



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

Dottorato di ricerca in ingegneria dei materiali e delle Strutture  
Settore disciplinare ICAR08  
Scuola Pitagora in Scienze Ingegneristiche

Tesi di Dottorato  
XXIII ciclo

***Problemi di delaminazione in ambito dinamico nei laminati  
multistrato in materiale composito***

COORDINATORE

Prof. Renato Sante OLIVITO

SUPERVISORE

Prof. Paolo LONETTI

CANDIDATO

Alessandro MANNA

# Indice

## Capitolo 1

### **Concetti di Meccanica della Frattura in ambito dinamico**

1.1 Introduzione	Pag.1
1.2 Dinamica della frattura	4
1.3 Dinamica dei campi di propagazione della fessura	7
1.4 Condizioni di stazionarietà della propagazione dinamica della fessura	8
1.5 Condizioni di non stazionarietà della propagazione dinamica della fessura	10
1.6 Metodi di modellazione computazionale	14
1.7 Sommario	23

## Capitolo 2

### **Descrizione del moto con la tecnica ALE e fondamenti di meccanica della frattura**

2.1 Introduzione della tecnica ALE	Pag.25
2.2 Descrizione del moto	27
2.3 Procedure di aggiornamento della mesh	37
2.4 Schemi di moto della mesh	39
2.5 Tecniche di regolarizzazione della mesh	40
2.5.1 Metodo di regolarizzazione di Laplace	41

2.5.2 Metodo di regolarizzazione di Winslow	42
2.6 L'integrale J di Rice	43
2.7 Decomposizione integrale J	53
2.8 La decomposizione dell'integrale J per il calcolo delle componenti dell'ERR nel caso tridimensionale	63
2.9 Criteri di frattura in ambito dinamico	68

## Capitolo 3

### **Modellazione ed analisi dei fenomeni di propagazione dinamica**

3.1 Introduzione ai fenomeni di propagazione dinamica	Pag.73
3.2 Formulazione del modello laminato	75
3.3 L'integrale J in campo dinamico	77
3.4 Criterio dinamico di avanzamento alla frattura	81
3.5 Equazioni di governo delle variabili strutturali	83
3.6 Equazioni di governo del modello ALE	87
3.7 Formulazione numerica del modello mediante la tecnica degli elementi finiti	91

## Capitolo 4

### **Validazione del modello:il confronto con i dati in letteratura**

4.1 Introduzione	Pag.95
4.2 Modo I	95

4.3 Modo II	98
4.4 Modo Misto	103
4.5 Analisi di modelli soggetti a fenomeni di delaminazione multipla	108

## Capitolo 5

### **Conclusioni**

Conclusioni	Pag.112
-------------	---------

Bibliografia	Pag.115
--------------	---------

# Ringraziamenti

Sicuramente ad una persona più di tutte voglio rivolgere i miei ringraziamenti: il Professor Paolo Lonetti, mio tutor nel presente lavoro di ricerca, e soprattutto mio sostenitore. I miei ringraziamenti vanno ad un uomo che si è mostrato sempre presente e disponibile con i suoi suggerimenti e acuti consigli rivelatisi sempre per me veritieri e preziosi. Un grazie colmo di sincero affetto ad un uomo e un professionista per le opportunità che mi ha offerto. Un grazie al Prof. Domenico Bruno che mi ha accompagnato in fasi significative del presente lavoro, e che mi ha fatto arricchire dal punto di vista professionale ed umano grazie ai suoi suggerimenti. Grazie al Prof. Fabrizio Greco per il supporto derivante dalle sue estese competenze tecniche e per aver spesso suggerito la strada giusta per lo svolgimento della mia attività di ricerca nonostante i suoi numerosi impegni. Un Grazie particolare va al mio amico Ing. Paolo Nevone Blasi che, prima durante la formazione universitaria, e poi quella di dottore di ricerca mi ha dato consigli che fino ad oggi si sono rilevati sempre utili. Sentiti ringraziamenti vanno ai miei colleghi di dottorato specialmente per il rapporto professionale che si è instaurato, di sostegno ed aiuto reciproco. Grazie a mio padre e a mia madre, è a loro che devo il privilegio dello studio. Un ultimo ringraziamento, e di certo non seguo un ordine, è per mia moglie, che con il suo amore mi ha reso la persona più felice del mondo facendo nascere Francesco una gioia troppo grande, grazie a lei ed ai suoi consigli rivelatisi sempre utili nella quotidianità e per aver contribuito a costruire quella parte del mio carattere che mi ha permesso di raggiungere, nonostante le difficoltà, piccoli traguardi di vita, e per non parlare del sacrificio del nostro tempo insieme per lo studio e i tanti impegni.

Grazie a tutti.

# CAPITOLO 1

## Concetti di Meccanica della Frattura in ambito dinamico

### 1.1 Introduzione

La meccanica della frattura si occupa della descrizione quantitativa delle proprietà meccaniche dei corpi deformabili contenenti difetti; particolare attenzione, in questo ambito, viene rivolta alla caratterizzazione ed alla misura della resistenza dei materiali al crescere del difetto. La determinazione delle proprietà meccaniche di un dato sistema è resa possibile da un'opportuna descrizione del sistema stesso mediante un modello matematico in grado di coglierne i differenti aspetti qualitativi e quantitativi. Un modello matematico è in generale caratterizzato da una descrizione della configurazione geometrica del corpo deformabile, da una relazione empirica tra tensioni interne e deformazioni, e da opportune leggi di bilancio fisico relative alle quantità meccaniche in gioco. Per un dato sistema fisico il modello può essere sviluppato a diversi livelli di dettaglio ed essere più o meno sofisticato. Un materiale, a titolo di esempio, può essere idealizzato come elastico o come elasto-plastico a seconda delle necessità, analogamente un corpo può essere considerato come una struttura monodimensionale o tridimensionale. L'esperienza ha largamente dimostrato che i risultati relativi a campi prettamente ingegneristici derivano da analisi non sofisticate e da modelli poco dettagliati. Detto ciò, si può introdurre un principio di notevole importanza valido nell'ambito della meccanica della frattura: una particolare grandezza dello stato meccanico di un solido fessurato può essere interpretata come una forza guida agente sulla fessura; si tratta in effetti della tendenza all'avanzamento della cricca. *La fessura è intesa come un'entità che ha un comportamento in accordo con le leggi della meccanica espresse in termini di relazione tra la forza guida e moto.* In fase di modellazione si considera la resistenza dei materiali reali e si deduce l'ipotesi di comportamento; quindi con l'osservazione della frattura si accetta o si rifiuta l'ipotesi sviluppata. I fenomeni di crescita dei meccanismi di delaminazione sono caratterizzati da un'elevata complessità strettamente dipendente dalla tipologia strutturale, dai

carichi esterni e dalle proprietà fisico-meccaniche del materiale; infatti, come ben noto, nell'ambito dei materiali monolitici, i fenomeni di crescita di microfratture interne sono interessati da meccanismi di *branching* all'apice del difetto con la conseguente formazione di fenomeni di delaminazione multipla in corrispondenza della zona di avanzamento. Il processo di avanzamento procede a velocità elevate ma sempre in ambito subsonico, cioè al di sotto della velocità delle onde di taglio del materiale. Nell'ambito dei materiali compositi laminati multistrato la valutazione dei meccanismi di delaminazione può essere sensibilmente semplificata. I laminati sono costituiti da un assemblaggio di lamine e di interfacce; queste ultime corrispondono a potenziali piani deboli entro cui i meccanismi di delaminazione possono evolvere. Pertanto, seppure la posizione lungo lo spessore dei difetti interfacciali è praticamente nota, osservazioni sperimentali hanno mostrato che le velocità coinvolte possono raggiungere anche l'intervallo di propagazione intersonico, cioè un range di velocità compreso tra le velocità di propagazione delle onde di taglio e di quelle longitudinali (Barbero, 2007).

La formulazione del modello strutturale proposto consiste in un approccio bidimensionale in stato piano di tensione, in cui il comportamento di ciascuna lamina è omogeneo, lineare ed elastico. I difetti iniziali si propagano tra le lamine, in corrispondenza delle zone interfacciali, le quali rappresentano veri e propri piani deboli in cui le lesioni possono evolvere, generando conseguenti riduzioni di resistenza. Dal punto di vista ingegneristico è ragionevole assumere che la posizione della fessura, nella direzione dello spessore del laminato composito, è fissata per qualsiasi lesione dominante; ciò consente di semplificare notevolmente la valutazione del processo di avanzamento poiché sono esclusi a priori i meccanismi di *branching* (Freund, 1990). Sono a tal proposito considerati i fenomeni per i quali la velocità di deformazione, dipendente dalle proprietà del materiale, ha un effetto significativo. Gli effetti inerziali possono derivare sia da carichi applicati rapidamente su un solido fessurato sia da una rapida propagazione della fessura. Nel caso di carichi applicati rapidamente l'influenza degli stessi è trasferita alla fessura per mezzo di onde tensionali che viaggiano ad elevate velocità attraverso il materiale. Per determinare l'eventualità dell'avanzamento di una fessura è necessario calcolare la forza guida agente sulla stessa. La resistenza inerziale a questo moto può influenzare la forza guida, e dunque per una descrizione accurata del moto essa dovrebbe essere presa in considerazione. I progressi verso la comprensione dei fenomeni della dinamica della frattura sono stati limitati da diverse situazioni talvolta complesse. La dipendenza

temporale nella descrizione di un processo di dinamica della frattura complica la costruzione del modello matematico, che risulta quindi più complesso rispetto all'equivalente modello in ambito statico caratterizzato dalla stessa configurazione e classe di materiale. Da un punto di vista sperimentale la dipendenza dal tempo richiede una più accurata misurazione delle quantità in gioco e dovrebbe essere relativa ad un piccolissimo intervallo di tempo in modo da non interferire con il processo osservato. Nel caso di avanzamento della fessura, le regioni del contorno contenenti la fessura dovrebbero essere descritte da un modello matematico che abbia una dipendenza temporale. *Da un punto di vista sperimentale questa caratteristica implica che la posizione in cui le quantità di interesse devono essere misurate varia solitamente in modo non uniforme durante il processo.* Gli effetti inerziali risultano più o meno significativi per un dato problema a seconda delle condizioni di carico, delle caratteristiche del materiale, e della configurazione geometrica del corpo. Le circostanze sotto le quali tali difetti sono significativi non possono essere specificate in maniera esatta, tuttavia è possibile applicare i seguenti concetti. Si supponga, ad esempio, che esista un tempo caratteristico associato ai carichi applicati, definito dal rapporto tra il carico massimo e la velocità di incremento del carico. Nel caso in cui lo stesso non sia paragonabile al tempo richiesto alle onde tensionali per viaggiare alla velocità caratteristica delle onde del materiale su una lunghezza rappresentativa del corpo definita come lunghezza della fessura o distanza dal bordo della stessa al contorno caricato, gli effetti inerziali sono significativi. Nel caso di propagazione della fessura gli effetti inerziali sono importanti se la velocità dell'apice della fessura è una frazione significativa della più bassa velocità caratteristica delle onde del materiale.

Nel presente lavoro di tesi si propone un modello in grado di simulare accuratamente l'evolversi dei fenomeni di crescita, in ambito dinamico, di difetti interfacciali presenti nei laminati compositi multistrato. In particolare, viene presentata una formulazione generalizzata sviluppata nell'ambito della *Meccanica della Frattura* e della *metodologia delle mesh mobili*, in grado di seguire adeguatamente il processo di evoluzione di difetti preesistenti all'interno di travi in materiale composito. La formulazione è stata validata mediante confronti con dati sperimentali presenti in letteratura, dai quali si evince che le velocità di avanzamento delle fessure interfacciali raggiungono valori paragonabili a quelli raggiunti dalle velocità di propagazione delle onde nel materiale. Si propone quindi un'analisi parametrica in termini di

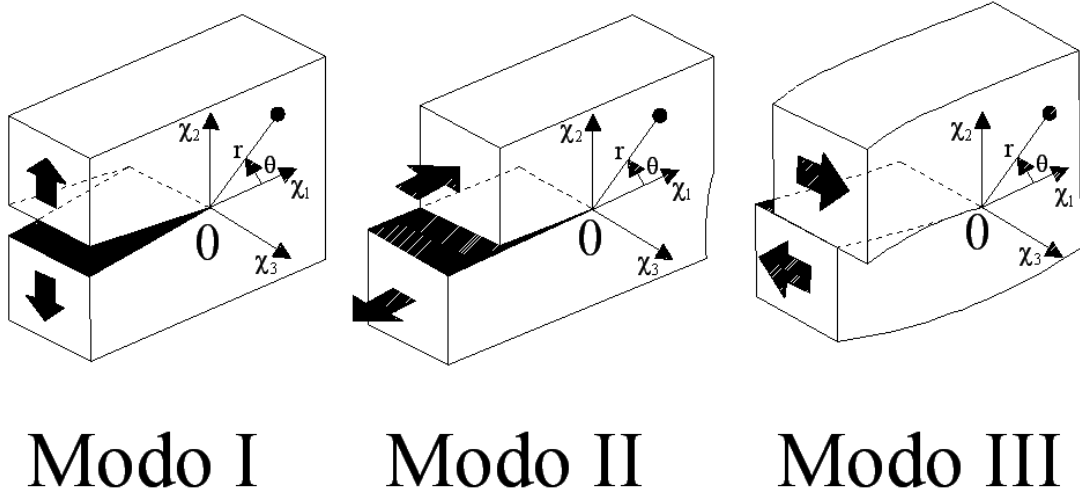


fattori di amplificazione dinamica, valutando gli schemi di carico (Modo I, Modo II, Modo misto) che determinano le condizioni di maggior criticità nella struttura, nonché l'interazione tra le condizioni di carico esterno e quello associato ai meccanismi di propagazione interfacciale.

