione SQP, DP e QL a un periodo di 60 anni i cui deflussi mensili e temperature medie mensili sono stati generati stocasticamente

5. Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha esaminato il problema di ottimizzazione delle regole operative a scala mensile di un sistema multi-invaso a scopo plurimo, quello cioè costituito dagli invasi silani di Cecita e Ariamacina (posti in testa a tre impianti idroelettrici denominati “Vaccarizzo”, “Mucone I salto”, “Mucone II salto”) e dall’impianto irriguo “Mucone”.

Per una descrizione dettagliata del sistema analizzato si rimanda ai paragrafi 4.1, 4.2 e 4.3.

L’ottimizzazione delle regole operative è avvenuta mediante:

- approccio I.S.O. basato su due tecniche di ottimizzazione distinte: la Sequential Quadratic Programming (SQP - i cui lineamenti teorici sono esposti nel paragrafo 3.3.2.4.1) e la Dynamic Programming (DP - paragrafo 3.6);
- approccio E.S.O. basato sul modello di ottimizzazione Reinforcement Learning ed in particolare su un suo algoritmo di risoluzione denominato Q-Learning (QL – i cui lineamenti teorici sono esposti nel paragrafo 3.8.2.2).

I risultati ottenuti sono in termini di rilasci turbinati mensili espressi in funzione degli stati del sistema, cioè dei volumi d’invaso effettivamente presenti in ciascuno dei due serbatoi all’inizio del mese di riferimento. Tali relazioni danno origine, nello spazio a tre dimensioni (nel quale gli assi x e y rappresentano i valori dei volumi d’invaso dei due serbatoi e l’asse z il valore del rilascio mensile ottimo da effettuare) a delle vere e proprie superfici presentate nel paragrafo 4.6.1.1 relativamente all’ottimizzazione mediante SQP, nel paragrafo 4.6.2.2 relativamente alla tecnica DP, mentre nel paragrafo 4.6.3.2 sono mostrate quelle relative all’ottimizzazione mediante la tecnica QL.

Tali regole ottimali sono poi state applicate, per opportuna verifica e confronto fra le diverse tecniche di ottimizzazione, a un periodo 60-ennale caratterizzato da valori delle forzanti esterne al sistema (deflussi mensili e temperature medie mensili) diverse da quelli dei periodi ventennali e trentennali presi in riferimento nella fase di ottimizzazione. Le tabelle 4.17 e 4.18 del precedente paragrafo 4.7 riportano i risultati di confronto suddetti, relativi alla produzione idroelettrica totale 60-ennale (espressa in Gwh e Gwh/anno) e al deficit irriguo generato.

I risultati esposti nelle suddette tabelle mostrano la chiara superiorità del modello di ottimizzazione SQP rispetto alle altre due tecniche utilizzate.

Se infatti per l’obiettivo FO1, la SQP e la DP sembrano produrre risultati del tutto comparabili, nettamente superiore appare la SQP nella generazione di rilasci turbinati ottimi capaci di ridurre considerevolmente i deficit irrigui dell’impianto Mucone.

Il modello RL (implementato dall’algoritmo QL) ha fornito i risultati peggiori per entrambi gli obiettivi in gioco.

Nonostante le non eccellenti performance di tale modello, non sembra opportuno e consigliabile pronunciare una bocciatura senza appello e rinunciare a ulteriori fasi di approfondimento d'analisi: le applicazioni di tale modello alla gestione operativa ottimale di un sistema d'invasi a scopo plurimo sono solo allo stadio iniziale e i risultati attesi potrebbero essere di notevole importanza.

