

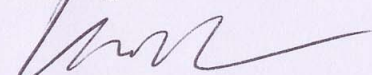
UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
Dipartimento di Pianificazione Territoriale

Dottorato di ricerca in
Tecnologie e Pianificazione Ambientale
–XXI Ciclo–
Settore Scientifico Disciplinare ICAR 05

**MODELLI QUANTITATIVI PER LA LOGISTICA:
APPLICAZIONI AI PROBLEMI DI FLUSSO
NELLE RETI MULTIMODALI DI TRASPORTO**

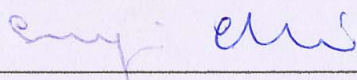
Supervisore

Prof. ing. Astarita Vittorio



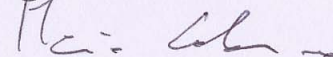
Coordinatore

Prof. ing. Sergio d'Elia



Dottorando

Ing. Cordasco Mario



ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Indice

Introduzione.....	3
Capitolo 1. I problemi di localizzazione su rete	8
1.1. Il problema della localizzazione dei nodi.....	9
1.2. Gli approcci utilizzati nella risoluzione del problema.....	11
1.3. I grafi e le reti come strumenti di modellizzazione.....	12
1.4. La classificazione dei modelli.....	16
1.5. I modelli dipendenti dallo spazio di decisione.....	17
1.5.1. Modelli continui	18
1.5.2. Modelli discreti	20
1.6. I modelli di localizzazione su rete.....	22
1.6.1. Modelli di localizzazione semplice	25
1.6.2. Modelli di copertura	26
1.6.3. Modelli p-mediana.....	27
1.6.4. Modelli p-centro	29
1.7. Stato della ricerca e riferimenti bibliografici.....	30
Capitolo 2. Il problema dell'assegnazione sulle reti di trasporto	33
2.0. Introduzione	34
2.1. Il sistema dei trasporti	34
2.2. La domanda di trasporto e la sua modellizzazione	36
2.2.1. I modelli di utilità casuale comportamentali.....	40
2.3. L'offerta di trasporto e la sua modellizzazione.....	42
2.3.1. La rete di trasporto.....	42
2.3.1. Costi e flussi degli archi.....	43
2.4. I modelli di assegnazione	46
2.4.1. Classificazione dei modelli	48
2.5. L'equilibrio di tipo deterministico delle reti.....	51
2.5.1. La soluzione del problema con domanda non elastica	52
2.5.2. La soluzione del problema con domanda elastica.....	52
Capitolo 3. La definizione e la formulazione del problema di trasporto- localizzazione.....	54
3.0. Introduzione	55
3.1. Formulazione del problema di localizzazione come problema di PL.....	55
3.1.1. Il modello di localizzazione scelto	57
3.1.2. La ricerca della soluzione ottima.....	58
3.1.3. La forma tabellare del problema di programmazione	65
3.2. Formulazione del problema di trasporto.....	70
3.2.1. I sistemi di offerta e di domanda di trasporto	71
3.2.2. La scelta del minimo percorso	74

3.2.3. Il calcolo dei flussi sulla rete.....	75
3.3. Il problema combinato di trasporto localizzazione	78
3.3.1. La modellizzazione grafica	80
3.3.2. Le caratteristiche della domanda.....	81
Capitolo 4. La proposta di un algoritmo risolutivo	83
4.1. Concetti principali e proprietà degli algoritmi.....	84
4.1.1. Diagrammi di flusso	85
4.1.2. Strutture algoritmiche	85
4.1.3. Efficienza e complessità computazionale	86
4.2. Definizione di un algoritmo per la risoluzione del problema di localizzazione	88
4.2.1. La procedura risolutiva del problema di localizzazione	89
4.2.2. La procedura per il calcolo dei flussi di equilibrio.....	91
4.2.3. Le caratteristiche dell'algoritmo risolutivo.....	94
Capitolo 5. La realizzazione di un programma di calcolo	99
5.1. Aspetti generali della programmazione.....	100
5.2. Principali caratteristiche di Visual Basic.....	102
5.3. Funzionalità del programma realizzato	105
5.4. La struttura del programma	105
5.5. Principali comandi	111
5.6. Input ed output del programma.....	112
Capitolo 6. Verifiche sperimentali su reti test.....	114
6.0. Introduzione	115
6.1. Le reti utilizzate	115
6.2. Assunzioni sulla domanda del sistema	120
6.3. I test effettuati	121
6.4. I test sulla procedura di localizzazione.....	124
6.4.1. Prove con diverse dimensioni delle reti.....	125
6.4.2. Prove con un numero diverso di nodi da localizzare.....	126
6.5. I test sulla procedura di assegnazione dei flussi	128
6.5.1. Prove con diversa domanda di trasporto.....	129
6.5.2. Prove con diverse funzioni di costo.....	130
6.5.3. Prove con diverse dimensioni delle reti.....	132
6.6. I test sulla procedura combinata di localizzazione-assegnazione	Errore. Il segnalibro non è definito.
6.6.1. Prove per diverse funzioni di costo e dimensioni delle reti.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
6.6.2. Prove per diversi numeri di nodi da localizzare e dimensioni delle reti	Errore. Il segnalibro non è definito.
Conclusioni.....	135
Bibliografia.....	137

Introduzione

Le reti di trasporto sono spesso soggette a fenomeni che in parte ne compromettono le prestazioni e che causano il malfunzionamento degli elementi che la compongono. L'efficienza di una determinata rete è legata alla sua capacità di far defluire i flussi di traffico che la interessano, limitando quelli che sono i fenomeni di sovraccarico dovuti al congestionamento degli archi. In genere i problemi di flusso di una qualunque rete possono essere di diversa natura e dettati da differenti cause e condizioni del sistema di trasporto e del sistema delle attività direttamente collegato ad esso. È noto che le modalità con cui si svolgono gli spostamenti tra le diverse coppie origine-destinazione di una rete risentono di tutte le attività che si svolgono sul territorio oggetto di analisi ed è necessario un approccio quantitativo affinché si possano compiere delle valutazioni utili nelle fasi di progettazione e di verifica.

Nel presente lavoro di tesi si è posta l'attenzione su un problema molto diffuso della logistica che riguarda le reti di trasporto ad un livello di scala territoriale non ampio. La localizzazione di nodi attrattori-generatori di elevati volumi di traffico appartiene ai problemi di pianificazione sia di tipo strategico che di tipo tattico-operativo. Quando le analisi sono condotte preventivamente alla realizzazione del nodo o dei nodi da localizzare, l'approccio è di tipo strategico e la formulazione nonché la risoluzione del problema necessita di modelli e metodi quantitativi che appartengono sia all'ingegneria dei sistemi di trasporto che all'organizzazione dei sistemi logistici.

Data la vastità dei casi reali in cui è possibile definire un problema di localizzazione, ognuno dei quali con particolari caratteristiche in termini di variabili ed obiettivi da raggiungere, gli approcci utilizzati nella risoluzione dei diversi problemi possono tenere conto sia di aspetti puramente quantitativi che di aspetti puramente qualitativi. I primi sono legati alle formulazioni di tipo matematico nelle quali sono considerati esclusivamente gli aspetti che possono essere contraddistinti

da una grandezza fisica, osservabile e misurabile; i secondi invece considerano anche valutazioni di aspetti non misurabili univocamente ma legati a pareri e considerazioni del tutto soggettive.

In generale il problema di localizzazione è un problema molto ampio in cui rientrano diverse valutazioni che vanno ben oltre il calcolo matematico. Pertanto è corretto inquadrare il problema localizzativo all'interno di analisi e valutazioni più ampie attraverso quelli che sono gli strumenti di valutazione noti in letteratura ed applicabili a molti altri problemi. In cui si deve compiere una scelta fra diverse alternative o progetti, cui allocare le limitate risorse disponibili.

Le decisioni di localizzazione rientrano nell'ambito della programmazione a medio-lungo termine e coincidono con tutti i problemi logistici in cui si ha un insieme di clienti che, allocati in una data area geografica, domandano uno specifico prodotto o servizio; tale domanda deve essere soddisfatta da uno o più centri la cui posizione non è nota. Dato un insieme di centri erogatori di servizi e dato un insieme di utenti da servire, si intende individuare quali centri di servizio devono essere usati o aperti e quali utenti devono essere serviti da ciascun centro per ottenere vantaggi in termini economici.

Obiettivo principale del lavoro qui presentato è risolvere un problema localizzativo tenendo conto delle condizioni di traffico presenti sulla rete di trasporto considerata. La formulazione del problema non è semplice; nei problemi di localizzazione su rete occorre servirsi di strumenti capaci di modellizzare i problemi da risolvere attraverso delle esemplificazioni basate su schemi. Essi riescono a rappresentare gli elementi coinvolti e le relazioni che li legano mediante strutture grafiche semplici ed intuitive. Con l'uso dei grafi è perciò possibile risolvere problemi anche molto complessi che altrimenti sarebbe difficile determinare.

La localizzazione di un nodo avviene sempre in un sistema di trasporto. Affinché il nodo sia collegato ed accessibile dagli utenti del servizio offerto dall'attività localizzata la funzione assolta dal trasporto è fondamentale. I sistemi di trasporto, infatti, assicurano i collegamenti con il territorio in cui l'attività si svolge, costituendo un elemento fondamentale in fase di pianificazione strategica. Il traffico presente sulle reti di trasporto incide notevolmente sui costi di raggiungibilità di un

nodo, soprattutto nel caso in cui esso sia attrattore e/o generatore di elevati flussi. Calcolare il numero di spostamenti sugli archi della rete risulta essere un'operazione estremamente importante in tutti gli studi di localizzazione. Nel caso specifico si vuole definire un problema di localizzazione su rete che tenga conto delle condizioni di traffico della stessa attraverso le tecniche e la teoria della programmazione lineare.

La metodologia proposta prevede l'individuazione della soluzione di un duplice problema di localizzazione e determinazione dei flussi di equilibrio generati dal nodo o dai nodi localizzati. Il problema della progettazione di un sistema logistico per una data rete di trasporto si presenta come un problema di calcolo dei flussi di equilibrio di trasporto in cui si tiene conto delle possibili variazioni della posizione del/dei nodo/i logistico/i di servizio. Al fine della descrizione del funzionamento dell'intero sistema l'approccio ingegneristico fa sì che il problema reale, complesso, venga semplificato attraverso opportune considerazioni senza però perdere i legami relazionali ritenuti importanti. In tal senso l'individuazione di procedure di calcolo consente di risolvere un problema tipicamente logistico come quello della localizzazione dei nodi, rispettando i vincoli determinati dall'interazione tra la domanda e l'offerta di trasporto della rete.

Il problema combinato della localizzazione e dell'assegnazione dei flussi su una data rete di trasporto è di difficile risoluzione. I calcoli da effettuare sono complessi, necessitano di fasi iterative e, dato l'elevato numero di dati e parametri in gioco, non sono eseguibili manualmente. Anche problemi che riguardano reti di piccole dimensioni presentano una elevata difficoltà computazionale. Inoltre, la formulazione del problema fa sì che gli strumenti risolutivi di calcolo debbano essere basati su procedure algoritmiche in grado di ridurre i tempi di calcolo e garantire l'individuazione della soluzione del problema. Solo attraverso l'utilizzo di algoritmi di calcolo è possibile determinare il problema posto. Naturalmente è anche necessario disporre di strumenti informatici in grado di supportare le procedure algoritmiche a cui si fa riferimento.

Nel presente lavoro di tesi la scelta compiuta per la realizzazione di un programma di calcolo in grado di risolvere i problemi formulati in precedenza è ricaduta sul linguaggio Visual Basic. Il programma realizzato, sfruttando le

potenzialità dell'ambiente di lavoro, consente di risolvere il problema posto e realizzare un software in grado di eseguire contemporaneamente procedure di calcolo e di visualizzazione particolarmente utili per chi lo utilizza. Attraverso i modelli e gli algoritmi, il programma formula e risolve i problemi di localizzazione, di calcolo dei flussi di equilibrio ed il problema combinato di assegnazione-localizzazione.

Infine è necessario verificare le procedure implementate ed il programma di calcolo attraverso delle prove sperimentali condotte su delle reti test non reali. Utilizzando reti di differenti dimensioni e caratteristiche, è possibile testare le prove sperimentali sono state compiute per testare le procedure di calcolo di localizzazione e di calcolo dei flussi di equilibrio nonché evidenziare come la scelta del tipo di funzione di costo incida nella ricerca delle soluzioni del problema. In questo ultimo caso è utile valutare i risultati dell'efficienza degli algoritmi attraverso un'analisi di sensitività rispetto ai parametri alfa e beta che generalmente compaiono nelle diverse funzioni di costo. In questo ultimo caso è utile valutare i risultati dell'efficienza degli algoritmi attraverso un'analisi di sensitività rispetto ai parametri che generalmente compaiono nelle diverse funzioni di costo.

Il lavoro di tesi si compone di sei capitoli. I primi due presentano i principali modelli con cui è possibile formulare i problemi di localizzazione ed assegnazione dei flussi ad una rete di trasporto. In particolare, nel primo capitolo viene descritto il problema della localizzazione, gli strumenti con cui esso può essere modellizzato ed una classificazione dei modelli di ottimizzazione che permettono la sua risoluzione. In seguito, il secondo capitolo contiene una descrizione dei principali aspetti dei sistemi di trasporto. Le modellizzazioni con cui vengono rappresentate la domanda e l'offerta di trasporto consentono di risolvere il problema di equilibrio di tipo deterministico.

Il terzo capitolo riguarda la definizione e la formulazione del problema combinato di trasporto-localizzazione. Attraverso gli strumenti propri della programmazione lineare il problema localizzativo può essere risolto con l'uso degli algoritmi della ricerca operativa, mentre il problema di trasporto, mediante opportune assunzioni, consente il calcolo dei flussi generati. Nel quarto capitolo si dà spazio alle procedure da utilizzare nelle fasi risolutive sottoforma di algoritmi. Le istruzioni da eseguire

sono numerose ed il loro svolgimento è reso possibile da strutture algoritmiche efficienti in grado di determinare la soluzione cercata. gli algoritmi definiti, tradotti in linguaggio macchina, costituiscono le basi del programma di calcolo realizzato. Il capitolo cinque presenta le principali caratteristiche del programma, la sua struttura nonché i comandi ed i controlli di visualizzazione creati appositamente per l'utente.

Infine, l'ultimo capitolo è dedicato alle verifiche sperimentali condotte. Esse fanno riferimento a reti test di diverse dimensioni e sono suddivise in base alle procedure analizzate: vengono riportati i risultati della localizzazione, del calcolo dei flussi di trasporto e del problema complesso di localizzazione-assegnazione.

Capitolo 1. I problemi di localizzazione su rete

1.1. Il problema della localizzazione dei nodi

Generalmente i problemi di localizzazione coincidono con tutti i problemi logistici in cui si ha un insieme di clienti che, allocati in una data area geografica, domandano uno specifico prodotto o servizio; tale domanda deve essere soddisfatta da uno o più centri la cui posizione non è nota.

Per motivi puramente semplificativi ogni problema di localizzazione viene schematizzato, utilizzando quelli che sono gli strumenti e le tecniche della teoria dei grafi, ottenendo formulazioni in grado di definire tutte le relazioni funzionali ed operative degli elementi considerati. Per questo motivo, solitamente, gli elementi del problema che coincidono con i punti di domanda ed i punti eroganti i servizi coincidono con i nodi di un grafo, mentre i collegamenti che legano essi vengono identificati con gli archi dello stesso. Il problema è dunque rappresentabile con strutture e relazioni matematiche che prevedono la definizione di una rete in cui ad ogni arco è possibile associare una qualunque grandezza fisica (lunghezza, costo, flusso, tempo di percorrenza) e ad ogni nodo una quantità da scambiare.

I problemi di localizzazione dei nodi in letteratura sono conosciuti con la dicitura *facility location problems*; con essa viene indicata una lunga serie di problemi che riguardano l'organizzazione dei sistemi logistici. Dato un insieme di centri erogatori di servizi e dato un insieme di utenti da servire, si intende rispondere alle domande:

- quali centri di servizio devono essere usati o aperti?
- i centri sono in grado di fornire il servizio per la data richiesta?
- quali utenti devono essere serviti da ciascun centro per ottenere vantaggi in termini economici?

La soluzione del problema prevede di localizzare un punto della rete che minimizzi o massimizzi una funzione che metta in relazione le grandezze che contraddistinguono i nodi e gli archi, tenendo conto di tutte le restrizioni ed i vincoli presenti. Nel seguito sono illustrati una serie di casi che, sottoforma di problemi di localizzazione, frequentemente nella realtà costituiscono casi pratici da risolvere:

- *Stabilimenti industriali*: si tratta di localizzare gli impianti per garantire la raggiungibilità della clientela in un tempo prestabilito oppure per essere più vicini possibile ai centri di raccolta delle materie prime (minimizzazione dei costi di trasporto), sempre nell'ottica del minimo costo. Tali problemi spesso riguardano le lunghe distanze.
- *Magazzini*: la localizzazione avviene secondo criteri di ordine temporale (ad esempio secondo la deperibilità delle merci), o di ordine spaziale (come la vicinanza dei punti vendita al dettaglio dalla popolazione da servire).
- *Depositi*: sono problemi che riguardano sia la localizzazione dei magazzini regionali, che dei centri di distribuzione. Rispetto al problema precedente ha un campo di applicazione spaziale più vasto.
- *Grandi magazzini o centri commerciali*: si intende la localizzazione dei magazzini regionali che vendono al dettaglio. In altre parole si definiscono i punti di attrazione di mercato, cioè si valuta l'opportunità di far sorgere un punto vendita di grandi dimensioni dove ci sia domanda adeguata di beni (il caso più banale è la localizzazione di un grande magazzino vicino ad un agglomerato urbano).
- *Scuole*: l'obiettivo è garantire un servizio minimo alla popolazione residente in una determinata regione. Nella fattispecie si vuole che la popolazione in età scolare possa usufruire del servizio, sostenendo un costo ragionevole per raggiungerla.
- *Uffici di pubblica utilità*: sono simili ai precedenti. Si pensi alla localizzazione di un ufficio comunale al centro di un nucleo urbano, facilmente raggiungibile dall'intera comunità. Nel caso di nuclei abitativi sparsi il problema non è più di immediata risoluzione, considerando l'esistenza di vincoli riguardanti i siti edificabili.
- *Strutture ospedaliere*: sono problemi che si modellano, minimizzando somme di tempi o di spazi. Nel caso di costi temporali si vuole che la popolazione possa raggiungere il centro ospedaliero nel minimo tempo possibile, che si ottiene ponendo come obiettivo la minimizzazione della somma dei tempi che ogni persona impiega a raggiungere l'ospedale.

- *Centri di pronto intervento*: in questi problemi i centri erogatori del servizio devono garantire l'intervento senza penalizzare i punti maggiormente distanti. In questi casi si tratta di minimizzare la massima distanza del più lontano utente dal luogo della rimessa o della centrale.
- *Discariche di rifiuti*: l'obiettivo è localizzare una discarica il più lontano possibile dai centri urbani. Si tratta di massimizzare la distanza minore o quella media di un abitato dalla discarica.
- *Nodi di trasporto*: è una ricca classe di problemi per la risoluzione dei quali è necessario definire il tipo di collegamento ed il costo associato ad esso così come per i precedenti problemi si possono avere dei casi in cui è necessario garantire il servizio senza preoccuparsi dei costi e casi in cui bisogna ridurli al minimo valore.

1.2. Gli approcci utilizzati nella risoluzione del problema

Data la vastità dei casi reali in cui è possibile definire un problema di localizzazione, ognuno dei quali con particolari caratteristiche in termini di variabili ed obiettivi da raggiungere, gli approcci utilizzati nella risoluzione dei diversi problemi possono tenere conto sia di aspetti puramente quantitativi che di aspetti puramente qualitativi. I primi sono legati alle formulazioni di tipo matematico nelle quali sono considerati esclusivamente gli aspetti che possono essere contraddistinti da una grandezza fisica, osservabile e misurabile; i secondi invece considerano anche valutazioni di aspetti non misurabili univocamente ma legati a pareri e considerazioni del tutto soggettive.

In generale il problema di localizzazione è un problema molto ampio in cui rientrano diverse valutazioni che vanno ben oltre il calcolo matematico. Pertanto è corretto inquadrare il problema localizzativo all'interno di analisi e valutazioni più ampie attraverso quelli che sono gli strumenti di valutazione noti in letteratura ed applicabili a molti altri problemi in cui si deve compiere una scelta fra diverse alternative o progetti, cui allocare le limitate risorse disponibili. In casi di questo genere diventa essenziale disporre di strumenti metodologici che consentano di analizzare le alternative da diversi punti di vista e di valutarne i risultati previsti a fronte delle risorse da impiegarsi, allo

scopo di scegliere la migliore o le migliori. Pertanto è possibile individuare tre classi di approcci utilizzati:

- esclusivamente matematico,
- matematico e qualitativo,
- esclusivamente qualitativo.

Alla prima classe di metodi appartengono tutte le formulazioni basate sulle tecniche di ottimizzazione e che quindi prevedono l'utilizzo degli strumenti della programmazione matematica. In questi casi è necessario poter disporre di dati quantitativi con cui formulare il problema e calcolare la soluzione nonché definire le relazioni matematiche con cui rappresentare le condizioni di vincolo e degli obiettivi da minimizzare/massimizzare. In questi casi è utile e frequente l'utilizzo di metodi grafici in grado di schematizzare e modellizzare al meglio i problemi. I modelli grafici hanno il vantaggio che sono più semplici, immediati ed in grado di utilizzare le tecniche della teoria dei grafi, strumento potente ed affidabile nella modellizzazione di problemi complessi.

Nel caso invece vengano considerati anche aspetti legati a valutazioni soggettive e difficilmente misurabili, se non con misure pensate ad hoc, l'approccio è puramente qualitativo. In letteratura le tecniche con cui nel corso degli anni sono stati affinati i metodi di ricerca delle soluzioni sono tanti ed applicabili non solo ai problemi di localizzazione. A questa famiglia di metodi appartengono tutti gli strumenti di valutazione come le analisi costi-benefici o le analisi multicriteria.

Il presente lavoro di tesi utilizza un approccio quantitativo al problema, basato su una modellizzazione matematica di ottimizzazione. Nei paragrafi successivi vengono presentati tutti gli aspetti inerenti il tipo di modellizzazione scelto.

1.3. I grafi e le reti come strumenti di modellizzazione

Nei problemi di localizzazione su rete occorre servirsi di strumenti capaci di modellizzare i problemi da risolvere attraverso delle esemplificazioni basate su schemi.

Essi riescono a rappresentare gli elementi coinvolti e le relazioni che li legano mediante strutture grafiche semplici ed intuitive. Con l'uso dei grafi è perciò possibile risolvere problemi anche molto complessi che altrimenti sarebbe difficile determinare. È utile a tal proposito richiamare alcuni concetti e definizioni di base della teoria dei grafi.

In questo paragrafo vengono fornite solo alcune definizioni di base della teoria utili per la comprensione dei numerosi concetti esposti nelle parti successive del lavoro di tesi. Inizialmente vengono definiti i grafi con tutti i rispettivi elementi costitutivi, nonché i termini con cui in letteratura sono individuate le particolari caratteristiche di ognuno. In fase successiva sono presentati i concetti di rete e di flusso su una data rete.

Storicamente la *teoria dei grafi* nasce nel sec. XVIII, applicata soprattutto a giochi e passatempi (i ponti di Königsberg o il problema dei quattro colori). Oggi, attraverso il diffondersi di tecniche che utilizzano algoritmi risolutivi, costituisce un supporto conoscitivo di fondamentale importanza. Attraverso i grafi, infatti, è possibile modellare i numerosi problemi rappresentabili con punti connessi tra loro.

Intuitivamente un grafo può essere definito come un insieme finito di punti ed un insieme di segmenti orientati che uniscono coppie di punti. I punti vengono chiamati *nodi* o *vertici* del grafo ed i segmenti *archi* del grafo; il verso del segmento orienta l'arco corrispondente, mentre se non si tiene conto dell'orientamento degli archi il grafo è detto *multigrafo* o *non orientato*, mentre gli archi sono detti *spigoli*. Tra due nodi possono esistere più archi orientati nello stesso verso; il numero massimo di archi orientati nello stesso verso presenti tra due nodi si indica con p e il grafo è detto p -*grafo*. Il numero di nodi è detto *ordine* del grafo e si indica con n ; il numero di archi si indica con m .

Al fine di avere un quadro più dettagliato e completo, inoltre si riportano le seguenti definizioni utilizzate nei successivi capitoli:

Grafo. È una coppia $G(N,A)$, dove $N = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di elementi detti nodi o vertici e $A = \{a_{ij} = (v_i, v_j) | v_i, v_j \in N\}$ è una famiglia di elementi del prodotto cartesiano $N \times N$ detti archi.

Nodo iniziale, primo nodo o predecessore. Dato un arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ il nodo v_i è detto nodo iniziale, primo nodo o predecessore del nodo v_j ; il nodo v_j è detto nodo finale, secondo nodo o successore del nodo v_i .

Nodi adiacenti. Dato un arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ i nodi v_i e v_j sono detti adiacenti. L'arco a_{ij} è detto uscente da v_i ed entrante in v_j .

Cappio. Un arco $a_{ii} = (v_i, v_i)$, in cui cioè il nodo iniziale e finale coincidono, è detto cappio.

Archi adiacenti. Due archi che hanno un nodo in comune sono detti adiacenti.

Nodi successori. L'insieme dei secondi nodi degli archi uscenti da un nodo v_i è detto insieme dei successori di v_i e si indica con $\omega^+(i)$.

Nodi predecessori. L'insieme dei primi nodi degli archi entranti in un nodo v_i è detto insieme dei predecessori di v_i e si indica con $\omega^-(i)$.

Cammino. Una sequenza di archi aventi ciascuno un nodo in comune con l'arco precedente e l'altro nodo in comune con l'arco seguente è detto cammino; il numero di archi è detto lunghezza del cammino.

Cammino semplice. Un cammino in cui nessun arco viene percorso più di una volta è detto semplice; se nessun nodo viene incontrato più di una volta è detto elementare.

Ciclo. Un cammino semplice in cui il primo e l'ultimo nodo coincidono è detto ciclo; se il cammino è elementare il ciclo è detto elementare.

Cammino e ciclo orientato. Un cammino o un ciclo in cui tutti gli archi sono percorsi secondo il proprio orientamento è detto orientato, altrimenti è detto non orientato.

Accessibilità di un nodo. Se esiste un cammino tra i nodi v_i e v_j , v_j è detto accessibile da v_i e viceversa; se esiste un cammino orientato dal nodo v_i al nodo v_j , v_j è detto fortemente accessibile da v_i ma non viceversa.

Grafo semplice. Un grafo $G(N,A)$ privo di cappi e in cui esiste al più un arco tra ogni coppia di nodi è detto semplice.

Grafo connesso. Un grafo $G(N,A)$ è detto connesso se ogni nodo è accessibile dagli altri; è detto fortemente connesso se ogni nodo è fortemente accessibile dagli altri.

Grafo completo. Un grafo $G(N,A)$ è detto completo se tra ogni coppia di nodi esiste almeno un arco.

Albero. Un multigrafo $G(N,A)$ connesso e privo di cicli elementari è detto albero.

Foresta. Un multigrafo è detto foresta se è formato dall'unione di alberi disgiunti.

Grafo parziale. Dato un grafo $G(N,A)$ e un sottoinsieme $A' \subset A$, il grafo $G(N,A')$ ottenuto eliminando dal grafo G gli archi dell'insieme $A \setminus A'$ è detto grafo parziale generato da A' .

Spanning tree o albero ricoprente. Dato un grafo connesso $G(N,A)$ un grafo parziale $G(N,A')$ connesso e privo di cicli elementari è detto spanning tree o albero ricoprente o albero parziale.

Taglio. Dato un grafo $G(N,A)$ e una bipartizione N' e N'' dell'insieme N , l'insieme degli archi aventi un estremo in N' e l'altro in N'' è detto taglio.

Il concetto di *rete* è fortemente legato a quello di grafo. Una rete, infatti, è un grafo $G(N,A)$ nel quale ad ogni arco $a_{ij} \in A$ si associano tre valori interi l_{ij} , u_{ij} , c_{ij} detti rispettivamente *capacità minima*, *capacità massima* e *costo unitario dell'arco* e ad ogni nodo v_i si associa un valore intero b_i ; se $b_i > 0$ il nodo v_i è detto *sorgente* e b_i è detta *disponibilità*, se $b_i < 0$ il nodo v_i è detto *pozzo* e b_i è detta *domanda*, se $b_i = 0$ il nodo v_i è detto di *attraversamento*.

Data una rete $G(N,A)$ si definisce *flusso* sulla rete una funzione $x : A \rightarrow N$ che ad ogni arco a_{ij} associa un valore intero x_{ij} detto flusso sull'arco, in modo che siano soddisfatti i vincoli di capacità degli archi, in base ai quali il flusso di ogni arco sia compreso tra la capacità minima e la capacità massima dell'arco, ed i vincoli di bilanciamento nei nodi, cioè la differenza tra il flusso uscente e il flusso entrante in ciascun nodo sia uguale alla disponibilità o alla domanda. Al flusso sull'arco a_{ij} si associa un costo dato dal prodotto tra il costo unitario c_{ij} e il flusso x_{ij} ; la somma dei costi di tutti gli archi è detta costo associato al flusso x . Pertanto i vincoli ed il costo possono essere espressi nelle forme seguenti:

- vincoli di capacità degli archi,

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall a_{ij} \in A$$

- vincoli di bilanciamento nei nodi,

$$\sum_{j \in \omega^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \omega^-(i)} x_{ji} \quad \forall v_i \in N$$

- costo associato al flusso,

$$\sum_{v_i \in N} \sum_{j \in \omega^+(i)} c_{ij} x_{ji} \quad \forall v_i \in N$$

I grafi e le reti così definite, consentono di formulare e risolvere i problemi di localizzazione attraverso dei modelli matematici di diverso tipo. Di seguito sono riportati quelli che vengono utilizzati nei casi più complessi.

1.4. La classificazione dei modelli

I modelli matematici con cui vengono risolti tutti i problemi di localizzazione sono di ottimizzazione ed appartengono ai modelli di supporto alle decisioni di pianificazione delle attività e dei servizi che si svolgono su un determinato territorio. In particolare, suddividendo le possibili decisioni in tre livelli di pianificazione, strategica, tattica ed operativa, essi appartengono ai modelli di tipo strategico (Hribar e Daskin, 1997). Le decisioni assunte a tale livello hanno effetto su quelle appartenenti ai livelli inferiori ed hanno tempi di applicazione di medio-lungo termine. In Crainic e Laporte (1997) è proposta una classificazione utile ad inquadrare il problema della localizzazione all'interno del più ampio framework in cui rientrano tutti i problemi di ottimizzazione legati al trasferimento delle merci.

Nel corso degli anni i modelli di localizzazione sono stati formulati ed analizzati sotto varie forme e con diversi strumenti. Sebbene cambino i contesti in cui sono stati utilizzati, alcune loro caratteristiche rimangono invariate da caso a caso: lo spazio su cui vengono definiti, caratterizzato da una specifica metrica, la posizione nota nello spazio dei clienti da servire ed i potenziali punti in cui è possibile localizzare le facilities in accordo con la funzione obiettivo definita (ReVelle et al., 2007). Dei validi riferimenti in tal senso possono essere individuati nelle pubblicazioni di Daskin (1995) e di ReVelle et Eiselt (2005).

La classificazione maggiormente ricorrente è quella in cui i modelli vengono suddivisi in base all'obiettivo dei soggetti decisori ed allo spazio decisionale sui quali vengono definiti. Essa prevede quattro categorie di modelli:

- *di analisi*, si basano su molte assunzioni esemplificative. Solitamente sono caratterizzati da una domanda uniformemente distribuita e con costi fissi di attivazione dei nodi da localizzare e costi dei collegamenti riferiti alle distanze.
- *continui*, basati su assunzioni in base alle quali la domanda è distribuita in maniera continua, mentre i punti potenziali di localizzazione in maniera discreta.
- *di rete*, lo spazio di ricerca delle soluzioni viene ridotto agli elementi di una rete quali archi e nodi.
- *discreti*, sia la domanda che i punti da localizzare appartengono ad insiemi finiti di elementi.

Appare evidente come l'elemento discriminante tra i diversi modelli sia lo spazio sul quale vengono definiti. Di seguito vengono ulteriormente chiariti alcuni aspetti legati al campo in cui avvengono le diverse formulazioni.

1.5. I modelli dipendenti dallo spazio di decisione

Le caratteristiche dello spazio decisionale su cui sono definite le variabili di ogni problema di localizzazione costituiscono un elemento discriminante fondamentale. Lo spazio di decisione coincide con il dominio delle variabili e pone dei primi vincoli alla soluzione da individuare. In generale esistono due tipi fondamentali di problemi, definiti dai seguenti modelli:

- modelli continui,
- modelli discreti.

Nei primi, conosciuti con la dicitura *continuous location problem*, le variabili decisionali sono definite su spazi continui, a differenza dei secondi, *discrete location problem*, in cui le variabili hanno domini di definizione costituiti da valori discreti. In

altri termini, nei modelli continui le alternative di decisione variano con continuità poiché le variabili sono intrinsecamente continue. In genere variabili di questo tipo rappresentano grandezze come il tempo, la capacità, il volume. Così, ad esempio, se si considera come spazio decisionale lo spazio euclideo, la localizzazione nel continuo prevede che i nodi domanda e di servizio possano assumere una posizione qualunque dello spazio ed i costi siano espressi in termini di distanze tra i punti secondo una data norma.

Nei modelli di localizzazione discreti, invece, solo alcuni punti dello spazio possono essere ritenuti nodi, escludendo larga parte dello spazio e limitandolo ad un insieme finito di punti. A questa categoria di modelli appartengono i modelli di localizzazione su rete indicati e maggiormente conosciuti con il termine di *network location problem*. Di seguito vengono approfonditi alcuni aspetti dei modelli con alcuni esempi.