## 1.2 Dinamica della frattura

Nel XIX secolo sono stati sviluppati studi empirici riguardanti il rinculo dei cannoni militari o l'azione d'impatto delle macchine industriali. Comunque, l'assenza di eventi o singole scoperte scientifiche non ha stimolato la ricerca nel campo della dinamica della frattura. L'area di ricerca si è sviluppata come sottocampo delle scienze ingegneristiche della meccanica della frattura fin dal 1940 e come settore della geofisica fin dagli ultimi anni del 1960. Solo dai primi anni del 1970 sia nel campo ingegneristico, sia in quello attinente alla scienza della terra, si inizia ad intuire l'importanza della rapida propagazione della fessura e dei suoi fenomeni di arresto. In alcuni casi, lo sviluppo dei concetti cardine della meccanica della frattura in condizioni di equilibrio, si è rivelato di fondamentale importanza nell'ambito dell'area di ricerca della dinamica della frattura. In generale i fenomeni di frattura dinamici possono essere caratterizzati da vari stati dinamici della fessura. Questi ultimi sono indotti per impatto o da carichi dinamici applicati al solido fessurato o da rapidi spostamenti della fessura all'interno del solido stesso. Pertanto, a seconda dello stato dinamico della cricca, la dinamica della frattura può essere divisa in *meccanica della frattura da impatto* e *meccanica della frattura veloce*. Molti approcci sperimentali sono stati concepiti per studiare il processo di frattura dinamica. Inoltre, visti i brevi intervalli di tempo, risulta di difficile applicazione la misurazione diretta di quantità fisiche di ordine superiore come la distribuzione di energia, l'energia dinamica istantanea, la velocità di rilascio ed il campo di stress dinamico vicino all'apice della fessura. Dunque, al fine di estrarre informazioni dettagliate su quantità fisiche derivate relative alla fessura in ogni istante di tempo, anche considerando intervalli di tempo molto lunghi, si può procedere con simulazioni numeriche della dinamica della frattura. Pertanto, si può facilmente intuire come il progresso della meccanica della frattura dinamica si basi sui progressi paralleli dei metodi computazionali per la simulazione dinamica della frattura (Nishioka, 1994). Particolare attenzione è incentrata sui campi asintotici della fessura,

su modelli computazionali per la propagazione dinamica dell'apice della fessura, e sull'uso della decomposizione dell'integrale J (Bruno et. al.,2009).



**Figura 1.1** Rappresentazione dei diversi modi: modo I (apertura); modo II e III (scorrimento)

Per ogni punto in prossimità di un fronte liscio, fatta eccezione per i punti d'angolo dove l'apice della fessura presenta fenomeni di *kinking* o interseca il fronte della fessura sulla superficie del solido, nella vicinanza della cricca il campo di deformazione è essenzialmente bidimensionale. Così il campo vicino all'apice della cricca può essere espresso come una combinazione del Modo I (modo di apertura nel piano), del modo II (modo di scorrimento nel piano) e del modo III (modo di scorrimento fuori dal piano). Quindi le componenti del campo di spostamenti e del campo tensionale possono essere espresse come la somma di questi modi individuali; in dettaglio è lecito può scrivere:

$$\sigma_{ij} = \sum_{M=I}^{III} (\sigma_{ij})_M, \quad u_i = \sum_{M=I}^{III} (u_i)_M \tag{1.2.1}$$

I campi delle tensioni e degli spostamenti possono essere espressi per mezzo di un'espansione in serie di autofunzioni asintotiche.

Per una fessura stazionaria soggetta a condizioni di carico dinamiche il fattore di intensificazione degli sforzi è funzione del tempo  $t$ . A titolo di esempio si può considerare una fessura stazionaria semi-infinita soggetta ad onde tensionali normali incidenti:

$$\sigma_M (\sigma_I = \sigma_{22}^0, \sigma_{II} = \sigma_{12}^0, \sigma_{III} = \sigma_{23}^0) \quad (1.2.2)$$

il fattore di intensificazione delle tensioni varia, allora, con il tempo  $t$ :

$$K_M (t) = D_M (\rho, \mu, \nu) \sigma_M (t) \sqrt{t} \quad (1.2.3)$$

dove:

- $D_M (M=I,II,III)$  è una quantità indipendente dal tempo, che dipende dalle proprietà del materiale, dalla densità di massa ( $\rho$ ) e dal coefficiente di Poisson ( $\nu$ ).
- il tempo  $t$  è considerato nullo nell'istante in cui le onde tensionali raggiungono la fessura.

Nell'ambito dinamico, il fattore di intensificazione degli sforzi  $K_M (M=I,II,III)$  nel caso di propagazione della fessura in condizioni stazionarie e non stazionarie, può essere espresso come funzione del tempo  $t$  e della velocità della fessura:

$$K_M (t, C) = k_M (C) K_M^* (t) \quad (1.2.4)$$

dove:

- $k_M (M=I,II,III)$  è funzione della velocità dell'apice della fessura;
- $K_M^* (t)$  è il fattore di intensificazione in equilibrio con la corrente lunghezza della fessura, con i carichi applicati e con la storia di estensione della fessura. Esso non dipende dalla velocità istantanea dell'apice della fessura, per cui ci si riferisce a  $K_M^* (t)$  con il nome di fattore "statico" (*Freund, 1973; Kostrov, 1975*).

La funzione di velocità della fessura  $k_M (M=I,II,III)$  è universale per tutte le propagazioni elastodinamiche: infatti quando la fessura non si propaga essa assume un valore unitario. La funzione  $k_M (M=I,II,III)$  decresce monotonicamente all'aumentare della velocità della fessura  $C$ ;  $k_I$  e  $k_{II}$  tendono ad un valore nullo per  $C = C_R$ , dove  $C_R$  è la velocità di Rayleigh;  $k_{III}$  tende a zero per  $C = C_s$ , dove  $C_s$  indica la velocità delle onde di taglio, caratteristica del materiale.

Quando il fattore di intensificazione delle tensioni aumenta bruscamente, i valori di  $k_M$  decrescono e di conseguenza si verifica l'incremento della velocità dell'apice della fessura.

### 1.3 Dinamica dei campi di propagazione della fessura

Di seguito, sono illustrati i diversi campi asintotici relativi agli stati dinamici della fessura in un solido omogeneo, lineare, elastico, isotropo; si assume che la cricca si propaghi in modo rettilineo nella direzione del piano. Per una fessura stazionaria soggetta a sollecitazioni dinamiche i campi tensionale e di spostamento possono essere espressi come segue:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} f_{ij}^{Mn}(\theta), & M = I, II, III \\ (u_i)_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)} g_i^{Mn}(\theta), & M = I, II, III \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

dove:

- $K_{Mn}$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) sono i coefficienti incogniti delle espansioni in serie, funzioni del tempo  $t$ ;
- le funzioni angolari  $f_{ij}^{Mn}(\theta)$  e  $g_i^{Mn}(\theta)$  sono le stesse di quelle relative al caso quasi statico (*Williams, 1957; Okamura, 1976*).

Per semplicità vengono mostrati i valori delle componenti di tensione normale e di spostamento in direzione  $x_2$  per puro modo I:

$$\begin{aligned} (\sigma_{22})_I &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{In}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{2}n\right) r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} \times \\ &\left[ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{1}{2}n \right\} \cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)\theta + \left(\frac{1}{2}n-1\right) \cos\left(\frac{1}{2}n-3\right)\theta \right], \\ (u_2)_I &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{In}}{\mu\sqrt{2\pi}} r^{\left(\frac{n}{2}\right)} \times \\ &\left[ k \sin\left(\frac{1}{2}n\right)\theta + \frac{1}{2}n \sin\left(\frac{1}{2}n-2\right)\theta - \left\{ \frac{1}{2}n + (-1)^n \right\} \sin\left(\frac{1}{2}n\right)\theta \right], \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

dove:

- $\mu$  è il modulo di taglio;

-  $k$  è un coefficiente che dipende dal coefficiente di Poisson ( $\nu$ ) e varia a seconda del tipo di stato piano (stato piano di tensione o di stato piano di deformazione).

Dalla potenza in  $r$  nelle Eq. (1.3.2) si può osservare che i campi asintotici in corrispondenza della fessura presentano i seguenti termini:

- 1) tensioni nulle e spostamenti di corpo rigido ( $n=0$ );
- 2) tensioni singolari e campi di spostamento proporzionali alla radice quadrata di  $r$  ( $n=1$ );
- 3) tensioni costanti e spostamenti lineari ( $n=2$ );
- 4) ordini superiori per le tensioni e gli spostamenti ( $n \geq 3$ );

In particolare, le tensioni singolari sono proporzionali a  $r^{-0.5}$ ; ne consegue che da un punto di vista matematico la fessura diventa infinita quando ( $r = 0$ ). Pertanto il fattore di intensificazione delle tensioni può essere definito in termini di coefficienti singolari:

$$K_M(t) = K_{M1}(t) \quad M=I,II,III \quad (1.3.3)$$

## 1.4 Condizioni di stazionarietà della propagazione dinamica della fessura

L'espressione asintotica dei campi in corrispondenza dell'apice della fessura per una propagazione dinamica della stessa in condizioni stazionarie può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij})_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} f_{ij}^{Mn}(\theta, C), & M=I,II,III \\ (u_i)_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)} g_i^{Mn}(\theta, C), & M=I,II,III \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Si nota che le funzioni  $f_{ij}^{Mn}(\theta, C)$  e  $g_i^{Mn}(\theta, C)$  dipendono sia da  $\theta$  sia dalla velocità della fessura, che risulta costante nel tempo (Malluck, 1976; Nishioka ed Atluri, 1983a). Le

autosoluzioni asintotiche dei campi tensionali e di spostamento nelle vicinanze della fessura in condizioni stazionarie sono state ottenute da *Nishioka e Atluri (1983a)* in modo unificato per tutti e tre i modi di frattura. Le tensioni normali e le componenti di spostamento per la direzione  $x_2$  sono di seguito illustrate:

$$(\sigma_{22})_I = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{K_{II} B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ -(1+\beta_2^2) r_1^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} \cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)\theta_1 + 2h(n)r_2^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} \cos\left(\frac{1}{2}n-1\right)\theta_2 \right\} \right] \quad (1.4.2)$$

$$(u_2)_I = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{K_{II} B_I(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \left\{ -\beta_1 r_1^{\frac{n}{2}} r_2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \sin\left(\frac{1}{2}n\right)\theta_1 + \frac{h(n)}{\beta_2} r_2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}n\right)\theta_2 \right\} \right]$$

dove:

- per  $B_I(C)$  è valida la seguente espressione:

$$B_I(C) = \frac{(1+\beta_2^2)}{\left\{ 4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2 \right\}} \quad (1.4.3)$$

$\beta_1$  e  $\beta_2$  sono funzioni della velocità dell'apice della fessura adimensionalizzata rispetto ai parametri  $C_d$  e  $C_s$ , che rappresentano rispettivamente la velocità delle onde longitudinali e la velocità delle onde a taglio, entrambe caratteristiche del materiale. Per  $\beta_1$  e  $\beta_2$  si può scrivere:

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_d^2}} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_s^2}}$$

-  $n$  è un numero intero ( $0 \leq n < \infty$ )

-  $h(n)$  può assumere due valori:

$$\text{per un valore di } n \text{ dispari si ottiene: } h(n) = \frac{2\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)}$$

per un valore di  $n$  pari si ottiene:  $h(n) = \frac{(1 + \beta_2^2)}{2}$ .

I sistemi scalati di coordinate polari  $(r_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \theta_2)$ , centrati nell'apice della fessura, sono relazionati con la propagazione della cricca come segue:

$$r_j e^{i\theta_j} = x_1 + i\beta_j x_2 \quad (j=1,2) \quad (1.4.4)$$

dove  $i$  è un numero immaginario:  $i = \sqrt{-1}$ .

Per un valore di  $n = 1$  si ottengono le Eq.(1.4.1). I coefficienti  $K_{M1}(t)$   $M=I,II,III$  assumono, in ambito dinamico, lo stesso ruolo dei fattori di intensificazioni delle tensioni  $K_I, K_{II}, K_{III}$  definite in ambito statico. Si consideri il caso in cui il limite di  $C$  tende a zero; impiegando la regola di derivazione di De l'Hopital, si ottengono autofunzioni valide per una fessura in condizioni stazionarie; si deduce, quindi, che la velocità della fessura gioca un ruolo fondamentale nella dinamica della frattura. I campi di tensione e di spostamento per tutti i modi di frattura sono stati ottenuti da *Nishioka ed Atluri (1983a)*, mentre ulteriori studi sull'argomento sono stati sviluppati da *Rice (1968a)*, *Achenbach e Bazant (1974)*, *Freund (1980)* e *Burgers (1980)*.