In particolare, mediante l'algoritmo QL è possibile eludere i principali svantaggi degli approcci ISO (implementati in questa sede mediante la SQP e la DP): in particolare, molto delicata, per quest'ultimo tipo di approccio è apparsa la fase di regressione multipla dei dati generati per la determinazione delle regole operative ottimali mensili. In molti casi, infatti, tale step potrebbe essere effettuato con difficoltà a causa dell'addensarsi dei punti sperimentali in zone ristrette dell'intero range di variazione di stati e azioni: ciò potrebbe rendere inattendibili e del tutto inverosimili le operazioni di fitting. Tale difficoltà sarebbe sicuramente maggiore nel caso in cui i risultati del *fitting* non possano essere visualizzati graficamente nello spazio tridimensionale: è questo il caso in cui siano presenti più di due invasivi e/o sia scelta l'adozione di più di due variabili indipendenti per "spiegare" le variazioni dei rilasci turbinati ottimi. In entrambi i casi sarebbe possibile rappresentare solo dipendenze parziali.

Un altro svantaggio della SQP risiede nella difficoltà di determinazione degli ottimi "globali": la tecnica in oggetto infatti è, a rigore, una procedura di ricerca locale. E' necessario, pertanto, adottare la tecnica in esame all'interno di un metodo di ottimizzazione globale. Tra questi è preferibile l'uso dei metodi di tipo stocastico (che per problemi di grande dimensione molto spesso (Steri, 2006) sono gli unici approcci possibili), come il "Single Start" (Schoen, 1991), i metodi cosiddetti "Two-phase" (Rinnoy Kan e Timmer, 1987a; Rinnoy Kan e Timmer, 1987b) (tra i quali si ricordano: 1) il "Multi-start"; 2) il "Clustering", tra cui è da segnalare il "Single Linkage Clustering"; 3) il "Multi-Level"), o i metodi cosiddetti "Improvement of Local Minima" con criterio di stop bayesiano (Abaffy et al., 1994).

Ovviamente tutte queste operazioni rendono il metodo molto oneroso da un punto di vista del tempo computazionale.

Anche la DP se, per un verso, rappresenta una delle migliori tecniche di ricerca dell'ottimo globale (evitando, pertanto, uno dei problemi più pressanti della SQP), presenta però alcuni svantaggi, fra i quali, si ricorda, oltre al carattere deterministico (che impone, al pari della SQP, l'implementazione di una fase di analisi di regressione multipla), il problema della "maledizione della dimensionalità" di Bellman. Le performance del modello dipendono dal grado di discretizzazione degli stati e delle azioni previsto. Ovviamente, ad un livello di discretizzazione più spinto corrispondono performance migliori. E' anche vero però che un maggiore livello di discretizzazione richiede capacità di memoria più elevate con l'impennata dei tempi computazionali in gioco.

L'approccio E.S.O. basato su QL, inoltre, supera analoghi problemi di esplosione dei tempi computazionali tipici degli approcci E.S.O. basati su altre tecniche quali la Stochastic Dynamic Programming Models (si veda paragrafo 3.11.2).

Sicuramente, il vantaggio principale dell'approccio E.S.O. basato su QL è, come anticipato, la generazione "diretta" delle regole operative ottimali, cioè dei rilasci turbinabili ottimi mensili senza la necessità di implementazione della fase di analisi di regressione multipla. Tale proprietà ha permesso (si veda paragrafo 4.6.3.2) anche un'analisi delle variazioni delle regole operative ottimali in funzione delle priorità sugli obiettivi da raggiungere.

E' comunque da rilevare che anche l'approccio E.S.O. basato su QL presenta problemi di tempistiche computazionali legate, a differenza della DP, *indirettamente* al grado di discretizzazione di stati e azioni del sistema: è evidente, infatti, che un livello di discretizzazione più fine, necessita (per l'ottenimento di risultati il più possibile stazionari) della simulazione di un numero molto elevato di episodi i quali incrementano (sebbene in misura lineare) i tempi computazionali in gioco.

Come evidente anche dalla digressione esposta in questo paragrafo, quello della ottimizzazione della gestione operativa delle risorse idriche di un sistema multi-invaso a scopo plurimo, è un problema molto complesso e aperto a ulteriori approfondimenti teorici e applicativi.