1.5.1. Modelli continui

I modelli continui assumono che i nodi possano essere localizzati in ogni punto dell'area considerata, mentre la domanda è di tipo discreto. Il modello maggiormente conosciuto, appartenente a questa classe di problemi, è il problema di *Weber* nel quale è richiesta la localizzazione di un singolo nodo a servizio di m punti domanda di coordinate (x_0, y_0) che minimizzi la distanza totale pesata in base alla domanda. In Drezner et al. (2001) è presentata una rassegna degli algoritmi risolutivi del problema ed importanti osservazioni circa l'estensione del problema ad altri casi di studio.

Il problema prevede di minimizzare una funzione, data dalla somma delle distanze dei punti da localizzare dai rimanenti punti da servire, in uno spazio decisionale di tipo euclideo. La formulazione proposta è indicata dalla relazione (1.1):

$$\min_{x \in R^k} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot |a_i - x| \quad (1.1)$$

La distanza tra il generico punto a_i dello spazio ed il punto da localizzare x è indicata con $|a_i - x|$, mentre il peso che può essere attribuito alla distanza con ω_i . La variabile x , soluzione del problema, è definita in R^k , mentre il peso $\omega_i \in R$.

Se invece nel problema proposto si ha la necessità di rendere minima la massima distanza dal punto da localizzare, utilizzando la notazione precedente, la funzione obiettivo assume la forma indicata dalla (1.2).

$$\min_{x \in R^k} \max_{i=1 \dots k} \sum_{i=1}^n |a_i - x| \quad (1.2)$$

Si è posto $\omega_i = 1, \forall i$ -esimo punto considerato.

Geometricamente il problema equivale a determinare il cerchio di raggio minimo che contenga tutti i punti a_i . La soluzione può essere individuata impostando come condizione iniziale un raggio sufficientemente grande da includere tutti i punti a_i . Successivamente si procede diminuendo il raggio fino a quando uno dei punti non si trova sul perimetro del cerchio; se si sposta il cerchio, usando come perno il punto precedente (figura 1.1), un altro punto si troverà sul perimetro. bloccando il cerchio e, se possibile, restringendone il raggio fin tanto che un altro punto non tocca il perimetro, il cerchio così determinato rappresenterà la soluzione cercata.

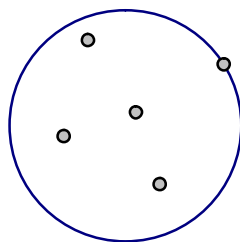


Figura 1.1: Primo passo per individuare la soluzione.

Esiste un caso in cui il metodo appena descritto fallisce: ci sono solo due punti, che appartengono entrambi al perimetro e sono diametralmente opposti (figura 1.2).

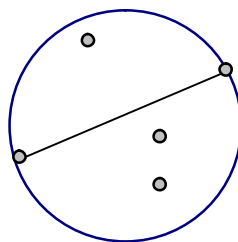


Figura 1.2: Caso di fallimento.

Dunque esiste una soluzione ottima, in cui o due o tre punti appartengono al perimetro del cerchio.

I modelli continui sono applicati in contesti limitati in cui il punto o i punti da localizzare possono assumere ogni posizione dello spazio. I campi applicativi variano: si pensi al problema comune di localizzare una videocamera o al posizionamento di strumenti di monitoraggio dell'inquinamento atmosferico.

1.5.2. Modelli discreti

Nei modelli discreti lo spazio di decisione è discreto, cioè solo alcuni punti dello spazio possono essere soluzione del problema. L'ipotesi fondamentale su cui si basano i problemi appartenenti a tale categoria prevede che esista un insieme discreto di punti domanda ed un insieme discreto di punti in cui è possibile localizzare il nodo. Generalmente i vincoli sulla localizzazione dei centri erogatori dei servizi definiscono tali insiemi, consentendo una loro risoluzione attraverso formulazioni di programmazione intera o mista.

Rispetto al caso dei problemi continui la riduzione dello spazio nel quale ricercare la soluzione del problema è notevole; infatti, se si considera un problema definito in \mathbb{R}^2 , definito cioè da due variabili decisionali, l'insieme delle soluzioni rappresentato in figura 1.3 è individuato dai vincoli rappresentati dai semi-spazi delle rette graficate.

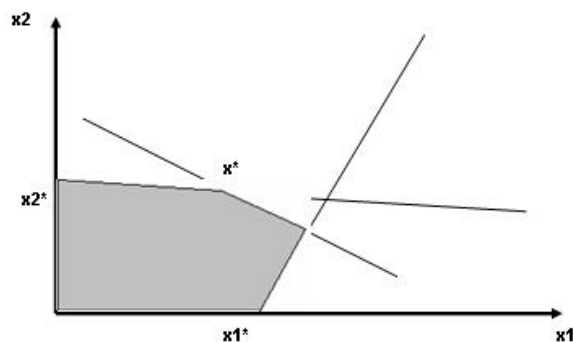


Figura 1.3: Modello continuo. Spazio decisionale nel caso di R^2 (in grigio).

Se il problema è ricondotto al caso discreto, lo spazio delle soluzioni è invece indicato in figura 1.4: è evidente che da un punto di vista della risoluzione del problema il guadagno è notevole. Ecco perché in molti casi reali si cerca sempre di utilizzare un modello discreto rispetto ad uno continuo.

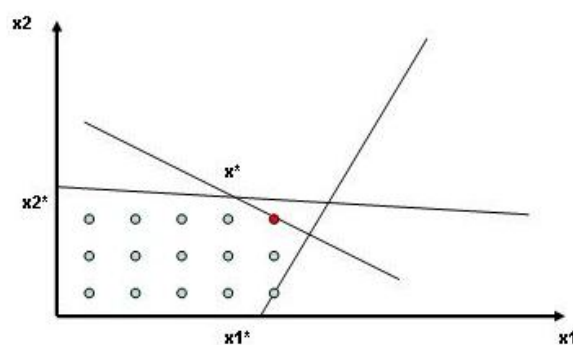


Figura 1.4. Spazio decisionale di un modello discreto nel caso di R^2 .

I modelli discreti si applicano in presenza di scelta tra alternative discrete ed hanno un maggior numero di applicazioni. Molti dei problemi associati alla modellistica discreta possono essere risolti all'ottimo solo attraverso un'enumerazione di tutte le alternative.

Altri metodi di soluzione, che non giungono in generale all'ottimo, procedono per successivi miglioramenti marginali della soluzione corrente. In questo ultimo caso si pone il problema di definire cosa sia un intorno di una soluzione corrente. Esistono alcuni, purtroppo pochi, problemi associati a modelli discreti che possono invece essere

risolti all'ottimo in tempi brevi, senza cioè ricorrere all'enumerazione delle possibili soluzioni.

Ad esempio se si vuole determinare il percorso minimo che passa per 70 città diverse e torna al punto di partenza, visitando ciascuna una ed una sola volta (noto *problema del commesso viaggiatore*) un algoritmo di soluzione che prevede la numerazione delle possibili presenta una difficoltà enorme, dato il numero delle sequenze alternative molto grande ($70!$, cioè le permutazioni di 70 numeri). In questi casi l'enumerazione esplicita delle soluzioni non è efficiente. In genere vengono utilizzati dei metodi di enumerazione implicita, in cui molti insiemi di soluzioni non sono esplorati in quanto certamente dominati da altre soluzioni. Anche per questi approcci non vi è però garanzia che una soluzione ottima possa essere trovata in tempi ragionevoli. In genere bisogna accontentarsi di metodi di soluzione euristici o di analizzare alcuni scenari, quando un'istanza di un problema difficile è troppo grande per potere enumerare, anche in modo implicito, tutte le possibili soluzioni. Viceversa, per i problemi semplici è consigliabile non accontentarsi di una soluzione che non sia ottima.

1.6. I modelli di localizzazione su rete

Se si rappresenta una rete mediante un grafo, definito come $G(V, E)$, dove V è l'insieme dei vertici, E l'insieme degli archi, ad ognuno dei quali è associato un costo c , è possibile definire un modello di localizzazione su rete. In generale l'obiettivo di tutti i modelli di localizzazione su rete consiste nel posizionare un punto, vincolato a stare o sui vertici della rete o sugli archi della stessa, minimizzando una funzione di costo opportunamente definita. Tali modelli godono della proprietà secondo la quale, se il grafo è orientato, l'ottimo si trova su un vertice; in altri termini sulle reti le posizioni in cui è possibile localizzare un nodo di servizio che minimizzi i costi totali sono quelle coincidenti con i nodi della rete stessa. Tale proprietà è valida anche quando i nodi da localizzare sono in numero superiore ad uno. Infatti i problemi *multi-facilities* possono essere considerati come problemi *single-facility* per partizioni della rete in un numero uguale ai centri da posizionare (è come avere dei modelli locali ad un centro).

Un problema di localizzazione su rete è ben definito e, pertanto, risolvibile quando sono noti in fase di formulazione:

- il grafo con cui rappresentare il problema;
- le variabili di decisione;
- i vincoli del problema e delle variabili;
- la funzione obiettivo da ottimizzare.

Le variabili decisionali sono le incognite del problema. Esse sono definite su domini di esistenza che dipendono dal tipo di problema da risolvere. Solitamente determinano se una facility è aperta o meno oppure se un collegamento è attivo o meno. Dunque i campi su cui sono definite le variabili di decisione sono intervalli continui del tipo $I = [0,1]$ o intervalli binari con valori pari a 0 o ad 1.

Affinché il problema ammetta una soluzione congruente alla realtà, è necessario soddisfare i vincoli rappresentati da relazioni matematiche. Essi sono definiti sia per le variabili che per le relazioni tra le variabili e sono indicati con equazioni e disequazioni di grado variabile. La funzione obiettivo è una funzione matematica che esprime il costo associabile al sistema localizzato. Esso varia con la scelta dei valori delle variabili decisionali e, di conseguenza, è il parametro cui si fa riferimento nella ricerca della soluzione ottimale. Infine la rete rappresenta graficamente l'intero problema, evidenziando posizioni e collegamenti di archi e nodi.

In base al tipo di formulazione matematica assunta dal problema, la localizzazione può essere di diverso tipo. In letteratura quattro sono i modelli a cui si fa riferimento:

- *modelli di localizzazione semplice (simple location problems)*. Situano gli impianti e ne definiscono il loro numero; problemi tipicamente associati con la disposizione di servizi con domanda uniformemente distribuita nello spazio.
- *modelli di copertura (covering problems)*. Situano gli impianti in modo che tutti i clienti siano serviti, coperti, dal/dai nodo/nodi localizzato/i; problemi tipicamente associati con la disposizione di servizi pubblici come uffici postali o scuole.

- *modelli di mediana (median problems)*. Situano gli impianti in modo da minimizzare la distanza pesata tra i punti di domanda e gli impianti di riferimento, problemi tipicamente associati al trasporto delle merci.
- *modelli di centro (center problems)*. Situano gli impianti in modo da minimizzare la massima distanza tra un punto di domanda e un impianto; problemi tipicamente legati alla disposizione di servizi di emergenza, come pronto soccorso o pompieri.

La scelta della formulazione del problema dipende quindi dal problema reale che necessita essere risolto. Nei primi due modelli il numero di centri da localizzare non è vincolo del problema ma uno dei risultati dello stesso. Chiaramente il problema si complica se è possibile aprire più di un servizio contemporaneamente: in questi casi, se vengono considerati solo i costi legati alle distanze, il valore della soluzione ottima decresce all'aumentare del numero dei centri di servizio aperti. Infatti, al limite, aprendo un centro in ogni località, si avrebbe un costo complessivo nullo.

Nei problemi di centro e di mediana la formulazione è simile solo che cambia il tipo di ottimizzazione da compiere. Nel primo caso si ha un problema di *min-sum*, nel secondo di *min-max* e si ha la necessità di tenere in considerazione solo il costo che separa i nodi sulla rete. Tale costo è una funzione della distanza e pertanto valgono le seguenti osservazioni. Se il grafo è un albero si verifica che la funzione distanza totale tra un vertice e un generico punto sull'albero, $d(V_i, x)$, è convessa (figura 1.5).

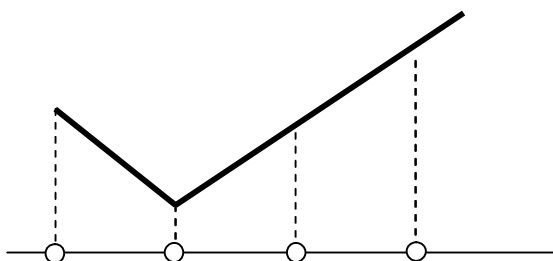


Figura 1.5: Minimo di una funzione convessa

Possiamo definire la funzione distanza totale come segue:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot d(V_i, x)$$

dove gli ω_i sono dei coefficienti di peso, $d(V_i, x)$ è la distanza convessa tra l' i -esimo vertice V_i ed il vertice incognita del problema x . Se $\omega_i > 0$ la somma risulta anch'essa convessa, allora il minimo locale corrisponde al globale.

È possibile, inoltre, distinguere i modelli di localizzazione anche in base ai costi che vengono considerati nelle procedure di calcolo (Tab. 1.1). I costi di attivazione dei centri da localizzare compaiono solo nei modelli di localizzazione semplice e di copertura. I costi di accesso sono legati alle distanze che separano i nodi del grafo.

Modello	costi di attivazione	costi di accesso
<i>Localizzazione semplice</i>	X	X
<i>Copertura</i>	X	
<i>Mediana</i>		X
<i>Centro</i>		X

Tabella 1.1. Presenza dei costi nei modelli di localizzazione

Di seguito sono illustrati più nel dettaglio i quattro modelli appena presentati.

1.6.1. Modelli di localizzazione semplice

Il problema può essere modellato su un grafo $G(V_1 \cup V_2, E)$, con V_1 insieme dei vertici che rappresentano i siti potenziali, con V_2 insieme dei vertici che rappresentano i clienti e con E insieme degli archi (i, j) , collegamento di costo minimo tra i nodi i e j . Nei modelli di localizzazione semplice sia la realizzazione del centro nel sito j che il suo accesso da parte del nodo i sono soggetti a un costo, rispettivamente c_j e c_{ij} . I centri attivati rappresentano un costo, ma il loro numero non è esplicitamente limitato. Se con x_{ij} si indica la variabile decisionale di attivazione del collegamento tra il nodo domanda i ed il nodo potenziale j e se con y_j viene indicata la variabile decisionale di attivazione del centro j -esimo, il problema di localizzazione semplice si scrive quindi:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j c_j x_j$$

s.v.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V_2 \quad (v.1.1)$$

$$x_{ij} \leq x_j \quad \forall i, j \in E \quad (v.1.2)$$

$$x_j, x_{ij} \in [0, 1] \quad \forall i \in V_2, j \in V_1 \quad (v.1.3)$$

La funzione obiettivo è data dalla somma dei costi di attivazione dei centri e dei costi dei collegamenti attivati. Il vincolo (v. 1.1) garantisce che ogni cliente i sia servito; il vincolo (v. 1.2) garantisce che venga attivato il centro j , mentre i vincoli (v. 1.3) ammettono esclusivamente variabili di tipo binario.

Un caso più complesso è quello in cui occorre tenere conto del fatto che i collegamenti tra i nodi della rete hanno una capacità limitata. Il problema in questo caso è detto di localizzazione con vincoli di capacità sugli archi. Il flusso complessivo che attraversa il generico link tra il nodo i e il nodo j non può superare la capacità u_{ij} del link. Il problema si può riformulare come flusso a costo minimo su una rete ottenuta da quella iniziale aggiungendo un nodo fittizio che funge da sorgente e che fornisce alla rete una quantità di flusso attraverso gli archi collegati.

1.6.2. Modelli di copertura

Il primo modello di copertura è stato proposto da Toregas et al. (1971), mentre la prima formulazione in cui compare anche il vincolo sul massimo numero di centri da aprire è da attribuire a Church et ReVelle (1974). Anche in questo caso si può modellare il problema con le precedenti indicazioni (paragrafo 1.5.1.). In questo caso però, il problema garantisce l'erogazione di un determinato servizio in modo tale che ciascun utente possa considerarsi servito soltanto se esso è situato entro un massimo costo dal nodo logistico più vicino.

Siano f_j , con $j \in V_1$, il costo di apertura del centro j , c_i , con $i \in V_2$, la penalità associata al mancato servizio del cliente i , e a_{ij} una costante binaria pari a 1 se il nodo logistico eventualmente aperto nel vertice j può servire il cliente in i , 0 altrimenti. In

altri termini $a_{ij} = 1$ se $t_{ij} < T$, con T tempo massimo definito dall'utente, altrimenti $a_{ij} = 0$. Le variabili sono: y_j , con $j \in V_1$, binaria e pari a 1 se si apre il centro j , 0 altrimenti; x_i , con $i \in V_2$, binaria anch'essa e pari a 1 se il cliente i non viene servito, 0 altrimenti. Ne risulta:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j f_j y_j + \sum_i p_i x_i \\ \text{s.v.} \quad & \\ \sum_j a_{ij} y_j + x_i = 1 \quad & \forall i \in V_2 \quad (v.1.1) \\ y_j \in [0, 1] \quad & \forall j \in V_1 \quad (v.1.2) \\ x_i \in [0, 1] \quad & \forall i \in V_2 \quad (v.1.3) \end{aligned}$$

La funzione obiettivo è la somma dei costi di apertura dei centri erogatori di servizi che si è deciso di aprire e delle penalità corrispondenti al mancato servizio di alcuni clienti. I vincoli (v. 1.1) impongono che $x_i = 1$ se i centri erogatori di servizi aperti non servono il cliente i , perché la sommatoria è pari a 0.

Se invece viene imposto di servire una parte dei clienti, ci si riconduce al problema della ricerca della copertura a costo minimo di un insieme (problema di *set covering*).

1.6.3. Modelli p-mediana

I primi studi su questo tipo di modelli sono stati condotti nel 1964 da Hakimi, mentre la formulazione più utilizzata, e qui riportata, risale al lavoro di ReVelle et Swain (1970). Kariv et Hakimi (1979) dimostrarono che il problema è NP-hard, mentre Balinski (1965) formulò il problema per la prima volta considerando anche i costi di trasporto e di apertura dei centri.

Per comprendere più facilmente un problema di mediana si può pensare ad esempio al problema di localizzare in un piano cartesiano un punto P_0 di coordinate x_0, y_0 in modo che la media delle distanze dei punti di V_2 da P_0 sia minore possibile. Vogliamo cioè scegliere x_0, y_0 in modo che la quantità indicata dalla (1.X) sia minima.

$$d_0 = \frac{1}{n} \sum_{i \in V_2} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \quad (1.X)$$

La soluzione si calcola risolvendo il sistema non lineare di due equazioni in x_0, y_0 ottenuto annullando le derivate di d_0 fatte rispetto a x_0 e y_0 . Il punto P_0 così ricavato si dice mediana dell'insieme V . In pratica, la mediana può però essere soggetta ad "attrazione" da parte di un sottoinsieme S di V relativamente numeroso addensato in una regione limitata: i punti fuori da S si possono allora trovare in condizione svantaggiata.

È utile ricordare la seguente proprietà: una volta decisa la localizzazione dei servizi, la soluzione ottima assegna ciascun cliente al centro più vicino. Questa proprietà, tipica di problemi senza un limite di capacità sui link, problemi con capacità illimitata, focalizza l'attenzione sul problema di decidere quali siano i centri aperti. Si può allora ricorrere ad una formulazione in termini di programmazione lineare 0-1.

Sia y_j una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il sito j è scelto per aprire un centro di servizio. Sia poi x_{ij} una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il cliente nel sito i si serve dal centro localizzato in j . Indicando con d_{ij} la distanza del sito i dal sito j , il problema di p-mediana si scrive:

$$\min \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij}$$

s.v.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V_2 \quad (v.1.1)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \in E \quad (v.1.2)$$

$$\sum_j x_j \leq p \quad (v.1.3)$$

$$y_j, x_{ij} \in [0, 1] \quad \forall i \in V_2, j \in V_1 \quad (v.1.4)$$

In questi casi la funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma delle dei collegamenti attivati. Il vincolo (v. 1.1) garantisce che ogni cliente i sia servito; il vincolo (v. 1.2) garantisce che venga attivato il centro j , il vincolo (v. 1.3) impone che ci siano al più p centri, mentre i vincoli (v. 1.4) ammettono variabili esclusivamente di tipo binario.

1.6.4. Modelli p-centro

Il primo modello di questo tipo di localizzazione fu proposto da Hakimi (1964). I modelli p-centro nacquero per ovviare al possibile effetto “attrazione” da parte di un sottoinsieme di nodi della rete, relativamente numeroso e addensato in una regione limitata: i restanti punti, infatti, si potrebbero allora trovare in una condizione svantaggiata. Per ovviare a questo inconveniente fu pensato di localizzare il centro del più piccolo cerchio contenente tutti i nodi domanda, cosicché nessun punto si trovasse oltre il raggio di tale cerchio.

Lo scopo quindi consiste nella localizzazione di p nodi logistici sul territorio, dove p è stabilito a priori, con l’obiettivo di minimizzare il massimo costo (distanza) tra un utente e il nodo logistico più vicino ad esso. Il problema può essere schematizzato su un grafo orientato, non orientato o misto, i cui nodi rappresentano i siti dei clienti da servire, e gli archi, i possibili collegamenti tra i vari siti.

La formulazione del problema prevede che y_j sia una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il sito j è scelto per aprire un centro di servizio. Sia poi x_{ij} una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il cliente nel sito i si serve dal centro localizzato in j . Indicando con d_{ij} la distanza del sito i dal sito j , il problema di p -centro si scrive:

$$\min \quad d \quad \sum d_{ij} x_{ij}$$

s.v.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad i \in V_2 \quad (\text{v.1.1})$$

$$x_{ij} \leq x_j \quad i, j \in E \quad (\text{v.1.2})$$

$$\sum_j x_j \leq p \quad (\text{v.1.3})$$

$$x_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in V_2, j \in V_1 \quad (\text{v.1.4})$$

Anche in questo caso i vincoli (v. 1.1) garantiscono che ogni cliente i sia servito; i vincoli (v. 1.2) garantiscono che vengano attivati i centri j , il vincolo (v. 1.3) impone

che ci siano al più p centri, mentre i vincoli (v. 1.4) ammettono variabili esclusivamente di tipo binario.

Il centro assoluto di un grafo è dunque un punto x in corrispondenza del quale il valore della funzione di costo del vertice più costoso rispetto a x sia minore possibile.

1.7. Stato della ricerca e riferimenti bibliografici

La produzione scientifica nel campo della localizzazione dei nodi sulle reti è stata molto elevata negli ultimi anni. È possibile distinguere le pubblicazioni più propriamente teoriche dalle pubblicazioni che riguardano l'applicazione dei modelli di localizzazione. Alle prime appartengono tutti i casi che apportano sostanziali contributi alla modellizzazione del problema. Alla seconda tipologia di problema appartengono, invece, tutti i lavori scientifici in cui vengono presentati i risultati derivanti dall'applicazione dei principali modelli di localizzazione, presentati nei paragrafi precedenti, nonché lo sviluppo e/o la modifica degli stessi per risolvere problemi reali e maggiormente pratici.

Nel primo caso nuovi modelli appaiono promettenti in termini di risultati; essi sono legati ad un'ulteriore apporto modellistico della domanda da considerare nelle fasi di formulazione dei problemi, agli aspetti di congestionamento delle reti e all'utilizzo di nodi intermedi tra i nodi di servizio ed i nodi domanda.

Nei problemi di localizzazione la domanda da servire può assumere una struttura differente in base al contesto in cui essa esiste. È noto che la domanda di un servizio ha caratteri molto complessi, oggetto di altre discipline, soprattutto economiche. I modelli di tipo gravitazionale e basati su modelli di scelta di tipo logit sono quelli che danno i risultati migliori, anche se ancora molto è da fare. In Averbakh et al. (2007) viene considerato un problema in cui i costi dei nodi di servizio dipendono dal tipo di domanda ed il problema è risolto con un algoritmo di programmazione dinamica. Harkness et ReVelle (2003) considerano un caso simile, proponendo però due diverse formulazioni basate sulla programmazione lineare intera. Drezner et Shioda (2007) affrontano un problema di mediana in cui la domanda in ogni nodo varia in modo

casuale. In casi del genere il nodo localizzato cambia in funzione della distribuzione spaziale della domanda ed è possibile creare delle mappe di localizzazione.

Un'altra frontiera della ricerca nel campo della localizzazione appare essere quella dei problemi in cui si tiene conto degli aspetti di traffico sulla rete. Ultimamente ha avuto largo interesse il tema delle code che si possono creare sugli archi e soprattutto in prossimità dei nodi localizzati. Il lavoro di Berman e Drezner (2006) è un primo tentativo in tal senso; l'obiettivo è rendere massimo il numero di nodi serviti con il tempo di servizio imposto da vincolo. Gli autori propongono un algoritmo specifico di risoluzione.

Inoltre si assiste ad una proliferazione anche dei lavori scientifici riguardanti i nodi di transshipment. Essi hanno natura diversa dai nodi che abitualmente vengono considerati nei problemi di localizzazione, sono intermedi ed assolvono funzioni di trapasso tra i nodi servizio ed i nodi domanda. Il vantaggio del loro utilizzo è noto e permette nuove formulazioni nel campo della localizzazione. Nell'articolo di Berman et al. (2002) viene considerato il problema della localizzazione dei depositi di raccolta; Marin et Pelegrin (1997) risolvono il problema di mediana considerando p nodi di transshipment ed utilizzando un algoritmo di branch-and-bound, mentre Berman et al. (2005) testano tre diverse euristiche per individuare la soluzione del problema.

Esiste poi un'ampia raccolta di pubblicazioni riguardanti l'applicazione dei modelli di localizzazione a casi di studio reali. Shen et al. (2003) considerano il problema combinato di localizzazione e gestione delle scorte per la cui risoluzione viene utilizzato un metodo di partizione del problema principale in problemi secondari. Melkote et Daskin (2001) propongono un modello integrato di localizzazione e transportation network design; i risultati evidenziano come nei casi in cui si disponga di limitati budget convenga investire sulla rete, mentre nel caso contrario nei nodi localizzati. Il problema di localizzare un servizio di pronto soccorso attraverso un modello bi-obiettivo è risolto da Harewood (2002). Rakas et al. (2004) affrontano e risolvono il problema della localizzazione delle undesirable facilities. Data la presenza di numerosi criteri in reciproco conflitto, il modello proposto è di tipo multiobiettivo; la metodologia è applicata a casi di studio reali.

In una moderna città caratterizzata da problemi di traffico Wang et al. (2003) localizzano, invece, un sistema di park-and-ride. Attraverso un modello di scelta

deterministico di equilibrio la soluzione massimizza il profitto del servizio e minimizza il costo sociale. In Lam et al. (2006) è affrontato il problema della scelta di viaggio e della localizzazione dei parcheggi in una data rete stradale. Il modello di equilibrio presentato ha come obiettivo l'analisi delle interazioni spaziali e temporali tra traffico stradale e congestione dei parcheggi. L'influenza dei trasporti sulla localizzazione di nodi logistici esteri in Cina è analizzata nel lavoro di Hong (2007), nel quale vengono individuati i parametri che incidono maggiormente nella scelta. Il modello usato si basa sui modelli condizionali di tipo logit. Infine Wang (2008) ottimizza il numero e la posizione dei nodi di interscambio legati all'utilizzo di scooter elettrici in città.

In ultimo è necessario ricordare l'ampio campo della ricerca dedicato al miglioramento degli aspetti computazionali degli algoritmi di ricerca delle soluzioni. Data la complessità crescente dei modelli proposti, infatti, è forte l'esigenza di definire algoritmi maggiormente efficienti in termini di raggiungimento di risultati. In particolare, si è assistito ad un aumento notevole legato allo sviluppo di nuove euristiche, metaeuristiche e di strumenti innovativi, come gli algoritmi genetici e di tabu search. Alcuni validi riferimenti sono consultabili nei lavori di Eiselt et Sandblom (2004), Alpe et al. (2003) e Mladenovic et al. (2003).

Capitolo 2. Il problema dell'assegnazione sulle reti di trasporto

2.0. Introduzione

La localizzazione di un nodo avviene sempre in un sistema di trasporto. La funzione assolta dal trasporto è fondamentale affinché il nodo sia collegato ed accessibile dagli utenti del servizio offerto dall'attività localizzata nello stesso. I sistemi di trasporto, infatti, assicurano i collegamenti con il territorio in cui l'attività si svolge, costituendo un elemento fondamentale in fase di pianificazione strategica.

Nel presente capitolo si definisce un sistema di trasporto attraverso gli elementi che lo costituiscono, focalizzando l'attenzione sui due principali sottosistemi della domanda e dell'offerta di trasporto. Fornire le conoscenze di base sugli aspetti e le principali definizioni dei sistemi di trasporto permette una modellizzazione utile nei successivi capitoli della tesi. L'obiettivo è avere un quadro chiaro su quelli che sono i principali modelli di equilibrio deterministico per il calcolo dei flussi su una data rete di trasporto, sia in condizioni di congestione che non.

Il traffico presente sulle reti di trasporto incide notevolmente sui costi di raggiungibilità di un nodo, soprattutto nel caso in cui esso sia attrattore e/o generatore di elevati flussi. Calcolare il numero di spostamenti sugli archi della rete risulta essere un'operazione estremamente importante in tutti gli studi di localizzazione.

2.1. Il sistema dei trasporti

La definizione del concetto di sistema di trasporto si basa sulle relazioni che intercorrono tra le diverse componenti che lo costituiscono; è utile riportare la seguente definizione secondo la quale *“un sistema di trasporto può essere definito come quell'insieme di componenti e di loro relazioni che realizzano la produzione ed il consumo del servizio di trasporto in un certo ambiente”* (Cascetta, 1998). Molteplici sono le componenti di un sistema di trasporto e direttamente dipendenti dal contesto in cui esso è definito. In genere si ha un'utenza del sistema che coincide con le persone o le merci che si spostano, i veicoli con cui gli utenti effettuano gli spostamenti, gli eventuali servizi che li determinano e le infrastrutture sulle quali è possibile muoversi.

Inoltre è utile scomporre ogni sistema di trasporto in due sottosistemi interdipendenti tra loro: il sottosistema della domanda di trasporto ed il sottosistema dell'offerta di trasporto. Il primo è essenzialmente determinato dall'esigenza degli utenti di spostarsi per svolgere le proprie attività, mentre il secondo dalle componenti fisiche e dalle relative regole organizzative.

Tutto ciò che è esterno ai due sottosistemi fa parte del sistema delle attività che influenza ed è influenzato a sua volta dal sistema dei trasporti (fig. 2.1).

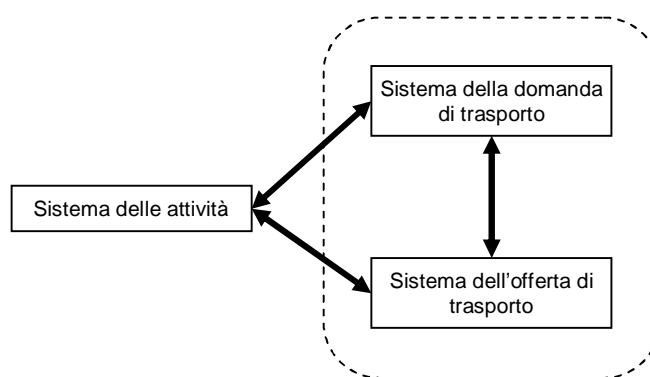


Figura 2.1. Relazioni di un sistema di trasporto

Generalmente la domanda di trasporto implica le scelte di mobilità, come il conseguimento della patente o l'acquisto di un autoveicolo, e le scelte di viaggio, come la destinazione, il modo o il percorso. In particolare le seconde risentono delle caratteristiche dei servizi di trasporto disponibili. La domanda si ripartisce tra i tanti modi ed itinerari, generando i flussi di utenti che utilizzano le infrastrutture ed i servizi di mobilità nell'unità di tempo considerata. Quando tali flussi superano la capacità dell'offerta si manifesta il fenomeno della congestione, che ha un impatto negativo sia sulle prestazioni degli elementi dell'offerta sia sull'ambiente esterno al sistema.

Un'ulteriore considerazione riguarda i cicli di retroazione del sistema di trasporto, ossia il reciproco condizionamento delle sue parti costitutive. Il ciclo più interno è quello flussi – congestione - costi: la domanda di spostamento si ripartisce tra i possibili cammini producendo i flussi di traffico sulla rete; i flussi modificano i costi di percorrenza andando ad incidere sulle scelte di percorso degli utenti. Il ciclo più esterno

e di più lungo periodo interessa la dislocazione delle attività economiche e delle persone che esprimono una data domanda di trasporto; questa influisce sull'accessibilità dei nodi modificando le preferenze insediative. Può essere utile l'esempio di una moderna città: al suo interno è possibile individuare i due sistemi delle attività e di trasporto. Il primo è caratterizzato dalle famiglie e dalle loro residenze, dalle attività economiche e dalle superfici disponibili sul territorio; tali componenti sono sempre tra loro interdipendenti. Infatti, la distribuzione delle famiglie sul territorio è legata alla localizzazione delle opportunità lavorative, mentre l'insediamento di alcuni tipi di attività economiche è determinato dalla distribuzione delle famiglie. Infine, sulla presenza di famiglie e attività economiche nelle diverse aree della città influiscono significativamente la disponibilità di superfici, compatibili con i possibili impieghi ed i relativi prezzi. È da sottolineare altresì il ruolo giocato dall'accessibilità relativa fra le zone, su cui incidono le caratteristiche del servizio di trasporto.

2.2. La domanda di trasporto e la sua modellizzazione

La domanda di trasporto può essere formalmente definita come il numero di utenti con determinate caratteristiche che usufruisce del servizio offerto da un sistema di trasporto in un prefissato periodo di riferimento. Lo studio della domanda di un sistema trasportistico serve a determinare i flussi sulle reti di trasporto, intesi come il numero di utenti che utilizza il sistema di trasporto esistente o che si servirebbe di un nuovo sistema da realizzare. Stimata la domanda di trasporto è possibile dunque verificare il funzionamento del sistema già esistente o da progettare. In generale lo studio della domanda che interessa un sistema di trasporto avviene secondo le seguenti fasi:

- individuazione dell'area di studio;
- suddivisione in zone dell'area di studio;
- definizione del modello di offerta del sistema di trasporto;
- stima della domanda di trasporto che interessa l'area di studio;

- simulazione dell'interazione domanda/offerta;

I risultati ottenuti dall'ultima fase consentono di calcolare i flussi sulle componenti del sistema di trasporto e possono essere utilizzati per effettuare valutazioni sul funzionamento del sistema.