## 1.5 Condizioni di non stazionarietà della propagazione dinamica della fessura

Considerando un moto della fessura fortemente non stazionario, l'accelerazione del crack  $\dot{C} \equiv \ddot{a}$  e le variazioni dei coefficienti  $K_{Mn}$  dei campi asintotici influenzano i campi in corrispondenza dell'apice della fessura. Nella dinamica della frattura la conoscenza del comportamento asintotico dei campi in corrispondenza della cricca nella propagazione in condizioni non stazionarie risulta di notevole importanza. Le espressioni asintotiche dei campi in corrispondenza della fessura per una propagazione dinamica in condizione di avanzamento non stazionario può essere riassunta mediante le seguenti formule:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{ij})_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} f_{ij}^{Mn} \left( \theta, K_{M(n-2)}, \dot{K}_{M(n-2)}, C, \dot{C}, \dots \right), & M=I,II,III \\
 (\mathbf{u}_i)_M &= \sum_{n=1}^{\infty} K_{Mn}(t) r^{\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{g}_i^{Mn} \left( \theta, K_{M(n-2)}, \dot{K}_{M(n-2)}, C, \dot{C}, \dots \right), & M=I,II,III
 \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Il carattere transitorio del modo I dei campi elastodinamici in prossimità della fessura durante la propagazione è stata recentemente studiata da *Freund(1990)*, *Rosakis (1992)* e da *Rosakis et al. (1991)*. Il modo misto transitorio dei campi vicino la fessura è stato invece studiato da *Deng (1993)*, *Nishioka e Kondo (1995a e 1996b)* i quali hanno ricavato l'espressione in forma chiusa per ogni componente di tensione e spostamento per i modi I, II, III. Per esigenze di brevità, viene proposta l'espressione della sola componente in direzione  $x_2$  in puro modo I:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\sigma_{22}}{\mu} \right)_I &= \frac{K_I(t) B_I(C)}{\mu \sqrt{2\pi}} \left\{ -(1+\beta_2^2) r_1^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \cos \frac{\theta_1}{2} + \frac{4\beta_1\beta_2}{1+\beta_2^2} r_2^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
 &\quad - 2(1+\beta_2^2) A_2^0(t) - 4\beta_2 B_2^0(t) \\
 &\quad + \left\{ D_I^1 \{ A_1^0(t) \} \left[ \frac{(1+\beta_1^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - (1-\beta_1^2)}{2(1-\beta_1^2)} \cos \frac{\theta_1}{2} - \frac{1+\beta_2^2}{8} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{\tilde{A}_1^0(t)}{2} \left[ \frac{(1-\beta_2^2)\beta_1^2}{1-\beta_1^2} \cos \frac{\theta_1}{2} + \left\{ \frac{3-5\beta_2^2}{8} - \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{1-\beta_1^2} \right\} \cos \frac{3\theta_1}{2} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1+\beta_2^2}{16} \cos \frac{7\theta_1}{2} \right] - \frac{15(1+\beta_2^2)}{4} A_3^0(t) \cos \frac{\theta_1}{2} \right\} r_1^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad - 2\beta_2 \left\{ \frac{1}{8} D_s^1 \{ B_1^0(t) \} \cos \frac{3\theta_1}{2} + \frac{1}{4} \tilde{B}_1^0(t) \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \cos \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{8} \cos \frac{7\theta_2}{2} \right) + \frac{15}{4} B_3^0(t) \cos \frac{\theta_2}{2} \right\} r_2^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \left\{ \frac{3-7\beta_1^2+3\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2}{3(1-\beta_1^2)} D_I^1 \{ A_2^0(t) \} + 6(1+\beta_2^2) A_4^0(t) \right\} r_1 \cos \theta_1 \\
 &\quad - \left\{ \frac{2}{3} \beta_2 \left[ D_s^1 \{ B_2^0(t) \} + 2\tilde{B}_2^0(t) \right] + 12\beta_2 B_4^0(t) \right\} r_2 \cos \theta_2
 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$



$$\begin{aligned}
 (u_2)_I = & \frac{K_I(t) B_I(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\beta_1 r_1^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{2\beta_1}{1+\beta_2^2} r_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} \sin \frac{\theta_2}{2} \right\} \\
 & - 2\beta_1^2 A_2^0(t) r_1 \sin \theta_1 - 2B_2^0(t) r_2 \sin \theta_2 \\
 & + \left\{ D_I^1 \{A_1^0(t)\} \left[ \frac{\beta_1}{4} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{\beta_1}{6} \sin \frac{3\theta_1}{2} \right] \right. \\
 & + \frac{\beta_1}{4} \tilde{A}_1^0(t) \left[ \frac{3}{2} \sin \frac{\theta_1}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_1}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_1}{2} \right] - \frac{5(\beta_1)}{2} A_3^0(t) \sin \frac{3\theta_1}{2} \left. \right\} r_1^{\frac{3}{2}} \\
 & + \left\{ D_s^1 \{B_1^0(t)\} \left[ \frac{1}{4} \sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{1}{6} \sin \frac{3\theta_2}{2} \right] - \frac{1}{4} \tilde{B}_1^0(t) \right. \\
 & \times \left[ \frac{1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\theta_2}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\theta_2}{2} \right] - \frac{5}{2} B_3^0(t) \sin \frac{3\theta_2}{2} \left. \right\} r_2^{\frac{3}{2}} \\
 & + \left\{ \frac{\beta_1}{6} D_I^1 \{A_2^0(t)\} \sin 2\theta_1 - 3\beta_1 A_4^0(t) \sin 2\theta_1 \right\} r_1^2 \\
 & - \left\{ \frac{1}{6} \left[ D_s^1 \{B_2^0(t)\} + 2\tilde{B}_2^0(t) \right] \sin 2\theta_1 + 3B_4^0(t) \sin 2\theta_2 \right\} r_2^2
 \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

dove  $A_n^0(t)$  e  $B_n^0(t)$  per  $(n = 0,1,2,3,4)$  sono i coefficienti delle espansioni asintotiche. Dalle condizioni al contorno sulle superfici libere del crack, si ricavano le relazioni tra i coefficienti  $A_n^0(t)$  e  $B_n^0(t)$  ed i coefficienti  $K_m$ . Per i primi tre termini ( $n = 0,1,2$ ) i coefficienti di ordine inferiore possono essere legati direttamente ai coefficienti  $K_m$  tramite le seguenti relazioni:

$$A_n^0(t) = \frac{2(n+1)}{n+2} \frac{B_I(C)}{\mu\sqrt{2\pi}} K_m(t) \tag{1.5.4}$$

$$B_n^0(t) = -\frac{2(n+1)}{n+2} \frac{h(n)B_I(C)}{\mu\sqrt{2\pi}\beta_2} K_m(t) \tag{1.5.5}$$

I coefficienti di ordine superiore ( $n = 3,4$ ) si ricavano imponendo il soddisfacimento delle condizioni di tensioni libere sulla faccia superiore e inferiore dell'apice della fessura. Per i termini con  $n = 3$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & 30\{2\beta_1 A_3^0(t) + (1 + \beta_2^2) B_3^0(t)\} \\
 & = -\{2\beta_1 D_l^1\{A_1^0(t)\} + (5 - 3\beta_2^2) D_s^1\{B_1^0(t)\}\} \\
 & - \frac{1}{4}\{22\beta_1 \tilde{A}_1^0(t) - 5(1 + \beta_2^2) \tilde{B}_1^0(t)\}
 \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Per il termine  $n = 4$  si ha:

$$\begin{aligned}
 & 18\{(1 + \beta_2^2) A_4^0(t) + 2\beta_2 B_4^0(t)\} \\
 & = -\left\{\frac{3 - 7\beta_1^2 + 3\beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}{1 - \beta_1^2} D_l^1\{A_2^0(t)\} + 2\beta_2 D_s^1\{B_2^0(t)\}\right\} - 4\beta_2 \tilde{B}_2^0(t)
 \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Gli altri coefficienti e operatori sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\tilde{A}_n^0(t) = \frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) B_l(C)}{\mu\sqrt{2\pi}\beta_1^4 C_d^4} K_m(t) \ddot{a} \tag{1.5.8}$$

$$\tilde{B}_n^0(t) = -\frac{3(n+1)}{n+2} \frac{C^2(t) h(n) B_l(C)}{\mu\sqrt{2\pi}\beta_2^5 C_s^4} K_m(t) \ddot{a} \tag{1.5.9}$$

e

$$D_l^1\{A_n^0(t)\} = -\frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{\frac{1}{2}}(t)}{\mu\sqrt{2\pi}\beta_1^2 C_d^2} \frac{d}{dt} \left\{ C^{\frac{1}{2}}(t) B_l(t) K_m(t) \right\} \tag{1.5.10}$$

$$D_s^1\{B_n^0(t)\} = \frac{6(n+1)}{n+2} \frac{C^{\frac{1}{2}}(t)}{\mu\sqrt{2\pi}\beta_2^2 C_s^2} \frac{d}{dt} \left\{ C^{\frac{1}{2}}(t) \frac{h(n) B_l(t)}{\beta_2} K_m(t) \right\} \tag{1.5.11}$$

In condizioni statiche stazionarie, i coefficienti la cui espressione contiene l'accelerazione dell'apice della fessura e le derivate rispetto al tempo sono nulli. Dunque, il campo asintotico

delle tensioni e degli spostamenti per una propagazione della fessura non uniforme può essere riassunto nella seguente tabella:

$$\sigma_{ij} | transiente = \underbrace{(\sigma_{ij})_{n=1} | stazionario}_{\text{(termini singolari)}} + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n=2} | stazionario}_{\text{(termini costanti)}} + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n \geq 3} | stazionario}_{\text{(termini di ordine superiore)}} + \underbrace{(\sigma_{ij})_{n \geq 3} | transiente}_{\text{(termini di ordine superiore)}}$$

ed

$$u_i | transiente = \underbrace{(u_i)_{n=0} | stazionario}_{\text{(termini moto rigido)}} + \underbrace{(u_i)_{n=1} | stazionario}_{\text{(termini singolari)}} + \underbrace{(u_i)_{n=2} | stazionario}_{\text{(termini spostamenti lineari)}} + \underbrace{(u_i)_{n \geq 3} | stazionario}_{\text{(termini di ordine superiore)}} + \underbrace{(u_i)_{n \geq 3} | transitorio}_{\text{(termini di ordine superiore)}}$$

Gli effetti transienti non appaiono nei termini singolari e costanti nel campo delle tensioni, ma compaiono invece nei termini con  $n \geq 3$ .

## 1.6 Metodi di modellazione computazionali

I principali metodi computazionali utilizzati per la simulazione della dinamica della frattura sono:

- 1) *metodo delle differenze finite (MDF);*
- 2) *metodo degli elementi finiti (FEM);*
- 3) *metodo degli elementi di contorno (BEM);*

Nei problemi relativi alla meccanica della frattura, quando intervengono quantità che dipendono dalla velocità, si lavora con quantità fisiche che presentano singolarità durante il moto. La presenza di tali quantità rappresenta la causa di errori più frequente nei metodi numerici, dunque, una criticità nello sviluppo di soluzioni accurate per l'avanzamento della cricca nell'ambito dei problemi di meccanica della frattura veloce. Il FEM, (Finite Element Method), in virtù della sua versatilità, è il metodo numerico di gran lunga più utilizzato. Per

simulare l'avanzamento della cricca con il FEM si possono considerare due diversi modelli computazionali: (i) il metodo dell'elemento stazionario; (ii) il metodo dell'elemento in movimento. Il primo (Ando *et al.*, 1975; Kobayashi *et al.*, 1976) nella modellazione FEM della propagazione dinamica della fessura, è stato applicato considerando dei salti discontinui. Si è proceduto con un cambiamento di posizione dell'apice della fessura da un nodo all'altro per intervalli di tempo prescritti. Per ottenere una soluzione accurata agli elementi finiti dei problemi di propagazione delle onde nel materiale si dovrebbe far riferimento ad incrementi di tempo molto piccoli; solitamente si utilizza l'intervallo di tempo richiesto dalle onde tensionali longitudinali nel passaggio da un nodo ad un altro considerando la distanza che separa i nodi più vicini del modello FEM. In generale, se la velocità di propagazione dell'apice della fessura è significativamente bassa, il medesimo apice durante l'incremento di tempo  $\Delta t$  assume una posizione qualunque tra due successivi punti nodali. Dunque, il suddetto incremento di lunghezza della fessura e il rilascio dei vincoli inducono oscillazioni ad alte frequenze nella soluzione agli elementi finiti. Per superare queste difficoltà è stata sviluppata la tecnica del rilascio nodale graduale. Nei modelli in **fig.1.2** sono mostrati i metodi atti ad evitare il brusco rilascio nodale: nella fessura vengono applicate delle forze diverse da zero (Keegstra *et al.*, 1978). L'avanzamento della cricca si verifica nel momento in cui le forze nodali ( $F_D$ ) raggiungono un valore critico corrispondente alla resistenza di propagazione dinamica ( $K_D$ ). Le forze applicate al nodo  $i$ ,  $(F_b)_i$  vengono gradualmente ridotte in accordo con lo spostamento di apertura del crack al nodo  $i$ ,  $(u_2)_i$ :

$$(F_b)_i = F_D \times \left\{ 1 - \frac{(u_2)_i}{(u_2)_C} \right\}, \quad i=1,2,3,\dots, \quad (1.6.1)$$