Ulteriori ricerche dovranno essere eseguite, come anticipato, in merito alla globalità degli ottimi della SQP, alla dipendenza delle performance dei modelli DP e QL dai livelli di discretizzazione dei parametri del sistema, nonché al comportamento di convergenza dell'algoritmo QL.

Sarà però necessario, a tali fini, ridurre i tempi computazionali in gioco mediante l'uso di tecniche di calcolo parallelo, rivolgendo particolare attenzione al paradigma che permette di effettuare elaborazioni che non siano incentrate sulla sola CPU bensì sul "co-processing" di CPU e GPU, cioè sullo sfruttamento della potenza di calcolo delle unità di elaborazione grafica.

Bibliografia

- Abaffy J., Dolci A., Gaviano M. (1994), Bayesian stopping rules for improvement of local minima algorithms in global optimization, *Optimization*, (30), 215-226.
- Athan T.W., Papalambros P. Y. (1996), A note on weighted criteria methods for compromise solutions on multiobjective optimization, *Engineering Optimization*, 27(2), 155-176.
- Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. (1979), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York.
- Bellman R. E. (1957a), *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Bellman R. E. (1957b), A Markov decision process, *Journal of Mathematical Mech.*, 6, 679-684.
- Biggs M.C. (1975), Constrained Minimization Using Recursive Quadratic Programming, in L.C.W. Dixon, G.P.Szergo (eds.), *Towards Global Optimization*, North-Holland, 341-349.
- Blackett P.M.S. (1962), *Studies of War*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Broyden C.G. (1970), The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms, *J. Inst. Maths. Applics.*, 6, 76-90.
- Chandramouli, V., Raman H. (2001), Multireservoir modeling with dynamic programming and neural networks, *J. Water Resour. Plann. Manage.*, 127(2), 89- 98.
- Charnes A., Cooper W.W. (1962), Programming with linear fractional functionals, *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 181-186.
- Chen W., Wiecek M. M., Zhang J. (1998), Quality utility: a compromise programming approach to robust design, *Proceedings of the DETC 98, ASME Design Engineering Technical Conference*, Atlanta, Georgia, DAC5601.
- Comitato Nazionale Italiano per le grandi dighe (2010), La salvaguardia dei serbatoi artificiali in Italia - Gestione della Risorsa, mantenimento delle opere, ampliamento della capacità, *Elenco memorie della giornata di studio: "La salvaguardia dei serbatoi artificiali in Italia"*, Roma.
- Consoli S., Pappalardo N., Toscano A. (2006), Regole di gestione di un serbatoio ad uso irriguo attraverso una tecnica di ottimizzazione multi-obiettivo, *XXX Convegno di idraulica e Costruzioni Idrauliche - IDRA*, Roma.
- Dantzig G.B., Thapa M.N (1997), *Linear programming 1: Introduction*, Springer, New York.

- Das I., Dennis J. E. (1997), A closer look at drawbacks of minimizing weighted-sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems, *Structural Optimization*, 14, 63–69.
- Das I., Dennis J. E. (1998), Normal-boundary intersection: a new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems, *SIAM Journal on Optimization*, 8, 631–657.
- Davidon W.C. (1959), Variable Metric Method for Minimization, *A.E.C. Research and Development Report*, ANL-5990.
- deregulated electricity market, *Optimization and Engineering*, 7(1), 47-61.
- Dorigo M., Birattari M., Stutzle T. (2006), Ant Colony Optimization, *Computational Intelligence Magazine*, IEEE, 1(4), 28-39.
- Draper N.R., Cox D.R. (1969), On distributions and their transformation to normality, *J.R.Stat.Soc. B*, 31, 472-476.
- Fiacco A.V., McCormick G.P. (1968), *Nonlinear Programming, Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York.
- Fletcher R. (1970), A New Approach to Variable Metric Algorithms, *Computer Journal*, 13, 317-322.
- Fletcher R. (1987), *Practical Methods of Optimization*, John Wiley and Sons, New York.
- Fletcher R., Powell M.J.D. (1963), A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer Journal*, 6, 163-168.
- Gill P.E., Murray W., Wright M.H. (1981), *Practical Optimization*, Academic Press, London.
- Goldfarb D. (1970), A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means, *Mathematics of Computing*, 24, 23-26.
- Golub G.H., van Loan C.F. (1996), *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London, 3rd edition.
- Grygier J., Stedinger J. (1985), Algorithms for optimizing hydropower system operation, *Water Resour. Res.*, 21(1), 1–10.
- Han S.P. (1977), A globally convergent method for nonlinear programming, *J. Optimization Theory and Applications*, 22, 297.
- Harboe R. (1992), Multiobjective decision making techniques for reservoir operation, *Water Resources Bulletin*, 28(1), 103-110.