La modellizzazione della domanda di trasporto consiste nel definire una serie di modelli matematici in grado di determinare il numero di spostamenti che utilizza il sistema. I primi riferimenti si hanno nei testi di Wilson (1971) e Hutchinson (1974); nel corso degli anni, la teoria con cui sono stati definiti tali modelli si è basata prevalentemente sugli spostamenti sistematici, che per le caratteristiche di alta ripetibilità sono anche più facilmente riproducibili. Successivamente, le componenti non sistematiche della mobilità sono cresciute notevolmente e si è avuto un incremento di spostamenti anche nei periodi tradizionalmente di morbida: è sorta così la necessità di modelli di domanda capaci di stimare le caratteristiche degli spostamenti anche in fasce orarie diverse da quelle tradizionalmente di punta.

Vari metodi possono essere utilizzati per la stima della domanda in relazione sia ai mezzi disponibili che all'uso che di tali stime si intende fare. Si distinguono pertanto i modelli statistico - descrittivi, i modelli basati sulle stime da conteggi di traffico ed i modelli comportamentali. L'attenzione è focalizzata in particolare sull'uso dei modelli comportamentali, in quanto sono quelli che consentono non solo di stimare la domanda di trasporto ma anche di interpretare il comportamento degli utenti in merito alle scelte di viaggio. La prima trattazione risale a Domencich e Mc Fadden (1975).

Un modello di domanda può essere formalmente definito come una relazione matematica che, dato un sistema di attività e di offerta di trasporto, consente di associare ad essi il valore medio della domanda con le sue caratteristiche rilevanti in un determinato periodo temporale di riferimento (Cascetta, 1998). Dal punto di vista matematico si può scrivere come di seguito:

$$d_{od}(C_1, C_2, \dots) = f(SE, T)$$

dove $d_{od}(C_1, C_2, \dots)$ è il flusso di domanda di caratteristiche C_1, C_2, \dots , fra le zone di origine o e di destinazione d tra cui avviene lo spostamento; essa è espressa come

funzione delle caratteristiche socio-economiche relative al sistema di attività SE , e delle caratteristiche relative al sistema di offerta T . Le variabili che definiscono i vettori di dati SE e T sono dette *attributi*.

Come già accennato in precedenza, la domanda di trasporto nasce dall'esigenza di spostarsi per motivi diversi. Le caratteristiche che definiscono lo spostamento effettuato sono il frutto di una serie di scelte compiute dall'utente, scelte che possono essere di tipo diverso per utenti diversi ed originate da motivazioni diverse. I modelli di domanda utilizzati simulano pertanto le scelte di viaggio ed in particolare la scelta di effettuare o meno lo spostamento per un certo motivo s , la scelta di recarsi ad una certa destinazione d , di usare un dato mezzo di trasporto m e di seguire un certo percorso k sulla rete di trasporto, in un prefissato intervallo temporale di riferimento h .

I modelli di domanda richiedono la stima dei parametri incogniti presenti e, poiché per tale fase è necessaria un'opportuna base dati riferita alle caratteristiche dello spostamento e alle caratteristiche socio-economiche degli utenti, i modelli più complessi richiedono anche base dati più articolate e, a volte, informazioni non sempre facilmente quantificabili o comunque reperibili.

Il modello di domanda più utilizzato nelle pratiche applicazioni è il *modello a quattro stadi*, costituito dalla combinazione di quattro sottomodelli, ognuno dei quali simula la probabilità delle scelte che effettua l'utente. In particolare:

- ✓ il *sottomodello di generazione* simula la scelta di effettuare o meno lo spostamento per il motivo s nel periodo temporale di riferimento h , indicato con $d_o(s, h)$;
- ✓ il *sottomodello di distribuzione* simula la probabilità di scelta di recarsi alla destinazione d , avendo origine in o e motivo s dello spostamento nel periodo h , indicato con $p(d / osh)$;
- ✓ il *sottomodello di scelta modale* simula la scelta del mezzo m da utilizzare per spostarsi da o a d per il motivo s nel periodo temporale h , indicato con $p(m / odsh)$;
- ✓ il *sottomodello di scelta del percorso* simula la scelta del percorso k da usare per spostarsi da o a d per il motivo s con il modo m nel periodo temporale h , indicato con $p(k / odsmh)$

Tutti i sottomodelli sono considerati funzione delle caratteristiche socio-economiche, e delle caratteristiche del sistema di offerta; si può quindi utilizzare, per un periodo h , la seguente notazione semplificata:

$$d_{od}(s, m, k) = d_{od}(s) \cdot p(d/os) \cdot p(m/ods) \cdot p(k/mods)$$

La sequenza delle scelte può essere naturalmente diversa da quella riportata, perchè si può ipotizzare un diverso ordine con il quale le scelte stesse vengono effettuate dall'utente. Ad esempio, nel modello riportato, la scelta del modo risulta condizionata da quella della destinazione, mentre risulta condizionante per la scelta del percorso.

Da un punto di vista generale, i modelli di domanda proposti in letteratura e usati nella pratica possono essere classificati in base al tipo di attributi utilizzati ed alle ipotesi comportamentali dalle quali derivano. Relativamente al primo aspetto, i modelli si dicono aggregati se le variabili SE e T sono relative ad un insieme o ad un aggregato di utenti omogenei per caratteristiche; si dicono invece disaggregati se gli attributi considerati sono relativi al singolo utente. In realtà non esistono né modelli interamente aggregati né interamente disaggregati, ma piuttosto modelli per i quali almeno alcune variabili presentano maggiori o minori livelli di aggregazione. Tale livello di aggregazione delle variabili dipende naturalmente dallo scopo per cui si modella la domanda. Se la finalità è di simulare il sistema di trasporto schematizzato in una rete, il livello di aggregazione è quanto meno zonale in quanto gli attributi del sistema di offerta sono ottenuti fra i centroidi rappresentativi delle zone.

Relativamente al secondo punto, i modelli si dicono comportamentali se derivano da esplicite ipotesi sul comportamento di scelta degli utenti, mentre si dicono descrittivi se descrivono semplicemente le relazioni fra domanda e variabili SE e T senza formulare alcuna specifica ipotesi sul comportamento degli utenti. Inoltre, esistono i cosiddetti modelli misti, i più diffusi nella pratica, in cui alcune dimensioni di scelta (e quindi alcuni sottomodelli) sono simulate con modelli descrittivi e altre con modelli comportamentali. Data la difficoltà pratica di simulare il comportamento di scelta dell'utente su tutte le dimensioni, tali modelli sono maggiormente indicati. Dei sottomodelli presenti, i sottomodelli di generazione e di distribuzione sono tipicamente

descrittivi, anche se quest'ultimo può avere un'interpretazione comportamentale, il sottomodulo di scelta modale è tipicamente comportamentale ed infine la scelta del percorso è simulata con un modello comportamentale. Esso, solitamente, viene implicitamente utilizzato nelle procedure di assegnazione.

2.2.1. I modelli di utilità casuale comportamentali

I modelli comportamentali più utilizzati per la simulazione della domanda di trasporto sono quelli che appartengono alla famiglia dei modelli ad *utilità casuale*. Questi si basano sull'ipotesi che l'utente sia un decisore razionale e che effettui le sue scelte massimizzando l'utilità che egli associa ad ogni alternativa; inoltre, per una serie di cause di diverso tipo, non è possibile prevedere con esattezza la scelta che farà, ma soltanto calcolare la *probabilità* che egli faccia una determinata scelta. Più in dettaglio, le ipotesi di base dei modelli ad utilità casuale sono le seguenti:

- ✓ il generico utente i nell'effettuare la propria scelta considera tutte le alternative a sua disposizione, che appartengono al suo *insieme di scelta* I_i ; tale insieme di scelta può essere diverso da utente ad utente.
- ✓ L'utente i associa ad ogni alternativa del suo insieme di scelta un valore di utilità percepita, U_{ij} , e sceglie l'alternativa con la massima utilità; tale utilità risulta una funzione degli attributi che caratterizzano l'alternativa stessa, x_{kj} , e di alcuni parametri da stimare, β_k . Gli attributi x_{kj} che caratterizzano l'alternativa possono essere distinti in più classi. Si parla di *attributi di livello di servizio*, propri del sistema di trasporto, di *attributi del sistema delle attività*, dipendenti dall'uso del territorio dell'area di studio, e di *attributi socio-economici* propri dell'utente. Si possono distinguere, inoltre, attributi generici e attributi specifici per ogni alternativa: i primi sono presenti in tutte le alternative nella stessa forma e con lo

stesso peso (β_k), mentre i secondi sono presenti solo in alcune alternative, oppure sono valutati in modo diverso per ogni alternativa.

✓ L'utilità che il generico utente i associata ad ogni alternativa è una variabile aleatoria, in quanto essa non è perfettamente nota all'analista né per quanto riguarda la forma funzionale, né per quanto riguarda il suo valore esatto; ciò dipende sia dai limiti propri della modellizzazione, sia dalle caratteristiche stesse dell'utente, le cui scelte e le cui valutazioni possono subire modifiche difficilmente modellizzabili. Infatti, utenti con le stesse caratteristiche, ai quali corrisponde lo stesso vettore di attributi nell'utilità, possono avere gusti diversi, possono percepire diversamente l'alternativa oppure possono valutare soggettivamente in modo diverso alcuni attributi, per cui le loro scelte saranno piuttosto varie nonostante l'apparente omogeneità. Inoltre, alcuni attributi considerati dall'utente nel compiere la scelta possono non essere stati inclusi dall'analista, oppure inclusi solo in modo approssimato. L'utilità U_{ij} si può scomporre in due aliquote: la prima, detta utilità sistematica, indicata con V_{ij} , è costante per tutti gli utenti con lo stesso vettore di attributi, e la seconda è un residuo aleatorio ε_j :

$$U_{ij} = V_{ij}(X_{ij}) + \varepsilon_j$$

Inoltre, per quanto riguarda la forma funzionale per l'utilità sistematica, quella più utilizzata è di tipo lineare:

$$V_j^i = \sum_k \beta_k x_{kj}^i$$

essendo x_{kj}^i il k -esimo attributo della j -esima alternativa per l'utente i , e β_k i parametri da stimare. L'introduzione del residuo aleatorio nell'utilità U_j^i tiene conto del fatto che l'utente ha una personale percezione dell'alternativa, e le sue scelte avvengono in modo non perfettamente prevedibile dall'analista, per cui è possibile solo calcolare la probabilità che egli faccia una determinata scelta.

2.3. L'offerta di trasporto e la sua modellizzazione

La modellizzazione di un sistema di offerta di trasporto si basa su una rappresentazione topologica e funzionale del sistema attraverso le rappresentazioni proprie della teoria dei grafi e delle reti. Solo attraverso una schematizzazione delle componenti fisiche del sistema di trasporto è possibile analizzare e valutare il funzionamento del sistema mediante i modelli matematici dell'offerta. È utile, quindi, in prima analisi richiamare alcuni concetti, in parte già illustrati nel precedente capitolo, al fine di definire il concetto di rete di trasporto e, poi, richiamare la modellizzazione classica dei sistemi di offerta consultabile in letteratura.

2.3.1. La rete di trasporto

Per rappresentare in modo semplice ed immediato il sistema di offerta di trasporto lo strumento più idoneo è sicuramente il grafo. I grafi utilizzati per le reti di trasporto sono in generale orientati, ovvero gli archi hanno un verso e le coppie di nodi che li definiscono sono coppie ordinate. Un arco che collega la coppia di nodi (i,j) può essere indicato con un unico indice che ne rappresenta la posizione nella lista di tutti gli archi del grafo oppure con la coppia di indici (i,j) relativi al nodo iniziale e al nodo finale dell'arco stesso. In generale si definisce *rete* un grafo ai cui archi è associata una caratteristica quantitativa. In una rete di trasporto e per il modello di offerta ad essa associato, oltre agli archi possono essere definite delle sequenze di archi, detti *percorsi*, che rappresentano degli spostamenti origine - destinazione. Ad archi e percorsi possono poi associarsi due tipi di grandezze variabili: *costi e flussi*, che sono collegate fra loro in funzione della topologia della rete a cui fanno riferimento.

Ciascun arco del grafo utilizzato per rappresentare un sistema di trasporto corrisponde ad una fase dello spostamento legato alla percorrenza di un elemento fisico e/o una attività connessa allo spostamento; in entrambi i casi l'attraversamento dell'arco è caratterizzato da un tempo di trasferimento e/o da altri costi sostenuti dall'utente. Il

costo generalizzato medio di trasporto, o più sinteticamente il *costo di trasporto di un arco*, è una variabile che sintetizza il valore medio delle diverse voci di costo sostenute dagli utenti così come da loro percepite nell'effettuazione delle scelte di trasporto e, più in particolare, nella scelta del percorso. In altri termini il costo di trasporto di un arco riflette la disutilità degli utenti a percorrere lo stesso.

Gli elementi che compongono il costo di trasporto sono in generale grandezze non omogenee, come ad esempio il tempo di percorrenza, il costo monetario, il discomfort. Si definisce *vettore dei costi di arco* un vettore c la cui generica componente c_l è costituita dal costo generalizzato di trasporto sull'arco $l = (i,j)$. Il vettore dei costi di arco ha dimensione n_L , pari al numero degli archi della rete. Di solito nei grafi che rappresentano i sistemi di trasporto si considerano esclusivamente percorsi che collegano fra loro nodi rappresentativi delle zone di traffico, i nodi centroidi. Per quanto detto ogni percorso è univocamente associato ad una e una sola coppia O-D mentre la stessa coppia O-D può essere collegata da più percorsi.

2.3.1. Costi e flussi degli archi

Nelle reti di trasporto ad ogni arco è intuitivamente associato un costo, nella sua accezione più generale, legato al trasferimento lungo l'arco stesso. Si definisce *costo di trasporto di un arco* la grandezza scalare che sintetizza le varie voci di costo prese in considerazione dall'utente per effettuare il trasferimento. In altri termini, il costo di trasporto sull'arco è una combinazione di grandezze non necessariamente tra loro omogenee. Se si vuole ridurre il costo ad una grandezza scalare, omogeneizzando tutte le grandezze considerate, si introducono dei coefficienti di reciproca sostituzione, che tengano cioè conto di quanto vale un'unità della grandezza a rispetto ad un'unità della grandezza b . Ad esempio, considerando una forma lineare si può scrivere:

$$c_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

in cui c_i è il costo generalizzato di trasporto per l'arco i considerato, x_i sono le componenti del costo considerate e gli α_i i coefficienti di reciproca sostituzione.

È importante considerare che possono esistere altre voci di costo sia per gli utenti che per la collettività connessi al trasferimento lungo un arco non misurabili direttamente ma ugualmente importanti (legati alla sicurezza o all'inquinamento). Tuttavia, tali voci non sono solitamente considerate dall'utente nell'effettuare le proprie scelte e che per questo motivo non sono considerate come facenti parte del costo di trasporto, inteso come costo "interno" al sistema, utilizzato per la simulazione del suo funzionamento. Le altre voci di costo rappresentano un "costo esterno" che, assieme ai costi interni, possono essere utilizzate per la valutazione degli interventi sul sistema.

Si definisce invece *costo generalizzato del percorso* quello percepito dall'utente lungo un percorso. Solitamente si assume che tale costo, indicato con C_k , essendo k il percorso considerato, sia pari alla somma dei costi d'arco che compongono il percorso stesso. Sfruttando la matrice di incidenza archi-percorsi, A , si può scrivere che:

$$C_k = \sum_i a_{ik} c_i$$

o anche, in forma matriciale:

$$C = A^T c$$

essendo C il vettore dei costi di componenti C_k , A^T la trasposta della matrice di incidenza archi-percorsi, e c il vettore dei costi d'arco.

L'altra grandezza scalare associata all'arco è il *flusso d'arco*; esso rappresenta il numero medio di utenti che percorre l'arco in un intervallo di tempo unitario di riferimento. In realtà il numero di utenti che utilizza un sistema di trasporto varia nel tempo, ma si assume solitamente l'ipotesi di funzionamento stazionario, ossia si assume che la domanda di trasporto con le sue caratteristiche presenti solo delle oscillazioni casuali attorno ad un valore medio che si mantiene costante in un intervallo temporale considerato. Anche in tal caso si definisce vettore dei flussi d'arco il vettore f la cui generica componente f_i rappresenta il flusso sull'arco i . Un flusso d'arco non è altro che la somma dei flussi sui percorsi che utilizzano quel ramo; sfruttando ancora la matrice

di incidenza archi-percorsi, e detto F il vettore dei flussi di percorso il cui generico elemento F_k è il flusso sul percorso k che collega una coppia di nodi, si può scrivere che:

$$f_i = \sum_k a_{ik} F_k$$

ed in forma matriciale:

$$f = AF$$

La conoscenza del vettore dei flussi d'arco consente di simulare il funzionamento del sistema, e di stabilirne la configurazione nell'intervallo temporale di riferimento considerato.

Nel caso più generale il costo medio di trasporto relativo ad ogni arco del grafo è una funzione sia del flusso che percorre l'arco stesso, sia del flusso sugli altri archi. La funzione scalare $c_i = c_i(f)$ rappresenta la funzione di costo dell'arco e consente di calcolare il costo medio di trasporto su ciascun arco in corrispondenza ad una data configurazione del sistema di trasporto. Si parla di costo medio in quanto il costo generalizzato del trasporto presenta, a parità di flussi, delle oscillazioni aleatorie. Solitamente, al crescere del valore del flusso su un arco il corrispondente costo medio di trasporto aumenta.

Nelle funzioni di costo *separabili* il costo di trasporto sull'arco i dipende dal solo flusso sull'arco i , $c_i = c_i(f_i)$. Se invece il costo di trasporto sull'arco i dipende dai flussi su più archi o, in generale, dall'intero vettore di flussi, $c_i = c_i(f)$, le funzioni di costo si dicono non separabili.

Esistono naturalmente diversi tipi di funzioni di costo, più o meno complesse, che sono ampiamente definite in letteratura (Branston, 1976; Cascetta e Nuzzolo, 1982; Festa e Nuzzolo, 1988). Nelle reti di trasporto stradali solitamente si distingue tra sistemi urbani e sistemi extraurbani differenti, per le voci di costo considerate. In questi casi il costo di trasporto viene fatto coincidere con il tempo di percorrenza delle distanze, la variabile che meglio descrive il funzionamento dei sistemi stessi. È

possibile distinguere due quantità che definiscono il tempo di percorrenza: il tempo di corsa e il tempo di attesa all'intersezione. Su questa base, si possono ulteriormente distinguere due casi fondamentali: condizioni di flusso ininterrotto e condizioni di flusso interrotto. Nel primo caso, tipico dei sistemi extraurbani, il tempo di percorrenza è praticamente costituito dal solo tempo di corsa, perché l'eventuale tempo di attesa all'intersezione è trascurabile rispetto al precedente termine. Le funzioni di costo utilizzate per determinare il tempo di corsa hanno generalmente le seguente forma:

$$t_i = t_{0i} \cdot \left[1 + \alpha \cdot \left(\frac{f_i}{q_i} \right)^\beta \right]$$

In tale espressione t_{0i} è il tempo di percorrenza in condizioni di circolazione libera, ossia senza interferenze tra i veicoli che percorrono il ramo, f_i è il flusso sull'arco i e q_i la sua *capacità*, ovvero il numero massimo di utenti che riesce a passare attraverso la sezione stradale nell'unità di tempo di riferimento; α e β sono coefficienti che dipendono dalle caratteristiche generali della strada e sono determinati sulla base di rilievi sperimentali.

Il secondo caso, relativo al flusso interrotto, è tipico dei sistemi urbani, in quanto la lunghezza dei rami è piuttosto contenuta, ed il tempo di attesa all'intersezione è spesso confrontabile con quello di corsa lungo il ramo. In tal caso conviene calcolare separatamente le due quantità.

2.4. I modelli di assegnazione

Le probabilità di scelta del percorso giocano un ruolo molto importante nel modello complessivo di simulazione del sistema di trasporto, in quanto consentono di collegare le matrici origine – destinazione (O/D) dei singoli modi ai flussi sui percorsi e sugli archi delle reti modali, in funzione dei costi di percorso. I modelli che consentono di esplicitare questo legame sono i *modelli di assegnazione*. Per esplicitare in modo formale un modello di assegnazione, nella sua espressione generale, si suppone per semplicità che gli spostamenti considerati utilizzino un unico modo di trasporto, e

pertanto il grafo del sistema di trasporto per gli spostamenti considerati sia monomodale.

Il flusso medio sul percorso k relativo al modo m che collega la coppia di nodi centroidi O/D (con $k \in I_{odm}$) può essere ottenuto come prodotto del flusso di domanda sul modo m , $d_{od}(m)$, per le probabilità di scelta del percorso, comunque calcolate:

$$F_k = d_{od}(m) \cdot p(k / mod)$$

La quantità $d_{od}(m)$ è un elemento della matrice O/D relativo al modo m e si assume pari alla somma dei flussi O/D per i diversi motivi:

$$d_{od}(m) = \sum_s d_{od}(m/s)$$

Le probabilità di scelta del percorso dipendono sia dal costo sul percorso stesso, sia dal costo dei percorsi alternativi; in generale indicato con C_m il vettore dei costi di percorso con il modo m e P_m matrice della percentuale di scelta, si può scrivere che:

$$P_m = P_m(C_m)$$

Pertanto, se con d_m viene indicato il vettore domanda ottenuto dalla matrice O/D, in forma matriciale risulta:

$$F_m = P_m(C_m) \cdot d_m$$

Esprimendola in termini di flussi d'arco si ha:

$$f_m = A_m P_m(C_m) \cdot d_m$$

essendo A_m la matrice di incidenza archi-percorsi riferita al modo m , f_m il vettore dei flussi d'arco con il modo m , e d_m la domanda modale.

Le relazioni precedenti consentono quindi di associare ad una data domanda di trasporto i corrispondenti vettori dei flussi di percorso e di arco, in funzione dei costi sulla rete. Tali relazioni costituiscono la rappresentazione formale del modello di assegnazione ad una rete monomodale. Naturalmente è possibile anche ottenere relazioni analoghe per reti multimodali. In generale, si parla di *modello di assegnazione* quando gli elementi della matrice P dipendono esclusivamente dai costi sugli archi della rete.

Affinché un vettore dei flussi possa essere considerato ammissibile, o fattibile, deve soddisfare due fondamentali condizioni: la condizione di non negatività e la condizione di conservazione della domanda. Secondo la prima per ogni percorso k ciascuna componente del vettore F deve essere maggiore o al limite uguale a zero:

$$F_k \geq 0$$

la condizione di conservazione della domanda impone che data una coppia OD della rete la somma dei flussi di percorso di tutti i percorsi che collegano la coppia deve essere pari alla relativa domanda:

$$\sum_k b_{ik} F_k = d_i$$

dove con b_{ik} si indica l'elemento della matrice di incidenza coppie OD /percorsi relativo all' i -esima coppia OD .

L'insieme dei vettori F fattibili è detto insieme di fattibilità dei flussi di percorso S_F :

$$S_F \equiv \{F : F \geq 0, \quad BF = d\}$$

Gli approcci con i quali vengono formulati e risolti i problemi di assegnazione sono diversi; di seguito viene presentata la classificazione che abitualmente viene utilizzata nel campo modellistico dei problemi di assegnazione alle reti.

2.4.1. Classificazione dei modelli

Nella letteratura scientifica si distingue tra *modelli deterministici* e *modelli stocastici* a secondo che si simuli la scelta del percorso con un modello di scelta deterministico o stocastico. Per quanto riguarda il tipo di approccio, invece, si può distinguere fondamentalmente tra approccio *statico* o di *equilibrio*, quello tradizionalmente utilizzato e maggiormente studiato negli ultimi decenni, ed approccio *dinamico*, tuttora oggetto di ricerca. L'approccio statico o di equilibrio consiste nel ricercare quella configurazione del sistema, e quindi dei flussi (F^* e f^*), congruente con i costi che da essa derivano. In termini matematici il problema può essere formulato come segue:

$$F^* = P(C(F^*)) \cdot d$$

o anche in termini di flussi d'arco come:

$$f^* = AP(C(f^*)) \cdot d$$

I vettori F^* , f^* , d^* e C^* sono rispettivamente i vettori dei flussi, di domanda e dei costi di equilibrio. Pertanto, lo stato di equilibrio è quello ottimale in cui le relazioni tra domanda, flussi e costi sono soddisfatte, e non sussistono condizioni per cui lo stesso debba modificarsi. Matematicamente il problema dell'equilibrio può essere formulato come il problema di trovare un vettore di flussi che riproduca se stesso, sulla base della corrispondenza definita dal modello di domanda e di assegnazione. Inoltre si parla ancora di equilibrio deterministico o stocastico a secondo delle ipotesi fatte sul modello di scelta del percorso e quindi dal modo in cui vengono calcolati gli elementi della matrice P .

Un'ulteriore possibilità riguarda l'ipotesi di rete congestionata o non congestionata: nel primo caso, i costi sono funzione dei flussi sulla rete, mentre nel secondo caso sono costanti. La classificazione di tipo classica dei modelli di assegnazione dipende dalla congestione o meno della rete (fig. 2.2).

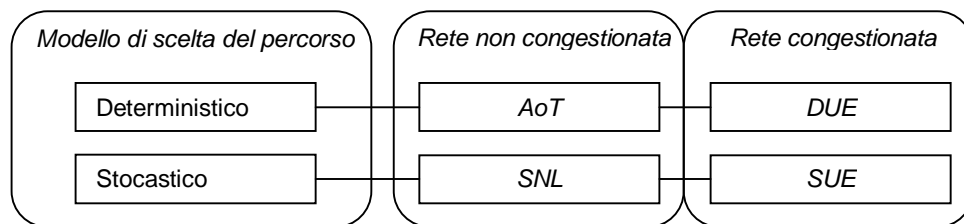


Figura 2.2. Classificazione principale dei modelli di assegnazione

Nel caso di rete non congestionata e modello di scelta del percorso di tipo deterministico l'algoritmo risolutivo utilizzato in letteratura è noto come *Tutto o Niente* (*AoN* dall'acronimo inglese *All or Nothing*): la domanda tra una coppia O/D viene assegnata tutta al minimo percorso che collega la coppia in esame, mentre ogni altro percorso risulta scarico. Procedendo in tal modo per tutta la rete e sommando per ogni arco l'aliquota di domanda O/D che utilizza l'arco stesso appartenente al percorso minimo tra O/D, si ottengono i flussi sull'intera rete di trasporto. Per le reti congestionate, invece, e modello di scelta del percorso sempre deterministico, l'algoritmo risolutivo utilizzato è il *Deterministic User Equilibrium* (*DUE*). In questo caso, essendo la rete congestionata e quindi i costi dipendenti dai flussi, si parla di equilibrio in quanto occorre trovare quel vettore di flussi tali che i costi corrispondenti riproducano i flussi stessi. Nel caso di modello di scelta del percorso stocastico, e rete non congestionata, il carico sulla rete si ottiene tramite i cosiddetti modelli di *Stochastic Network Loading* (*SNL*).

Per ottenere i flussi sulla rete occorre calcolare la probabilità di scelta per ogni percorso che collega ogni coppia O/D; questo può essere fatto sia con un modello *Logit* che *Probit*, quelli più utilizzati nella pratica.

Infine, per le reti congestionate ed i modelli di scelta del percorso sempre di tipo stocastico, si utilizzano le procedure di assegnazione di equilibrio del tipo *Stochastic User Equilibrium* (*SUE*). Di seguito sono elencati i modelli di assegnazione definiti in letteratura:

- ✓ modello *Deterministic Network Loading (DNL)*: modello di assegnazione a costi costanti per reti non congestionate e utilità percepita di tipo deterministico; la distribuzione del traffico avviene secondo il principio di Wardrop¹;
- ✓ modello *Stochastic Network Loading (SNL)*: modello di assegnazione a costi costanti per reti non congestionate e utilità percepita di tipo stocastico;
- ✓ modello *Deterministic User Equilibrium (DUE)*: modello di assegnazione con flussi di domanda, di percorso e di arco congruenti con i relativi costi per reti congestionate e utilità percepita di tipo deterministico;
- ✓ modello *Stochastic User Equilibrium (SUE)*: modello di assegnazione con flussi di domanda, di percorso e di arco congruenti con i relativi costi per reti congestionate e utilità percepita di tipo stocastico;
- ✓ modello *Deterministic Dynamic Process (DDP)*: modello di assegnazione con flussi di domanda, di percorso e di arco incongruenti con i relativi costi per reti congestionate e utilità percepita di tipo deterministico;
- ✓ modello *Stochastic Dynamic Process (SDP)*: modello di assegnazione con flussi di domanda, di percorso e di arco incongruenti con i relativi costi per reti congestionate e utilità percepita di tipo stocastico.

2.5. L'equilibrio di tipo deterministico delle reti

Su una data rete di trasporto il problema della determinazione dei flussi dovuti ad una domanda nota è detto di equilibrio quando l'obiettivo è ricercare un particolare vettore dei flussi congruente ai costi degli archi. Se il modello di scelta del percorso è di tipo deterministico, allora il problema di equilibrio è anche detto deterministico. La definizione ed il calcolo del vettore dei flussi soluzione del problema dipende dalla natura della domanda di trasporto considerata. Quando essa è di tipo non elastica, non

¹ "in condizioni di equilibrio nessun utente può ridurre il suo costo cambiando unilateralmente percorso".

funzione delle variazioni di costo degli archi, il problema è di più semplice risoluzione rispetto al caso in cui la domanda è di tipo elastico. In questo paragrafo vengono presentati entrambi i casi, cominciando con il problema di equilibrio deterministico con domanda non elastica.

2.5.1. La soluzione del problema con domanda non elastica

In condizioni di questo tipo la scelta del percorso ricade sul percorso di costo minimo e la percentuale di scelta associata al k -esimo percorso scelto è tale che:

$$p_k^* > 0 \Rightarrow C_k^* \leq C_h^* \quad \forall h \neq k, \quad h, k \in I$$

Il costo associato al percorso minimo C_k^* risulta il minore tra quelli legati ai possibili percorsi h ; in condizioni di equilibrio, cioè, vale il principio di Wardrop.

Il vettore dei flussi di percorso di equilibrio F^* è tale solo se soddisfa la disuguaglianza variazionale espressa dalla seguente relazione:

$$C(F^*)^T \cdot (F - F^*) \geq 0 \quad \forall F \in S_F$$

Nelle reti in equilibrio, quindi, vengono scelti ed utilizzati dall'utente solo i percorsi a costo minimo. La teoria legata ai problemi di equilibrio deterministico assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione F^* . In particolare l'esistenza di un vettore di equilibrio è legata alla continuità delle funzioni di costo degli archi (condizione sufficiente). L'unicità della soluzione, invece, dipende dalla monotonicità strettamente crescente della stessa funzione di costo. Le dimostrazioni dei teoremi appena enunciati sono noti e consultabili sui principali testi di pianificazione dei trasporti.

2.5.2. La soluzione del problema con domanda elastica

Quando la domanda è funzione dei costi di arco, il problema assume caratteristiche differenti. Nei problemi con domanda elastica, infatti, oltre a determinare il vettore di equilibrio dei flussi è necessario individuare anche i valori di domanda associati alla condizione di equilibrio d^* . La funzione che esprime la dipendenza tra domanda e costi minimi per tutte le coppie OD della rete può essere indicata con la forma $d=d(C_{OD}^*)$. Se tale funzione è invertibile, è possibile ottenere il vettore dei costi C_{OD} in funzione della domanda d ($C_{OD}(d)$). Le condizioni di equilibrio si esprimono come di seguito:

$$\begin{aligned} F_k^* > 0 &\Rightarrow C_k^* \leq C_h^* && \forall h, k \in I \\ BF &= d(C_{OD}^*) \\ C_k^* &\geq C_{OD}^* && \forall k \in I \end{aligned}$$

Anche in questo caso, affinché il vettore F^* sia di equilibrio deve valere una disuguaglianza variazionale come nel caso della domanda non elastica:

$$C(F^*)^T \cdot (F - F^*) - C_{OD}(d^*)^T (d - d^*) \geq 0 \quad \forall F \in S_F, d = BF$$

Le condizioni che assicurano l'esistenza della soluzione di equilibrio f^* e d^* , dimostrate con il teorema del punto fisso di Brouwer, impongono che le funzioni di costo di arco siano continue ed assumano valori positivi, mentre la funzione di domanda $d(C_{OD})$ sia continua e limitata superiormente. L'unicità della soluzione richiede che le funzioni di costo d'arco e di domanda siano monotone strettamente crescenti.

Capitolo 3. La definizione e la formulazione del problema di trasporto-localizzazione

3.0. Introduzione

Nel presente capitolo vengono presentate le caratteristiche degli aspetti modellistici che sono alla base del problema della localizzazione di un nodo su una data rete di trasporto. Esso è complesso e deve tener conto degli aspetti legati alla pura localizzazione nonché alla natura del problema di trasporto.

Dapprima viene illustrato il problema della localizzazione, formulato come problema di programmazione lineare. Il modello scelto coincide con il modello p-mediana e necessita di un approccio di ottimizzazione, affinché tra le infinite soluzioni possa essere individuata quella che renda minimo il costo generalizzato di trasporto dell'intera rete.

Successivamente viene presentato il problema di trasporto con una formulazione in grado di determinare i flussi presenti sulla rete. A tal fine occorre definire i sistemi della domanda e dell'offerta del trasporto ed utilizzare un modello di scelta del percorso. Ipotizzando la rete congestionata, il modello comportamentale più adatto è di tipo deterministico.

Infine, nell'ultima parte del capitolo, vengono maggiormente chiariti gli aspetti legati al problema combinato di trasporto – localizzazione.