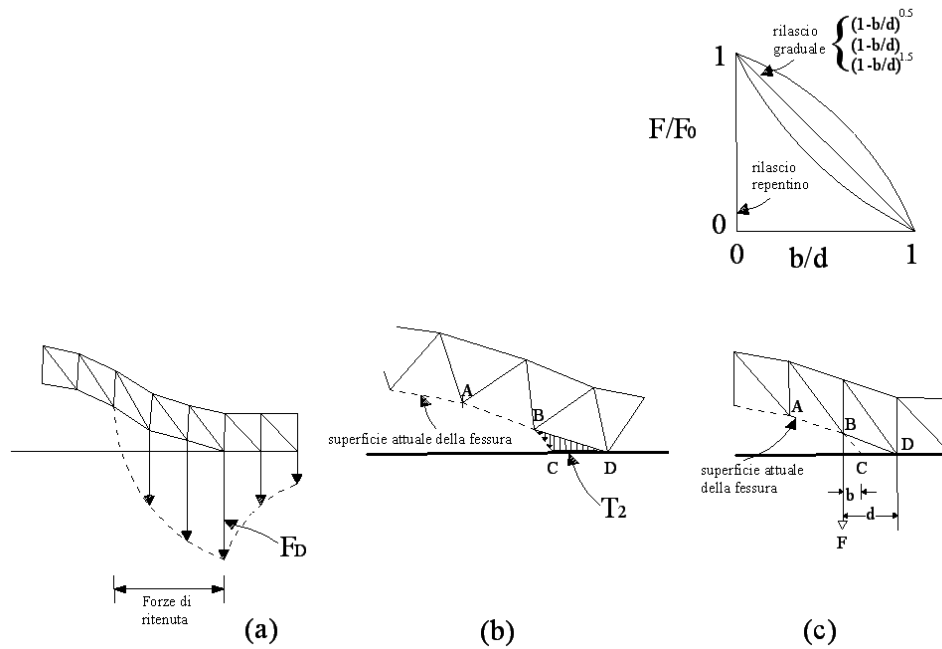


Figura 1.2 Metodologie di analisi dell'apice della fessura

dove  $(u_2)_C$  è lo spostamento di riferimento critico di apertura della fessura. L'energia di frattura è calcolata come il lavoro compiuto dalle forze per gli spostamenti di apertura della fessura. Un simile modello è stato proposto da *Valliappan and Multi (1986)*. Nel modello di **fig.1.2** (*Yagawa et al.,1977*), è mostrato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (*Washizu, 1982*), usato per imporre le condizioni al contorno sullo spostamento nella parte non fessurata "CD" della superficie dell'elemento della fessura. In tale modello si aggiunge un ulteriore termine all'equazione del principio dei lavori virtuali :

$$-\int_{CD} \delta(T_2 u_2) dS \tag{1.6.2}$$

dove  $T_2$  è il moltiplicatore di Lagrange, ottenuto imponendo che lo spostamento  $u_2$  su "CD" davanti all'apice della fessura nella configurazione attuale sia nullo in senso variazionale. In **fig.1.2** sono descritti altri meccanismi di rilascio graduale delle forze presenti in letteratura, con differenti velocità di rilascio delle forze nodali. Si supponga che l'attuale posizione della fessura sia nel punto C tra i nodi agli elementi finiti B e D, siano inoltre note rispettivamente le

lunghezze  $b$  e  $d$  dei segmenti  $(BC)$  e  $(BD)$ . Le forze  $F$  applicate al nodo  $B$  in corrispondenza dell'apice della lesione vengono gradualmente ridotte a zero nel momento in cui l'apice della fessura raggiunge il nodo  $D$ . Molti schemi di riduzione delle forze nodali sono riconducibili alla seguente equazione:

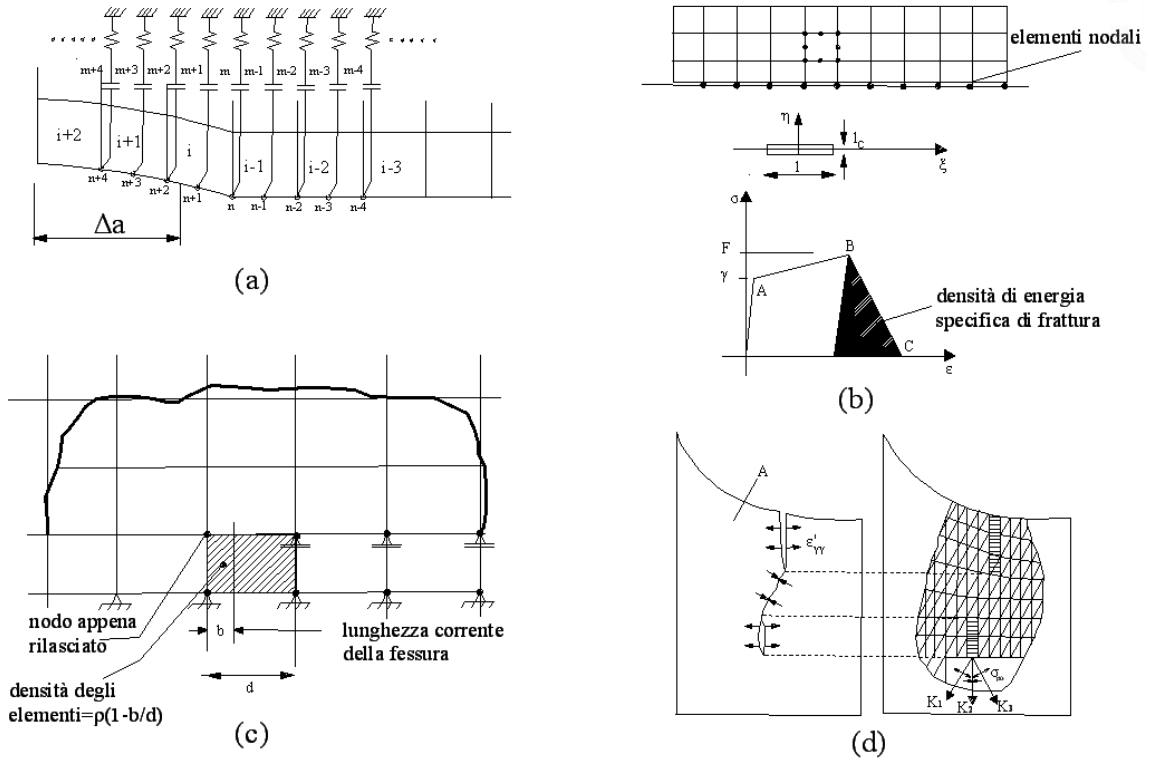
$$\frac{F}{F_0} = \left(1 - \frac{b}{d}\right)^\lambda \quad (1.6.3)$$

dove  $F_0$  è la forza di reazione originaria che si ottiene quando l'apice della fessura è nel nodo  $B$ . L'esponente  $\lambda$  rappresenta la velocità di rilascio delle forze nodali dietro la fessura. Il meccanismo di rilascio nodale non lineare con  $\lambda = 0.5$  (Malluck e King, 1978) si ottiene assumendo un fattore di intensificazione delle tensioni costante, mentre il meccanismo di rilascio nodale con  $\lambda = 1.5$  (Rydholm et al., 1978) deriva da una velocità costante di energia rilasciata nel tempo impiegato dalla fessura nel passaggio dal nodo  $B$  al nodo  $D$ . Quindi, il meccanismo di rilascio nodale lineare con un valore di  $\lambda$  unitario è basato sull'intuizione pura (Kobayashi et al., 1978). Con riferimento agli elementi isoparametrici ad otto nodi, il rilascio della fessura, nei nodi d'angolo e nei nodi collocati al centro dell'elemento, avviene in modo simultaneo (Mall and Luz, 1980). Dall'esperienza degli autori citati l'uso di una relazione lineare per gli elementi isoparametrici ad otto nodi dà luogo ad un risultato più accurato; al contrario l'uso di relazioni non lineari produce risultati con carattere oscillatorio durante la propagazione della fessura da  $B$  a  $D$ .

Al fine di prevenire oscillazioni spurie dovute ad un repentino rilascio delle forze nodali, sono stati sviluppati diversi tipi di elementi di collegamento: elementi nodali ed elementi fragili. Gli schemi illustrati relativi a tali elementi sono evidenziati in **Fig.1.3**. Le tecniche nodali possono essere classificate come segue:

- 1) *elementi nodali molla* (Hopp et al., 1987);
- 2) *elementi nodali strain-softening* (Ramakrishnan et al., 1986);
- 3) *elementi fragili con riduzione della densità di massa* (Kannan et al., 1993);

4) *Elementi fragili con riduzione del modulo elastico (Hsu and Zhai, 1984; Kostlev and Margolin, 1990);*



**Figura 1.3** Modellazione dell'intorno tramite elementi nodali e elementi fragili

Gli elementi sopra citati vengono utilizzati nel modellare la propagazione della fessura. Anche tali modelli sono basati sulla pura intuizione, e non soddisfano esattamente le condizioni al contorno nella vicinanza della fessura. Recentemente *Xu e Needleman (1994)* hanno sviluppato elementi di superficie coesivi, analoghi ai modelli citati. Per una modellazione accurata dei campi attorno all'apice della fessura vengono proposti i seguenti diversi tipi di procedure degli elementi mobili:

- 1) *la procedura di movimento della mesh globale;*
- 2) *la procedura di movimento della mesh locale;*

*Bazant et al. (1978) e Ostlund e Gudmondson (1987)*, hanno sviluppato un elemento finito non singolare relativo al movimento dell'intera mesh con la cricca. La procedura presentata due ovvie limitazioni:

1) è ristretta a corpi infiniti la cui superficie o l'interfaccia bi-materiale è parallela alla direzione di propagazione della fessura;

2) non può essere applicata a corpi di dimensioni finite nella direzione di propagazione della fessura.

Di contro a queste limitazioni, tale procedura può essere considerata come un semplice strumento atto allo studio del comportamento asintotico intorno all'apice della fessura in condizioni stazionarie, in particolare nel caso di un materiale non lineare. Usando questa procedura per elementi isoparametrici a quattro nodi, *Freund e Douglas (1982)*, hanno studiato la crescita dinamica in condizioni stazionarie di una fessura semi-infinita in un materiale elastoplastico. *Freund et al. (1986)* hanno studiato il comportamento nelle vicinanze dell'apice della fessura nei materiali viscoplastici. Nelle procedure di movimento della mesh locale un gruppo di elementi che circondano la fessura subisce degli spostamenti durante l'avanzamento della cricca nel tempo. Queste procedure possono essere pertanto classificate in due gruppi:

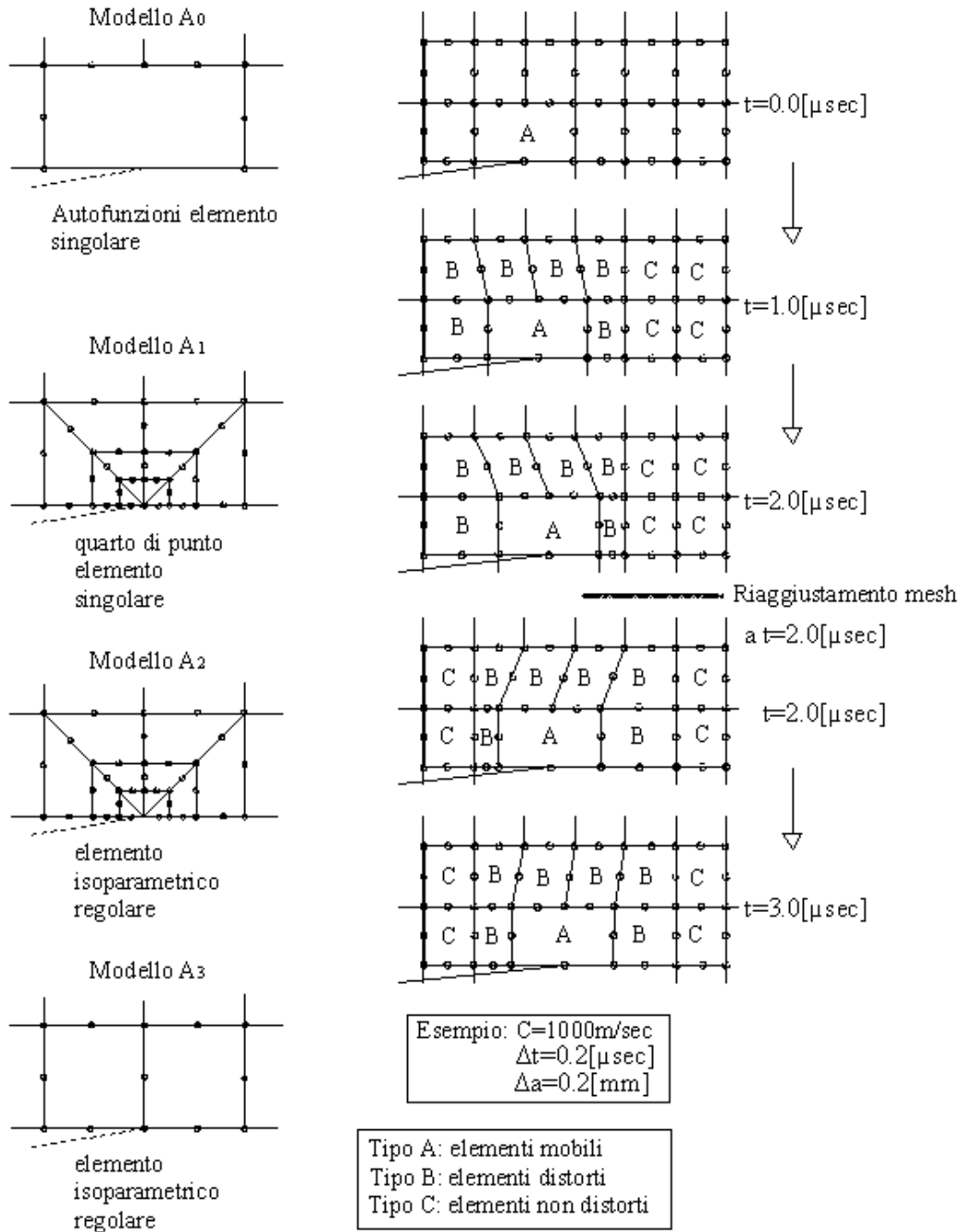
1) metodo degli elementi singolari mobili;

2) metodo degli elementi isoparametrici mobili;

Le singolarità dei campi attorno all'apice della fessura possono essere incorporate mediante l'uso di un campo di spostamenti asintotici, considerati come funzioni di spostamento negli elementi dell'apice della fessura. Diversi ricercatori (*Aberson et al., 1977; Aoki et al., 1978; Patterson e Oldale, 1979*) hanno affrontato la tematica degli elementi singolari per la propagazione della fessura. Tali elementi singolari mobili si muovono in un modello discontinuo nel rispetto della continuità nella propagazione della fessura. Alcune caratteristiche dettagliate della procedura degli elementi mobili discontinui sono state criticamente rielaborate da *Nishioka ed Atluri (1986) e Nishioka (1994)*. Nello sviluppo di un elemento speciale, al fine di assicurare la convergenza della soluzione, devono essere



soddisfatti alcuni semplici requisiti (Nishioka ed Atluri, 1986; Washizu, 1982). Nello specifico il campo di spostamenti dell'elemento dovrebbe:



**Figura 1.4** Differenti modellazioni dell'intorno dell'apice della fessura: elementi mobili (tipo A), elementi distorti (tipo B), elementi non distorti (tipo C)

- 1) includere tutti i possibili moti di corpo rigido;
- 2) essere capace di rappresentare un campo di deformazione (tensione) costante;
- 3) essere continuo nell'interfaccia degli elementi.