- Hiew K. (1987), Optimization algorithms for large scale multi-reservoir hydropower systems, PhD dissertation, Dept. of Civil Engineering, Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo.
- Hillier F.S., Lieberman G.J. (2005), *Ricerca Operativa*, McGraw-Hill, Milano, 8a edizione.
- Hipel K. W. (1992), Multiple objective decision making in water resources, *Water Resources Bulletin*, 28(1), 3-12.
- Hock W., Schittkowski K. (1983), A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes, *Computing*, 30, 335.
- Householder A. S. (1958), Unitary Triangularization of a Nonsymmetric Matrix, *Journal of the ACM*, 5(4), 339-342.
- Huang W., Harboe R., Bogardi J. (1991), Testing stochastic dynamic programming models conditioned on observed or forecasted inflows, *J. Water Resour. Plan. Manage.*, 117(1), 28-36.
- Karmarkar N. (1984), A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming, *Combinatorica*, Vol 4, nr. 4, 373-395.
- Karush, W. (1939), Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions, M.S. Thesis, Department of Mathematics, University of Chicago.
- Kelley C. T. (1995), *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, Siam, Philadelphia.
- Kelley C.T. (1999), *Iterative Methods for Optimization*, Siam, Philadelphia.
- Kelman J., Stedinger J., Cooper L., Hsu E., Yuan S.-Q. (1990), Sampling stochastic dynamic programming applied to reservoir operation, *Water Resour. Res.*, 26(3), 447-454.
- Ko Seok-Ku, Fontane D. G., Labadie J. W. (1992), Multiobjective optimization of reservoir systems operation, *Water Resources Bulletin*, 28(1), 111-127.
- Koski J. (1985), Defectiveness of weighted method in multicriterion optimization of structures, *Communications in Applied Numerical Methods*, 1(6), 333-337.
- Kuhn H.W., Tucker A.W. (1951), Nonlinear Programming, in Jerzy Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, University of California Press, Berkeley, 481-492.
- Labadie J. (1993a), Combining simulation and optimization in river basin management, in J. Marco et al. (eds.), *Stochastic hydrology and its uses in water resources systems simulation and optimization*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 345-371.
- Labadie J. W. (2004), Optimal Operation of Multireservoir Systems: State-of-the-Art Review, *J. Water Resour. Plann. Manage.*, 130(2), 93-111.