3.1. Formulazione del problema di localizzazione come problema di PL

Si vuole definire un problema di localizzazione su rete che tenga conto delle condizioni di traffico della stessa attraverso le tecniche e la teoria della programmazione lineare. La programmazione matematica permette di risolvere il problema come un problema di programmazione lineare, pertanto, a tal fine è utile richiamare alcuni dei concetti di base affinché il problema da risolvere possa essere risolto da un calcolatore. È possibile schematizzare le fasi delle operazioni necessarie ad individuare la soluzione ottimale del problema formulato attraverso lo schema indicato in figura 3.1.

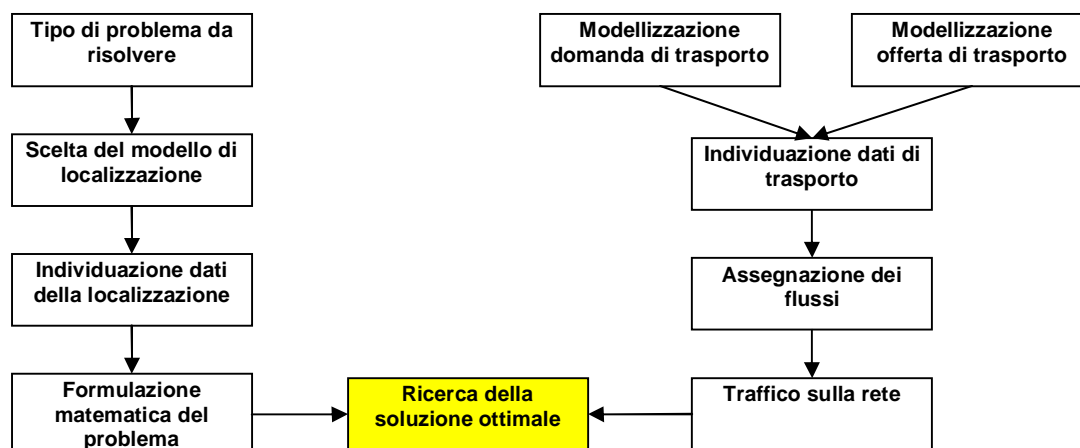


Figura 3.1. Operazioni da eseguire per la risoluzione del problema proposto

La metodologia proposta prevede l'individuazione della soluzione di un duplice problema di localizzazione e determinazione dei flussi di equilibrio generati dal nodo o dai nodi localizzati. Il problema della progettazione di un sistema logistico per una data rete di trasporto si presenta come un problema di calcolo dei flussi di equilibrio di trasporto in cui si tiene conto delle possibili variazioni della posizione del/dei nodo/i logistico/i di servizio. Il problema è altresì estendibile a reti in cui si ha la necessità-convenienza di utilizzare anche più di un nodo logistico, introducendo nel problema di ottimizzazione dei vincoli di apertura-utilizzo.

Il metodo, inoltre, necessita di un approccio modellistico tipicamente logistico, da un lato, e propriamente dell'ingegneria dei trasporti dall'altro. I moderni sistemi, infatti, prevedono analisi e valutazioni che, nell'ottica del pianificatore, vanno ben oltre il semplice abbattimento del costo logistico totale. Gli aspetti da considerare riguardano il contesto in cui il sistema logistico viene progettato. Diverse, infatti, sono le componenti del sistema, quali gli utenti del servizio, le infrastrutture, i veicoli impiegati per il trasporto e le strutture logistiche che interagiscono con le attività presenti sul territorio.

Al fine della descrizione del funzionamento dell'intero sistema l'approccio ingegneristico fa sì che il problema reale, complesso, venga semplificato attraverso opportune considerazioni senza però perdere i legami relazionali ritenuti importanti. In tal senso l'individuazione di procedure di calcolo consente di risolvere un problema

tipicamente logistico come quello della localizzazione dei nodi, rispettando i vincoli determinati dall'interazione tra la domanda e l'offerta di trasporto della rete.

3.1.1. Il modello di localizzazione scelto

I modelli matematici di localizzazione dei nodi su una data rete sono stati presentati e definiti nel primo capitolo (paragrafo 1.6). La formulazione matematica cambia in funzione del tipo di problema da risolvere: il modello infatti dipende strettamente dalle condizioni reali del problema legate al tipo di nodo da localizzare ed al tipo di nodi domanda da servire. Nei problemi logistici legati al trasferimento delle merci, in particolare alla distribuzione urbana o all'acquisto presso punti vendita di grandi dimensioni, il modello di localizzazione maggiormente indicato è il modello di *p-mediana*. Esso permette di individuare i nodi da localizzare in un insieme di possibili nodi (*nodi potenziali*), minimizzando la distanza pesata tra i punti domanda ed i nodi localizzati. Così facendo il centro o i centri localizzati sono posizionati sui nodi della rete che garantiscono la migliore raggiungibilità dai restanti nodi. Se si indica con $G(V_1 \cup V_2, E)$ il grafo della rete, il modello è definito attraverso le relazioni seguenti:

$$\min \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij} \quad (v.1.1)$$

s.v.

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V_2 \quad (v.1.2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in V_2, j \in V_1 \quad (v.1.3)$$

$$\sum_j y_j \leq p \quad (v.1.4)$$

$$y_j, x_{ij} \in [0, 1] \quad \forall i \in V_2, j \in V_1 \quad (v.1.5)$$

dove si è indicato con:

V_1 : insieme dei vertici che rappresentano i nodi potenziali;

V_2 : insieme dei vertici che rappresentano i nodi da servire;

E : insieme degli archi (i, j) , collegamenti tra i nodi i e j ;

y_j : variabili binarie che indicano l'apertura o meno dei nodi potenziali;

x_{ij} : variabili binarie che indicano l'esistenza del collegamento tra i e j ;

d_{ij} : distanza (costo) tra il nodo i ed il nodo j ;

p : massimo numero di nodi da localizzare.

Nella formulazione proposta si assume che ogni centro potenziale abbia uguale costo di apertura, non discriminante quindi nella scelta localizzativa. L'obiettivo è quello di individuare i p nodi che minimizzano il costo totale dato dalla funzione obiettivo, considerando esclusivamente la posizione sulla rete dei restanti nodi da servire e, come si vedrà in seguito, anche le condizioni di traffico presenti sulla rete di trasporto.

Le condizioni di vincolo a cui è sottoposto il problema sono espresse per mezzo delle equazioni e delle disequazioni indicate dalle relazioni (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5). Le equazioni di vincolo (1.2) sono pari al numero di nodi domanda presenti nel sistema; ognuna esprime la condizione secondo la quale tutti i nodi domanda devono essere serviti al più da un solo centro localizzato. I vincoli indicati dalle relazioni (1.3) sono pari al numero di collegamenti da attivare e, quindi, anche essi pari al numero di nodi da servire; esse esprimono la condizione in base alla quale ogni nodo domanda i deve essere servito dal nodo j attivato attraverso il collegamento x_{ij} non nullo. Il vincolo (1.4) impone al problema il massimo numero di nodi di servizio da attivare: nel caso venga considerata la relazione di uguaglianza tale numero è definito univocamente, mentre al contrario se compare il segno di disuguaglianza il numero p è considerato come massimo numero di centri da attivare. Infine i vincoli indicati con l'espressione (1.5) limitano il campo di esistenza delle variabili decisionali ai valori 1 e 0. Se la variabile x_{ij} è pari ad 1 il nodo i è servito dal nodo j . Inoltre per le variabili decisionali relative ai nodi potenziali, se la variabile y_j è pari ad 1 significa che il centro j è localizzato.

3.1.2. La ricerca della soluzione ottima

Il problema di localizzazione così formulato si presenta come un problema di programmazione lineare. Un problema di programmazione lineare è un particolare

problema di programmazione matematica in cui sia la funzione obiettivo sia le funzioni che definiscono i vincoli sono lineari. Il problema consiste quindi nel ricercare i valori delle variabili decisionali che massimizzano o minimizzano una funzione lineare e che verificano un insieme di disuguaglianze lineari. In generale la risoluzione di un problema di programmazione matematica richiede di determinare il valore di n variabili x_1, x_2, \dots, x_n che verificano un insieme di vincoli e che massimizzano o minimizzano una funzione $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La funzione $f, f: R^n \rightarrow R$, è detta funzione obiettivo in quanto sintetizza in forma analitica le finalità del problema; il vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, che ha come componenti le variabili decisionali del problema, deve appartenere a un insieme $X \subset R^n$. Se si considera un problema di massimizzazione, formalmente si può scrivere:

$$\max \quad z = f(x)$$

con

$$x \in X \subset R^n$$

L'insieme X si chiama regione ammissibile e ha come elementi i vettori di R^n che verificano tutti i vincoli del problema (soluzioni ammissibili). Si osservi che la massimizzazione di $f(x)$ coincide con la massimizzazione di $a + b f(x)$ se $a, b \in R^n$ e $b > 0$ e con la minimizzazione di $a + b f(x)$ se $b < 0$. Pertanto la natura del problema non cambia se nella funzione obiettivo si aggiungono delle costanti o se si moltiplica la stessa per una quantità positiva; la moltiplicazione della funzione obiettivo per -1 può essere, invece, utilizzata per trasformare un problema di massimo in uno di minimo o viceversa.

E' opportuno ricordare che una funzione lineare definita in R^n può sempre essere espressa nella forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i = c^T x$$

dove con c si è indicato il vettore colonna

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

e con c_1, \dots, c_n si sono indicate n costanti reali.

Nel problema sopra rappresentato sono presenti i principali elementi di un generico problema di programmazione lineare ed in particolare:

1. un insieme di variabili di decisione o incognite x_1, x_2, \dots, x_n ;
2. una funzione obiettivo, o costo, da minimizzare o massimizzare;
3. alcune equazioni lineari o vincoli di eguaglianza;
4. alcune disequazioni lineari o vincoli di diseguaglianza;
5. alcuni vincoli di segno o di non negatività sulle variabili; questi vincoli non sono altro che semplici disequazioni lineari che in genere si preferisce mantenere separati dagli altri vincoli del problema.

Il notevole peso dato ai modelli lineari si può spiegare in vari modi:

1. molti concetti e proprietà relativi ai modelli lineari si possono ritrovare, con opportune varianti, anche in alcuni modelli più complessi;
2. i modelli lineari possono essere risolti molto efficientemente;
3. moltissimi modelli applicativi sono effettivamente o possono ricondursi a modelli lineari;
4. molti modelli non lineari possono essere approssimati efficacemente mediante opportuni modelli lineari.

Naturalmente l'ipotesi di linearità è molto forte. Inoltre, formulare un problema mediante un modello lineare corrisponde ad assumere la validità delle seguenti ipotesi:

1. *additività*: il contributo al "costo" è la somma dei contributi dovuti alle singole incognite;
2. *proporzionalità marginale*: il contributo di ciascuna variabile è di tipo proporzionale, ad esempio valori doppi della variabile corrisponde un contributo doppio.

3. *divisibilità*: le incognite possono assumere qualsiasi valore reale compatibile con i vincoli. Questa è forse l'ipotesi che più spesso non è verificata nelle applicazioni reali. Molto spesso alcune incognite possono assumere solo valori interi o binari.

Per i problemi di programmazione lineare è importante definire una forma *standard*, alla quale sia facile ricondurre altre forme di problemi di programmazione lineare. Avendo a disposizione la forma standard è possibile sviluppare un algoritmo risolutivo unico che funziona per ogni tipo di problema, senza doverlo adattare ai differenti casi. Si usa la convenzione di definire standard un problema di minimizzazione che si presenta come di seguito:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.v.} \quad & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema standard consiste nella minimizzazione della funzione obiettivo lineare nelle n incognite reali x_1, \dots, x_n ; i coefficienti c_1, \dots, c_n delle incognite sono i *coefficienti di costo*. I *vincoli* sono rappresentati da un sistema di m equazioni lineari e dall'imposizione del vincolo di non negatività su tutte le incognite; l' i -esima equazione ha coefficienti a_{i1}, \dots, a_{in} .

In molti casi è conveniente utilizzare una rappresentazione ancora più concisa, raccogliendo i coefficienti del sistema di equazioni in una matrice $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i costi in un vettore n -dimensionale

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

i termini noti in un vettore m -dimensionale

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ed, analogamente, le incognite in un vettore n -dimensionale

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Si può quindi scrivere il problema sottoforma matriciale come mostrato di seguito:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ Ax = & b \\ x \geq & 0 \end{aligned}$$

Con la notazione c^T si indica il trasposto del vettore c e con $c^T x$ si rappresenta il prodotto interno o prodotto scalare $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ tra i vettori c ed x .

La ricerca della soluzione ottimale di un problema di questo tipo è complessa quando si ha a che fare con un elevato numero di variabili e vincoli. Nei casi in cui n ed m sono grandi e si ha la condizione $m < n$ il problema ammette infinite soluzioni. Infatti, considerando un problema di programmazione lineare in forma standard, è possibile, senza perdita di generalità, assumere la validità della seguente ipotesi:

1. il numero m di righe della matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è strettamente minore del numero di colonne;
2. la matrice A ha rango pari al numero m di righe.

E' chiaro che in molti casi queste ipotesi non sono verificate. Tuttavia è possibile ridurre l'analisi dei problemi di PL alle sole situazioni nelle quali le due ipotesi sono valide. Da un punto di vista formale, si hanno i seguenti casi:

1. $m > n$: in questo caso nel sistema di equazioni $Ax = b$ compaiono più equazioni che incognite. Segue che o il sistema è privo di soluzioni, nel qual caso il problema di PL sarà non ammissibile, oppure, se esiste almeno una soluzione di $Ax = b$,

almeno un'equazione è ridondante e può essere eliminata. Si può ripetere l'operazione, eliminando via via le equazioni ridondanti, fino ad ottenere un sistema nel quale $m = n$;

2. $m = n$: il sistema di equazioni è quadrato. Se $\det(A) = 0$, esiste un'unica soluzione del sistema $Ax = b$: se tale unica soluzione ha componenti tutte non negative, essa sarà anche ottimale; se invece almeno una componente è negativa, il problema di PL è inammissibile. Se invece $\det(A) \neq 0$, di nuovo, o il sistema non ha soluzioni, oppure almeno un'equazione può essere eliminata. Ci si riconduce quindi al caso $m < n$;

3. $m < n$: ancora, eliminando tutte le eventuali equazioni ridondanti, si arriva ad un sistema, equivalente a quello iniziale, caratterizzato da una matrice dei coefficienti A con $\text{rango}(A) = m$.

Le considerazioni fatte qui sopra autorizzano a considerare solo problemi di PL che soddisfano alle due condizioni date. Si ipotizza quindi che il rango di A sia m , pari al numero delle righe di A ; in questo caso è sempre possibile scegliere tra le n colonne della matrice A un sottoinsieme costituito da m colonne fra loro linearmente indipendenti. Ammettendo che tali colonne abbiano indici corrispondenti ad un dato insieme B e che le restanti abbiano indici nell'insieme $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$, si può scrivere (a parte un eventuale scambio di colonne):

$$A = [A_B A_N]$$

dove A_B è una matrice (m, m) con determinante non nullo che viene detta *di base*.

Il nome di "base" deriva dal fatto che le m colonne di A_B costituiscono una base per lo spazio euclideo m -dimensionale, cioè ogni elemento di R^m può essere espresso in modo univoco tramite una combinazione lineare delle colonne di A_B . Ricordando che anche il termine noto b è un vettore m -dimensionale, si ha che il sistema di equazioni

$$A_B x = b$$

ammetterà sempre una (ed una sola) soluzione così definita:

$$x_B = A_B^{-1}b \in R^m$$

Se si considera il vettore n -dimensionale $x = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix}$ si vede immediatamente che tale

vettore è una soluzione del sistema $Ax = b$. Infatti:

$$Ax = \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = A_B x_B + A_N 0 = A_B A_B^{-1} b + 0 = b$$

Una soluzione x così costruita viene chiamata *soluzione di base* corrispondente alla base A_B . Le variabili x_B si dicono *variabili di base*. Si noti che una soluzione di base possiede sempre *almeno* $n - m$ componenti uguali a zero. Potrebbe tuttavia averne anche più di $n - m$ nulle; in tal caso la corrispondente soluzione di base si dice *soluzione di base degenera*. Per estensione anche la base è detta degenera.

Un aspetto fondamentale del metodo del simplesso, presentato più avanti, è che nel corso delle iterazioni esso produce soluzioni ammissibili (cioè soluzioni che soddisfano tutti i vincoli) di base. Il *teorema fondamentale della programmazione lineare* fornisce il necessario supporto teorico:

Si consideri un problema di programmazione lineare in forma standard, con m vincoli, n incognite, $m < n$ e di rango m .

1. *esiste una soluzione ammissibile se e solo se esiste almeno una soluzione ammissibile che è anche di base;*
2. *esiste una soluzione ottimale se e solo se esiste almeno una soluzione ottimale che è anche di base.*

L'esplorazione può dunque essere limitata alle sole soluzioni di base poiché tra di esse, se il problema ammette ottimo, si troverà la soluzione ottimale; ciò non vuol dire che non possano esistere soluzioni ottimali non di base, ma almeno una delle soluzioni ottimali deve esserlo. Le eventuali soluzioni ottimali alternative avranno, naturalmente, tutte lo stesso costo. Si osservi che questo teorema permette, in un certo senso, di passare da un problema in cui lo spazio delle soluzioni da analizzare per trovare

l'ottimo è un "continuo", ad un insieme di candidati ottimi discreto e finito: infatti le soluzioni di base nascono dall'identificazione di una sottomatrice A_B invertibile costituita da m colonne della matrice originale A e, pertanto, il numero complessivo delle possibili basi non può superare il numero finito di modi in cui è possibile scegliere m colonne da un insieme di n , e cioè

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Naturalmente la finitezza del numero massimo di basi, se da un lato permette di pensare ad una procedura finita per la risoluzione di un generico problema di programmazione lineare per il quale sia nota l'esistenza di una soluzione ottima, dall'altro non rappresenta un risultato molto potente. Il numero di basi di un problema di programmazione lineare cresce, al crescere di n ed m ad una velocità tale da rendere totalmente impraticabile la strada dell'enumerazione esplicita di tutte le soluzioni di base. Occorre quindi utilizzare un algoritmo efficiente che riesce ad individuarle ed analizzarle, determinando quella ottima.

3.1.3. La forma tabellare del problema di programmazione

Il problema di localizzazione, posto e formulato attraverso le relazioni (X.X), è rappresentabile con una forma di tipo tabellare. Le informazioni ed i dati collegati ad esse possono, infatti, essere raccolti in una matrice di dimensioni fisse le cui righe indicano le relazioni del problema, mentre le colonne le variabili ed i termini noti della formulazione. Il vantaggio di rappresentare il problema con una forma tabellare consiste nel disporre di una organizzazione dei dati che più facilmente si presta alle procedure di calcolo. Esprimendo in forma standard il problema, la forma ottenuta infatti può essere utilizzata dagli algoritmi di ricerca della soluzione.

Data la forma standard di un problema di programmazione,

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ Ax = & b \\ x \geq & 0 \end{aligned}$$

la forma tabellare assume il seguente aspetto:

c1	c2	cn	z(x)	f.o.
a11	a12	a1n	b1	relazioni di vincolo
.	
.	
.	
am1	am2	amn	bm	

Nella prima riga della tabella sono indicati i coefficienti di costo della funzione obiettivo, le rimanenti righe invece raccolgono i coefficienti di vincolo delle equazioni vincolari del problema. L'ultima colonna, infine, esprime i termini noti del problema.

Il problema di localizzazione di p-mediana scelto, trasformato in forma standard, assume la forma indicata di seguito. Se si indica con n il numero complessivo di nodi della rete, con l il numero complessivo dei nodi potenziali, vengono introdotte $l \times n$ variabili ausiliarie nei vincoli sui collegamenti, indicate con xa_i .

$$z = d_{1\ npl}x_{1\ npl} + d_{2\ npl}x_{2\ npl} + \dots + d_{n\ npl}x_{n\ npl}$$

s.v.

$$x_{1\ npl} + \dots + x_{1\ npl} = 1$$

$$x_{2\ npl} + \dots + x_{2\ npl} = 1$$

⋮

$$x_{n\ npl} + \dots + x_{n\ npl} = 1$$

$$x_{1\ npl} - y_{npl} + xa_1 = 0$$

$$x_{2\ npl} - y_{npl} + xa_2 = 0$$

⋮

$$x_{n\ npl} - y_{npl} + xa_{l*n} = 0$$

$$y_{npl} + \dots + y_{npl} = p$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

La dimensione del problema è facilmente calcolabile: si hanno $l \times n$ variabili decisionali sui collegamenti (x_{ij}), l variabili decisionali di apertura dei nodi potenziali y_j e $l \times n$ variabili ausiliarie xa_i . Il numero complessivo di variabili risulta essere $2 \times (l \times n) + l$. Per quanto riguarda le equazioni di vincolo sono in numero pari a $n + (l \times n) + l$. Infine, come è facilmente intuibile, ottenendo la forma standard, il numero di variabili cresce.

La matrice tabellare che si ottiene può essere schematizzata come indicato nella figura che segue; lo schema riportato fa riferimento al caso in cui il numero massimo di centri da localizzare p sia uguale a 3.

		var. dec collegamenti	var ausiliarie	var apertura np	b		
1	1						z(x)
	n						vinc. sui nodi dom.
n*(l+1)+2	1						vinc. collegamenti
	l						
	l						
1	1						vinc ap np
		l*n	l*n	l	1		
			l*(2n+1)+1				

Figura 3.2. Schema matrice tabellare del problema di localizzazione

Nella matrice è possibile individuare delle sottomatrici note elementari come la matrice nulla O e la matrice identità I . La rappresentazione precedente diventa quindi quella mostrata in figura 3.3.

I I I			O	O		
I			I			

Figura 3.3. Schema matrice tabellare del problema di localizzazione con indicazione delle matrici note

Una rappresentazione del problema di questo tipo permette di intuire più facilmente come, durante la procedura di calcolo, solo alcune parti della matrice siano da considerare. Se ad esempio il numero di nodi da localizzare fosse pari ad 1 ($p=1$), la

ricerca della soluzione si basa sull'utilizzo di alcune porzioni della matrice tabellare: è come se a turno si attivassero solo alcune relazioni di vincolo ed alcune variabili. La successione di immagini riportate di seguito (figura 3.4) indica come un algoritmo di ricerca della soluzione utilizzerebbe la tabella.

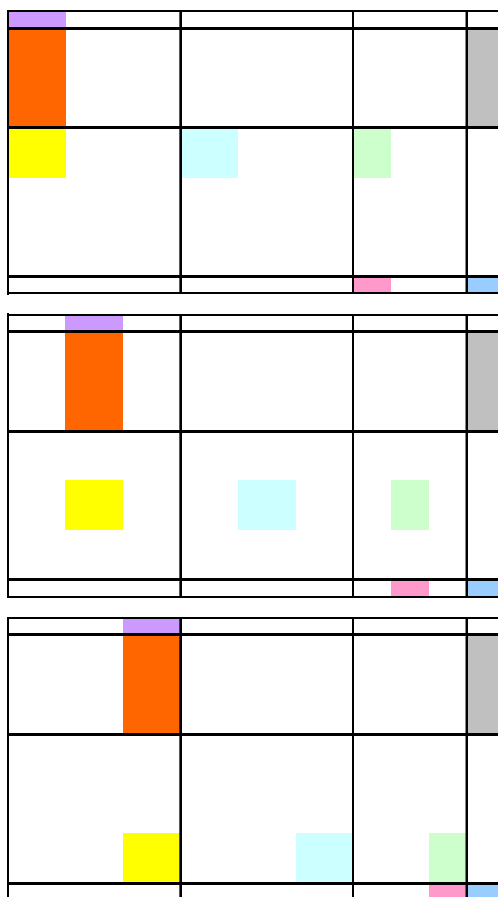


Figura 3.4. Schema di ricerca della soluzione utilizzando la matrice tabellare.

Il problema cresce di complessità quando aumenta il numero di vincoli e di variabili da considerare. Il calcolo, infatti, assume proporzioni differenti e crescenti se viene aumentato p (fig. 3.5). Le parti di matrice da considerare sono in numero maggiore, così come mostrato nella seguente figura dove si riporta il caso in cui p passa da 1 a 3.

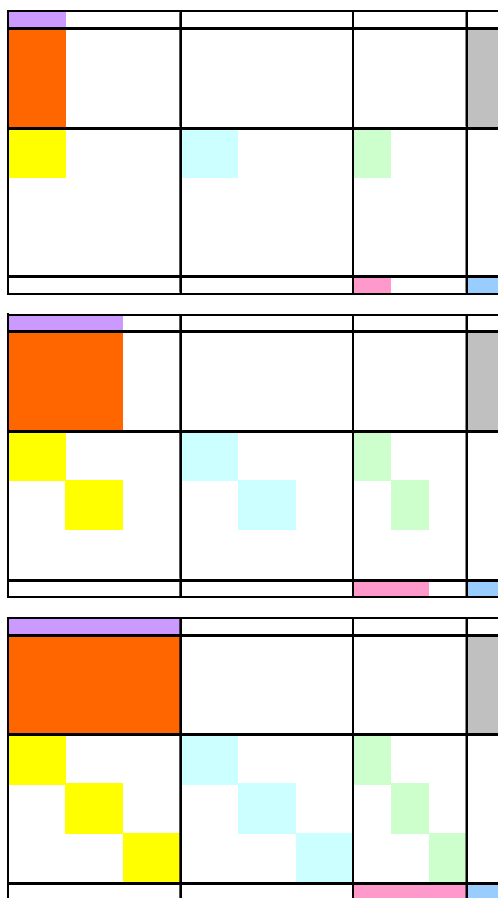


Figura 3.5. Schema di ricerca della soluzione utilizzando la matrice tabellare per p crescenti

3.2. Formulazione del problema di trasporto

In un contesto in cui si ha la necessità di valutare ed analizzare gli effetti della localizzazione di uno o più nodi logistici il problema di trasporto da formulare e risolvere consiste nel determinare i flussi sulla rete di trasporto in condizioni di equilibrio, assumendo che la scelta del percorso da parte degli utenti del sistema sia di tipo deterministico. Si vuole cioè formulare il problema di trasporto in modo statico e deterministico, condizioni che permettono di simulare l'intero sistema non discostandosi molto da quello che avviene nei casi reali. Alla base delle assunzioni da compiere vi è l'ipotesi che ogni utente della rete per effettuare il proprio spostamento scelga quello di costo inferiore; l'utilità associata alla scelta è calcolata con un modello deterministico che, sebbene meno realistico dei modelli probabilistici di utilità casuale,

nelle condizioni meno favorevoli di traffico (rete congestionata) fornisce risultati non molto discostanti. Il vantaggio più importante di una tale scelta è riconducibile al fatto di disporre di un numero di informazioni sul comportamento dell'utenza nettamente inferiore rispetto ai modelli di scelta casuali e di poter utilizzare dagli algoritmi computazionali più efficienti.

La formulazione del problema di trasporto può quindi essere effettuata attraverso tre differenti fasi:

- determinazione delle caratteristiche del sistema di offerta e della domanda;
- definizione del modello di scelta del percorso;
- definizione del modello di assegnazione.

In fase preliminare, come d'altronde avviene in tutti i problemi di trasporto, devono essere note le informazioni su quelli che sono gli aspetti principali dei due sistemi in cui è scomponibile il sistema di trasporto. Senza un'esauriente conoscenza del sistema di offerta e di domanda di trasporto, infatti, non è possibile applicare i modelli delle fasi successive. In questa fase occorre quindi definire un modello di rete al quale poi legare la domanda di spostamenti.

Nota la domanda di trasporto, successivamente è necessario stabilire per ogni coppia origine – destinazione della rete l'aliquota di spostamenti che utilizza ciascun percorso. Attraverso i modelli di tipo comportamentale è possibile compiere questo calcolo e, nel caso specifico, il modello scelto è di tipo deterministico.

Infine si può procedere all'assegnazione della domanda alla rete di trasporto per ottenere i flussi generati su ogni arco della rete. Il modello da utilizzare, anche in questo caso, è deterministico e tiene conto del costo di trasporto associato agli archi ed ai percorsi. Di seguito sono illustrate più nel dettaglio le singole fasi.

3.2.1. I sistemi di offerta e di domanda di trasporto

Il problema di trasporto è definito solo quando sono noti il sistema di offerta e la domanda legata ad esso. È necessario dunque individuare gli elementi che costituiscono il sistema di offerta in cui poi andare a localizzare il nodo o i nodi logistici. Dato che

una eventuale localizzazione di un nodo logistico risente non poco delle condizioni del sistema, nella formulazione del problema di localizzazione è opportuno prima definire le componenti del sistema di trasporto e successivamente analizzare e valutare le interazioni che avvengono nel sistema complessivo. È evidente che il sistema risultante, costituito dal solo sistema di trasporto e dal nodo o i nodi localizzati, ha un funzionamento del tutto differente.

Per poter poi valutare il funzionamento del nuovo sistema ottenuto in prima fase è necessario modellizzare il sistema di trasporto con quelli che sono gli strumenti classici della pianificazione dei trasporti. In fase di formulazione del problema i modelli matematici che permettono di definire il funzionamento di un sistema di trasporto hanno come obiettivo quello di determinare le caratteristiche salienti della domanda e dell'offerta di trasporto. Pertanto è utile ricordare i principali aspetti legati ad una loro opportuna modellizzazione.

Il servizio offerto da un sistema di trasporto reale può essere modellizzato con gli strumenti della teoria delle reti. Essi consentono di usare una serie di algoritmi in grado di calcolare grandezze ed informazioni legate alla rete stessa. Le fasi in cui è possibile suddividere le operazioni di modellizzazione del sistema di offerta sono rappresentate in figura 3.6.

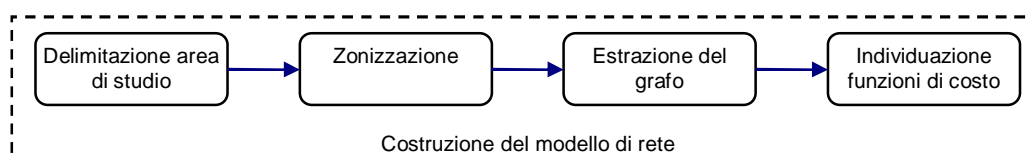


Figura 3.6. Operazioni per costruire il modello di rete di trasporto

Scopo delle diverse fasi è costruire un modello di rete che meglio rappresenta la realtà. La prima operazione da compiere è determinare l'area geografica in cui è presente il sistema di trasporto. In essa sono contenuti spazialmente tutti gli effetti generati dal funzionamento del sistema nonché tutte le sue componenti. Il modello di rete, quindi, è definibile solo nell'area di studio individuata. Naturalmente l'estensione di tale area varia in base al tipo di problema che si deve risolvere. Nel caso specifico dei

problemi localizzativi di nodi generatori di traffico, l'area di studio coincide con le aree geografiche in cui è posizionata la domanda che afferisce, o che afferirebbe, ai nodi localizzati. Il problema dunque è strettamente legato al tipo di nodo di servizio da localizzare.

L'area individuata costituisce uno spazio continuo di dimensione variabile che difficilmente si presta ad una modellizzazione matematica del problema. È utile individuare all'interno di essa delle parti o zone costituite da punti che per caratteristiche risultano essere molto simili. Si opera cioè una discretizzazione del problema in cui ogni zona genera ed attrae spostamenti da/per le altre zone. Data un'area di studio, maggiore è il numero di zone individuate, maggiore è il livello di dettaglio del problema. Generalmente non esistono sistemi di trasporto completamente isolati, cioè delimitati esclusivamente ad un'area di studio: nella realtà gli scambi di flusso avvengono anche oltre tale spazio, per quanto essa possa essere stata delimitata ampiamente. Allora è possibile prevedere zone esterne di dimensioni più grandi.

L'estrazione del grafo prevede, invece, l'individuazione dei nodi e degli archi costituenti la rete. I primi indicano i punti spaziali dell'area di studio ritenuti significativi ai fini dello studio del problema, i secondi le relazioni che collegano i nodi sottoforma di collegamenti.

Infine, l'ultima fase che permette di definire il modello di rete consente di legare tra loro le due principali grandezze associabili ad ogni arco della rete mediante una funzione del tipo $c = c(f)$. Su tutti gli archi è infatti possibile definire una funzione di costo con cui calcolare il relativo costo generalizzato di trasporto, una volta noto il flusso che lo percorre. Numerose sono le funzioni definite in letteratura per tutti i tipi di collegamento, adattabili al contesto in cui bisogna localizzare il nodo.

Al fine di formulare in modo esaustivo l'intero sistema di trasporto è necessario determinare il numero di spostamenti che avvengono tra gli elementi della rete costruita. La stima della domanda di trasporto consente di risalire al numero di utenti del sistema che attraverso il modo di trasporto scelto, per il motivo dello spostamento, scegliendo il percorso, utilizzano il sistema di offerta preliminarmente modellizzato. Il risultato finale dell'applicazione di più modelli matematici in grado di stimare tale domanda è la matrice origine-destinazione. Essa, raccogliendo sottoforma di dati le informazioni relative agli spostamenti, fornisce il numero di movimenti che avvengono tra i nodi

origine e destinazione della rete. Gli spostamenti sono caratterizzati spazialmente, perché riferiti ai nodi geografici, e riferiti ad intervalli di tempo che possono variare da problema a problema. La matrice quadrata che si ottiene ha dimensioni pari al numero dei nodi costituenti la rete.

Una volta note le caratteristiche del sistema di offerta e della domanda di trasporto, il problema di trasporto è risolvibile se si è in grado di calcolare il minimo percorso tra una qualunque coppia di nodi origine – destinazione ed il relativo flusso, associabile agli archi appartenenti al percorso considerato.

3.2.2. La scelta del minimo percorso

L'operazione con cui il singolo utente sceglie il percorso da effettuare durante il suo spostamento è fondamentale per determinare i flussi sulla rete. Come già visto in precedenza la probabilità di scelta di un percorso è legata alla percezione che sia minimo il costo associato al percorso. I modelli comportamentali sono quelli maggiormente utilizzati ed il modello di utilità deterministica comporta indubbi vantaggi in termini di calcolo.