In aggiunta, per evitare modi cinematici nell'elemento speciale, (energia dei modi rigidi nulla), dovrebbero essere soddisfatti alcuni requisiti riguardo al numero di parametri delle funzioni base dell'elemento. A titolo di esempio si supponga che un elemento speciale abbia  $N$  parametri incogniti, cioè  $N$  autofunzioni che includono un appropriato moto di corpo rigido e  $M$  gradi di libertà svincolati. La disuguaglianza  $N \geq M$  deve essere necessariamente soddisfatta. Gli sviluppi in *Aberson et al. (1977)*, *Aoki et al. (1978)*, *Patterson e Oldale (1979)*, violano alcuni dei criteri citati. Durante l'analisi, nella procedura delle mesh mobili, (*Nishioka ed Atluri, 1980a*) la cricca rimane sempre al centro dell'elemento singolare. L'elemento regolare di tipo  $B$  (**fig. 1.4**) che circonda l'elemento singolare mobile risulta essere distorto. Per simulare un avanzamento consistente della fessura, la mesh intorno al percorso dell'elemento in movimento possiede un arrangiamento periodico. Un'importante caratteristica che distingue le diverse procedure di calcolo (moving mesh, tecnica di rilascio nodale graduale, e tecnica del nodo speciale) consiste nel fatto che la misura dell'incremento di crescita dell'avanzamento della fessura non è affetta dalla spaziatura fra i nodi ma può essere considerata piccola a piacere. Pertanto, le condizioni al contorno sugli spostamenti possono essere soddisfatte esattamente. Il fattore di intensificazione degli sforzi dinamico può essere calcolato direttamente per ogni istante temporale come coefficiente di una delle autofunzioni, per esempio  $\alpha_1$  per il caso di modo I. Usando il coefficiente determinato ad ogni istante di tempo si ottiene un risultato altamente accurato della distribuzione delle tensioni nell'elemento singolare mobile così come dimostrato da *Nishioka ed Atluri (1982)*. Con l'intento di semplificare il metodo dell'elemento singolare mobile, *Nishioka e Atluri (1984b)* hanno intrapreso degli studi volti ad indagare gli effetti di modelli alternativi della regione A (vedi **fig.1.4**) con elemento singolare "quarter point" (modello  $A_1$ ) o elemento isoparametrico regolare (non singolare) (modello  $A_2$ ). *Nishioka (1995)* ha dimostrato che l'uso combinato di elementi isoparametrici (modello  $A_2$ ) e dell'integrale J dinamico restituisce eccellenti

risultati. Contrariamente al modello  $A_2$ , il modello  $A_1$  (elemento singolare “quarter point”), fornisce dei risultati non accettabili per  $C = 0.6C_s$ . Il modello  $A_1$  può trovare applicazione solo per basse velocità di propagazione della fessura ( $C = 0 \sim 0.3C_s$ ). Nei modelli  $A_0 - A_2$  è richiesta un’elaborazione di dati complessa a causa dell’aggiornamento periodico della mesh; quando ciò non è possibile ci si può riferire all’elemento isoparametrico regolare  $A_3$ ; di contro, però, la procedura degli elementi mobili semplificata richiede un infittimento della mesh intorno alla regione dell’apice della fessura. Una versione della descrizione cinematica mista euleriana e lagrangiana per l’analisi della propagazione elastodinamica della fessura è stata sviluppata da *Koh e Haber (1986,1988)*. La **fig.1.4** mostra la mesh iniziale prima della propagazione dinamica della fessura. Una mesh di elementi isoparametrici triangolari lineari è stata usata per simulare la propagazione dinamica della fessura in una piastra quadrata. La mesh si aggiorna al propagarsi della fessura; i dati che caratterizzano la geometria sono: lunghezza di propagazione della fessura  $a - a_0$  con  $a = 0.5W$  e con  $W$  larghezza della piastra. Come mostrato in **fig.1.4** la mappatura euleriana è definita localmente da una mappatura isoparametrica e da coordinate nodali. Funzioni ausiliare di mappatura sono usate per tenere conto dei cambiamenti delle coordinate nodali durante il moto della fessura. Queste tecniche d’interpolazione non necessitano di continui movimenti della mesh, hanno solo bisogno di una operazione di remeshing globale se la topologia della mesh è alterata. Quando elementi singolari “quarter point” sono usati per modellare la regione dell’apice della fessura le singularità di ordine  $r^{-\frac{1}{2}}$  nel campo della velocità materiale sono automaticamente definite tramite il termine convettivo della derivata materiale rispetto al tempo relativo al campo degli spostamenti. Pertanto il termine convettivo produce uno smorzamento apparente non simmetrico della matrice e termini addizionali non simmetrici prodotti nella matrice di rigidità globale. E’ evidente come uno degli svantaggi deriva dal dovere risolvere un sistema di equazioni non lineari dove la matrice ha termini non simmetrici e tutti diversi da zero; il risultato è l’incremento del tempo computazionale richiesto per la risoluzione di tali equazioni. Lo stato dell’arte dei modelli computazionali per la soluzione dei problemi di propagazione dinamica della fessura include il metodo delle differenze finite (FDM) ed il metodo degli elementi di contorno (BEM). Uno dei tre maggiori metodi computazionali usati per modellare

la propagazione dinamica della fessura è il metodo delle differenze finite; esso risulta uno dei primi metodi utilizzati (*Kanninen, 1978*) specialmente per la sua semplicità e per la facilità con cui si modellano le superfici libere della cricca. Comunque le difficoltà di modellazione si incontrano quando si ha a che fare con geometrie complesse e per questa ragione sono stati sviluppati pochi lavori con questa metodologia. Il metodo degli elementi di contorno è il più recente dei tre metodi numerici; in generale il BEM nei problemi di elastodinamica può essere applicato mediante due approcci alternativi: il metodo diretto che utilizza quantità fisiche come il campo degli spostamenti e delle trazioni ed il metodo indiretto che impiega delle quantità artificiali come sorgenti o densità di sorgente. Inoltre, i problemi elastodinamici associati al problema BEM possono essere risolti in altri modi con formulazioni nel dominio del tempo o formulazioni nel dominio delle frequenze (o dominio di Laplace). Più applicazioni sul metodo degli elementi di contorno sono impiegate, per problemi inerenti la propagazione della fessura, sulla formulazione diretta nel dominio del tempo. Rispetto agli altri due metodi numerici il metodo BEM presenta una riduzione delle dimensioni del problema elastodinamico, di contro presenta anche i suoi svantaggi: la richiesta di integrazione nello spazio e nel tempo della soluzione fondamentale per ogni passo di tempo; la richiesta di un grande quantitativo di memoria per immagazzinare la matrice ad ogni passo di tempo; il coinvolgimento di matrici non simmetriche completamente piene per la soluzione del problema (BEM) delle equazioni non lineari.

## 1.7 Sommario

Le analisi numeriche, oggetto del lavoro di tesi, sono state sviluppate per la comprensione dei fenomeni d'interazione che governano i laminati compositi multistrato soggetti a carichi esterni in presenza di difetti interfacciali. In tale contesto, è stato elaborato un modello numerico agli elementi finiti utile all'identificazione dei parametri fondamentali che governano la risposta strutturale. Sono state effettuate analisi parametriche al fine di valutare l'influenza di una diversa descrizione dei carichi sui fattori di amplificazione dinamica delle principali variabili strutturali. L'analisi dei meccanismi di frattura sono stati sviluppati nell'ambito della Meccanica della Frattura, esprimendo le condizioni di avanzamento in funzione dell'energia di rilascio e delle corrispondenti componenti modali. Sono state applicate leggi di propagazione

in forma esplicita mediante le quali è stato possibile determinare la relazione di corrispondenza tra l'energia di rilascio e la velocità di avanzamento dell'apice della frattura. La valutazione del percorso di frattura è stata sviluppata mediante un modello generalizzato che accoppia concetti propri della Meccanica della Frattura e la metodologia delle mesh mobili, cioè la tecnica ALE - *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*, mediante la quale è possibile simulare le variazioni di geometria del laminato prodotte dall'avanzamento della lunghezza di fessura. Inoltre, per evitare che la mesh di calcolo subisca grandi distorsioni durante le analisi, con la possibilità di inficiare i risultati ottenuti, si è fatto uso di un algoritmo di *remeshing* in grado di aggiornare la griglia di discretizzazione ogni qualvolta la distorsione dell'elemento finito utilizzato superi una tolleranza imposta dall'utente nella fase di pre-processing. Le equazioni del problema sono state sviluppate per un modello 2D in stato piano di tensione e la soluzione è stata ottenuta risolvendo la formulazione variazionale del problema generale mediante una tecnica agli elementi finiti. Al fine di validare il modello proposto sono stati sviluppati confronti con dati sperimentali di laminati compositi soggetti a condizioni di carico da modo I, II e misto, dai quali è emerso un ottimo accordo tra i risultati. Infine è stato riscontrato come le strutture interessate dalla presenza di difetti interfacciali sono caratterizzate da una maggiore deformabilità e da fattori di amplificazione dinamica più elevati rispetto alle medesime strutture nella configurazione non danneggiata.

## **CAPITOLO 2**

### **Descrizione del moto con la tecnica ALE e fondamenti di meccanica della frattura**

#### **2.1 Introduzione alla tecnica ALE**

Le principali tecniche numeriche utilizzate per la soluzione di un generico problema di meccanica del continuo sono il metodo delle differenze finite, quello dei volumi finiti ed, infine, quello degli elementi finiti. Il metodo degli elementi finiti (FEM) è ampiamente utilizzato per i problemi di meccanica dei solidi, mentre le altre due tecniche risultano più idonee per i problemi di meccanica dei fluidi. In entrambi i casi la griglia di calcolo è fissa nello spazio ed il materiale si muove attraverso i punti della griglia. Nel metodo degli elementi finiti è possibile usare una descrizione euleriana, una lagrangiana oppure una descrizione ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). La descrizione ALE presenta il vantaggio di consentire il passaggio da una pura descrizione del moto euleriana ed una pura descrizione del moto lagrangiana. Tradizionalmente esistono due approcci per descrivere i continui: l'approccio lagrangiano e quello euleriano. L'approccio euleriano si basa sullo studio delle particelle materiali da una posizione fissa nello spazio; l'approccio lagrangiano è, invece, più flessibile poiché consente di seguire le particelle nel loro moto. Nell'approccio lagrangiano la mesh di calcolo è fissa; i punti materiali del corpo deformato ed i punti della griglia si muovono con la stessa velocità. In generale, nel caso di problemi che coinvolgono grandi deformazioni, ciò implica eccessive distorsioni della mesh che possono rendere singolare la matrice di rigidità con conseguente riduzione dell'accuratezza della soluzione. Un ulteriore svantaggio della formulazione lagrangiana consiste nella difficoltà di imporre le condizioni al contorno per un modello non materiale. Il rimedio alla distorsione della mesh nell'approccio lagrangiano è costituito da un re-meshing interattivo del dominio materiale, in particolare nel caso di grandi spostamenti; a tal proposito si osserva come sia auspicabile rendere la procedura automatica, ad esempio fissando un limite di distorsione della mesh. Nell'approccio euleriano la mesh di