- Lee J.-H., Labadie J.W. (2007), Stochastic optimization of multireservoir systems via reinforcement learning, *Water resources research*, 43.
- Margaritora G., Petaccia A., Remedia G. (1977), Gestione ottimale di un invaso artificiale ad uso multiplo, *Idrotecnica*, 3.
- MATLAB (2004), *Optimization Toolbox for Use with Matlab - User's Guide*, Version 3.0, The Math Works Inc.
- Messac A., Melachrinoudis E., Sukam C. P. (2000b), Aggregate Objective Functions and Pareto Frontiers: Required Relationships and Practical Implications, *Optimization and Engineering Journal*, Kluwer Publishers, 1(2), 171-188.
- Messac G. J., Sundararaj R. V. Tappeta, Renaud J. E. (2000a), The ability of objective functions to generate points on non-convex Pareto frontiers, *AIAA Journal*, 38(3).
- Miettinen K.M. (2004), *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 4th edition.
- Mousavi H., Ramamurthy A.S. (2000), Optimal design of multi-reservoir systems for water supply, *Advances in Water Resources*, 23, 613-624.
- Nagesh-Kumar D., Janga Reddy M. (2006), Ant Colony Optimization for Multi-Purpose Reservoir Operation, *Water Resources Management*, 20, 879–898.
- Neumann G. (2005), The Reinforcement Learning Toolbox, Reinforcement Learning for Optimal Control Tasks, Diplomarbeit, Technischen Universität, Graz, Austria.
- Nocedal J., Wright S.J. (1999), *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, New York, USA.
- Oliveti E. (2004), I sistemi idroelettrici silani, Tesi di Laurea, Dipartimento di Difesa del Suolo, Università degli Studi della Calabria.
- Osyczka A. (1984), *Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs*, Ellis Horwood, Chichester.
- Palacios-Gomez F., Lasdon L., Engquist M. (1982), Non linear optimization by successive linear programming, *Management Sci.*, 28, 1106-1120.
- Pareto V. (1896), *Cours d'economie Politique*, Rouge, Lausanne, Switzerland.
- Polak E. (1997), *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*, Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA.
- Powell M.J.D. (1978a), The Convergence of Variable Metric Methods for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, in O.L. Mangasarian, R.R. Meyer, S.M. Robinson (eds.), *Nonlinear Programming*, Vol. 3, Academic Press.

- Powell M.J.D. (1978b), A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations, in G.A.Watson (ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 630: Numerical Analysis Dundee 1977, Springer Verlag, Berlin.
- Powell M.J.D. (1983), Variable Metric Methods for Constrained Optimization, in A. Bachem, M. Grotchel, B. Korte (eds.), *Mathematical Programming: The State of the Art*, Springer Verlag, 288-311.
- Principato G. (2000), Le grandi infrastrutture idrauliche in Calabria alla luce dell'Accordo di Programma Quadro per il Ciclo integrato delle Acque, Giornata di studio sul completamento delle grandi opere idrauliche in Calabria – Sez. calabra dell'Associazione Idrotecnica Italiana, *Memorie e Studi*, BIOS, Cosenza, 324.
- Principato G. (2000), Stato di attuazione delle grandi infrastrutture idrauliche in Calabria con particolare riferimento al comprensorio Sibari-Crati, *Atti del 20° Corso di aggiornamento in Tecniche per la Difesa dall'inquinamento*, BIOS, Cosenza, 323-348.
- Principato (2001), Il sistema irriguo in Calabria, *Atti della Conferenza Internazionale "Acqua e irrigazione"*, Cremona, Sometti, Mantova.
- Principato G. (2001), *Intervento straordinario nel mezzogiorno – il caso Calabria ed il Progetto Speciale 26*, SUDGEST, Roma.
- Principato G. (2009), La programmazione degli invasi in Calabria, Giornata di studio su: Energia idroelettrica e ambiente, Università degli Studi della Calabria, Rende.
- Rakowska J., Haftka R. T., Watson L. T. (1991), Tracing the efficient curve for multi-objective control-structure optimization, *Computing Systems in Engineering*, 2, 461–471.
- Rinnooy Kan A.H.G., Timmer G.T. (1987a), Stochastic global optimization methods - part I: clustering methods, *Mathematical Programming*, (39), 27-56.
- Rinnooy Kan A.H.G., Timmer G.T. (1987b), Stochastic global optimization methods - part II: multi level methods, *Mathematical Programming*, (39), 57-78.
- Roefs T., Bodin T. (1970), Multireservoir operation studies, *Water Resour. Res.*, 6(2), 410-420.
- Schaible S. (1981), A survey of fractional Programming, in S. Schaible, W.T. Ziemba (eds.), *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, New York, 417-440.
- Schoen F. (1991), Stochastic techniques for global optimization: a survey of recent advances, *Journal of Global Optimization*, (1), 207-228.
- Shanno D.F. (1970), Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization, *Mathematics of Computing*, 24, 647-656.