Se con k viene indicato il generico percorso che collega una coppia origine-destinazione di una data rete, il modello di scelta assegna la massima probabilità al percorso di costo inferiore:

$$p(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } C_k < C_h \quad \forall h \neq k, \quad h, k \in I_{OD} \\ 0 & \text{se } C_k < C_h \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove con C_k si indica il costo del percorso k e con h un qualunque altro percorso tra l'origine e la destinazione considerata. In altri termini si assume che tutti gli utenti che devono spostarsi tra la coppia di nodi considerata effettuino la stessa scelta.

È evidente che per la risoluzione del problema la condizione necessaria è individuare tra i diversi percorsi quello che comporta il costo inferiore all'utente. Esistono diversi algoritmi in grado di determinare il cammino di costo minimo tra un dato nodo origine

ed un dato nodo destinazione. L'obiettivo comune di ogni algoritmo è quello di individuare gli alberi di minimo costo che abbiano radice coincidente con ogni nodo origine della rete. Noto l'albero, infatti, sono facilmente individuabili i percorsi. L'algoritmo più utilizzato è il noto algoritmo di *Dijkstra*; esso risulta il meno complesso dal punto di vista computazionale e con un numero di iterazioni non molto elevato rispetto ad altri algoritmi. Teoricamente, la procedura di ricerca degli alberi si basa sul teorema di *Bellman* secondo il quale la condizione necessaria e sufficiente affinché un albero possa ritenersi di minimo costo è che per ogni coppia di nodi (i,j) collegati da un arco della rete sia verificata la condizione

$$c_j - c_i \leq c_{ij}$$

con c_i e c_j sono indicati i costi necessari per raggiungere i nodi i e j dalla radice dell'albero, mentre con c_{ij} il costo dell'arco ij .

Brevemente l'algoritmo è definito attraverso i seguenti punti:

- inizializzazione,
- estrazione del primo nodo della lista (se esiste) e diminuzione della posizione nella lista di tutti gli altri nodi,
- calcolo del costo necessario al raggiungimento del nodo ed individuazione del nodo predecessore,
- riordino della lista,
- verifica test di arresto.

Data la notorietà della procedura, per ulteriori approfondimenti si rimanda alla letteratura di settore.

3.2.3. Il calcolo dei flussi sulla rete

La scelta del percorso incide su quella che è la distribuzione degli spostamenti sulla rete di trasporto. Gli spostamenti che avvengono sui diversi archi della rete sono

calcolabili come flussi tra le possibili coppie origine-destinazione determinate dalla nota domanda. In condizioni di equilibrio infatti il calcolo dà come risultato un vettore dei flussi congruente alla domanda considerata e con singole componenti non negative. Per il calcolo dei flussi il problema di trasporto considerato prevede l'utilizzo di un modello di assegnazione di tipo deterministico in condizioni di rete congestionata. La scelta è dovuta al modello di scelta del percorso, anche esso di tipo deterministico, ed al fatto di considerare uno stato della rete non favorevole. Analizzare una rete congestionata, infatti, consente di valutare condizioni in cui è possibile far emergere le principali criticità del sistema di trasporto ed è particolarmente utile nella fase in cui verrà considerato anche il problema di localizzazione sulla rete considerata.

I flussi sono calcolati con una procedura basata sull'algoritmo di Frank-Wolfe, considerando funzioni di costo separabili. Quando ci si trova in una condizione del genere, cioè quando il costo di un arco dipende esclusivamente dal flusso che lo percorre, la matrice jacobiana del vettore della funzione di costo è diagonale con elementi non nulli, coincidenti con le derivate delle funzioni di costo calcolate rispetto al flusso che lo percorre. Nel caso in cui si abbiano funzioni di costo crescenti con l'aumentare dei flussi le derivate così calcolate sono sempre positive, pertanto la matrice jacobiana è definita positiva, assicurando l'unicità del vettore dei flussi di equilibrio f^* . Dunque è possibile scrivere

$$f^* = \min_{f \in S_f} \left\{ \sum_{ij} \int_0^{f_{ij}} c_{ij}(v_{ij}) dv_{ij} \right\}$$

dove con (i,j) si indicano gli archi della rete. In sostanza f^* è il vettore dei flussi in corrispondenza del quale il costo complessivo sulla rete risulta essere minimo.

L'algoritmo che permette di risalire ai flussi di equilibrio deterministico è di tipo iterativo ed individua in ogni iterazione un vettore dei flussi ammissibile. Il vettore calcolato minimizza la funzione obiettivo approssimata ad una forma lineare. La procedura parte da una soluzione ammissibile del problema, solitamente ponendo pari a 0 o ad 1 il flusso di ogni arco e fissando un valore per il parametro di arresto ϵ . Una descrizione delle diverse fasi viene riportata di seguito:

1. *Inizializzazione*, si calcola il vettore f^0 , soluzione ammissibile di partenza e si procede al calcolo dei costi di arco attraverso la funzione di costo separabile scelta, ottenendo il vettore $c^0 = c(f^0)$; si compie un'assegnazione Tutto-Niente con la nota domanda e secondo i costi c^0 . Il vettore dei flussi ottenuto \bar{f}^1 è il nuovo vettore ammissibile con cui iniziare la procedura iterativa e si pone il contatore $k=1$.

2. *Calcolo dei costi d'arco*, con \bar{f}^k si calcola il vettore $c^k = c(\bar{f}^k)$.

3. *Assegnazione di tipo Tutto-Niente*, si assegna ottenendo il vettore \hat{f}^k .

4. *Ottimizzazione monodimensionale*, il problema di ottimo è risolto quando si calcola il coefficiente $\bar{\lambda}_k$, con $0 \leq \bar{\lambda}_k \leq 1$, che minimizza la funzione

$$S(\lambda) = \sum_{ij} \int_0^{f_i^k + \lambda_k (f_i^k - \bar{f}_i^k)} c(v_{ij}) dv_{ij}$$

5. *Calcolo della nuova soluzione*, si determina il nuovo vettore dei flussi \bar{f}^{k+1} dato da

$$\bar{f}^{k+1} = \bar{f}^k + \bar{\lambda}_k (\hat{f}^k - \bar{f}^k)$$

6. *Verifica del test di convergenza*, può essere utilizzato lo scarto medio così calcolato

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \frac{|\bar{f}_i^{k+1} - \bar{f}_i^k|}{\bar{f}_i^k}$$

se risulta essere inferiore rispetto al valore stabilito ε il test è soddisfatto, altrimenti si itera ripartendo dal punto 2.

Nello svolgimento delle diverse operazioni, quella che richiede uno sforzo computazionale maggiore coincide con la risoluzione del problema di ottimizzazione della funzione $S(\lambda)$ lungo la direzione del segmento di estremi $\hat{f}^k - \bar{f}_i^k$. Il problema richiede l'uso di un algoritmo di ottimizzazione monodimensionale con l'obiettivo di individuare il valore minimo della funzione di una variabile su un intervallo chiuso. Nel

caso specifico l'intervallo è $[0, 1]$, mentre la funzione è strettamente quasi convessa: il valore minimo di λ può essere ricercato partizionando in fasi successive l'intervallo di partenza riducendolo fino ad un limite prestabilito.

La scelta è ricaduta sull'algoritmo basato sul metodo di bisezione (o *metodo di Bolzano*). La caratteristica principale del metodo è legata alla necessità di conoscere la derivata prima della funzione $S(\lambda)$. Se vengono indicati con a e b gli estremi dell'intervallo nel quale ricercare il minimo della funzione e con δ il valore soglia per l'intervallo ridotto, l'algoritmo è il seguente:

1. *Inizializzazione*, si pongono $u_1=a$ e $v_1=b$, il contatore $k=1$ e si fissa δ .

2. *Calcolo di $S'(\lambda)$ nel punto intermedio dell'intervallo*, si considera $\lambda_k = \frac{u_k + v_k}{2}$

e si calcola $S'(\lambda_k)$; nel caso in cui $S'(\lambda_k) = 0$ si ferma la procedura, altrimenti si valuta la positività di $S'(\lambda_k)$: se $S'(\lambda_k) > 0$ l'algoritmo procede al punto 3, se $S'(\lambda_k) < 0$ al punto 4.

3. *Modifica degli estremi dell'intervallo*, si pongono $u_{k+1} = u_k$ e $v_{k+1} = \lambda_k$, andando al punto 5.

4. *Modifica degli estremi dell'intervallo*, si pongono $v_{k+1} = v_k$ e $u_{k+1} = \lambda_k$, andando al punto 5.

5. *Verifica del test di arresto*, se si verifica la condizione $v_{k+1} - u_{k+1} < \delta$ allora stop, altrimenti si ritorna al punto 2.

3.3. Il problema combinato di trasporto localizzazione

Nei precedenti paragrafi sono state definite le caratteristiche principali del problema di localizzazione, prima, e del problema di trasporto, poi. Le formulazioni date, basate su opportune ipotesi, permettono di avere un quadro su quelle che sono le variabili dei problemi e gli aspetti che più incidono sulla loro risoluzione, nonché sui parametri da considerare.

Gli aspetti teorici, da una parte, e quelli modellistici, dall'altra, consentono di formulare il problema combinato della localizzazione di un nodo su una data rete di trasporto. Esso è di non facile soluzione, visto l'elevato numero di variabili e di vincoli in gioco, ed appare complesso nella sua risoluzione. Data una rete di trasporto, in condizioni di congestione l'obiettivo è dunque localizzare uno o più nodi generatori di traffico secondo il modello di localizzazione scelto. Una tale situazione è facilmente riscontrabile quando si devono analizzare e valutare gli effetti su una rete di trasporto stradale dell'apertura di un impianto o centro di tipo logistico in un'area in cui è presente la potenziale domanda afferente al nuovo nodo localizzato. Basti pensare ai numerosi casi di apertura in ambito urbano di centri commerciali o di centri distributivi delle merci.

La caratteristica comune dell'uso di tali centri è dover servire una domanda numerosa, distribuita e polverizzata sul territorio circostante. La scelta di modellizzare il problema di localizzazione mediante l'utilizzo del modello p-mediana fa sì che tutta la domanda venga servita, senza penalizzare una parte di essa e minimizzando quello che è il costo complessivo affinché tale servizio venga effettuato. Esso viene inteso come la somma dei costi che tutti gli utenti che si spostano sulla rete stradale devono sostenere per raggiungere il nodo o i nodi localizzati. Il fattore tempo di percorrenza può essere utilizzato per esprimere tale costo.

Il problema combinato è rappresentato sottoforma di schema in figura 3.7. La localizzazione viene eseguita sempre su una rete in equilibrio e, in base alle condizioni di quest'ultima, i costi associati agli spostamenti variano con i flussi. L'inserimento del nodo generatore modifica l'equilibrio del sistema di trasporto, cambiando la distribuzione dei flussi e non garantendo l'ottimalità della posizione individuata nella fase precedente. La verifica della soluzione del problema localizzativo consiste in una nuova localizzazione che può non coincidere con quella già calcolata. Nel caso in cui la verifica non è soddisfatta, il problema così posto diventa di tipo iterativo.

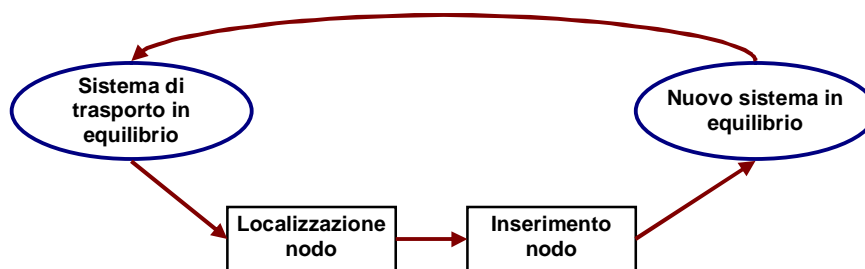


Figura 3.7. Schematizzazione del problema combinato

3.3.1. La modellizzazione grafica

In fase iniziale il primo aspetto da considerare è legato alla distinzione tra il grafo di trasporto, a cui fa riferimento la rete del sistema di offerta, ed il grafo utilizzato dal modello di localizzazione. Il primo è composto dai nodi rappresentativi la domanda di trasporto che utilizza la rete (nodi centroidi) uniti dai collegamenti stradali esistenti. Questi ultimi non necessariamente coincidono con i singoli archi della rete stradale considerata: in altri termini il collegamento tra i nodi i e j può essere il percorso di costo minimo che li unisce. L'assunzione appena fatta fa sì che il modello di offerta di trasporto sia compatibile con il modello di localizzazione scelto.

Il grafo che si utilizza per formulare il problema di localizzazione è dato dall'insieme dei nodi domanda, dei nodi potenziali e dai collegamenti che li uniscono. Il grafo così ottenuto non coincide con quello di trasporto. Se ad esempio si considera il caso rappresentato in figura 3.8 è possibile notare come, data la rete di partenza, si può risalire al grafo da utilizzare nel modello di localizzazione. L'operazione richiede che per ogni collegamento del grafo di localizzazione venga considerato un percorso possibile del grafo di trasporto che unisca il nodo domanda al nodo potenziale.

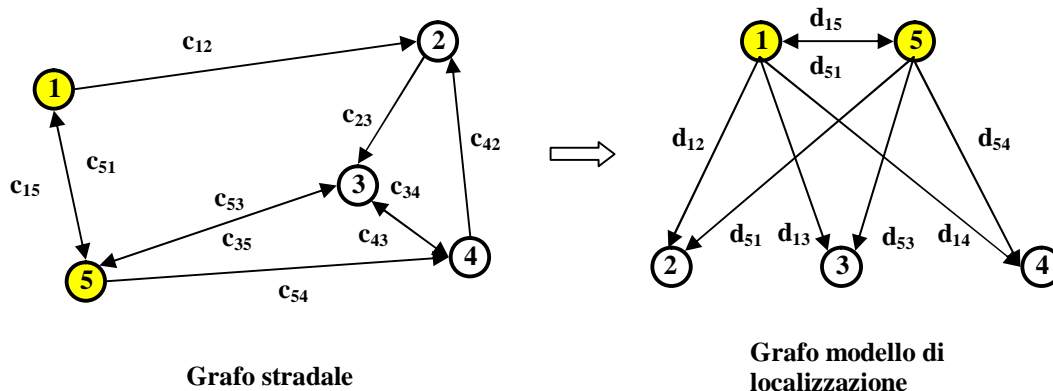


Figura 3.8. I grafi utilizzati nel problema combinato

Il nuovo grafo che si ottiene non presenta archi che collegano tra loro i nodi domanda e, se il grafo di trasporto è completo, un numero di collegamenti pari al numero dei possibili percorsi ($n \times l$). Naturalmente, ipotizzando per il problema di trasporto un modello di scelta del percorso di tipo deterministico, i percorsi utilizzati saranno quelli di costo minimo:

$$d_{ij} = \min_{perc \in I_{OD}} perc_{ij} \quad \text{con } i \in V_1, j \in V_2$$

3.3.2. Le caratteristiche della domanda

Nel sistema da analizzare la domanda utile ai fini della risoluzione del problema è scomponibile in due componenti. La prima è rappresentata dagli utenti della rete di trasporto che si spostano per raggiungere il nodo o i nodi localizzati; essi hanno come origine i nodi centroidi della rete (nodi domanda) e destinazione il centro o i centri localizzati (nodi potenziali). La seconda componente, invece, è data da tutti gli spostamenti che avvengono sulla rete di trasporto per motivi diversi dal raggiungimento dei nodi localizzati. Durante le fasi di assegnazione della domanda, al fine di un corretto calcolo dei costi di percorrenza, è estremamente importante considerare tutti gli utenti del sistema analizzato. Naturalmente la domanda complessiva è superiore nel caso in cui si debba considerare la presenza di uno o più nodi localizzati.

La domanda di trasporto complessiva del problema combinato è rappresentabile attraverso una matrice OD di dimensioni $n \times n$ i cui nodi sono tutti i nodi del sistema. La matrice pertanto è scomponibile in due matrici distinte la cui somma dà per risultato gli spostamenti totali (fig. 3.9).

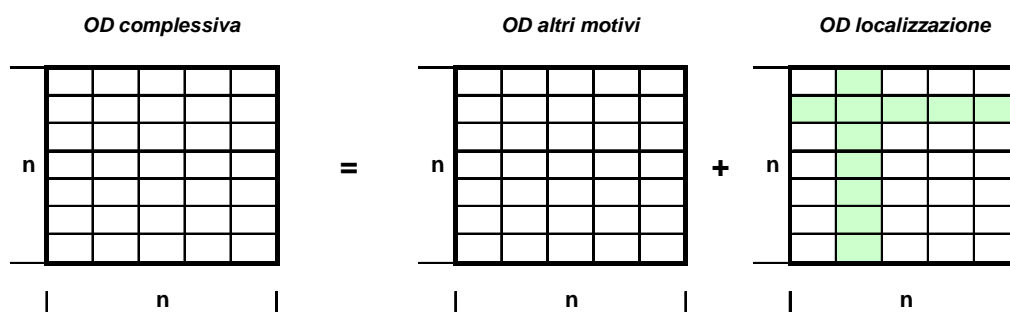


Figura 3.9. Componenti della domanda

La matrice degli spostamenti relativa al nodo localizzato ha elementi nulli tranne per le coppie origine-destinazione in cui si ha la presenza di un nodo localizzato. La matrice relativa agli spostamenti per altri motivi, invece, fa riferimento al sistema nel quale non si ha la presenza di nessun centro localizzato.

Infine, il problema non perde di generalità se la domanda considerata fa riferimento a periodi differenti della giornata. L'importante è che le matrici componenti siano riferite allo stesso periodo di tempo. Nelle fasi risolutive presentate in seguito, verrà considerato il periodo nel quale è maggiore il numero di utenti che circolano sulla rete, valutando la localizzazione in condizioni di traffico durante il periodo che solitamente viene indicato con il termine "ora di punta".

Capitolo 4. La proposta di un algoritmo risolutivo

4.1. Concetti principali e proprietà degli algoritmi

Un algoritmo è una procedura di calcolo costituita da un numero finito di passi elementari e che, dopo aver effettuato un numero finito di operazioni, termina con la risoluzione del problema posto. I passi elementari sono costituiti da istruzioni che fanno diretto riferimento alle capacità di base di chi esegue l'algoritmo. In genere l'esecutore è di tipo automatico e, come noto, oltre a saper eseguire le quattro operazioni aritmetiche, è in grado di memorizzare i dati in alcune variabili di memoria, identificate da un nome, e di eseguire le istruzioni fondamentali che si possono ritrovare in tutti i linguaggi di programmazione di tipo imperativo – procedurale. Esse sono sei:

- *assegna*: consente di attribuire ad una variabile un valore costante, il valore memorizzato in un'altra variabile o il risultato di un'espressione aritmetica tra valori costanti o valori contenuti in altre variabili;
- *leggi*: consente all'esecutore di acquisire dall'esterno un'informazione e di memorizzarla in una variabile di memoria;
- *scrivi*: consente all'esecutore di visualizzare/stampare all'esterno un dato costante, un valore memorizzato in una variabile o il risultato di un'espressione aritmetica che coinvolge valori costanti o variabili;
- *se... allora... altrimenti*: consente all'esecutore di valutare un'espressione booleana (condizione logica) il cui valore può essere solo “vero” o “falso”; in base al risultato della valutazione della condizione, vengono eseguite delle istruzioni;
- *vai al passo ...*: consente di saltare ad una specifica istruzione dell'algoritmo anziché eseguire l'istruzione successiva della sequenza;
- *stop*: termina l'esecuzione dell'algoritmo.

Il problema posto della localizzazione è risolto attraverso una serie di algoritmi che si rifanno a strutture basate sulle istruzioni appena riportate. Attraverso l'utilizzo di schemi esemplificativi è possibile rappresentare le procedure di calcolo utili ed i diagrammi di flusso consentono una più immediata comprensione delle operazioni da eseguire.

4.1.1. Diagrammi di flusso

Ad ogni istruzione elementare corrisponde un simbolo con cui è possibile definire una rappresentazione grafica dell'algoritmo, ossia un diagramma di flusso. Tutti i diagrammi di flusso con cui vengono rappresentati gli algoritmi hanno un unico punto di inizio ed un unico punto di fine: entrambe queste istruzioni (solitamente indicate con i termini *start* e *stop*) sono rappresentate da un'ellisse; nella pseudo-codifica di un algoritmo, espressa come una sequenza di istruzioni elementari, l'istruzione *start* è implicita, visto che l'algoritmo inizia sempre dal primo passo della pseudo-codifica. Le istruzioni di assegnazione, in generale le più frequenti negli algoritmi, sono rappresentate all'interno di un rettangolo, mentre le operazioni di input e di output (*leggi* e *scrivi*) sono rappresentate con dei parallelogrammi. Le condizioni sono espresse all'interno di rombi ed, infine, i salti sono rappresentati con delle frecce.

I box del diagramma di flusso sono collegati fra loro da frecce: nella sequenza delle operazioni è implicito il fatto che dopo aver eseguito una determinata istruzione, a meno di diverse indicazioni rese esplicite nell'algoritmo tramite l'istruzione *vai al passo...*, deve essere eseguita subito l'istruzione successiva. Naturalmente in ogni box del diagramma di flusso possono entrare una o più frecce e l'unico box in cui non entra nessuna freccia è quello con l'istruzione *start*. Analogamente è possibile dire che da ogni box esce sempre una ed una sola freccia; fanno eccezione soltanto i box per l'istruzione *stop* e le condizioni, da cui necessariamente devono sempre uscire esattamente due frecce: una per indicare la strada seguita dall'algoritmo nel caso in cui la condizione risulti essere vera e l'altra nel caso in cui la condizione risulti falsa.

Di seguito vengono riportate le diverse strutture algoritmiche con cui risolvere un determinato problema.

4.1.2. Strutture algoritmiche

Le strutture algoritmiche con cui sono costruiti i diagrammi di flusso sono soltanto tre, così come previsto dalle regole della programmazione strutturata:

1. la *struttura sequenziale*, in cui le istruzioni si susseguono una dopo l'altra senza alcuna variazione al flusso dell'algoritmo;
2. la *struttura condizionale*, in cui a fronte di una condizione il flusso dell'algoritmo si biforca per poi ricongiungersi più avanti;
3. la *struttura iterativa*, in cui una sequenza di istruzioni viene ripetuta più volte fintanto che risulta verificata una determinata condizione; la condizione può essere valutata all'inizio della sequenza di istruzioni da ripetere, oppure al termine della sequenza, a seconda dei casi e delle necessità; quando la condizione risulta falsa, il flusso dell'algoritmo prosegue con la prima istruzione esterna alla sequenza da ripetere.

Le tre strutture possono essere concatenate fra loro oppure nidificate una dentro l'altra; non devono invece mai sovrapporsi: in tal caso si progetta un algoritmo non efficiente, poco elegante e che risulterebbe assai difficile codificare con le istruzioni di un linguaggio di programmazione strutturato (come il linguaggio C o il linguaggio Java).

Un aspetto particolarmente significativo della programmazione strutturata è costituito dal divieto di utilizzare i cosiddetti "salti incondizionati", ossia istruzioni del tipo *vai al passo ...* non soggette al controllo diretto di una condizione booleana. Nei linguaggi di programmazione strutturata non si utilizza l'istruzione di salto *go-to*, ma si inserisce il salto sempre all'interno di una struttura iterativa: al termine o all'inizio del ciclo, in base alla valutazione di una condizione si stabilisce se ripetere il blocco di istruzioni oppure se saltare ad un'altra istruzione uscendo dalla struttura di controllo iterativa.

4.1.3. Efficienza e complessità computazionale

È utile ricordare che, nel valutare l'efficienza di un algoritmo, si calcola il numero di operazioni elementari eseguite dall'algoritmo stesso a fronte di un insieme di informazioni da elaborare di cardinalità n . La valutazione dell'efficienza di un algoritmo è quindi una funzione f , tipicamente espressa in funzione della variabile n , che

rappresenta il numero di dati con cui è definita l'istanza del problema da risolvere. Tale funzione viene chiamata funzione di complessità computazionale dell'algoritmo. Se $f(n)$ è la complessità dell'algoritmo A , allora per risolvere un'istanza del problema caratterizzata da $n = 15$ informazioni, l'algoritmo esegue un numero di operazioni pari a $f(15)$. È facile rendersi conto che la funzione con cui si esprime la complessità di un algoritmo è una funzione positiva (un algoritmo non può eseguire un numero negativo di operazioni) ed in generale è non decrescente: con l'aumentare delle informazioni da elaborare le operazioni effettuate dall'algoritmo non possono diminuire.

Generalmente non tutte le istanze di un determinato problema, a parità di informazioni da elaborare, sono equivalenti dal punto di vista della complessità computazionale dell'algoritmo risolutivo; esistono istanze "più facili" ed altre "più difficili". Nel valutare la complessità degli algoritmi, quindi, si considera in genere la complessità nel caso peggiore, ossia la complessità ottenuta considerando l'istanza del problema meno favorevole al nostro procedimento risolutivo, dando per scontato che negli altri casi l'algoritmo non potrà che comportarsi meglio, in modo più efficiente.

Per poter confrontare la complessità di algoritmi differenti, senza rendere vano il confronto con dettagli tecnici poco significativi o ottimizzazioni di minor conto, si raggruppano le funzioni di complessità in classi di complessità espresse mediante la notazione "O grande":

$$O(f(n)) = \{g(n) : \exists n_0 > 0, c > 0 \text{ tali che } 0 < g(n) < c f(n) \forall n > n_0\}$$

L'insieme $O(f(n))$ è costituito da numerose (infinite) funzioni $g(n)$ tali da rispettare definitivamente, ossia da un certo valore n_0 in poi, la condizione $0 < g(n) < c f(n)$. In pratica l'insieme $O(f(n))$ contiene tutte le funzioni $g(n)$ il cui andamento asintotico è dello stesso ordine di grandezza o inferiore a quello di $f(n)$.

Nel valutare la complessità di un algoritmo si cerca di individuare la classe di complessità più bassa che contenga la funzione con cui si può esprimere il numero di operazioni elementari eseguite dall'algoritmo nel caso peggiore. È chiaro infatti che se un algoritmo ha una complessità appartenente alla classe $O(n)$, in generale è più efficiente di un algoritmo che, pur risolvendo correttamente il medesimo problema, appartenga alla classe di complessità $O(n^3)$.

4.2. Definizione di un algoritmo per la risoluzione del problema di localizzazione

Il problema combinato della localizzazione e dell'assegnazione dei flussi su una data rete di trasporto è di difficile risoluzione. I calcoli da effettuare sono complessi, necessitano di fasi iterative e, dato l'elevato numero di dati e parametri in gioco, non sono eseguibili manualmente. Anche problemi che riguardano reti di piccole dimensioni presentano una elevata difficoltà computazionale.

La formulazione del problema fa sì che gli strumenti risolutivi di calcolo debbano essere basati su procedure algoritmiche in grado di ridurre i tempi di calcolo e garantire l'individuazione della soluzione del problema. Solo attraverso l'utilizzo di algoritmi di calcolo è possibile determinare il problema posto. Naturalmente è anche necessario disporre di strumenti informatici in grado di supportare le procedure algoritmiche a cui si fa riferimento.

Come visto in precedenza, sia il problema della localizzazione che quello di trasporto di assegnazione possono ammettere diverse soluzioni ammissibili. Se considerati separatamente, i due problemi ammettono infinite soluzioni che soddisfano le condizioni di partenza. La ricerca e la determinazione univoca delle due soluzioni è oggetto di questo paragrafo. In particolare, dapprima viene presentata la procedura con cui viene risolto il primo problema della localizzazione e poi la procedura che permette di risolvere il problema del calcolo dei flussi di equilibrio sulla rete di trasporto. In letteratura per ognuno dei problemi posti esistono algoritmi già noti che assicurano la risoluzione in maniera efficiente ed efficace.

Per il problema della localizzazione dei nodi di servizio si è deciso di utilizzare l'algoritmo del simplesso. Esso individua tra le infinite soluzioni quella ottima, purché il problema venga posto come problema di programmazione lineare. Il calcolo dei flussi di equilibrio sulla rete di trasporto, invece, può essere risolto attraverso l'esecuzione della procedura maggiormente utilizzata e coincidente con l'algoritmo di Franke-Wolf adattato al problema di trasporto. Esso consente di risolvere il problema per i casi in cui la rete è congestionata.

L'obiettivo che ci si propone è quello di definire un algoritmo che risolva complessivamente il problema combinato dei due sottoproblemi. La procedura si basa sui due algoritmi del semplice e di Franke-Wolf e risulta anche essa iterativa. Di seguito sono illustrate le diverse procedure in grado di risolvere il problema formulato.

4.2.1. La procedura risolutiva del problema di localizzazione

Il problema della localizzazione su rete, formulato come problema di p-mediana e definito in precedenza (paragrafo 3.1), prevede diverse fasi che, risolte in successione, consentono di determinare la soluzione ottima. La procedura di calcolo deve quindi basarsi su un algoritmo risolutivo capace di giungere al risultato finale, utilizzando la formulazione proposta. Le operazioni con cui è possibile rappresentare graficamente l'algoritmo sono indicate nello schema di figura 4.1.

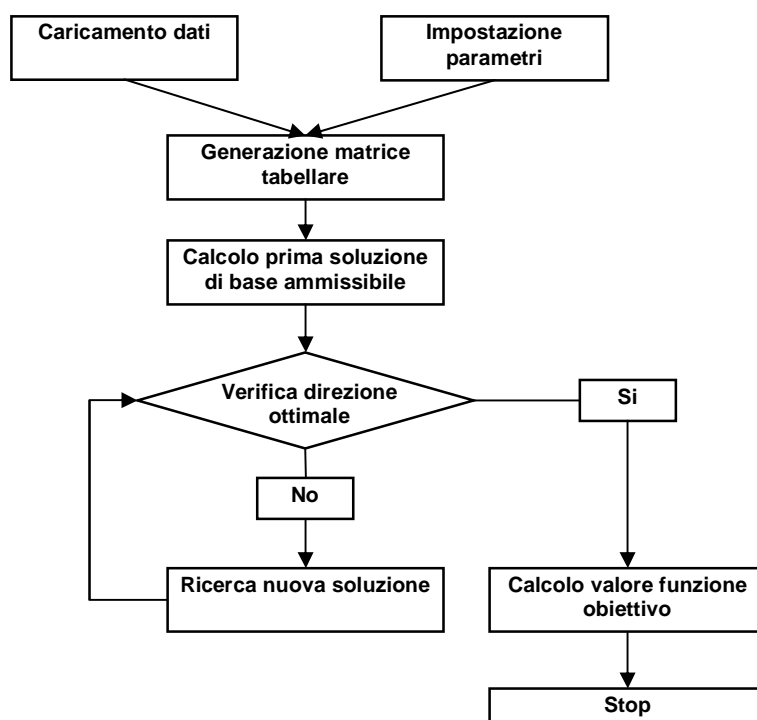


Figura 4.1. Schema dell'algoritmo utilizzato per la localizzazione

L'algoritmo così definito prevede delle iterazioni con le quali è possibile ricercare la soluzione del problema. La ricerca di tipo operativo con cui si svolgono le fasi indicate nello schema avviene attraverso il metodo del simplesso. Esso in pratica si è spesso dimostrato estremamente efficiente nel determinare una base ottimale, evitando di generare esplicitamente tutte le soluzioni di base attraverso un'enumerazione implicita delle basi. Se da un lato questa proprietà fornisce la giustificazione teorica del metodo, dall'altro è spesso considerata come una caratteristica fondamentale degli algoritmi per la programmazione lineare.

Brevemente di seguito sono descritte le singole operazioni con cui l'algoritmo procede:

1. *Individuazione dei dati del problema*; in fase preliminare coincide con le operazioni di definizione dei dati necessari alla risoluzione del problema. In particolare deve essere individuato il grafo con cui rappresentare il problema e le caratteristiche dei nodi e degli archi che lo compongono. È necessario inoltre conoscere il numero e la posizione sulla rete dei nodi domanda, dei nodi potenziali e dei costi associati ai percorsi di minimo costo che li uniscono.
2. *Impostazione parametri*; operazione anche essa appartenente alla fase preliminare della procedura e che prevede la scelta dei parametri di input al problema. Nel caso specifico è richiesta esclusivamente la scelta del numero di nodi da localizzare.
3. *Generazione della matrice tabellare*; questa fase dell'algoritmo coincide con le operazioni che permettono di creare automaticamente la matrice in cui sono raccolte tutte le informazioni ed i dati del problema. Una volta individuati i dati ed impostati i parametri sono note le dimensioni della matrice su cui eseguire il metodo del simplesso. La matrice che si ottiene con questa operazione si riferisce alla forma standard del problema di localizzazione.
4. *Calcolo della prima soluzione di base ammissibile*; la ricerca della soluzione ottimale può avvenire solo se in fase di partenza è nota una soluzione di base ammissibile. Ad essa corrisponde una forma della matrice tabellare cosiddetta "canonica" dalla quale è facilmente calcolabile la soluzione di partenza. La difficoltà maggiore consiste nel ricercare la forma canonica della matrice tabellare iniziale ed a tal fine occorre una procedura di calcolo in grado di determinarla.

5. *Verifica della direzione di minimo della funzione obiettivo*; la soluzione di partenza da cui ha inizio l'algoritmo di ricerca della soluzione non è però sufficiente all'implementazione del metodo del semplice. Nello spazio decisionale occorre anche individuare la direzione lungo la quale è sicuramente presente la soluzione ottima. Il semplice si distingue dagli altri algoritmi di ottimizzazione per il tipo di criterio con cui viene individuata tale direzione (*metodo del gradiente*): le variabili che ad ogni iterazione entrano nella soluzione sono quelle che a livello locale migliorano maggiormente la funzione obiettivo. Se non è possibile individuare una nuova variabile migliorativa della soluzione allora l'algoritmo termina e la soluzione trovata è quella ottima.
6. *Ricerca della nuova soluzione*; fase che coincide con l'operazione del semplice, meglio nota con il nome di "pivoting". Attraverso la procedura una nuova variabile entra in base.