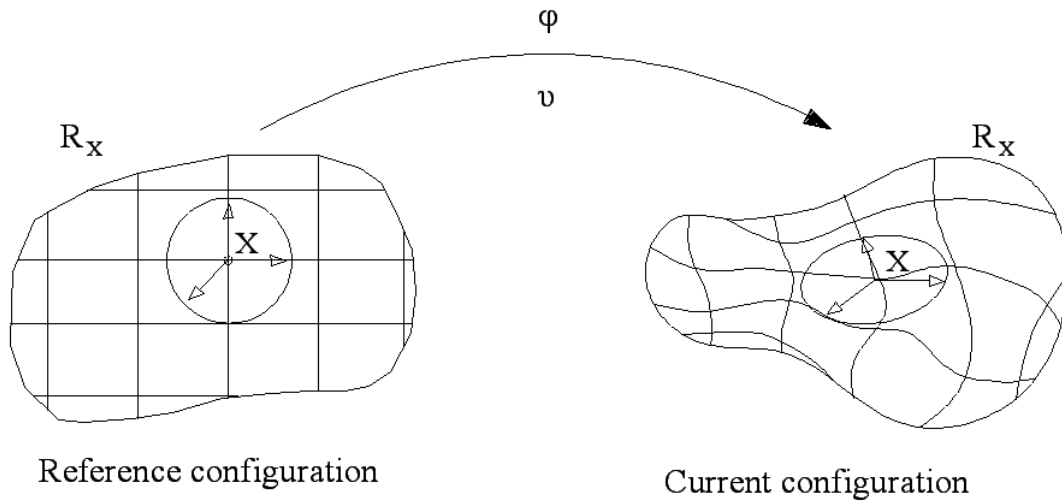
calcolo è fissa nello spazio, mentre il materiale si muove attraversandola. Quindi, nel caso in cui il materiale subisca degli spostamenti veloci è certamente più conveniente adottare tale approccio, che trova infatti impiego nello studio del moto dei fluidi sulle basi del metodo dei volumi finiti e del metodo delle differenze finite. La descrizione ALE nasce proprio per superare gli svantaggi degli approcci tradizionali, combinando gli aspetti positivi della descrizione lagrangiana e di quella euleriana. *Hughes (1981)* è stato il primo a proporre il metodo ALE nello studio della meccanica dei fluidi. Altri lavori in questa direzione sono stati proposti da *Belytschko (1978)*, *Liu (1981)*, *Liu Ma (1982)*, *Belytschko Liu (1985)*, *Liu et al. (1991)*, *Hu Liu (1993)* e *Braess et al. (2000)*. L'approccio tradizionale lagrangiano è stato largamente usato nei problemi che coinvolgono materiali con relazioni costitutive dipendenti dal percorso, in particolare nel caso dei solidi la cui non linearità dipende da grandi deformazioni o distorsioni. Per lo sviluppo della formulazione ALE sono stati adottati diversi approcci: *Liu et al. (1988)* hanno presentato una formulazione ALE per materiali che dipendono dal percorso mediante un'integrazione esplicita nel tempo; *Gadala et al. (1998)* hanno invece usato un metodo di integrazione implicito completamente accoppiato per problemi dinamici (propagazione della fessura, ecc.). Le differenze tra le formulazioni disponibili dipendono dalle assunzioni fatte per ricavare le equazioni ALE e dai dettagli di implementazione. Tali differenze influenzano le limitazioni e l'accuratezza della formulazione. La formulazione ALE è detta accoppiata perché la deformazione del materiale e gli effetti convettivi risultano accoppiati nelle equazioni in gioco. Per implementare le equazioni, sono usate due diverse tecniche basate rispettivamente su un approccio di passo frazionato ed un approccio di operatore divisore. Diverse analisi ALE sono basate sulla strategia del passo frazionato secondo cui la deformazione del materiale e gli effetti convettivi sono trattati separatamente. Così ogni passo temporale può essere diviso in due passi: un passo regolare lagrangiano ed uno regolare euleriano. Nel passo lagrangiano, la griglia si muove con il materiale, la soluzione è mappata tramite una griglia referenziale e le tensioni sono aggiornate considerando gli effetti convettivi. Il tempo viene lasciato avanzare solo durante il passo lagrangiano, e dunque non esiste alcun tempo associato al passo euleriano; questo perché non è necessario effettuare un passo euleriano per ogni passo temporale. Un approccio ALE alternativo, noto come "completamente accoppiato" o "approccio non divisibile" si basa

su equazioni di governo implementate e risolte contemporaneamente. A tal fine occorre un algoritmo che consenta la simultaneità degli effetti convettivi e della deformazione del materiale. Il principale vantaggio dell'operatore divisorio nell'approccio completamente accoppiato è la facilità di implementazione delle equazioni ALE nel codice lagrangiano; inoltre, poiché il passo lagrangiano è costante, è sufficiente aggiungere semplicemente l'algoritmo del passo euleriano. Comunque, da un punto di vista teorico, l'approccio completamente accoppiato permette l'effettiva descrizione cinematica del moto, impiegando infatti uno schema più rigoroso nel considerare ad ogni singolo passo l'equilibrio nella configurazione mobile referenziale. Ne consegue che la soluzione con l'operatore divisore è certamente meno accurata della soluzione ricavata dall'approccio completamente accoppiato.

## 2.2 Descrizione del moto

La descrizione del moto ALE è dunque una generalizzazione delle descrizioni lagrangiana ed euleriana. Per una maggiore chiarezza, nel seguito verranno richiamate le descrizioni classiche del moto. Nella meccanica dei continui i domini utilizzati sono fondamentalmente di due tipi: il dominio materiale  $R_X \subset R^{n_{sd}}$ , con  $n_{sd}$  dimensioni spaziali, composto da particelle materiali  $\underline{X}$ , ed il dominio spaziale  $R_x$ , costituito da punti spaziali  $x$ . Secondo l'approccio lagrangiano si seguono le particelle materiali del continuo durante il loro moto. A tal fine, si introduce, come suggerito dalla **fig. 2.1**, una griglia di calcolo che segue il continuo nel suo moto; i nodi della griglia suddetta sono collegati al medesimo punto materiale. La coordinata materiale  $\underline{X}$  consente l'individuazione della configurazione di riferimento  $R_X$ . Il movimento dei punti materiali si riferisce alla coordinata materiale  $\underline{X}$  nello spazio  $x$ .





**Figura 2.1** Rappresentazione della configurazione referenziale ed attuale

Esso è definito dalla funzione  $\varphi$ :

$$\varphi: R_x \times [t_0, t_{final}] \longrightarrow R_x \times [t_0, t_{final}] \quad (2.2.1)$$

$$(\underline{X}, t) \rightarrow \varphi(\underline{X}, t) = (\underline{x}, t)$$

Le precedenti relazioni consentono la definizione della legge del moto:

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (2.2.2)$$

L'espressione indicata mostra in modo esplicito la natura particolare di  $\varphi$ : le coordinate spaziali  $x$  dipendono sia dalle particelle materiali  $\underline{X}$  sia dal tempo  $t$  che è invariante rispetto ai domini spaziale e referenziale. In ogni istante  $t$  di tempo fissato, la mappatura  $\varphi$  individua una configurazione nel dominio spaziale. Nella definizione del gradiente di  $\varphi$ , si utilizza una rappresentazione in forma matriciale del tipo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (X, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} & \underline{\nu} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

con  $\underline{0}^T$  vettore riga nullo. La velocità materiale  $\underline{v}$  è definita come segue:

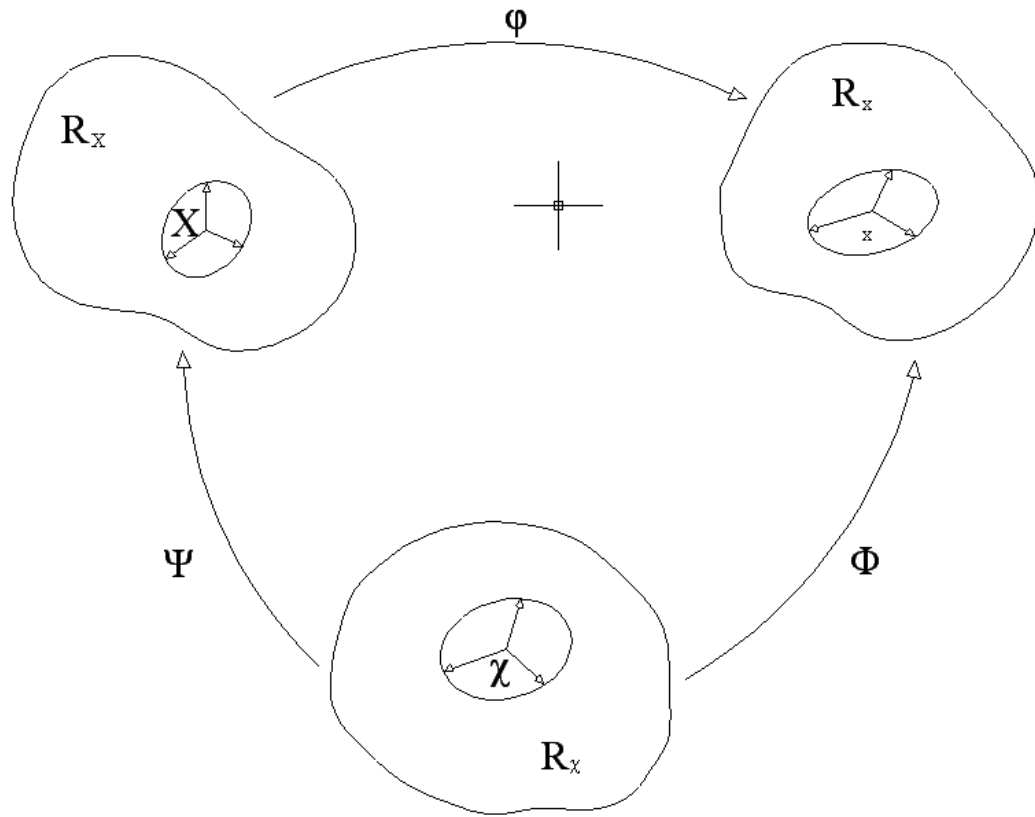
$$\underline{v}(X, t) = \left. \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right|_x \quad (2.2.4)$$

Il simbolo  $\left|_x$  puntualizza la necessità di mantenere le coordinate materiali  $\underline{X}$  fisse. La funzione di mappaggio  $\varphi$  verifica la seguente relazione:

$$\det \left( \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \right) > 0 \quad (2.2.5)$$

(il determinante della derivata parziale delle  $\underline{x}$  rispetto alle  $\underline{X}$  è positivo per ogni cambiamento di orientazione degli assi di riferimento) in ogni punto  $\underline{X}$  e per ogni  $t > t_0$ . La precedente relazione consente il tracciamento della storia del moto dalla trasformazione inversa  $(\underline{X}, t) = \varphi^{-1}(\underline{x}, t)$  al fine di identificare in ogni istante la posizione iniziale della particella. Fin quando, durante il moto, i punti materiali coincidono con i punti della griglia non si verificano effetti convettivi nel calcolo lagrangiano, pertanto la derivata materiale si riduce ad una semplice derivata rispetto al tempo. Poiché ciascun elemento finito della mesh lagrangiana contiene le stesse particelle materiali si ha un notevole vantaggio dal punto di vista computazionale, in particolare nei problemi in cui il comportamento del materiale dipende dalla sua storia di carico. Tuttavia quando gli spostamenti coinvolti sono grandi, la formulazione del problema lagrangiano perde di accuratezza perché le distorsioni della mesh diventano elevate. Le difficoltà dovute ad una descrizione lagrangiana del moto possono essere superate proprio introducendo la descrizione euleriana dello stesso. L'idea base della formulazione euleriana, molto popolare nella meccanica dei fluidi, consiste nell'esaminare, all'evolversi del tempo, le quantità fisiche associate con le particelle di fluido che passano attraverso una fissata regione dello spazio. In una descrizione euleriana del moto la maglia agli elementi finiti è fissa ed il continuo si muove e si deforma rispetto alla griglia computazionale. Le equazioni di conservazione sono formulate in termini di coordinate spaziali  $\underline{x}$  e del tempo

$t$ . Ne consegue che la descrizione euleriana del moto coinvolge solo variabili e funzioni che hanno un significato istantaneo in una fissata regione dello spazio. La velocità materiale  $\underline{v}$  in un dato nodo della mesh corrisponde alla velocità del punto materiale coincidente al tempo  $t$  con il nodo considerato. La velocità  $\underline{v}$  fa riferimento alla maglia degli elementi fissi della mesh, senza alcun riferimento alla configurazione iniziale del continuo e alla coordinate materiali  $\underline{X} : \underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ . La deformazione euleriana dissocia i nodi della mesh dalle particelle materiali; ne consegue la comparsa di effetti convettivi a causa del moto relativo che si verifica tra la configurazione materiale deformata e la griglia computazionale. L'algoritmo euleriano presenta delle difficoltà numeriche dovute alla non simmetria dell'operatore convettivo; di contro permette una facile trattazione del moto dei corpi, anche con riferimento alle grandi deformazioni. I richiami relativi alle due formulazioni classiche di descrizione del moto lagrangiano ed euleriano hanno permesso l'individuazione delle caratteristiche positive e negative nella descrizione del moto di un materiale. Si può pensare ad esempio ad una descrizione generalizzata che combini i migliori aspetti delle due formulazioni: essa prende il nome di descrizione ALE (Arbitrary-Lagrangian-Eulerian). La tecnica ALE è stata proposta in passato con i metodi delle differenze finite e del volume finito. Degli studi relativi a questo campo sono stati affrontati da *Noh(1964)*, *Frank Lazarus(1964)*, *Trulio(1966)*, e *Hirt et al.(1974)*; l'ultimo contributo è stato ristampato nel 1997. Il metodo è stato adottato, nel contesto degli elementi finiti, in recenti lavori eseguiti da *Donea et al.(1977)*, *Belytschko et al.(1978)*, *Belytschko Kennedy(1978)*, e *Hughes et al.(1981)*. Nella descrizione del moto ALE la configurazione materiale  $R_x$  e la configurazione spaziale  $R_x$  non vengono considerate come riferimento. Ne consegue la necessità di un terzo dominio per la descrizione del moto ALE. Nella configurazione referenziale  $R_x$  sono introdotte le coordinate referenziali  $\chi$  per identificare i punti della griglia. Il dominio referenziale  $R_x$  è mappato in un dominio materiale ed in uno spaziale chiamati rispettivamente  $\psi$  e  $\phi$ . Le particelle del moto  $\varphi$  possono essere espresse come:  $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$ . Le tre funzioni di mappatura  $\Psi, \Phi$  e  $\varphi$ , come si evince dalla **fig.2.2**, non sono indipendenti.