- Shrestha B., Duckstein L., Stakhiv E. (1996), Fuzzy rule-based modelling of reservoir operation, *J. Water Resour. Plann. Manage.*, 122(4), 262- 269.
- Singh S. P., Sutton R. S. (1996), Reinforcement learning with replacing eligibility traces, *Machine Learning*, 22, 123-158.
- Sirangelo B. (2010), Variazioni della potenzialità idrica nei bacini meridionali nella logica delle regolazioni pluriennali, *Atti del 31° Corso di aggiornamento in Tecniche per la Difesa dall'inquinamento*, Nuova Bios, Cosenza, 617-639.
- Stedinger J., Sule B., Loucks D. (1984), Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization, *Water Resour. Res.*, 20(11), 1499-1505.
- Steri A.M. (2006), Un nuovo metodo per l'ottimizzazione globale, Tesi di dottorato, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Cagliari.
- Steuer E. R. (1989), *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, Krieger, Melbourne, Florida.
- Sutton R.S., Barto A.G. (2000), *Reinforcement Learning: an introduction*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, URL: <http://www.cse.iitm.ac.in/~cs670/book/the-book.html>.
- Tamburrini M. (2004), A Feasibility Study for a Microhydro Installation for the Strangford Lough Wildfowlers & Conservation Association, Energy Systems Research Unit Department of Mechanical Engineering University of Strathclyde, Glasgow, UK.
- Task Committee on Sustainability Criteria, Water Resources Planning and Management Division, ASCE, Working Group of UNESCO/IHP IV Project M-4.3 (1998), *Sustainability Criteria for Water Resource Systems*, ASCE Publications, Virginia.
- Tauxe G., Inman R., Mades D. (1980), Multiple objectives in reservoir operation, *J. Water Resour. Plan. Manage.*, 106(1), 225-238.
- Tegle A. (1992), Selecting a multicriterion decision making technique for watershed resources management, *Water Resources Bulletin*, 28(1), 129-140.
- Tejada-Guibert J., Johnson S., Stedinger, J. (1995), The value of hydrologic information in stochastic dynamic programming models of a multireservoir system, *Water Resour. Res.*, 31(10), 2571-2579.
- Terlaky T. (1996), *Interior point methods of mathematical programming*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.
- Vasiliadis H., Karamouz M. (1994), Demand-driven operation of reservoirs using uncertainty-based optimal operating policies, *J. Water Resour. Plan. Manage.*, 120(1), 101-114.

- Venkataraman P. (2009), *Applied Optimization with MATLAB Programming*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2nd edition.
- Waddington C.H. (1973), *OR in World War 2*, Elek Science, London, United Kingdom.
- Watkins C. J. C. H., Dayan, P. (1992), Q-learning, *Machine Learning*, 8, 279-292.
- Watkins C.J.C.H. (1989), Learning from Delayed Rewards, PhD thesis, Cambridge University, Cambridge, England.
- World Commission on Dams (2000), *Dams and development: A new framework for decision-making*, Earthscan Publications Ltd., London and Sterling, Va.
- Wurbs R. (1993), Reservoir-system simulation and optimization models, *J. Water Resour. Plan. Manage.*, 119(4), 455-472.
- Yeh W. (1985), Reservoir management and operations models: A state of-the-art review, *Water Resour. Res.*, 21(12), 1797–1818.
- Zeleny M. (1974), A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal, *Computers and Operations Research*, (1), 479-496.
- Zhang J., Kim N., Lasdon L. (1985), An improved successive linear programming algorithm, *Management Sci.*, 31, 1312- 1331.
- Zhang Joyce Li, Ponnambalam K. (2006), Hydro energy management optimization in a deregulated electricity market, *Optimization and Engineering*, 7(1), 47-61.