4.2.2. La procedura per il calcolo dei flussi di equilibrio

La procedura utilizzata per calcolare i flussi sulla rete di trasporto, nelle condizioni ipotizzate di congestione, coincide con il noto algoritmo di Franke-Wolf. Le operazioni da eseguire sono state già in parte illustrate in precedenza (paragrafo 3.2.3), pertanto non si ritiene necessario riportarle. L'algoritmo può essere invece rappresentato graficamente attraverso lo schema di figura 4.2.

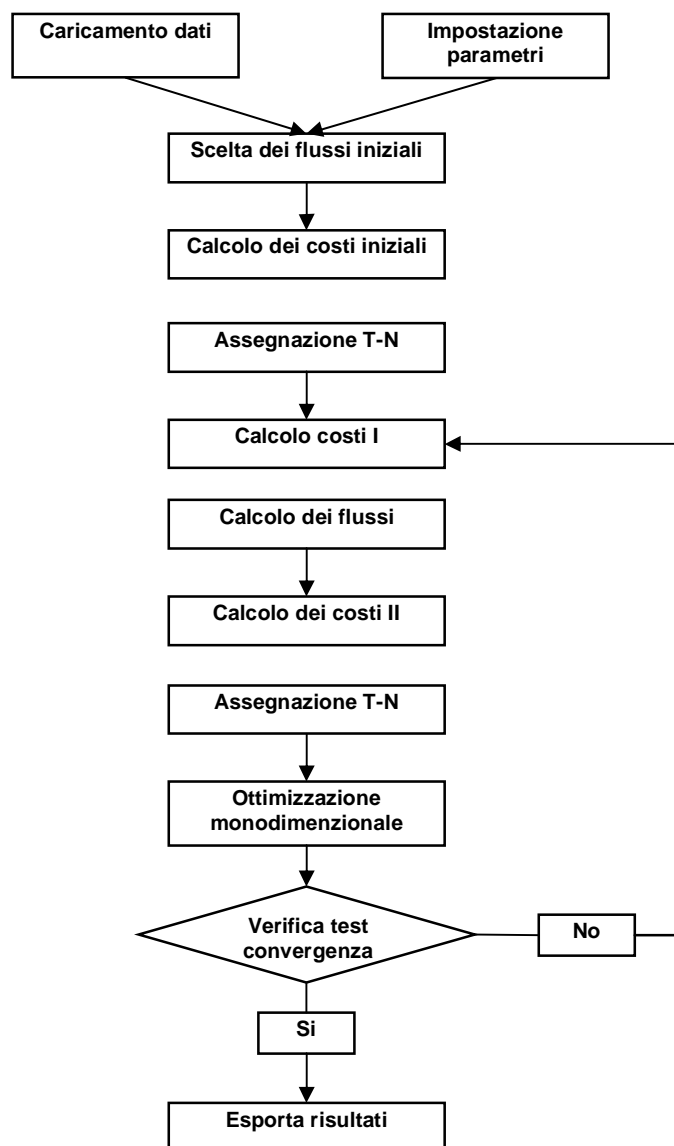


Figura 4.2. Schema dell'algoritmo utilizzato per l'assegnazione

Come è possibile notare, la successione delle operazioni da eseguire può essere ulteriormente schematizzata, accorpendo alcune di esse nel grafico di figura 4.3.

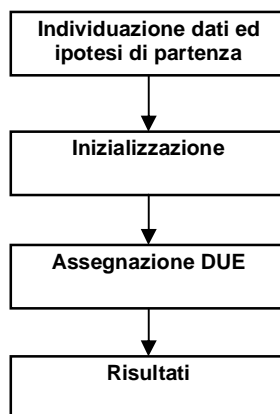


Figura 4.3. Schema delle fasi del problema

Nel problema di trasporto considerato ciò che caratterizza il calcolo dei flussi di equilibrio sono certamente le fasi iniziali, precedenti al metodo di assegnazione utilizzato. In particolare è possibile affermare che:

- per l'individuazione dei dati del problema è necessario definire e caratterizzare gli elementi della rete di trasporto, definendo per gli archi le caratteristiche fisiche quali lunghezza e capacità, nonché le funzioni di costo per il calcolo dei tempi di attraversamento; per i nodi la matrice OD della domanda.
- Le assunzioni sulle ipotesi di partenza consistono nello stabilire i valori con cui verificare il test di convergenza dell'algoritmo iterativo di Franke-Wolf, il parametro con cui arrestare la procedura di ottimizzazione monodimensionale ed eventuali coefficienti e/o costanti che compaiono nelle espressioni con cui vengono indicate le funzioni di costo degli archi.
- Nella fase di inizializzazione è necessario ipotizzare dei flussi di partenza con cui effettuare la prima assegnazione in condizioni di rete non congestionata.

Naturalmente l'intera procedura di calcolo termina quando è generato un vettore dei flussi che, per tale domanda, assicura un costo generalizzato di trasporto totale minimo sulla rete di trasporto.

4.2.3. Le caratteristiche dell'algoritmo risolutivo

La fasi attraverso le quali è possibile risolvere il problema combinato di localizzazione – assegnazione sulle reti di traffico in parte coincidono con alcune delle fasi costituenti gli algoritmi visti in precedenza. Vista la complessità di calcolo del problema, la mole di dati e di parametri necessari nonché le assunzioni preliminari che bisogna compiere, le operazioni da compiere sono numerose. Lo schema che indica le fasi con cui si svolge l'algoritmo risolutivo (figura 4.4) è costituito da tre sotto-fasi, ad ognuna delle quali corrisponde un insieme di operazioni computazionali di più facile calcolo.



Figura 4.4. Schema dell'algoritmo complessivo

La fase di inizializzazione è caratterizzata da tutte le operazioni necessarie in fase preliminare (figura 4.5): individuazione e caricamento dei dati, scelta dei parametri ed assunzioni di partenza.

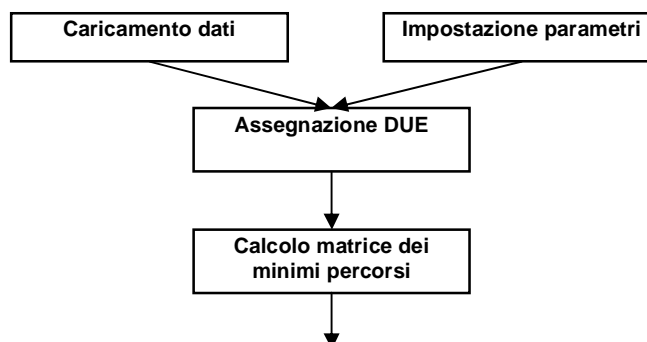


Figura 4.5. Fase di inizializzazione dell'algoritmo complessivo

La successione delle operazioni racchiude in altri termini le singole operazioni preliminari dei due algoritmi visti in precedenza insieme a dei calcoli preliminari con cui determinare costi e flussi iniziali della rete; a tal fine vengono utilizzate una procedura di assegnazione deterministica di equilibrio ed una matrice dei percorsi minimi. Queste informazioni permettono di stabilire le condizioni della rete corrispondenti alla domanda di trasporto senza che su di essa sia presente alcun nodo generatore/attrattore di traffico. La figura 4.6 illustra come viene affrontato il problema durante le fasi di calcolo.

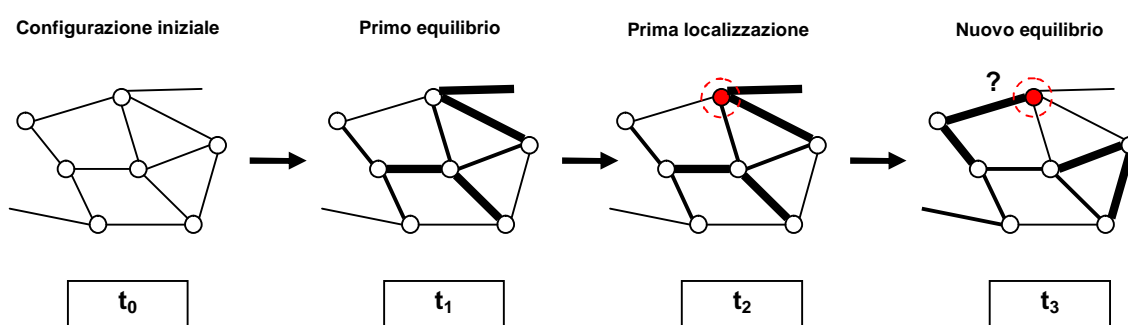


Figura 4.6. Il problema durante le fasi risolutive

Inizialmente ($t=t_0$) alla rete non è assegnata nessuna domanda e su di essa non è stato ancora localizzato nessun nodo. Successivamente ($t=t_1$), sulla rete compaiono i flussi generati dalla domanda “per altri motivi”, determinando un primo stato di equilibrio del

sistema. In tali condizioni è possibile procedere ad una prima risoluzione del problema di localizzazione ($t=t_2$), ottenendo una nuova configurazione del sistema dato dalla rete di trasporto in equilibrio della fase precedente più il nuovo nodo localizzato. L'intero sistema ottenuto, evidentemente, non è più in equilibrio: occorre una nuova assegnazione che tenga conto delle quote aggiuntive di spostamenti dovuti alla presenza sulla rete del nodo localizzato ($t=t_3$).

La fase indicata con il termine "ricerca nuova soluzione" racchiude le operazioni con cui determinare gli stati di equilibrio della rete a seguito di successive localizzazioni (figura 4.7). La fase è di tipo iterativo finchè alla soluzione trovata non corrisponde uno stato della rete non in contrasto con la presenza del nodo localizzato. Naturalmente il problema concettualmente non cambia se vengono considerati contemporaneamente più nodi da localizzare.



Figura 4.7. Fase della ricerca della nuova soluzione dell'algoritmo complessivo

La procedura è caratterizzata dalla verifica di un test di arresto che evita situazioni di ciclo dell'algoritmo. Il test coincide inoltre con la verifica delle seguenti condizioni:

- se la soluzione individuata coincide con quella di inizio della fase allora termina, altrimenti ricalcola l'equilibrio della rete corrispondente alla nuova soluzione;
- se la soluzione individuata è stata già analizzata allora termina, altrimenti ricalcola l'equilibrio della rete corrispondente alla nuova soluzione.

Dunque ad ogni iterazione corrisponde una localizzazione che modifica l'equilibrio del sistema. Nel caso in cui le soluzioni intermedie non siano verificate, al limite è possibile che l'algoritmo proceda a verificare tutte le soluzioni possibili. In tal caso i tempi di esecuzione aumentano notevolmente e la soluzione definitiva coincide con la soluzione intermedia a cui corrisponde una configurazione del sistema con costi di percorrenza minimi.

In definitiva, esplicitando tutte le operazioni procedurali, l'algoritmo ha una struttura rappresentabile in figura 4.8.

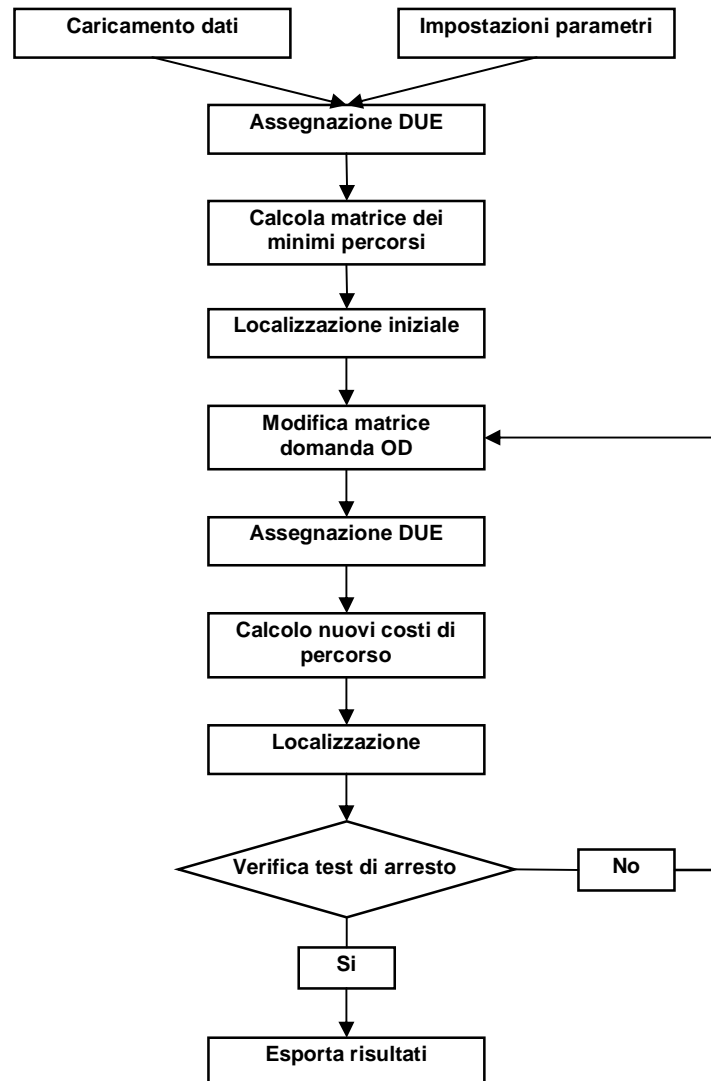


Figura 4.8. Schema dell'algoritmo complessivo

Capitolo 5. La realizzazione di un programma di calcolo

5.1. Aspetti generali della programmazione

Come tutti i tipi di linguaggio un linguaggio di programmazione è costituito da un alfabeto con cui viene costruito un insieme di parole chiave, costituenti il vocabolario, e da un insieme di regole sintattiche, la grammatica, per l'uso corretto delle parole del linguaggio. I moderni calcolatori dispongono di microprocessori progettati per riconoscere ed eseguire un insieme piuttosto ristretto di istruzioni: esse vengono eseguite attraverso il cosiddetto linguaggio macchina. Generalmente il linguaggio macchina è basato su una codifica estremamente compatta, poco intuitiva, e codificare un programma utilizzando il linguaggio macchina è assai arduo. A tal fine è richiesta una conoscenza approfondita del funzionamento del microprocessore del calcolatore.

Per ovviare a questo problema, che ha costituito per molti anni un grosso limite alla diffusione della programmazione e quindi anche dell'uso dei calcolatori, sono stati sviluppati dei linguaggi di programmazione più evoluti, che si pongono a metà strada fra il nostro linguaggio naturale ed il linguaggio macchina. Essi sono semplici e poveri, basati su poche parole chiave e poche regole, privi di qualsiasi ambiguità.

In informatica si parla di programmazione a basso livello quando si utilizza un linguaggio molto vicino al funzionamento interno della macchina; si parla invece di programmazione ad alto livello quando si utilizzano linguaggi più sofisticati ed astratti, slegati dal funzionamento fisico della macchina. Si viene così a creare una gerarchia di linguaggi, dai meno evoluti (il linguaggio macchina e l'assembler) a quelli più evoluti (*Pascal, Fortran, Cobol, Perl, Java*). Sulla base dell'ambito in cui è necessario risolvere il problema, è opportuno adottare un linguaggio piuttosto che un altro. Ad esempio per i seguenti tipi di problema sono indicati diversi linguaggi:

- calcolo scientifico: *Fortran, C*;
- intelligenza artificiale: *Prolog, Lisp*;
- applicazioni gestionali: *Cobol, SQL, C*;
- sistemi, device driver: *Assembler, C*;
- applicazioni client visuali: *C++, Java, Visual Basic*;

- applicazioni su Web: *Perl, ASP, Java*;
- applicazioni distribuite: *Java, C, C++*.

Un programma è la codifica di un algoritmo eseguita utilizzando un linguaggio di programmazione. L'unico linguaggio che la macchina è in grado di interpretare è il linguaggio macchina e, dunque, per eseguire un programma scritto in un linguaggio di alto livello è necessario tradurlo in linguaggio macchina. Naturalmente è possibile eseguire la traduzione in modo automatico utilizzando un programma *traduttore*, detto anche *compilatore* o *interprete*. Ogni traduttore è in grado di interpretare e tradurre un solo linguaggio.

In fase di programmazione è utile ricordare che un calcolatore elettronico è una macchina, costituita da circuiti elettronici digitali e da componenti elettromeccaniche, ottiche e magnetiche. Esso è velocissimo, essendo una macchina elettronica è molto rapido nel compiere le operazioni per cui è stato progettato; è puntuale nell'applicare le regole che conosce; è duttile e si adatta bene ad eseguire nuove tecniche, purché questo gli venga spiegato in modo dettagliato e privo di ambiguità; inoltre ha un'ottima memoria, estremamente ampia ed organizzata in modo razionale. Esistono però anche degli aspetti negativi da tenere in considerazione. Il calcolatore, infatti, non è intelligente; non è in grado di compiere deduzioni o ragionamenti di altro tipo in modo autonomo; non è in grado di capire un problema e non è in grado di interpretare la soluzione di un problema, né è in grado di capire in modo autonomo se il risultato raggiunto è la soluzione del problema.

Ogni programmatore deve analizzare il problema riducendolo in termini astratti, eliminando ogni componente non indispensabile e formulando un modello del problema. È necessario inoltre individuare una strategia risolutiva e ricondurla ad un algoritmo. L'algoritmo codificato deve essere reso comprensibile al calcolatore ed inoltre il programmatore:

- deve essere in grado di capire i problemi e schematizzarli, distinguendone le diverse componenti (dati in input, parametri del problema, dati in output).

- Deve essere in grado di risolvere problemi mediante un approccio algoritmico, individuando gli aspetti del problema che possano essere risolti reiterando più volte operazioni simili.
- Deve conoscere i metodi fondamentali di risoluzione dei problemi, gli approcci più comuni, le strade notoriamente meno convenienti.
- Deve conoscere a fondo le caratteristiche e le capacità del calcolatore.
- Deve essere in grado di comunicare con il calcolatore: ne deve conoscere il linguaggio.

Nel presente lavoro di tesi la scelta compiuta per la realizzazione di un programma di calcolo in grado di risolvere i problemi formulati in precedenza è ricaduta sul linguaggio Visual Basic.

5.2. Principali caratteristiche di Visual Basic

Il linguaggio BASIC fu elaborato negli anni '60 da un gruppo di insegnanti del college di Dartmouth (Nuova Scozia, Canada) ad uso dei loro studenti, per consentire l'apprendimento della programmazione anche agli studenti che non seguivano i corsi di informatica. BASIC è l'acronimo di Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code ed indica come tale linguaggio sia nato per i programmatori principianti.

Con il passare degli anni il linguaggio Basic originario si è arricchito e semplificato, cioè è diventato possibile fare eseguire al computer procedure più complesse, scrivendo un minor numero di istruzioni. Con la versione QBASIC è venuta meno la necessità di numerare le righe del programma, mentre con il passaggio a Visual Basic il linguaggio ha fatto un salto di qualità, adottando due elementi innovativi:

1. un apparato grafico di grande semplicità di programmazione, in tutto simile a quello dell'ambiente Windows, estremamente efficace per la presentazione dei programmi all'utente;

2. il passaggio dai programmi testuali ai programmi orientati agli oggetti e agli eventi.

I programmi testuali, o procedurali, devono essere eseguiti dal calcolatore riga per riga, seguendo pedissequamente le indicazioni del programmatore. L'utente può intervenire nel ciclo del programma, ma deve in qualche modo adeguarsi all'ordine predeterminato dal programmatore. Il termine che si legge più frequentemente oggi, invece di linguaggio, è ambiente di sviluppo.

Con questo si intende sottolineare che si tratta di uno strumento di creazione di nuove applicazioni. Il termine ambiente vuole evidenziare il fatto che questi strumenti negli ultimi anni hanno fatto enormi progressi nella parte grafica, per cui il programmatore ha effettivamente l'impressione di trovarsi all'interno di una stanza dei bottoni, con tutti gli strumenti contemporaneamente a sua disposizione, a portata di mouse. Il termine linguaggio, tradizionale, ricorda invece il fatto che dietro l'apparato grafico rimane sempre l'esigenza di scrivere le istruzioni sottoforma di codice da fare eseguire al computer. I programmi odierni sono invece:

- orientati agli oggetti,
- orientati agli eventi.

Determinante, per questo passaggio storico, è stata l'affermazione dei sistemi operativi basati su interfacce grafiche, come il sistema Macintosh o il sistema Windows. Sono orientati agli oggetti perché consentono di inserire nel programma oggetti preconfezionati, anche costruiti da altri programmatori, estremamente efficaci e a costo zero in termini di lavoro di programmazione. Se questa prima caratteristica dei linguaggi odierni facilita notevolmente il lavoro del programmatore, non è così per l'altra caratteristica fondamentale, cioè l'orientamento agli eventi.

I programmi sequenziali si svolgono seguendo ordinatamente una serie di istruzioni predisposte dal programmatore, dall'inizio alla fine, sino a che non si giunge alla fine delle istruzioni o ad un errore che faccia terminare il programma prematuramente. I programmi orientati agli eventi sono invece più interattivi, aperti all'utente, alle sue curiosità, alle sue scelte, alle sue esigenze. All'interno di questi programmi, l'utente si trova di fronte una serie di opzioni e di possibilità diverse; queste sono state certamente

preparate dal programmatore, ma sta all'utente decidere come, quando e in quale ordine esplorare e sfruttare le risorse che il programma gli offre.

Nei programmi basati su eventi, dunque, il ruolo del programmatore viene reso più arduo e più stimolante perché egli deve essere in grado di mettersi nei panni del futuro utente e di predisporre soluzioni per ognuna delle azioni che questi deciderà di intraprendere all'interno del programma.

Tutti i linguaggi di programmazione odierni sono basati su questi nuovi principi, non solo Visual Basic. La scelta di utilizzare Visual Basic per realizzare un programma di calcolo in grado di risolvere i problemi trattati in questo lavoro di tesi possono essere riassunti nei seguenti punti:

1. Perché è uno dei linguaggi più semplici da imparare. I critici lo chiamano in tono denigratorio "linguaggio giocattolo" perché si presenta con una serie ricchissima di elementi precostituiti che vengono in aiuto al lavoro del programmatore.
2. Perché è uno dei linguaggi più versatili; è possibile trovare alcuni singoli elementi sviluppati meglio in altri linguaggi, ma nessun linguaggio è più efficace di Visual Basic se esaminato nella sua globalità.
3. Perché è uno dei linguaggi più diffusi nel mondo.
4. Perché i programmi creati con Visual Basic si integrano perfettamente con l'ambiente Windows e sono facilmente distribuibili.
5. Perché la casa proprietaria Microsoft Corporation lo aggiorna e lo valorizza continuamente nel tempo, rendendo l'applicazione di questo linguaggio un buon investimento, atto a produrre un capitale di conoscenze duraturo nel tempo.

A questo proposito, si pensi che il linguaggio Basic originario è ancora in gran parte inglobato nel Visual Basic odierno, per cui chi anni fa aveva studiato il Basic originario può ancora sfruttare le sue conoscenze, nonostante nel frattempo, nel campo dell'informatica, tutto sia cambiato. Infine è utile ricordare che il linguaggio è commercializzato con l'ultima versione (v. 6.0) in tre diverse edizioni:

1. *Enterprise*, completa e più costosa, per la creazione di complessi pacchetti di applicazioni integrate, soprattutto ad uso aziendale;
2. *Professional*, edizione idonea alle esigenze di programmatori esperti, ricca di potenzialità per la creazione di programmi veloci, potenti e versatili;
3. *Learning*, edizione ridotta alle funzioni standard, per chi si avvicina per la prima volta alla programmazione con l'obiettivo di conoscerne gli aspetti fondamentali.

5.3. Funzionalità del programma realizzato

Il programma realizzato in ambiente VB consente di risolvere i problemi presentati nei capitoli precedenti di questo lavoro. Sfruttando le potenzialità dell'ambiente di lavoro è stato possibile realizzare un software in grado di eseguire contemporaneamente procedure di calcolo e di visualizzazione particolarmente utili per chi lo utilizza. Visual Basic si presta bene per raggiungere un duplice obiettivo:

- garantire un linguaggio di programmazione eseguibile, preciso ed immediato;
- offrire la possibilità di creare un'interfaccia grafica per la visualizzazione.

Attraverso i modelli e gli algoritmi visti in precedenza, il programma realizzato formula e risolve i problemi di localizzazione, di calcolo dei flussi di equilibrio ed il problema combinato di assegnazione-localizzazione. La determinazione di ciascun problema avviene separatamente e dipende dalle scelte iniziali dell'utente.

5.4. La struttura del programma

Il programma costruito si basa su una struttura composta da numerosi elementi che, in base al tipo di problema da risolvere, si interfacciano tra loro. Nel suo insieme, quindi, dato l'elevato numero di algoritmi creati, la struttura appare complessa. Per

comprendere meglio come è strutturato l'intero programma occorre distinguere gli elementi costituenti in:

- elementi di codice,
- elementi di grafica.

L'insieme degli elementi di codice e di grafica, legati tra loro, costituisce l'intero programma. Ad ogni elemento grafico corrisponde sicuramente un elemento di codice mentre il contrario non è sempre vero. Esistono infatti dei codici che non necessariamente producono un effetto grafico, ma servono esclusivamente ad eseguire operazioni di calcolo utili alla risoluzione dei problemi. È utile ricordare che una *classe* è una porzione del programma, un file di codice sorgente in Visual Basic, che definisce le proprietà, i metodi e gli eventi di uno o più oggetti che verranno creati in fase di esecuzione. Un *oggetto*, al contrario, è un'entità creata in fase di esecuzione, che richiede memoria e probabilmente altre risorse di sistema e che viene distrutta quando non è più necessaria o al termine dell'applicazione. In un certo senso le classi sono entità di progettazione, mentre gli oggetti sono entità di esecuzione.

Gli elementi di codice sono definiti in VB attraverso i moduli di classe e coincidono con tutti gli algoritmi di calcolo utilizzati; nel programma realizzato essi sono complessivamente 18 e sono indicati in tabella 5.1.

Nome modulo	Descrizione	Tipo di routine	Problema di appartenenza
<i>CaricaDatiLoc</i>	In fase iniziale importa i dati necessari alla risoluzione del problema di localizzazione	routine	localizzazione
<i>CaricaDatiAss</i>	In fase iniziale importa i dati necessari alla risoluzione del problema di assegnazione	routine	assegnazione
<i>GeneraT</i>	crea la matrice tabellare da utilizzare nel semplice	routine	localizzazione
<i>Combinazioni</i>	calcola le possibili combinazioni di nodi da analizzare	routine	localizzazione, combinato
<i>FormaCanonica</i>	trasforma la matrice tabellare in una forma canonica	routine	localizzazione, combinato
<i>Simplesso</i>	esegue l'algoritmo del semplice	routine	localizzazione, combinato
<i>Fattoriale</i>	calcola il fattoriale di un numero	function	localizzazione, combinato
<i>CaricaRisultati</i>	esporta i risultati ottenuti in un file esterno	routine	localizzazione, assegnazione, combinato
<i>Localizzazione</i>	risolve il problema della localizzazione	routine	localizzazione, combinato
<i>Assegnazione</i>	risolve il problema dell'assegnazione	routine	assegnazione

<i>FunzioneBPR</i>	calcola i flussi attraverso la funzione di costo BPR	function	assegnazione, combinato
<i>MinimoPercorso</i>	individua i percorsi minimi tra le coppie origine – destinazione di una data rete	routine	localizzazione, assegnazione, combinato
<i>FunzioneHCM</i>	calcola i flussi attraverso la funzione di costo HCM	function	assegnazione, combinato
<i>CaricaParametri</i>	imposta i parametri scelti in fase di esecuzione	routine	localizzazione, assegnazione, combinato
<i>MatrPercMin</i>	crea la matrice dei percorsi minimi di una data rete	routine	localizzazione, assegnazione, combinato
<i>AssegnLocal</i>	risolve il problema combinato di localizzazione - assegnazione	routine	combinato
<i>FunzioneGEN</i>	calcola i flussi attraverso la funzione di costo di tipo generico	function	assegnazione, combinato
<i>Eccentricità</i>	verifica l'eccentricità dei nodi della rete	routine	localizzazione, combinato

Tabella 5.1. Moduli di classe del programma

L'interfaccia con la quale il programma si presenta all'utente è invece composta da un totale di tre form. Ognuno contiene i comandi e le visualizzazioni grafiche che in fase di esecuzione permettono l'utilizzo del software.

Il primo form (form 1) è quello principale. Attraverso esso è possibile scegliere il tipo di problema da risolvere, caricare i dati necessari, settare i parametri del problema, visualizzare i dati di partenza ed i risultati finali. L'aspetto con cui il form si presenta all'utente è mostrato in figura 5.1.

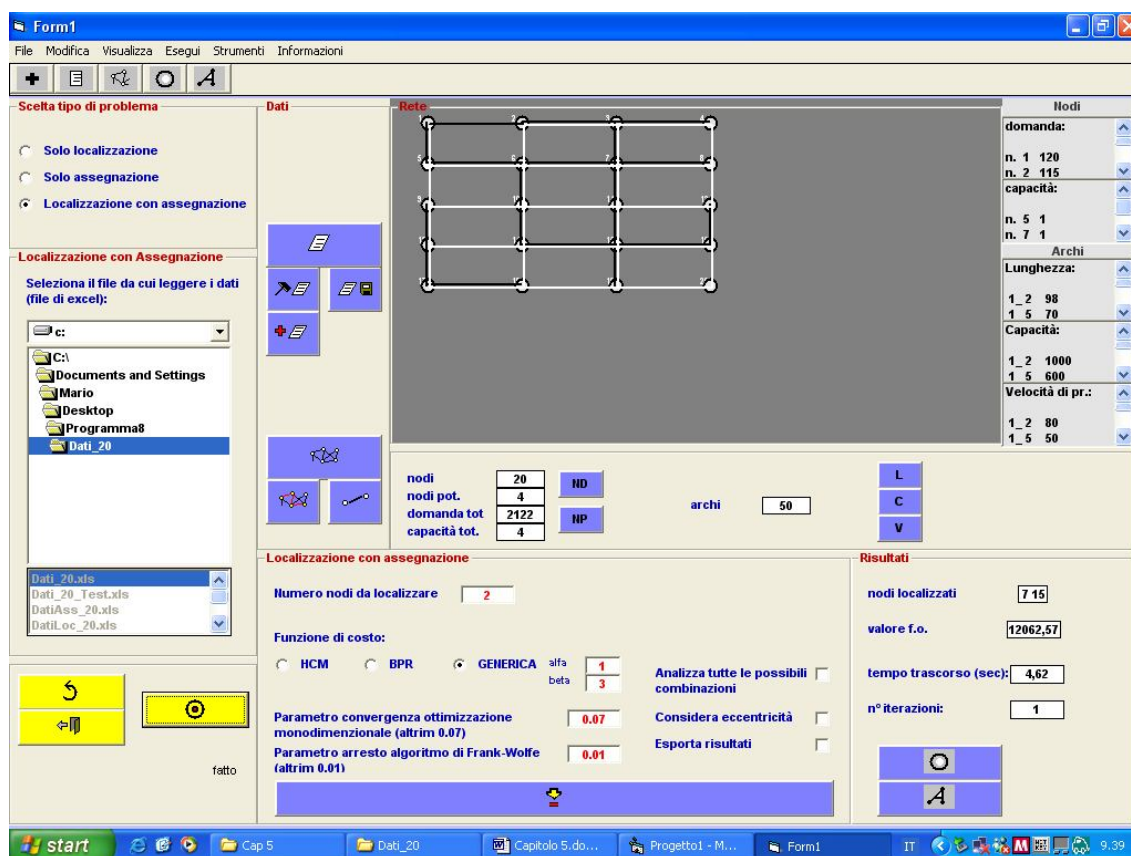


Figura 5.1. Interfaccia del programma (form 1)

Nella parte superiore compaiono dei menu e dei pulsanti con cui eseguire rapidamente le principali operazioni. Nell'angolo in alto a sinistra è presente un frame con cui accedere al tipo di problema da risolvere, mentre più in basso, lateralmente, sono predisposti dei listbox di scelta del file dal quale leggere i dati necessari. Una volta caricati i dati, è possibile visualizzarli, modificarli e farli eventualmente rileggere al programma. La visualizzazione può avvenire direttamente, tramite l'apertura sullo schermo del file sorgente dei dati, oppure attraverso degli elenchi scorrevoli in cui compaiono tutte le caratteristiche degli archi e dei nodi della rete caricata. La rete appare nel frame centrale dello schermo. La parte inferiore è costituita invece da tre differenti parti. A sinistra, nell'angolo in basso, è presente un frame con i comandi che consentono di eseguire il programma, di farlo terminare e di farlo ripartire nonché una progressbar che, in fase di esecuzione, indica lo stato di avanzamento delle operazioni in corso. Centralmente è predisposta l'area del form in cui effettuare il settaggio dei parametri utili alla risoluzione del problema. In particolare, in essa l'utente deve inserire

i valori di alcune grandezze necessarie all'esecuzione degli algoritmi di calcolo e può scegliere alcune impostazioni di partenza. In ultimo, in basso a destra compare un frame con cui interfacciarsi ai form contenenti i risultati ottenuti; nello stesso vengono visualizzati solo i principali risultati delle procedure di calcolo come il numero ed i nodi localizzati, il valore assunto dalla funzione obiettivo in corrispondenza della soluzione ottimale ed il tempo trascorso per risolvere il problema.

Il secondo form (form 2) consente di eseguire alcune operazioni sulla rete caricata. Essa appare nel form e l'utente, in fase preliminare alla risoluzione del problema, può modificarla, cambiando le caratteristiche degli archi visualizzati. Il form 2 permette inoltre di calcolare e rendere visibile il percorso minimo tra tutte le coppie di nodi origine e destinazione. Dopo aver individuato la soluzione del problema inoltre è possibile utilizzare il form per visualizzare alcuni dei risultati ottenuti; nel caso della localizzazione è possibile osservare sulla rete i nodi localizzati e l'allocazione dei nodi domanda, mentre nel caso dell'assegnazione dei flussi è possibile visualizzare i valori calcolati con spessori diversi dei segmenti che rappresentano gli archi della rete.