**Figura 2.2** Mappatura delle tre configurazioni: materiale, referenziale, spaziale

I punti della griglia nel dominio spaziale sono individuati dalle seguenti relazioni:

$$\Phi: R_\chi \times [t_0, t_{final} [ \rightarrow R_x \times [t_0, t_{final} [ \quad (2.2.6)$$

$$(\chi, t) \mapsto \Phi(\chi, t) = (x, t)$$

il gradiente è dato dalla seguente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\chi, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \chi} & \hat{v} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

Dove con  $\hat{v}$  si è indicato la velocità della mesh definita come segue:

$$\hat{v}(\underline{\chi}, t) = \left. \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}} \quad (2.2.8)$$

La velocità della mesh e la velocità materiale sono state definite rispettivamente derivando rispetto al tempo le equazioni del moto della mesh e le equazioni del moto materiale. La funzione  $\Psi$ , viene rappresentata direttamente con la sua inversa:

$$\Psi^{-1} : R_X \times [t_0, t_{final}] \rightarrow R_{\underline{\chi}} \times [t_0, t_{final}] \quad (2.2.9)$$

$$(\underline{X}, t) \mapsto \Psi^{-1}(\underline{X}, t) = (\underline{\chi}, t)$$

Il gradiente è fornito dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial (\underline{X}, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{X}} & \underline{w} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.10)$$

Dove la velocità  $\underline{w}$  può essere rappresentata come:

$$\underline{w} = \left. \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t} \right|_{\underline{\chi}} \quad (2.2.11)$$

La stessa può essere interpretata come la velocità delle particelle nel dominio referenziale, essa misura la variazione nel tempo delle coordinate referenziali  $\underline{\chi}$  tenendo le particelle materiali  $\underline{X}$  fisse. Le relazioni tra le velocità definite  $\underline{v}, \hat{v}, \underline{w}$  possono essere ottenute per differenziazione di  $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (\underline{X}, t)}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial (\underline{\chi}, t)}(\Psi^{-1}(\underline{X}, t)) \quad \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial (\underline{X}, t)}(\underline{X}, t)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial(\underline{\chi}, t)}(\underline{\chi}, t) \quad \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial(\underline{X}, t)}(\underline{X}, t) \quad (2.2.12)$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} & \underline{v} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} & \hat{\underline{v}} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{X}} & \underline{w} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

$$\underline{v} = \hat{\underline{v}} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} \cdot \underline{w} \quad (2.2.14)$$

La precedente equazione può essere riscritta come:

$$\underline{c} := \underline{v} - \hat{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} \cdot \underline{w} \quad (2.2.15)$$

La velocità convettiva  $\underline{c}$ , rappresenta la velocità relativa tra i punti materiali e i punti della mesh con riferimento ad un osservatore presente nel dominio spaziale  $R_x$ . La velocità  $\underline{w}$  si riferisce invece ad un osservatore presente nel dominio referenziale  $R_\chi$ . Le  $\underline{v}$  e le  $\hat{\underline{v}}$  individuano variazioni di coordinate  $\underline{x}$ . Infatti l'Eq.(2.2.15) implica l'eguaglianza  $\underline{c} = \underline{w}$  se e solo se  $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\chi}} = \mathbf{I}$  dove  $\mathbf{I}$  è il tensore identità: quando ciò si verifica il moto della mesh risulta

puramente traslazionale senza rotazioni o deformazioni di ogni tipo. A seguito degli studi sui fondamentali della ALE, si è osservato come entrambe le descrizioni, lagrangiana ed euleriana, possano essere ottenute come casi particolari. Se si considera, a titolo di esempio  $\psi \equiv I$  l'Eq.(2.2.3) si riduce  $\underline{X} \equiv \underline{\chi}$  e come risultato si ottiene la descrizione del moto lagrangiano: le velocità del materiale e della mesh coincidono e la velocità convettiva  $\underline{c}$  è nulla; ne consegue l'assenza di termini convettivi nelle leggi di conservazione. Se si considera,

invece,  $\Phi \equiv I$  l'Eq.(2.2.10) si riduce a  $\underline{x} \equiv \underline{\chi}$ , dunque la descrizione del moto è euleriana, la velocità della mesh nulla e la velocità convettiva  $\underline{c}$  coincide con la velocità materiale  $\underline{v}$ . Per esprimere le leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e di energia nel contesto ALE è necessaria una relazione tra la derivata materiale e la derivata referenziale rispetto al tempo. Per relazionare le derivate rispetto al tempo nelle configurazioni spaziali, materiali e referenziali devono invece essere definite le quantità fisiche scalari  $f(\underline{x}, t)$ ,  $f^*(\underline{\chi}, t)$ ,  $f^{**}(X, t)$  descritte rispettivamente nel dominio spaziale, referenziale e materiale. Il simbolo star è impiegato per sottolineare la differenza tra le forme funzionali. La funzione  $\varphi$  durante il moto della particelle è una mappatura; le quantità fisiche della descrizione spaziale  $f(\underline{x}, t)$  e quella materiale  $f^{**}(X, t)$  sono relazionate dalla seguente:

$$f^{**}(X, t) = f(\varphi(X, t), t) \text{ o } f^{**} = f \circ \varphi \quad (2.2.16)$$

Dove il gradiente può essere definito dall' espressione:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial (X, t)}(X, t) = \frac{\partial f}{\partial (\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) \text{ o } \frac{\partial \varphi}{\partial (X, t)} \partial (X, t) \quad (2.2.17)$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{**}}{\partial X} & \frac{\partial f^{**}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial X} & \underline{v} \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{**}}{\partial X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{x}}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

Di seguito viene evidenziato il secondo termine della precedente relazione:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \cdot \tilde{v} \quad (2.2.20)$$

Quest'ultima relazione la derivata materiale e spaziale rispetto al tempo. Omettendo le stellette si ottiene una più semplice notazione:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \tilde{v} \quad (2.2.21)$$

La precedente relazione individua la variazione delle quantità fisiche per una data particella  $X$  come la variazione locale con l'aggiunta di un termine convettivo che tiene conto del moto relativo tra il sistema materiale e quello spaziale. Per questioni di semplicità le derivate materiali e spaziali sono indicate rispettivamente con le notazioni:

$$\frac{d \cdot}{dt} := \frac{\partial \cdot}{\partial t} \Big|_X \quad (2.2.22)$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} := \frac{\partial \cdot}{\partial t} \Big|_x \quad (2.2.23)$$

La derivata spaziale è relazionata alla derivata materiale mediante la derivata referenziale rispetto al tempo. La funzione di mappaggio  $\psi$  tra il sistema materiale ed il sistema referenziale consente la descrizione di una quantità fisica tra i due sistemi:

$$f^{**} = f^* \circ \Psi^{-1} \quad (2.2.24)$$

Il gradiente è dato dalla seguente relazione:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial (X,t)}(X,t) = \frac{\partial f^*}{\partial (\chi,t)}(\chi,t) \circ \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial (X,t)} \partial (X,t) \quad (2.2.25)$$



In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{**}}{\partial X} & \frac{\partial f^{**}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^*}{\partial \chi} & \frac{\partial f^*}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial X} & w \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.26)$$

moltiplicando si ottiene:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \frac{\partial f^*}{\partial \chi} \cdot w \quad (2.2.27)$$

Per la risoluzione della precedente equazione che relaziona la derivata materiale rispetto al tempo e la derivata referenziale, è richiesta la valutazione del gradiente della funzione  $f^*$  nella descrizione referenziale. Nell'ambito della meccanica computazionale, tuttavia, risulta più agevole lavorare in termini di descrizione spaziale o materiale del moto. Riferendosi alla definizione di  $w$ , l'Eq.(2.2.27) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \frac{\partial f^*}{\partial x} \cdot c \quad (2.2.28)$$

La relazione fondamentale della ALE tra derivata materiale rispetto al tempo, derivata referenziale e gradiente spaziale può esprimersi come:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_X = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot c = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + \nabla f \cdot c \quad (2.2.29)$$

L'equazione mostra come la derivata rispetto al tempo di una quantità fisica  $f$  per una data particella  $X$  è pari alla sua derivata materiale (o derivata locale) con l'aggiunta di un termine convettivo che tiene conto della velocità relativa dei due sistemi materiale e referenziale.

L'accelerazione della mesh gioca un ruolo importante nella formulazione ALE: al fine di ricavare l'accelerazione, è necessario conoscere l'accelerazione materiale e la derivata materiale della velocità  $v$ . Con riferimento rispettivamente alla configurazione lagrangiana, euleriana e ALE, si ottiene:

$$a = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x \quad (2.2.30)$$

$$a = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.31)$$

$$a = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z + c \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.32)$$

Si nota che l'espressione dell'accelerazione risulta essere una particolarizzazione dell'Eq. (2.2.29) se si considera la velocità materiale  $v$  come quantità fisica; il primo termine a sinistra rappresenta l'accelerazione locale, il secondo termine a sinistra rappresenta invece l'accelerazione convettiva.

### 2.3 Procedure di aggiornamento della mesh

I moderni codici informatici ALE si basano sia sul metodo dei volumi finiti, che sulla discretizzazione degli elementi finiti spaziali; il primo metodo trova certamente un più ampio impiego nella meccanica dei fluidi, mentre il secondo è generalmente preferito nella meccanica dei solidi e delle strutture. La formulazione della tecnica ALE richiede la procedura di aggiornamento della mesh: ai nodi della mesh vengono assegnati la velocità o lo spostamento per ogni stazione (intervallo di tempo-passo di carico) del calcolo. La strategia di aggiornamento della mesh, può essere scelta dall'utente. L'algoritmo di remeshing, solitamente eseguito automaticamente dal programma, influenza il successo della tecnica ALE. Le strategie di aggiornamento della mesh sono fondamentalmente due: la

regolarizzazione della mesh e la tecnica di adattamento della mesh. L'obiettivo della regolarizzazione della mesh è di natura geometrica: durante l'intero calcolo, la mesh è mantenuta regolare in modo da evitare eccessive distorsioni che potrebbero causare un ingarbugliamento con conseguenti errori. Questa tecnica richiede uno specifico aggiornamento delle coordinate nodali per ogni stazione di calcolo; ciò è possibile attraverso il passo di spostamento, oppure mediante la corrente velocità della mesh  $\hat{v}$ . Se è preferibile prescrivere il moto relativo tra la mesh e le particelle materiali, si può specificare la velocità referenziale  $w$ . Solitamente nei problemi riguardanti i fluidi, viene interpolata la velocità della mesh, al contrario nei problemi di meccanica dei solidi vengono interpolati gli spostamenti della mesh. Il metodo di regolarizzazione della mesh è classificato in base alle condizioni al contorno durante il moto, queste possono essere prescritte o incognite. La conoscenza preventiva del moto delle superfici del materiale consente l'individuazione del moto della mesh; nello specifico è possibile determinare la velocità della mesh nel dominio attraverso una semplice interpolazione. In corrispondenza del contorno, si fa dunque riferimento ad una descrizione lagrangiana, la mesh del moto coincide con il moto prescritto sul contorno mentre lontano dal moto del contorno ci si riferisce ad una formulazione euleriana (velocità della mesh fissa  $\hat{v}=0$ ). Una zona di transizione è definita tra le due formulazioni impiegate nel modello. I problemi di interazione tra i corpi rigidi ed i fluidi viscosi studiati da *Liu e Huerta (1988a)* ricadono in questa categoria. In modo simile, nei problemi di propagazione della fessura discussi da *Koh e Haber(1986)* e *Koh et al.(1988)*, il percorso della cricca è determinato preventivamente per mezzo della procedura di aggiornamento della mesh. Altri esempi simili si trovano nei lavori da *Liu et al.(1986)*, *Huetting et al.(1990)*, *Van Haaren et al.(2000)*, *Rodriguez-ferran et al.(2002)* e molti altri. Nella generazione delle mesh, il rezoning dei nodi consiste nel risolvere una equazione di Laplace o Poisson per ogni componente di posizione e velocità nodale; ne consegue che su una regione logicamente regolare la mesh individua linee di uguale potenziale. Questo metodo, proposto originariamente da *Winslow (1963)*, è chiamato "generazione ellittica della mesh". Esso presenta un importante inconveniente: in un dominio non convesso, i nodi potrebbero ricadere al di fuori dello stesso. Le tecniche idonee a ridurre tali insidie aumentano i costi computazionali poiché richiedono l'inserimento nella formulazione di termini particolari per

ogni geometria. Si trovano esempi relativi a questo tipo di algoritmo nei lavori di *Benson (1989,1992,1992b)*, *Liu et al. (1988;1991)*, *Ghosh Kikuchi(1991)*, *Chenot Bellet(1995)*, *Lohner Yang (1996)*. Un ulteriore algoritmo (in particolare nelle zone di confine del contorno con larga curvatura) è stato proposto da *Giuliani (1982)* sulla base di semplici considerazioni geometriche: la minimizzazione delle distorsioni negli elementi della mesh. I principali vantaggi dei metodi di regolarizzazione della mesh consistono nella semplicità e nella applicabilità (elementi triangolari e quadrilateri in 2D, tetraedali, esaedrali prismi e elementi piramidali 3D). Nel momento in cui la descrizione ALE viene usata come tecnica adattativa, ci si propone di ottimizzare la mesh per raggiungere un buon grado di accuratezza, il tutto se possibile a bassi costi computazionali. Spostando i nodi verso zone con alti gradienti, aumenta la finezza della mesh; così accade anche nei problemi di grandi deformazioni in cui le zone di localizzazione coinvolgono materiali caratterizzati da leggi softening. L'algoritmo ALE include un indicatore dell'errore; dunque la mesh viene modificata in modo da ottenere una uguale distribuzione dell'errore su tutto il dominio computazionale. L'indicatore di remeshing, a tal proposito, può essere considerato come una funzione media del salto di una certa variabile di stato. Un'uguale distribuzione può essere ottenuta utilizzando equazioni differenziali ellittiche o paraboliche. Accoppiando la tecnica ALE con le procedure tradizionali di affinamento della mesh (tecnica h-adaptivity) si aggiunge selettivamente un nuovo grado di libertà, dunque aumenta l'accuratezza.