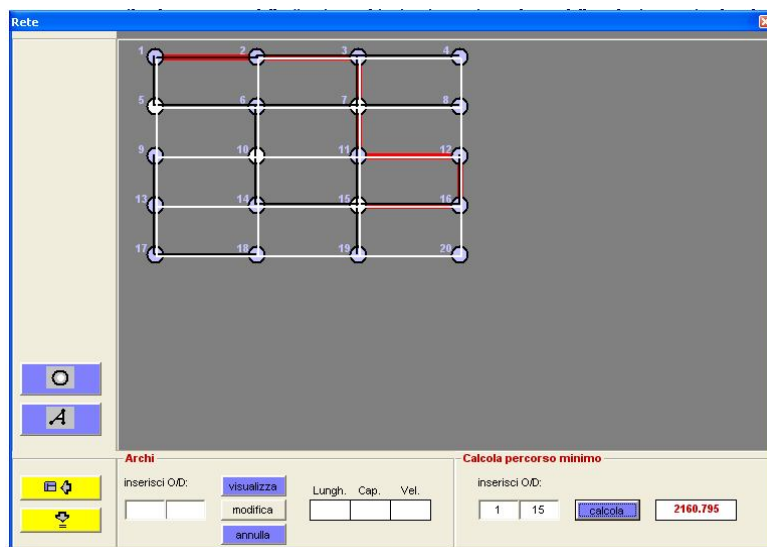


Figura 5.2. Form2

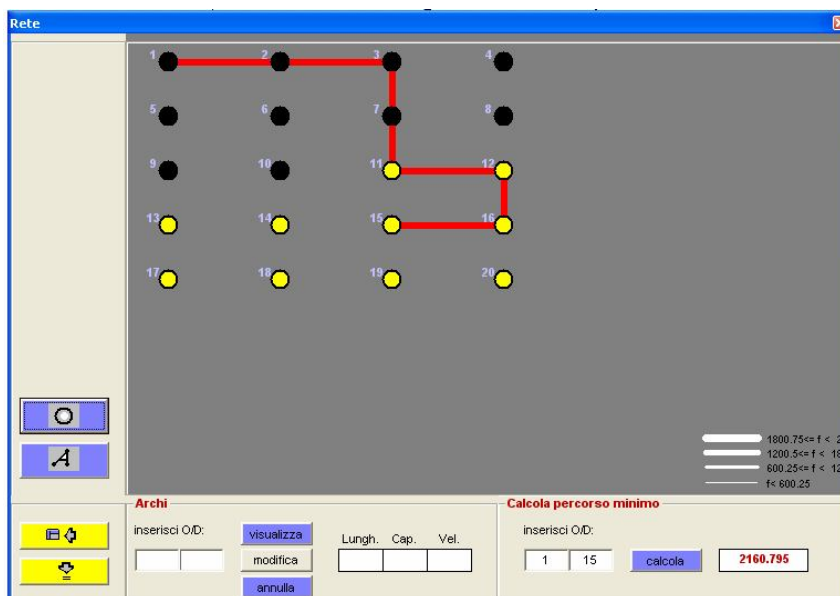


Figura 5.3. Esempio di utilizzo del form2

Infine, il terzo form (form 3) consente di visualizzare più nel dettaglio i risultati calcolati. In alto a sinistra è presente un grafico nel quale sono visibili i valori assunti dalla funzione obiettivo per le soluzioni analizzate. In alto a destra è visualizzato un grafico simile al precedente ma che fa riferimento al tipo di problema combinato di localizzazione-assegnazione: i valori della funzione obiettivo visualizzati si riferiscono alle diverse iterazioni effettuate. La parte inferiore del form 3, invece, rappresenta una matrice con la quale indicare i nodi serviti dai nodi localizzati (allocazione della domanda).

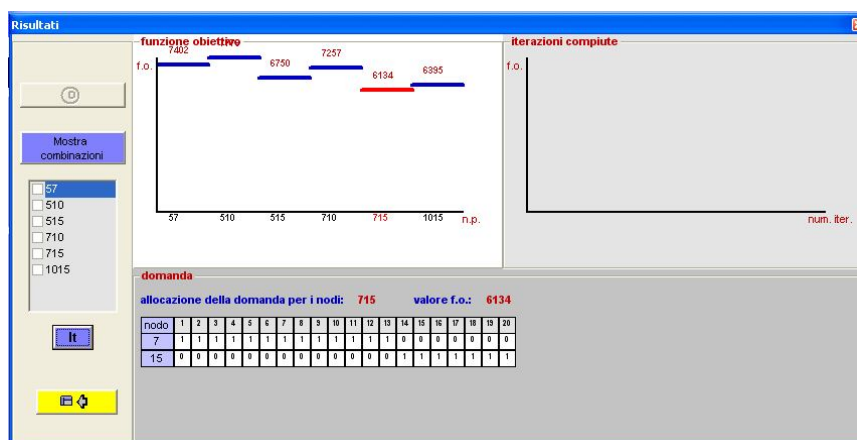


Figura 5.4. Esempio di utilizzo del form3

5.5. Principali comandi

Il programma realizzato può essere eseguito solo attraverso l'interazione attiva tra l'utente ed i codici contenuti nelle diverse procedure di calcolo e visualizzazione. Il numero di comandi che permette la fruibilità del programma è elevato; l'ambiente di lavoro in cui è stato creato lo stesso fornisce diverse alternative di scelta, adattandosi alle diverse esigenze del programmatore. Visual Basic è noto per disporre di controlli ed oggetti grafici impiegati in tutti i programmi realizzati dalla Microsoft ed ormai largamente conosciuti da chi usa tutti i suoi prodotti. Per la realizzazione del programma sono stati impiegati diversi comandi ed oggetti; per brevità solo alcuni vengono riportati nella tabella che segue.

Comando	Visualizzazione	Descrizione	Form di appartenenza
aggiungi dati		visualizza il drivebox, il dirbox ed il file box con cui selezionare il file dei dati di input	form 1
visualizza dati caricati		visualizza i frame contenenti i dati caricati	form 1
visualizza rete		visualizza il form 2	form 1
visualizza risultati localizzazione		visualizza i risultati contenuti nel form 3	form 1
visualizza risultati assegnazione		visualizza i risultati contenuti nel form 3	form 1
esci dal programma		termina il programma ed uscire	form 1
risolvi il problema		risolve il problema impostato	form 1
imposta un nuovo problema		imposta un nuovo problema	form 1
torna al form principale		chiude il form corrente e ritornare al form principale	form 2, form 3
visualizza foglio dati		apre e visualizza il file excel sorgente dei dati	form 1
modifica foglio dati		modifica il file excel sorgente dei dati	form 1
salva foglio dati		salva il file excel sorgente dei dati	form 1
aggiungi nuovi dati al foglio dati		ricarica nuovamente il file excel sorgente dei dati	form 1
visualizza rete caricata		visualizza la rete caricata nel frame predisposto	form 1
calcola minimo percorso su rete		visualizza il form nel quale calcolare il percorso minimo	form 1
modifica arco rete		visualizza il form nel quale modificare gli archi della rete	form 1
chiudi form visualizzato		chiude la finestra del form	form 2, form 3
visualizza risultati		visualizza i risultati del form	form 2, form 3

Figura 5.2. Principali comandi del programma

5.6. Input ed output del programma

Per il suo funzionamento il programma realizzato necessita di dati di input con cui eseguire le operazioni di calcolo e di visualizzazione. Per raccogliarli ed organizzarli al meglio, in maniera organica rispetto alle fasi iniziali di caricamento, è stato deciso di utilizzare dei comuni fogli di calcolo di Microsoft Excel. L'uso dei file Excel è molto diffuso e la facilità con cui eseguire le operazioni di gestione dei dati consente di operare anche con elevate moli di dati.

I dati di ingresso al programma sono tutti contenuti nello stesso file ma in differenti fogli di calcolo. Viste le dimensioni che per alcuni casi è possibile raggiungere, è stato deciso, infatti, di separare i dati in base al tipo di problema da risolvere. Pertanto ogni file dati deve contenere i seguenti tre fogli:

- foglio 1, contiene i dati della rete di trasporto;
- foglio 2, contiene i dati della domanda di trasporto;
- foglio 3, contiene i dati della localizzazione.

Il programma è predisposto al caricamento dei dati solo nel caso in cui essi si trovino nei fogli indicati ed ognuno in un determinato range di celle. La tabella 5.3 indica maggiormente nel dettaglio i contenuti dei dati di input che è possibile leggere.

Tipo di dato	Foglio 1	Foglio 2	Foglio 3
<i>coordinate nodi</i>	X		
<i>origine arco</i>	X		
<i>destinazione arco</i>	X		
<i>classe arco</i>	X		
<i>doppio senso arco</i>	X		
<i>lunghezza arco</i>	X		
<i>capacità arco</i>	X		
<i>velocità progetto arco</i>	X		
<i>matrice OD</i>		X	
<i>nodì potenziali</i>			X
<i>nodì domanda</i>			X
<i>domanda di traffico nodì domanda</i>			X

Tabella 5.3. Posizione dei dati di input

Oltre alla visualizzazione grafica, il programma permette anche l'esportazione dei risultati ottenuti su file esterni. Il sistema con cui avviene l'esportazione è simile a quello che consente l'importazione dei dati iniziali; anche per i risultati, infatti, vengono utilizzati dei file excel in cui sono copiati i dati di output dei problemi risolti. L'esportazione dei risultati nei fogli di calcolo presenta il vantaggio di poter disporre di un numero elevato di dati con cui effettuare analisi e valutazioni successive alla fase di risoluzione del problema. La scelta o meno di rendere fruibile i risultati all'esterno può essere compiuta attraverso il form 1. A differenza dei dati di ingresso, i dati in uscita sono suddivisi in due differenti file (tabella 5.4).

Tipo di dato	File localizzazione	File assegnazione
<i>nodi localizzati</i>	X	
<i>valore f. o. ottimale</i>	X	
<i>valori f. o. per le combinazioni</i>	X	
<i>allocazione della domanda ottimale</i>	X	
<i>allocazione della domanda per le combinazioni</i>	X	
<i>flussi per arco</i>		X
<i>tempi di percorrenza per arco</i>		X

Tabella 5.4. Posizione dei dati di output

Nel file *localizzazione* vengono esportati tutti i risultati della procedura di localizzazione; nel caso in cui sia stato scelto di analizzare tutte le possibili combinazioni di nodi da localizzare l'output del programma prevede tutti i risultati possibili. Il file *assegnazione*, invece, contiene i risultati delle procedure di assegnazione dei flussi alla rete di trasporto. Essi coincidono con i dati relativi alla configurazione ottimale della rete in corrispondenza, quindi, della soluzione ricercata.

Capitolo 6. Verifiche sperimentali su reti test

6.0. Introduzione

Nel presente capitolo sono riportati i principali risultati dei test effettuati sugli algoritmi definiti nei capitoli precedenti. A tal fine sono state utilizzate delle reti non reali, di dimensioni diverse ed ipotizzando nota la domanda di trasporto da assegnare.

Le prove sperimentali sono state compiute per testare le procedure di calcolo di localizzazione e di calcolo dei flussi di equilibrio e per evidenziare come la scelta del tipo di funzione di costo incida nella ricerca delle soluzioni del problema. In particolare, vengono considerate funzioni note in letteratura, quali quelle proposte dall'Highway Capacity Manual e dal Bureau of Public Road, nonché espressioni con differenti parametri. In questo ultimo caso è utile valutare i risultati dell'efficienza degli algoritmi attraverso un'analisi di sensitività rispetto ai parametri che generalmente compaiono nelle diverse funzioni di costo.

Per i numerosi test effettuati è stato utilizzato il programma di calcolo presentato nel precedente capitolo.

6.1. Le reti utilizzate

Per effettuare i diversi test sugli algoritmi definiti in precedenza è stato necessario ipotizzare differenti reti di trasporto. Le reti test utilizzate sono state costruite artificialmente, considerando tutte le caratteristiche fisiche utili alla formulazione e risoluzione dei problemi da risolvere. Per ognuna sono state fatte le seguenti assunzioni di partenza:

- i grafi orientati che rappresentano le reti sono tutti connessi;
- il numero di nodi potenziali su cui è possibile localizzare il nodo o i nodi sono in numero inferiore rispetto al numero totale dei nodi della rete;
- i nodi potenziali sono anche nodi domanda;
- esistono archi di collegamento bidirezionali;
- i sensi di percorrenza, le lunghezze, le capacità e le velocità di progetto sono attribuiti agli elementi delle reti in maniera casuale.

Il sistema di offerta a cui fanno riferimento le reti è dunque assimilabile ad un sistema reale in grado di soddisfare una certa domanda di trasporto. L'ipotesi di grafo connesso implica che per ogni nodo ci sia almeno un arco in entrata ed uno in uscita, garantendone quindi l'accessibilità.

Gli archi considerati appartengono a tre categorie differenti. La prima è costituita da archi con caratteristiche strutturali ottime in termini di velocità di progetto e capacità scelte, la seconda da archi con caratteristiche strutturali buone mentre la terza da collegamenti con caratteristiche sufficienti. In particolare sono state definite le seguenti tre categorie:

- *categoria 1*, archi con ottime caratteristiche fisiche e velocità di progetto pari a 110 km/h e capacità 1400 veic/h;
- *categoria 2*, archi con buone caratteristiche fisiche e velocità di progetto pari a 80 km/h e capacità 1000 veic/h;
- *categoria 3*, archi con sufficienti caratteristiche fisiche e velocità di progetto pari a 50 km/h e capacità 600 veic/h.

La costruzione delle reti si è basata su dei criteri che permettono poi di confrontare i risultati ottenuti in fase sperimentale. Attraverso l'uso di alcuni indicatori, infatti, ogni rete ha una struttura confrontabile con le altre. Dato il grafo $G(N \cup A)$ ed indicati con i e j rispettivamente l' i -esimo nodo di N ed il j -esimo arco di A , è opportuno quindi definire i seguenti indicatori:

- I_{AN} , indicatore dato dal rapporto tra il numero complessivo degli archi a ed il numero complessivo dei nodi n della rete:

$$I_{AN} = \frac{a}{n}$$

- I_{AN1} , indicatore che esprime il rapporto tra il numero di archi appartenenti alla categoria 1 a_1 ed il numero complessivo di nodi della rete n :

$$I_{AN1} = \frac{a_1}{n}$$

- I_{AN2} , indicatore che esprime il rapporto tra il numero di archi appartenenti alla categoria 2 a_2 ed il numero complessivo di nodi della rete n :

$$I_{AN2} = \frac{a_2}{n}$$

- I_{AN3} , indicatore che esprime il rapporto tra il numero di archi appartenenti alla categoria 3 a_3 ed il numero complessivo di nodi della rete n :

$$I_{AN3} = \frac{a_3}{n}$$

È facilmente osservabile come gli indicatori proposti siano legati tra loro dalla seguente relazione:

$$I_{AN} = I_{AN1} + I_{AN2} + I_{AN3}$$

Tutte le reti utilizzate nelle fasi sperimentali hanno un indicatore I_{AN} uguale e pari a 2,5; per ogni nodo, cioè, sono stati considerati mediamente 2,5 archi, con gli archi bidirezionali conteggiati due volte. Inoltre, è stata assunta una distribuzione uniforme per gli indicatori di categoria, ponendo per ciascuna rete:

$$I_{AN1} \approx I_{AN2} \approx I_{AN3}$$

Le quattro reti così ottenute sono caratterizzate da un numero crescente di nodi e di archi (tabella 6.1).

Nome rete	Nodi (n°)	Archi (n°)	I_{AN}	Archi (n°)		
				classe 1	classe 2	classe 3
rete_10	10	25	2,5	8	9	8
rete_20	20	50	2,5	17	16	17
rete_40	40	100	2,5	34	33	34
rete_80	80	200	2,5	67	66	67

Tabella 6.1. Principali caratteristiche delle reti test

Di seguito vengono riportate le caratteristiche di ciascuna rete e la rispettiva rappresentazione grafica.

Rete_10,

è composta da 10 nodi e 25 archi. Ha un'estensione complessiva in termini di distanza pari a 10561 m ed una capacità totale di 25000 veic/h. In tabella 6.2 sono riportate le altre caratteristiche mentre in figura 6.1 viene rappresentato il grafo utilizzato.

Archi (n°)			I_{AN}			L_{tot} (m)	L_{med} (m/arco)	C_{tot} (veic/h)	C_{med} (veic/h arco)	V_{med} (km/h arco)
classe1	classe2	classe3	I_{AN1}	I_{AN2}	I_{AN3}					
8	9	8	0,80	0,90	0,80	10561	422,4	25000	1000	80

Tabella 6.2. Caratteristiche rete a 10 nodi

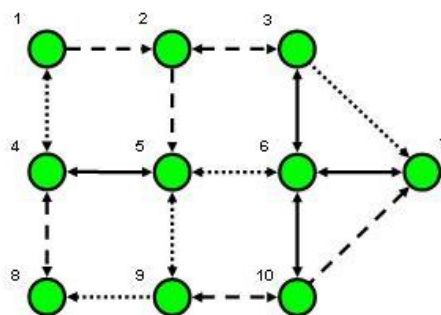


Figura 6.1. Grafo rete a 10 nodi

Rete_20,

è composta da 20 nodi e 50 archi. Ha un'estensione complessiva in termini di distanza pari a 20697 m ed una capacità totale di 50000 veic/h. In tabella 6.3 sono riportate le altre caratteristiche mentre in figura 6.2 viene rappresentato il grafo utilizzato.

Archi (n°)			I_{AN}			L_{tot} (m)	L_{med} (m/arco)	C_{tot} (veic/h)	C_{med} (veic/h arco)	V_{med} (km/h arco)
classe1	classe2	classe3	I_{AN1}	I_{AN2}	I_{AN3}					
17	16	17	0,85	0,80	0,85	20697	413,94	50000	1000	80

Tabella 6.3. Caratteristiche rete a 20 nodi

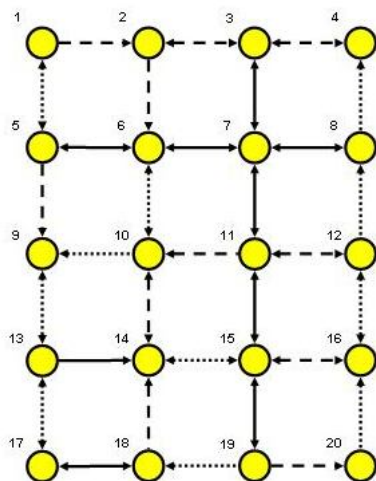


Figura 6.2. Grafo rete a 20 nodi

Rete_40,

è composta da 40 nodi e 100 archi. Ha un'estensione complessiva in termini di distanza pari a 46102 m ed una capacità totale di 100000 veic/h. In tabella 6.4 sono riportate le altre caratteristiche mentre in figura 6.3 viene rappresentato il grafo utilizzato.

Archi (n°)			I _{AN}			L _{tot} (m)	L _{med} (m/arco)	C _{tot} (veic/h)	C _{med} (veic/h arco)	V _{med} (km/h arco)
classe1	classe2	classe3	I _{AN1}	I _{AN2}	I _{AN3}					
34	33	33	0,85	0,83	0,83	46102	461,02	100000	1000	80

Tabella 6.4. Caratteristiche rete a 40 nodi

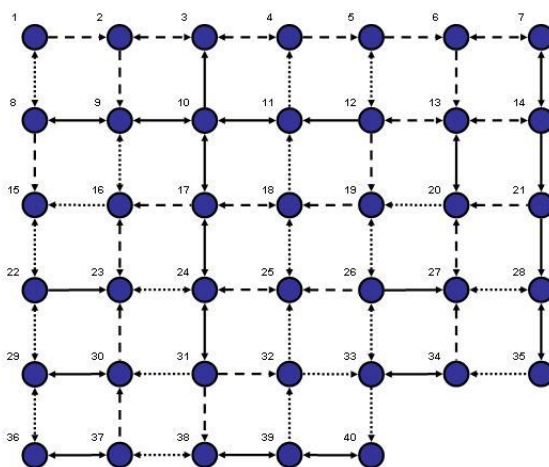


Figura 6.3. Grafo rete a 40 nodi

Rete_80,

è composta da 80 nodi e 200 archi. Ha un'estensione complessiva in termini di distanza pari a 88010 m ed una capacità totale di 200000 veic/h. In tabella 6.5 sono riportate le altre caratteristiche mentre in figura 6.4 viene rappresentato il grafo utilizzato.

Archi (n°)			I_{AN}			L_{tot} (m)	L_{med} (m/arco)	C_{tot} (veic/h)	C_{med} (veic/h arco)	V_{med} (km/h arco)
classe1	classe2	classe3	I_{AN1}	I_{AN2}	I_{AN3}					
67	66	67	0,84	0,83	0,84	88010	440,05	200000	1000	80

Tabella 6.5. Caratteristiche rete a 80 nodi

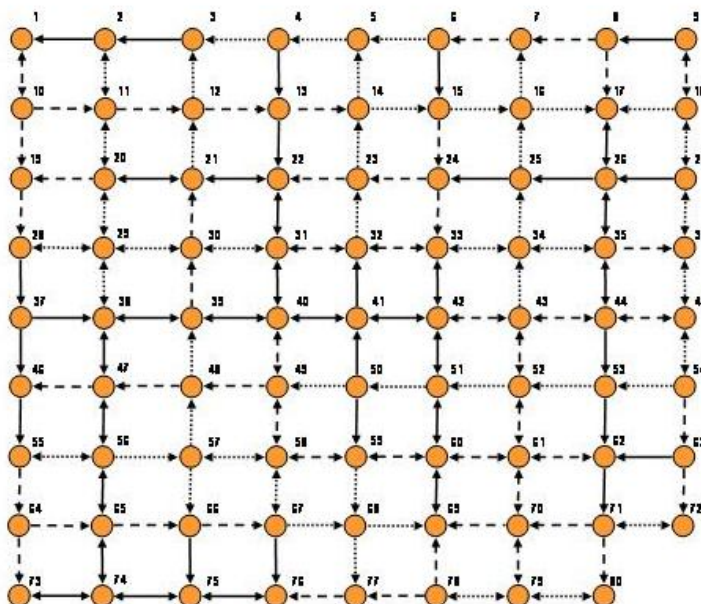


Figura 6.4. Grafo rete a 80 nodi

6.2. Assunzioni sulla domanda del sistema

Il sistema costituito dalle reti sperimentali e dagli eventuali nodi localizzati formano un sistema logistico il cui funzionamento è strettamente legato al tipo di domanda che lo utilizza. Il problema prevede la localizzazione di uno o più centri di servizio sulle reti

per soddisfare la domanda, tenendo conto delle condizioni di traffico presenti. La formulazione del problema (paragrafo 3.2.1) impone che la domanda sia data dalla somma degli spostamenti dovuti all'utilizzo dei nodi localizzati e dagli spostamenti dovuti ad altri motivi. Naturalmente la localizzazione influisce direttamente sulla prima componente di domanda ed indirettamente sulla seconda.

Al fine di simulare e testare le procedure di assegnazione e localizzazione è utile ipotizzare una domanda di trasporto per ciascuna componente. Le matrici OD considerate per le diverse reti hanno elementi che si riferiscono ad un numero di spostamenti del tutto casuale e facente riferimento ad un periodo temporale di un'ora. In particolare, i valori scelti per gli spostamenti variano tra un minimo di 1 ed un massimo di 200 spostamenti/ora. Date le dimensioni delle matrici, a titolo di esempio viene riportata solo la matrice relativa alla rete di 20 nodi (figura 6.5).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	141	107	116	58	61	155	3	152	163	142	10	83	172	158	75	192	174	12	189
2	73	0	105	153	11	118	94	60	124	129	53	56	166	165	118	197	182	46	139	196
3	49	107	0	22	199	135	4	115	20	21	159	57	10	59	77	60	189	195	80	56
4	32	33	129	0	82	83	142	65	127	42	38	117	17	92	181	53	157	76	58	183
5	126	125	86	20	0	112	139	182	167	5	109	183	86	135	100	103	93	71	81	54
6	12	49	195	13	78	0	73	98	31	95	52	126	108	32	187	131	101	78	22	157
7	92	150	119	166	4	42	0	15	21	67	26	1	107	131	109	165	17	39	136	91
8	72	30	141	185	106	18	151	0	80	92	98	42	66	19	118	34	185	20	89	55
9	174	150	55	135	52	18	7	65	0	158	60	47	96	51	68	9	97	41	173	118
10	151	185	66	109	17	127	82	192	23	0	184	124	70	30	96	44	198	26	6	69
11	109	184	108	81	169	165	134	144	199	68	0	99	83	139	36	85	109	163	108	86
12	102	46	124	98	136	177	74	61	59	30	106	0	45	117	73	175	96	38	137	149
13	123	156	33	161	41	191	14	13	158	76	93	24	0	23	35	10	143	107	112	44
14	94	149	150	80	180	149	18	127	142	4	86	80	55	0	197	160	139	84	147	56
15	71	87	189	25	129	70	21	37	16	87	191	108	99	194	0	44	76	79	57	101
16	28	103	193	111	181	131	88	138	13	151	140	99	31	45	65	0	157	11	104	151
17	160	65	194	161	135	181	175	83	25	190	159	139	80	4	34	33	0	102	81	22
18	55	128	169	100	38	179	75	65	154	44	89	47	175	122	75	78	172	0	117	186
19	103	66	173	52	52	36	70	1	148	168	56	140	81	162	148	88	16	82	0	68
20	142	63	159	31	119	191	49	188	23	196	126	120	180	115	49	172	15	88	152	0

Figura 6.5. Matrice OD rete a 20 nodi

6.3. I test effettuati

Definiti i sistemi di offerta e di domanda del sistema di trasporto in cui localizzare, si può procedere a testare e verificare gli algoritmi. Il programma di calcolo realizzato consente di effettuare diverse prove in condizioni differenti del sistema. In fase

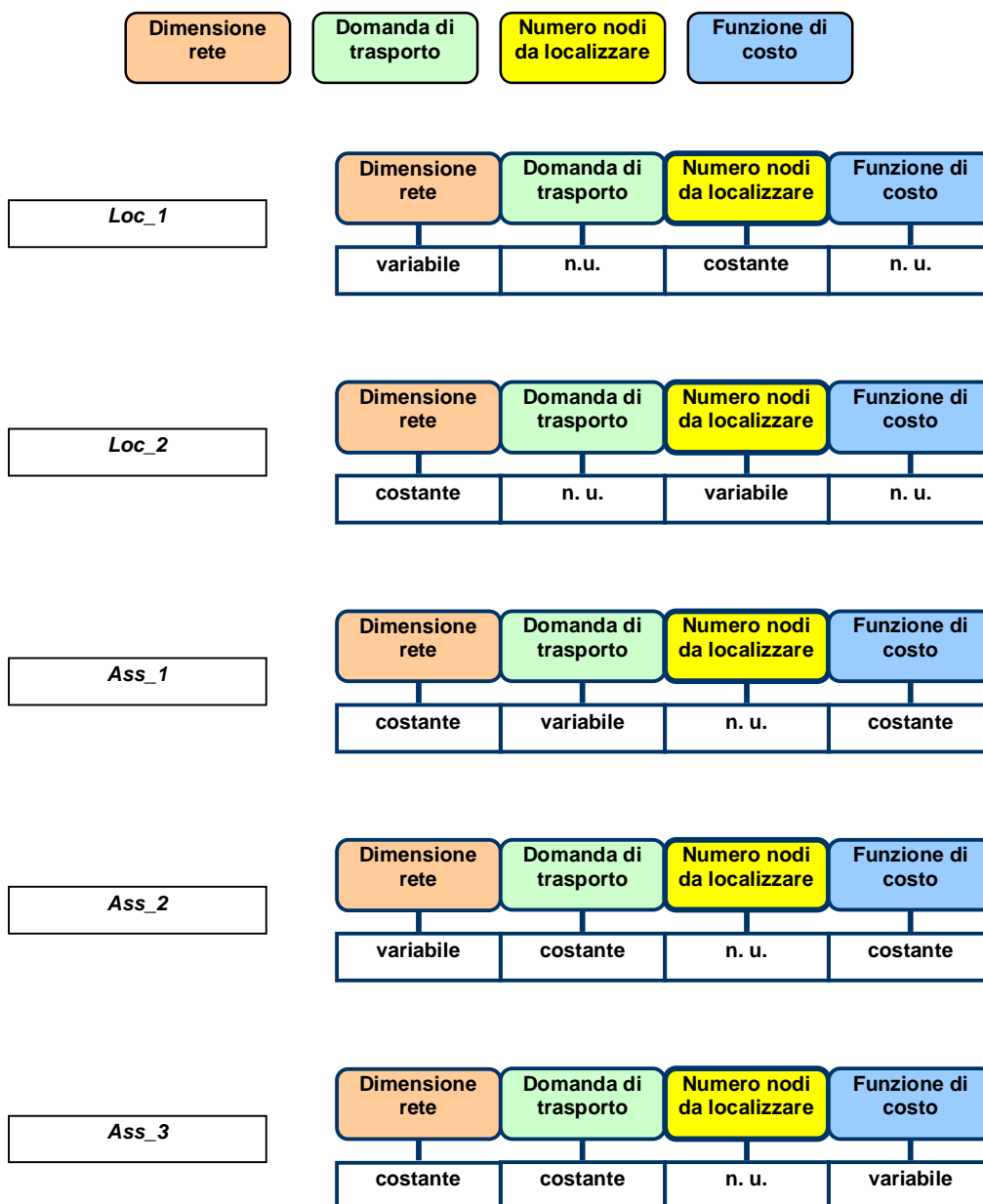
preliminare è utile compiere delle prove preliminari sulle procedure di localizzazione, prima, e di calcolo dei flussi di equilibrio deterministico, dopo. Solo dopo questa prima fase si può testare l'intera procedura di calcolo che permette di risolvere il problema combinato di localizzazione - assegnazione.

Per i test sulla procedura di localizzazione non sono state tenute in considerazione le condizioni di traffico della rete, pertanto il costo di percorrenza associato ad ogni arco, e quindi ad ogni percorso, coincide con la distanza percorsa. Dunque il minimo percorso tra le coppie di nodi origine-destinazione delle reti è calcolato in base alle distanze da percorrere.

I risultati delle prove sperimentali sono riportati nei paragrafi successivi, mentre l'elenco seguente è utile per definire più nel dettaglio i test effettuati:

- *test loc_1*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura di localizzazione al variare della grandezza della rete e fissato il numero di nodi da localizzare;
- *test loc_2*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura di localizzazione al variare del numero di nodi da localizzare e data una rete;
- *test ass_1*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura di calcolo dei flussi di equilibrio al variare della domanda considerata;
- *test ass_2*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura di calcolo dei flussi di equilibrio al variare della funzione di costo considerata, fissata una determinata domanda ed una determinata rete;
- *test ass_3*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura di calcolo dei flussi di equilibrio al variare della rete considerata, fissata una determinata domanda ed una determinata funzione di costo;
- *test comb_1*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura combinata localizzazione – assegnazione al variare della rete considerata, data una determinata funzione di costo e fissato il numero di nodi da localizzare;
- *test comb_2*, ha come obiettivo la verifica dei tempi di esecuzione della procedura combinata localizzazione – assegnazione al variare del numero di nodi da localizzare, data una rete e fissata una determinata domanda.

Per una migliore comprensione delle analisi compiute è utile servirsi degli schemi proposti di seguito (figura 6.6). Essi si basano su blocchi unitari a cui corrispondono le grandezze variabili considerate durante i test (dimensione della rete, domanda di trasporto, numero nodi da localizzare, funzione di costo).



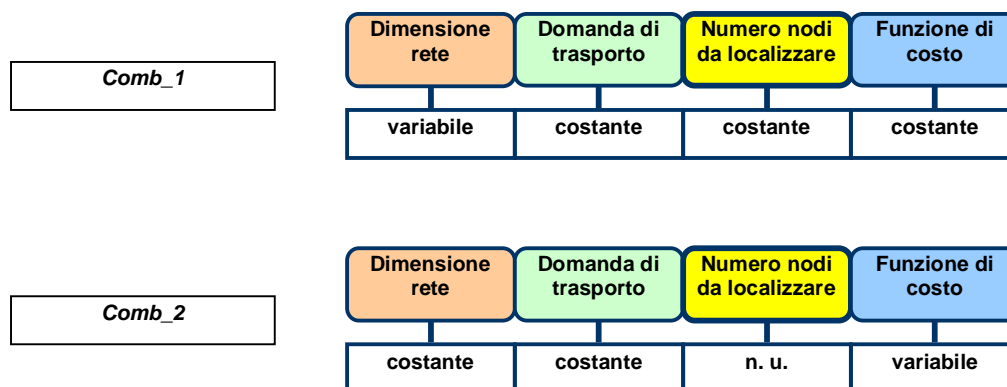


Figura 6.6. Schemi utilizzati nelle diverse prove effettuate

Tutte le prove sono state effettuate utilizzando un calcolatore con processore Pentium4 2.66 GHz e con RAM di 480 Mb. I tempi riportati sono indicativi del grado di efficienza delle differenti prove sperimentali ed utili per disporre di dati oggetto di analisi e valutazioni successive.

6.4. I test sulla procedura di localizzazione

La procedura che permette di individuare il nodo o i nodi che rendono minimo il valore assunto dalla funzione obiettivo in termini di distanze percorse sulle reti è stata testata al fine di verificare l'efficienza delle operazioni da eseguire. Affinché l'algoritmo determini la soluzione desiderata, l'efficienza computazionale della procedura è stata misurata in termini di tempo di calcolo.

Due sono state le prove effettuate: la prima fa riferimento a dimensioni variabili della rete di trasporto considerata, mentre la seconda riguarda un numero variabile di nodi da localizzare. In entrambi i casi non sono state considerate le condizioni di traffico presenti sulle reti, valutando esclusivamente la procedura di localizzazione attraverso le caratteristiche fisiche del sistema di offerta di trasporto di ciascuna rete. Pertanto il parametro utile a definire il costo di percorrenza di archi e percorsi è la distanza fisica tra le coppie origine-destinazione della rete.

Di seguito sono riportati i risultati ottenuti per le due prove effettuate.

6.4.1. Prove con diverse dimensioni delle reti

Nella prova effettuata, attraverso il modello di localizzazione scelto, il numero di nodi da localizzare rimane costante. Invece, le reti sulle quali è stato testato l'algoritmo di ricerca della soluzione sono di dimensioni differenti: a parità di numero di nodi da localizzare sono state considerate le reti di 20, 40 ed 80 nodi. I tempi di esecuzione calcolati sono indicati in tabella 6.6: con l'aumentare delle dimensioni della rete i tempi di calcolo crescono in maniera esponenziale. Il dato più interessante è però osservabile attraverso le curve del grafico riportato in figura 6.7. I tempi di esecuzione sono inferiori se è maggiore il numero di nodi da localizzare.

rete	nl	tempo (sec)
20	1	1,19
40	1	29,70
80	1	4678,00
20	2	0,80
40	2	22,61
80	2	2490,00
20	3	0,53
40	3	23,50
80	3	1880,00
20	4	0,48
40	4	9,50
80	4	1489
20	5	0,31
40	5	8,42
80	5	1518,00

Tabella 6.6. Risultati prove con diverse dimensioni delle reti

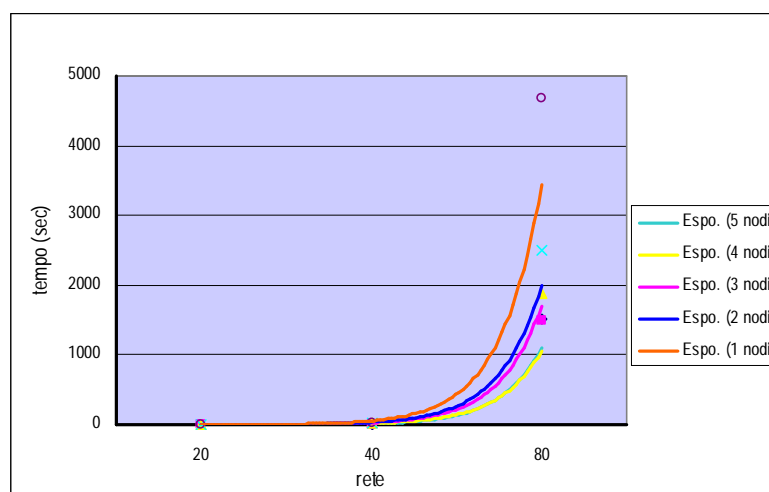


Figura 6.7. Tempi di esecuzione per le reti al variare del numero di nodi da localizzare

6.4.2. Prove con un numero diverso di nodi da localizzare

Nel test effettuato, per ogni rete è stato calcolato il tempo di esecuzione dell'algoritmo di localizzazione al variare del numero di nodi da localizzare. Anche in questo caso le reti considerate sono state quelle con 20, 40 ed 80 nodi. Dato il diverso numero di nodi potenziali ammessi per ciascuna rete, i risultati ottenuti dalle prove non sono direttamente confrontabili. Nei tre casi analizzati, da un punto di vista qualitativo, è comunque osservabile un andamento simile: i tempi di esecuzione dell'algoritmo decrescono se il numero di nodi da localizzare cresce (figure 6.8, 6.9 e 6.10). Inoltre le differenze percentuali osservate, calcolate tra il tempo di esecuzione relativo al massimo numero di nodi da localizzare ed il tempo di esecuzione relativo al minimo numero di nodi da localizzare, sono maggiori per le reti più grandi (figura 6.11).

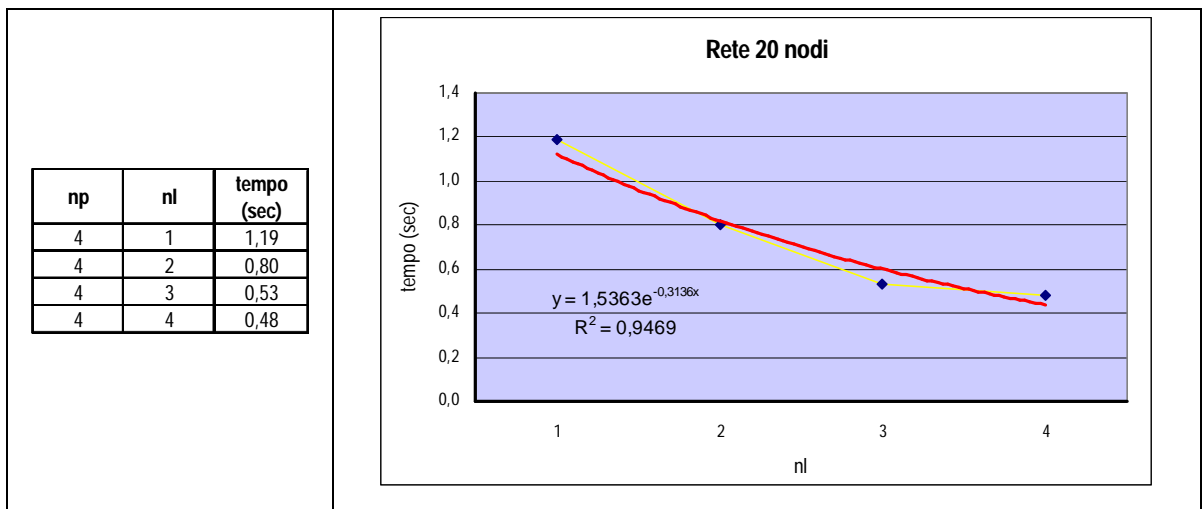


Figura 6.8. Risultati prove effettuate sulla rete di 20 nodi

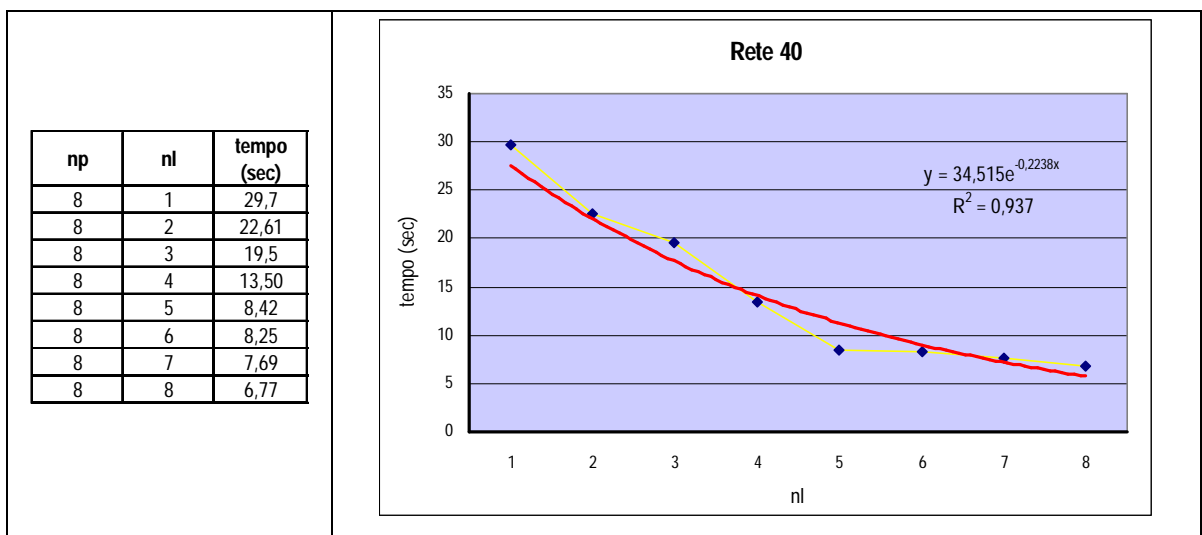


Figura 6.9. Risultati prove effettuate sulla rete di 40 nodi

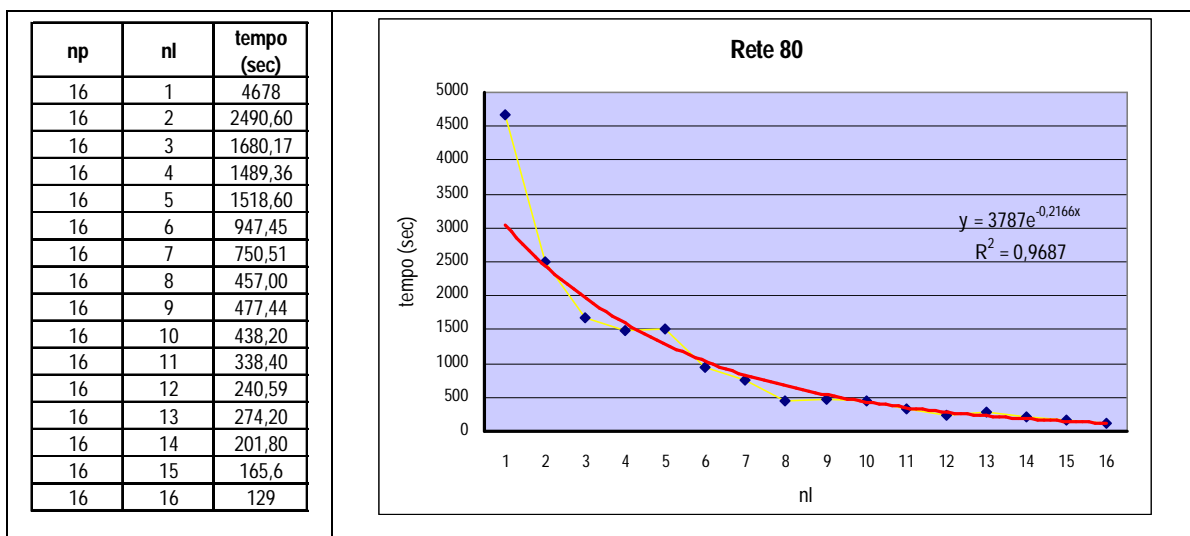


Figura 6.10. Risultati prove effettuate sulla rete di 80 nodi

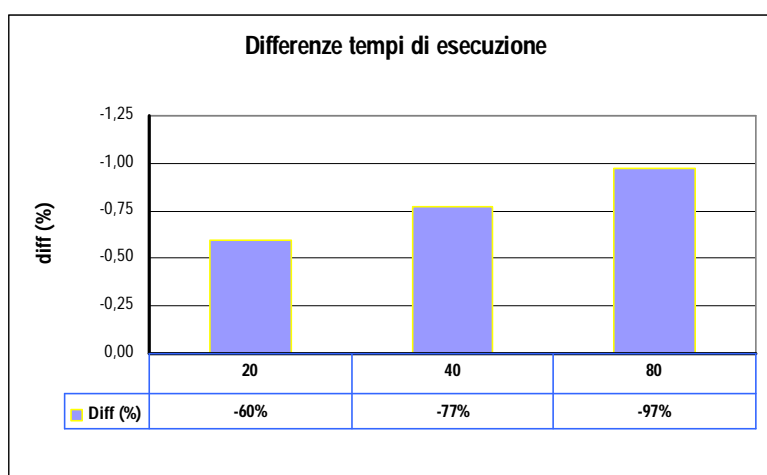


Figura 6.11. Differenze percentuali tra i tempi di esecuzione

6.5. I test sulla procedura di assegnazione dei flussi

Le prove effettuate per la procedura di assegnazione consentono di verificare il grado di efficienza dell’algoritmo utilizzato. Per valutare al meglio la procedura sono stati condotti tre diversi test. Il primo ha come obiettivo verificare se esista una certa dipendenza tra il tipo di domanda utilizzata ed i tempi di esecuzione dell’algoritmo. Il

secondo ed il terzo, invece, verificano come la procedura dipenda o meno dal tipo di funzione di costo utilizzata per il calcolo dei flussi.

Di seguito sono riportati i risultati ottenuti.

6.5.1. Prove con diversa domanda di trasporto

È necessario chiarire se l'entità della domanda di trasporto, utilizzata nel calcolo dei flussi di equilibrio, influisca sulla procedura. In particolare, per una determinata rete l'obiettivo è verificare se, variando i dati contenuti nella matrice OD, la procedura di assegnazione abbia tempi di calcolo differenti. Per dar risposta all'interrogativo posto è stato deciso di testare una sola rete, di 20 nodi, e far variare la matrice della domanda moltiplicando i relativi elementi per coefficienti diversi. Si è proceduto quindi ad assegnazioni successive.

In tabella 6.7 sono indicati i coefficienti moltiplicativi con cui è stata fatta variare la domanda, i tempi di esecuzione della procedura e le differenze percentuali tra i risultati ottenuti.

coeff multipl	1/3	2/3	1	1.3	1.67	3
tempo (sec)	1,71	1,64	1,67	1,78	1,80	1,78
diff (%)	-	-4	2	7	1	-1

Tabella 6.7. Risultati delle prove effettuate e coefficienti utilizzati

I risultati della prova sono rappresentati nel grafico di figura 6.12. Come è possibile osservare le differenze ottenute per le diverse matrici considerate sono minime. Dunque è possibile affermare che, per la procedura di assegnazione dei flussi, l'entità della domanda non implica sostanziali cambiamenti nello svolgimento dell'algoritmo.

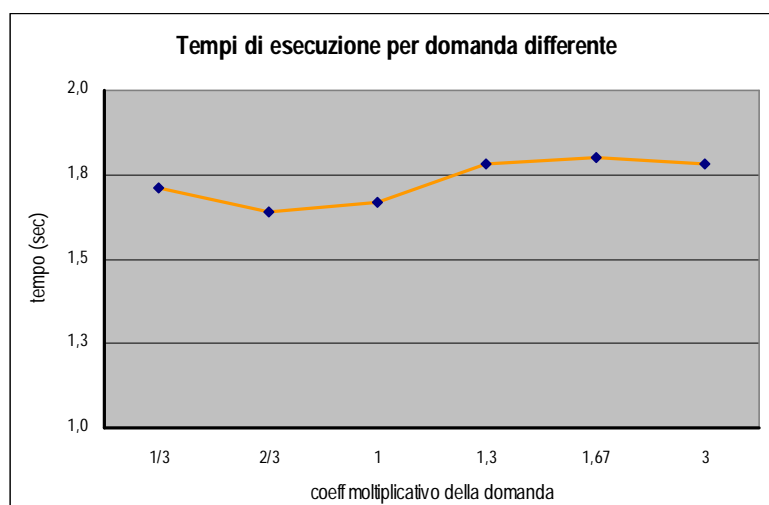


Figura 6.12. Tempi di esecuzione per differenti domande

Tale risultato consente di poter confrontare i risultati delle prove successive laddove sia necessario compiere delle verifiche su reti di dimensioni diverse e con matrici O/D scelte casualmente.

6.5.2. Prove con diverse funzioni di costo

Il calcolo dei flussi su una rete di trasporto avviene attraverso l'utilizzo delle funzioni di costo definite per ogni arco della rete. Esse mettono in relazione costi e flussi, determinando gli spostamenti che avvengono tra i diversi nodi della rete. L'adozione di una funzione di costo è quindi importante in termini di risultati ottenuti.

Le prove effettuate, descritte in questo paragrafo, permettono di valutare il comportamento della procedura di assegnazione in base al tipo di funzione scelta. Ogni funzione è stata testata sulle quattro reti sperimentali ed i tempi di esecuzione ottenuti sono riportati in tabella 6.8. In tutti i casi analizzati, le funzioni testate sono di tipo separabile.

n (n°)	np (n°)	tempo (sec)						
		HCM	BPR	Gen(1,1)	Gen(1,2)	Gen(1,4)	Gen(2,1)	Gen(4,1)
10	2	0,08	0,19	0,20	0,19	0,17	0,25	0,25
20	4	1,42	1,06	1,81	1,05	1,08	1,77	2,19
40	8	28,41	28,27	33,33	28,31	29,62	23,16	23,67

80	16	466,80	399,60	477,60	410,40	409,20	475,20	476,40
----	----	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Tabella 6.8. Tempi di calcolo dei test effettuati

È utile confrontare i risultati ottenuti attraverso le curve delle figure seguenti. In particolare, è possibile affermare che i tempi di esecuzione della procedura sono molto simili se la rete considerata è di piccole dimensioni; al contrario, se il numero di nodi della rete è elevato i tempi di calcolo presentano sostanziali differenze. Per la rete di 80 nodi, la funzione di costo dell'HCM implica tempi maggiori di calcolo rispetto alla funzione di costo proposta dal BPR.

Per reti grandi, inoltre, la scelta dei parametri alfa e beta è importante in termini di efficienza computazionale.

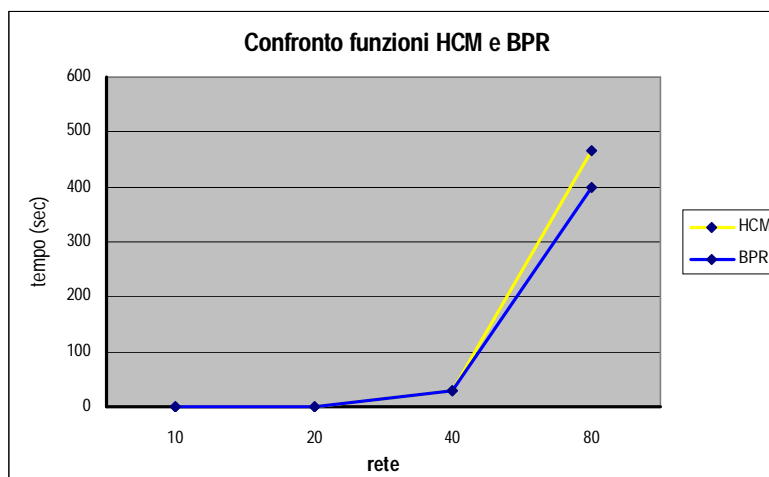


Figura 6.13. Confronto tra i risultati ottenuti per le funzioni di costo HCM e BPR

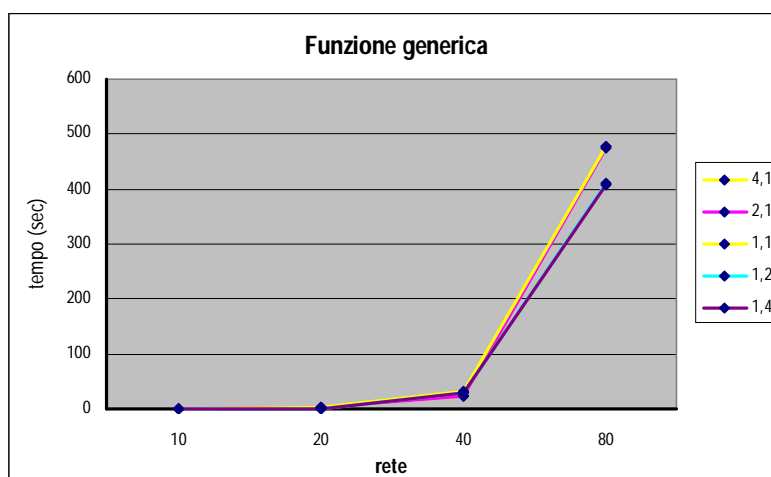


Figura 6.14. Confronto tra i risultati ottenuti per diversi valori dei parametri alfa e beta

6.5.3. Prove con diverse dimensioni delle reti

I dati ottenuti dalle prove sulle diverse funzioni possono essere ulteriormente analizzati attraverso dei confronti effettuati per ciascuna rete. Data una rete, infatti, è possibile confrontare i tempi di calcolo della procedura di assegnazione dei flussi per tutte le funzioni di costo considerate. I grafici che seguono riportano i risultati ottenuti.

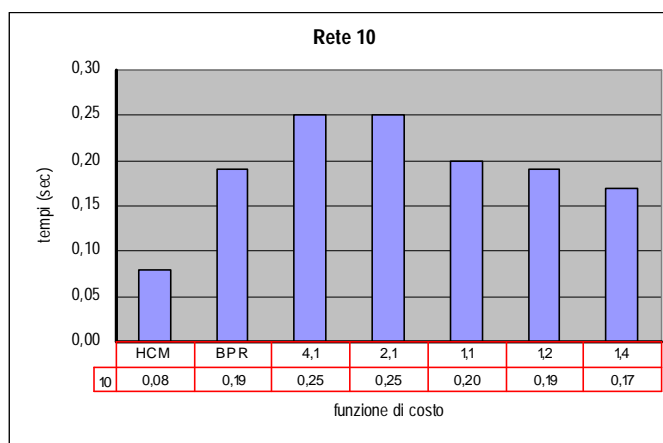


Figura 6.15. Tempi di esecuzione per la rete di 10 nodi

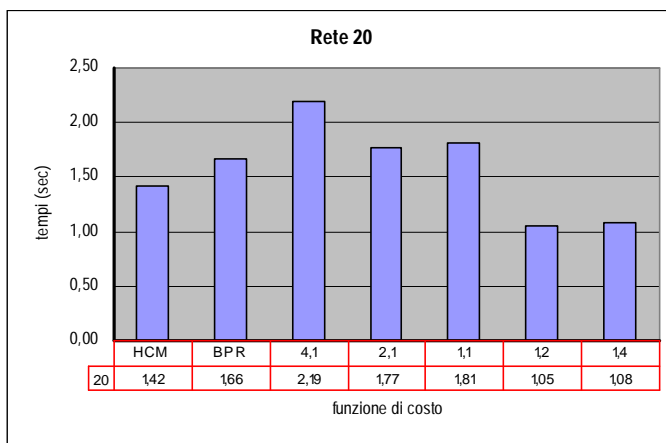


Figura 6.16. Tempi di esecuzione per la rete di 20 nodi

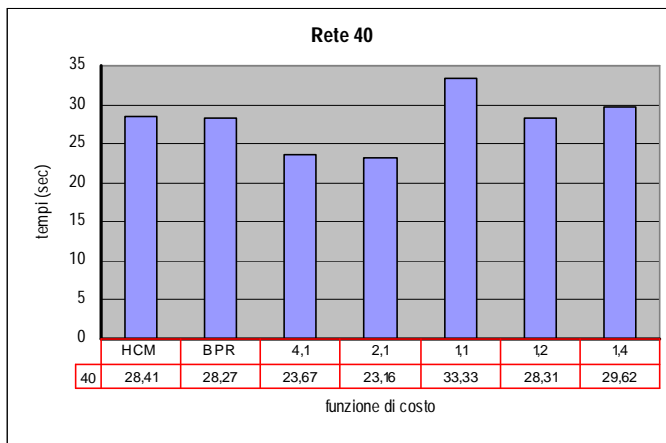


Figura 6.17. Tempi di esecuzione per la rete di 40 nodi

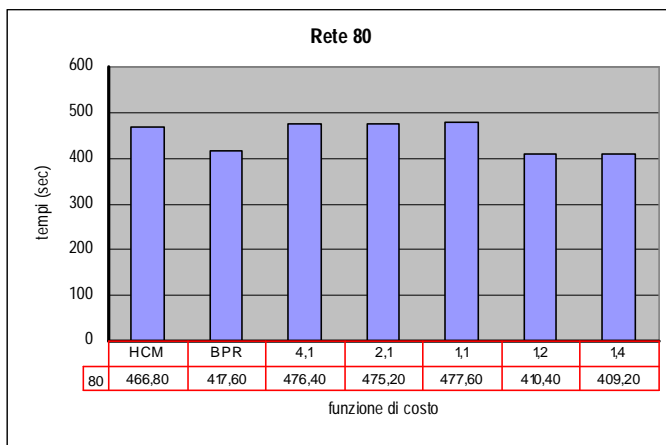


Figura 6.18. Tempi di esecuzione per la rete di 80 nodi

Sulle reti di piccole dimensioni la funzione di costo proposta dall'HCM risulta essere maggiormente efficiente così come la funzione generica se si sceglie $\beta > \alpha$. Se la rete ha però un numero elevato di nodi questa tendenza non è più osservabile.

Conclusioni

Il problema trattato nel presente lavoro, coincidente con la localizzazione di nodi generatori di traffico sulle reti di trasporto, è stato prima formulato e poi risolto. La metodologia utilizzata è stata basata su metodi e modelli propriamente logistici di ottimizzazione e strumenti della teoria dei sistemi di trasporto. Il problema è risultato ampio, la sua formulazione complessa per la cui risoluzione è stato necessario utilizzare un approccio globale che va ben oltre l'analisi del solo sistema di trasporto.

La localizzazione di più centri erogatori di prodotti o servizi, se eseguita contemporaneamente, ha bisogno di modelli di ottimizzazione che ammettono più soluzioni ammissibili. Solo attraverso l'uso di algoritmi di calcolo in grado di ricercare la soluzione in maniera efficiente è possibile risolvere il problema. Il metodo scelto per il problema posto è coinciso con il simplesso; mediante la sua implementazione è stato possibile individuare tutte le possibili soluzioni e realizzare uno strumento di calcolo specifico.

Se si considera anche il sistema di trasporto nel quale avviene la localizzazione, le analisi risultano essere più ampie. Gli effetti dovuti agli spostamenti sulla rete di trasporto generati dai nodi localizzati non assicurano più l'ottimalità della soluzione di partenza ed influenzano la ricerca della nuova soluzione. Distribuzione dei flussi sulla rete e nodi localizzati configurano la rete considerata, raggiungendo uno stato di equilibrio del sistema. Esso può essere determinato con lo strumento di calcolo realizzato. Le procedure impiegate risultano efficienti, mentre il programma adatto a risolvere il problema nei diversi casi ipotizzati.

Inoltre le prove sperimentali hanno consentito di verificare le procedure di localizzazione e di calcolo dei flussi di equilibrio sulle quattro differenti reti test considerate. Le dimensioni della rete incidono sui tempi di calcolo in maniera esponenziale; se i nodi da localizzare in numero sono maggiori di uno la ricerca della soluzione avviene in tempi minori, inversamente proporzionale al numero di nodi. La scelta degli elementi della matrice OD non incide sull'efficienza delle procedure

utilizzate, mentre la scelta del tipo di funzione di costo è importante nella fase di formulazione del problema. Quest'ultima assume particolare importanza se la rete è di grandi dimensioni: in particolare la scelta dei parametri che compaiono nell'espressione di ogni funzione incide in termini di efficienza computazionale.

Bibliografia

- Alp O., Drezner Z., Erkut E. (2003), "An efficient genetic algorithm for the p-median problem". *Annals of Operations Research* n. 122, pp. 21–42.
- Averbakh I., Berman O., Drezner Z., Wesolowsky G. O. (2007), "The uncapacitated facility location problem with demand-dependent setup and service costs and customer-choice allocation", *European Journal of Operational Research* n.179 (3), pp.956–967.
- Beckman M., Mc Guire C.B., Winsten C. B. (1956) "Studies in the economics of transportation", Yale University Press, New Haven CT.
- Ben Akiva M., Lerman S. (1985), "Discrete choice analysis", MIT Press, Cambridge.
- Berman O., Drezner A. (2006), "Location of congested capacitated facilities with distance sensitive demand", *IIE Transactions* n. 38, pp. 213–221.
- Berman O., Drezner Z., Wesolowsky G. O. (2005), "The facility and transfer plant location problem", *International Transactions in Operational Research* n.12, pp.387–402.
- Berman O., Drezner Z., Wesolowsky G.O. (2002), "The collection depots location problem on networks", *Naval Research Logistics* n.49, pp.15–24.
- Bespamyatnikh S., Bhattacharya B., Keil M., Kirkpatrick D., Segal M. (2002), "Efficient algorithms for centers and medians in interval and circular-arc graphs" *Networks* n.39, pp.144–152.
- Branston D. (1976), "Link capacity functions: a review", *Transportation Research* part B.
- Caruso C., Colomi A., Alois L. (2003), "Dominant, an algorithm for the p-center problem", *European Journal of Operational Research* n.149, pp.53–64.
- Cascetta E e Nuzzolo A. (1982), "Analisi statistica del processo delle velocità in autostrada", *Autostrade* 6.
- Crainic T. G., Laporte G. (1997), "Planning models for freight transportation", *European Journal of Operational Research* n. 97, pp.409–438.
- Dafermos S. (1971), "An extended traffic assignment model with applications to two-way traffic", *Transportation Science* n.5.
- Dafermos S. (1982), "The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand", *Networks* n. 12.
- Daskin M. S. (1995), "Network and discrete location: models, algorithms, and applications", J. Wiley and Sons, Inc., New York.
- Domencich T. A. e Mc Fadden D. (1975), "Urban travel demand: a behavioural analysis", American Elsevier, New York.

- Drezner Z., Klamroth K., Schobel A., Wesolowsky G.O. (2001), "The weber problem" in Drezner Z., Hamacher H.W. "Facility Location: Applications and Theory", Springer-Verlag.
- Drezner Z., Shiode S. (2007), "A distribution map for the one-median location problem on a network", *European Journal of Operational Research* n.179 (3), pp.1266–1273.
- Eiselt H. A., Sandblom C. L. (2004), "Decision Analysis, Location Models, and Scheduling Problems", Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- Ferrari P. (1988), "Assegnazione del traffico alle reti di trasporto", *Manuale dell'ingegneria civile* vol. IV, Edizioni Cremonese.
- Festa D. e Nuzzolo A. (1989), "Analisi sperimentale delle relazioni velocità-flusso per le strade urbane", *Le strade*.
- Florian M., Gaudry M., Lardinois P. (1989), "A two-dimensional framework for the understanding of transportation planning models", *Transportation Research part B* n. 23.
- Geoffrion, A. M. (1979), "Making better use of optimization capability in distribution system planning", *AIIE Transactions* n. 11, pp. 96–108.
- Ghosh D. (2003), "Neighborhood search heuristics for the uncapacitated facility location problem", *European Journal of Operational Research* n.150, pp.150–162.
- Goldengorin B., Ghosh D., Sierksma G. (2003), "Branch and peg algorithms for the simple plant location problem", *Computers & Operations Research* n.30, pp. 967–981.
- Hakimi S. (1965), "Optimum location of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems", *Operations Research* n. 13, pp. 462–475.
- Hakimi S. L. (1964), "Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", *Operations Research* n.12, pp. 450–459.
- Harewood S.I. (2002), "Emergency ambulance deployment in barbados: a multi-objective approach", *Journal of the Operational Research Society* n.53, pp.185–192.
- Harkness J., ReVelle C. (2003), "Facility location with increasing production costs", *European Journal of Operational Research* n.145, pp.1–13.
- Hong J. (2007), "Transport and the location of foreign logistics firms, the chinese experience", *Transportation Research Part A* n.41, pp.597–609.
- Horowitz J. L., Sperman J. M., Daganzo C. F. (1982), "An investigation on the accuracy of the Clark approximation for the multinomial probit model", *Transportation Science* n. 16.
- Hribar M., Daskin M. S. (1997), "A dynamic programming heuristic for the P-median problem", *European Journal of Operational Research* n. 101, pp. 499-508.
- Hutchinson G. (1974), "Principles of urban transportation systems planning", Mc Graw-Hill, New York.
- Kalcsics J., Nickel S., Puerto J. (2003), "Multifacility ordered median problems on networks: a further analysis", *Networks* n.41, pp.1–12.
- Kariv O., Hakimi S. L. (1979a), "An algorithmic approach to network location problems, Part I: The p-centers", *SIAM Journal of Applied Mathematics* n.37, pp. 513–538.

- Kariv O., Hakimi S. L. (1979b), "An algorithmic approach to network location problems, Part I: The p-median", *SIAM Journal of Applied Mathematics* n.37, pp. 539–560.
- Lam W. H. K., Li Z., Huang H., Wong S. C. (2006), "Modeling time-dependent travel choice problems in road networks with multiple user classes and multiple parking facilities", *Transportation Research Part B* n.40, pp.368–395.
- Le Blanc J. L., Morlock E. K, Pierskalla W. (1975), "An efficient approach to solve the road network equilibrium traffic assignment problem", *Transportation Research* n. 9.
- Leamer E. E. (1968), "Locational equilibria", *Journal of Regional Science* n. 8, pp.229–242.
- Manheim M. (1979), "Fundamentals of transportation systems analysis", MIT Press, Cambridge.
- Marin A., Pelegrin B. (1997), "A branch-and-bound algorithm for the transportation problem with location of p transshipment points", *Computers & Operations Research* n.24, pp.659–678.
- Melkote S., Daskin M. (2001), "An integrated model of facility location and transportation network design", *Transportation Research A – Policy* n.35, pp.515–538.
- Meyer M. D. e Miller E. J. (1984), "Urban transportation planning", mc Graw-Hill, New York.
- Mladenovic N., Labbè M., Hansen P. (2003), "Solving the p-center problem with tabu search and variable neighborhood search", *Networks* n. 42, pp. 48–64.
- Newell G. F. (1980), "Traffic flows in transportation networks", MIT Press, Cambridge.
- Nguyen S. (1974), "A unified approach to equilibrium methods for traffic assignment", in "Traffic equilibrium methods", Beckmann M. e Kunzi H. P., Springer Verlag New York.
- Potts R. B. e Oliver R. M (1972), "Flows in transportation networks", Academic Press, New York.
- Rakas J., Teodorovic D., Kim T. (2004), "Multi-objective modeling for determining location of undesirable facilities", *Transportation Research Part D* n.9, pp.125–138.
- ReVelle C. S., Eiselt H. A. (2005), "Location analysis: A synthesis and survey", *European Journal of Operational Research* n. 165, pp.1–19.
- ReVelle C. S., Eiselt H. A., Daskin M. S. (2008), "A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science", *European Journal of Operational Research* n. 184 pp. 817–848.
- ReVelle C. S., Swain R. (1970), "Central facilities location", *Geographical Analysis* n. 2, pp. 30–42.
- Sheffi Y. (1985), "Urban transportation networks", Prentice Hall, Englewood Cliff.
- Shen Z.-J.M., Coullard C., Daskin M.S. (2003), "A joint location-inventory model" *Transportation Science* n.37, pp.40–55.
- Smith M. J. (1979), "Existence, uniqueness and stability of traffic equilibria", *transportation research part B* n.13.
- Toregas C., Swain R., ReVelle C., Bergman L. (1971) "The location of emergency service facilities", *Operations Research* n.19, pp. 1363–1373.

- Wang J. Y. T., Yang H., Lindsey R. (2004), "Locating and pricing park-and-ride facilities in a linear monocentric city with deterministic mode choice", *Transportation Research Part B* n.38, pp.709–731.
- Wang Y. (2008), "Locating battery exchange stations to serve", *Transportation Research Part D* n.13, pp.193–197.
- Williams H. C. W. L. (1977), "On the formation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit", *Environment and planning* n. 9.
- Wilson A. G. (1974), "urban and regional models in geography and planning", Jon Wiley, New York.