## 2.4 Schemi di moto della mesh

L'approccio ALE, rispetto alla formulazione agli elementi finiti classica, prevede l'introduzione di nuove incognite, dovute alle condizioni al contorno in alcuni punti della mesh, nelle equazioni di equilibrio finali. Nell'uso della formulazione lagrangiana per grandi deformazioni e problemi di movimento del contorno, il problema di distorsione ed ingarbugliamento della mesh diventa notevolmente evidente. I metodi automatici sviluppati, attinenti alla riorganizzazione della mesh, non risultano ancora efficienti per rimediare alla distorsione dovuta in generale a grandi deformazioni e problemi di superfici libere. Dunque, i metodi di formulazione euleriana, normalmente utilizzati per la risoluzione dei problemi di distorsione della mesh, risultano più adatti nei casi di moto stazionario. Nella formulazione

ALE il sistema referenziale non è fisso nello spazio, né attaccato al corpo; dunque la mesh agli elementi finiti può muoversi arbitrariamente in modo relativo al corpo materiale. Tali caratteristiche forniscono il potenziale per una manipolazione efficiente della distorsione della mesh come contatto nelle condizioni al contorno. In generale, la matrice di rigidità della ALE risulta essere rettangolare poiché presenta due incognite per ogni grado di libertà: la velocità materiale (o lo spostamento) e la velocità della mesh (o lo spostamento). Per ottenere la soluzione in un sistema di equazioni nella ALE, si può specificare la velocità della mesh preventivamente alla risoluzione delle equazioni di equilibrio; ciò non è possibile nel caso in cui il contorno subisce movimenti liberi e dunque la mesh del moto adottata è funzione del tempo. In alternativa si potrebbero settare delle equazioni di vincolo supplementari, le relazioni tra lo spostamento materiale (o velocità) e gli spostamenti della mesh (o velocità). Si presenta però, in questo caso, lo svantaggio di aumentare il numero delle incognite incrementando i tempi di calcolo in modo significativo. In caso di condizioni al contorno libere, quest'ultimo metodo diventa di facile applicazione se il contorno del moto può essere specificato in funzione del tempo, anche se, di contro, lo stesso metodo risulta essere molto restrittivo e non può essere adottato in molte applicazioni pratiche. Altre tecniche utilizzano l'interpolazione algebrica che pur essendo di facile applicazione, introduce errori di adattamento alla curva nella descrizione delle regioni quando il contorno non è descritto esattamente da un polinomio dello stesso ordine delle funzioni di interpolazione. L'algoritmo del moto della mesh è un aspetto critico della ALE, esso influenza l'efficienza computazionale in modo significativo. *Schreurs* ha introdotto una tecnica di descrizione del moto della mesh che richiede la simultanea soluzione di un set di equazioni. Generalmente la mesh creata dalla soluzione di equazioni differenziali sarà di alta qualità, ma di contro si presentano diversi svantaggi: il tempo di soluzione, i costi computazionali per risolvere il set di equazioni e l'errore introdotto nel processo.

## 2.5 Tecniche di regolarizzazione della mesh

La tecnica di regolarizzazione della mesh è normalmente utilizzata al fine di definire alcune equazioni differenziali parziali nelle equazioni di governo per gli spostamenti della mesh o per la velocità della mesh. La scelta delle equazioni differenziali si esplica essenziale nel processo

di soluzione; infatti la scelta delle PDE è basata anche sulla fisica del problema da risolvere; nel caso dei fluidi, ad esempio, sono usate le equazioni di Laplace. Infatti, le equazioni di governo per la velocità dei fluidi viscosi, sono un caso particolare delle equazioni generali di *Navier-Stokes*. La forma differenziale di una quantità scalare  $g$  è data dalla seguente relazione:

$$\nabla^2 g = g_{,ii} = 0 \quad (2.5.1)$$

Considerando un vettore  $\underline{g}$ , l'equazione potrebbe essere scritta come:

$$\nabla^2 \underline{g} = g_{i,jj} = 0 \quad (2.5.2)$$

L'Eq.(2.5.2) può essere usata in due contesti differenti per la schematizzazione il moto della mesh: Metodo di regolarizzazione di Laplace e Metodo di regolarizzazione di Winslow.

### 2.5.1 Metodo di regolarizzazione di Laplace

Il termine  $\underline{g}$  dell'Eq.(2.5.2) è assunto essere  $\underline{v}^g$  (vettore velocità della griglia della mesh). Si assuma che:  $(u^g, v^g)$  siano le componenti della velocità della mesh,  $(X, Y)$  le coordinate referenziali e  $(x, y)$  le coordinate spaziali; la velocità della mesh deve soddisfare le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial^2 \underline{u}^g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{u}^g}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{v}^g}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \underline{v}^g}{\partial Y^2} = 0 \quad (2.5.1.2)$$

con

$$\underline{u}^g = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \underline{v}^g = \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} \quad (2.5.1.3)$$

### 2.5.2 Metodo di regolarizzazione di Winslow

Sono definiti gli spostamenti della mesh  $d\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{X}$  e  $d\tilde{y} = \tilde{y} - \tilde{Y}$  come gradi di libertà e le Eq.(2.5.2.1) e l'Eq.(2.5.2.2) sono risolte per i gradi di libertà  $d\tilde{x}$  e  $d\tilde{y}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(d\tilde{x}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(d\tilde{x}) = 0 \quad (2.5.2.1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(d\tilde{y}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(d\tilde{y}) = 0 \quad (2.5.2.2)$$

Se gli spostamenti sono grandi, gli elementi della mesh possono invertirsi. A tal proposito, con alcune tecniche di livellamento, si possono ottenere risultati migliori evitando che gli elementi della mesh s'invertano. La scelta delle tecniche di regolarizzazione è importante nella prevenzione di problemi numerici e di convergenza. Le condizioni al contorno sono essenziali per la soluzione finale della ALE, una imprecisa valutazione delle stesse può causare la distorsione degli elementi della mesh durante il processo simulato e provocare problemi di convergenza nella soluzione. È importante considerare che la mesh non può eccedere il contorno materiale del dominio spaziale in quanto il dominio computazionale deve essere al più uguale al dominio materiale. Le condizioni al contorno devono dunque essere definite al fine di mantenere i punti della mesh sul contorno nello spazio materiale. Potrebbe sorgere una discussione nel vincolare o meno la mesh in direzione normale e tangenziale; si potrebbero, a tal proposito, verificare problemi di convergenza e quindi di distorsione della mesh. Per questa ragione si dovrebbe vincolare la direzione normale al contorno e soddisfare le equazioni di Winslow o Laplace nella direzione tangenziale. In problemi transienti le condizioni sono soddisfatte dalla seguente equazione:

$$\tilde{v}^s \cdot \tilde{n} = \tilde{v} \cdot \tilde{n} \quad (2.5.2.3)$$

Dove  $\underline{v}^g$  è la velocità della mesh,  $\underline{v}$  è la velocità materiale e  $\underline{n}$  è il vettore normale unitario della mesh deformata nel dominio spaziale. Il soddisfacimento dell'Eq.(2.5.2.3) è effettuato con la tecnica dei moltiplicatori di lagrange. I moltiplicatori di lagrange generalmente hanno termini nulli diagonali nella matrice di assemblaggio globale. Il processo è completato con l'aggiunta di nuovi termini nella forma debole dell'equazione agli elementi finiti:

$$\hat{\lambda}(\underline{v}-\underline{v}^g)\cdot\underline{n}+\lambda(\hat{d}\underline{s})\cdot\underline{n}=\varrho \quad (2.5.2.4)$$

Dove con il simbolo  $\lambda$  si sono rappresentati i moltiplicatori di lagrange, con  $d\underline{s}$  il vettore spostamento della mesh e con  $\hat{\lambda}$  la funzione peso. Il primo termine, basato sulla teoria dei residui pesati, forza le condizioni al contorno della ALE mentre il secondo termine ostacola l'accoppiamento dall'imposizione di vincoli non desiderati sulle superfici libere.

## 2.6 L'integrale J di Rice

L'integrale J rappresenta uno dei concetti fondamentali della meccanica della frattura. Sebbene nella sua derivazione originaria l'integrale J non fosse direttamente correlato all'energia di rilascio  $G$ , Rice è stato il primo ad intuire l'eguaglianza tra le due quantità. Nei seguenti paragrafi verrà introdotto l'integrale J come strumento per calcolare l'energia di rilascio. Nel derivare la sua l'espressione verrà impiegata una formulazione generale, a partire dal lavoro dei carichi esterni e dall'energia elastica per un particolare processo virtuale di propagazione della frattura. Per poter introdurre i concetti più importanti, è necessario notare che sebbene si sia fatto riferimento ad un corpo assegnato, ciascuna parte del corpo costituisce a sua volta un dominio. Nel caso di problema piano, si può considerare un qualsiasi contorno che circonda l'apice della fessura per definire un sottodominio ed applicarvi l'equazione di bilancio energetico al fine di ricavare  $G$ .

La derivazione dell'integrale J è proposta in molti libri seguendo lo schema euleriano, in cui gli assi del sistema di riferimento ed il contorno  $\Gamma$  si muovono seguendo l'evoluzione della fessura. E' importante tener presente che nel seguito verrà utilizzato, invece, un approccio



lagrangiano (a partire dalle coordinate dei punti materiali nella configurazione iniziale); il sottodominio di riferimento costituisce un sistema chiuso. Nel caso piano, il lavoro esterno elementare  $\delta W$  (per le superfici prive di fessure) corrisponde al lavoro compiuto dalle trazioni di superficie sul contorno  $\Gamma$ :

$$\delta W = b \int_{\Gamma} t_i \delta u_i ds \quad (2.6.1)$$

dove  $ds$  rappresenta la lunghezza infinitesima di arco lungo il contorno  $\Gamma$ ,  $t_i$  sono le componenti del vettore delle trazioni superficiali agenti sul contorno in esame ed  $u_i$  le componenti del vettore degli spostamenti. Si scrive l'energia elastica  $U$  come l'integrale della densità di energia elastica (o energia di deformazione)  $\bar{U}$  definito sul volume del sottodominio individuato da  $\Gamma$ ; per il caso piano si ottiene:

$$U = b \int_{A(\Gamma)} \bar{U} dA \quad (2.6.2)$$

dove  $A(\Gamma)$  rappresenta la superficie piana del sottodominio. Sostituendo le espressioni (2.6.1) ed (2.6.2) nell'equazione:

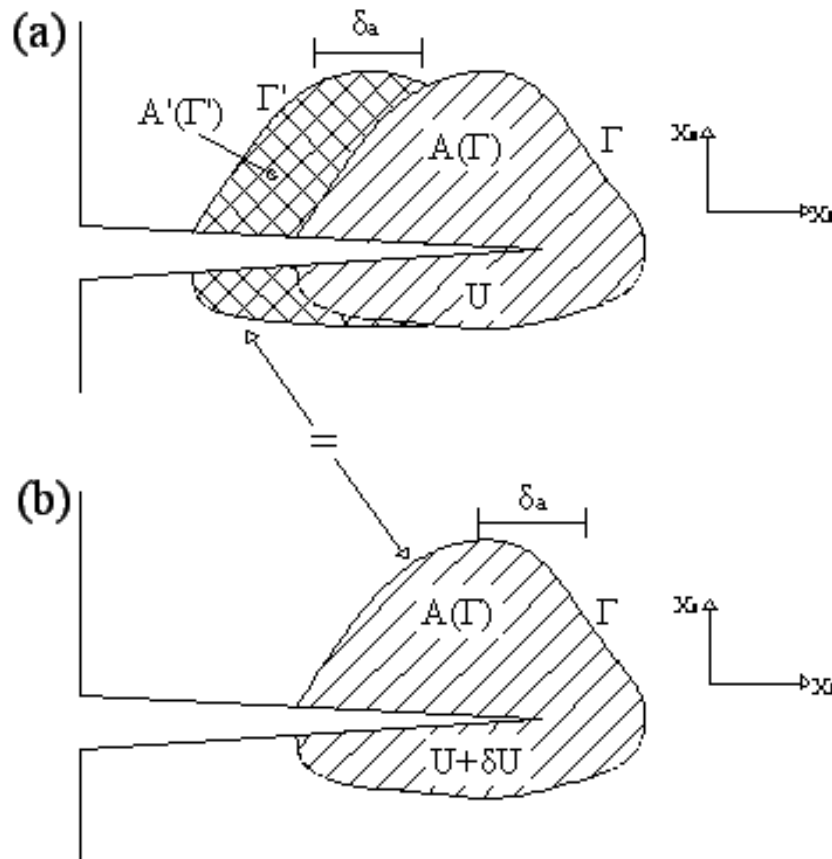
$$G b \delta a = \delta W - \delta U \quad (2.6.3)$$

si ottiene:

$$G \delta a = \int_{\Gamma} t_i \delta u_i ds - \delta \left[ \int_{A(\Gamma)} \bar{U} dA \right] \quad (2.6.4)$$

Il passo successivo consiste nel calcolare la variazione  $\delta$  all'interno di ciascun processo infinitesimo. Per ottenere l'espressione dell'integrale  $J$ , si considera un processo virtuale in cui vengono traslati tutti i campi (spostamento, tensione, densità di energia) di una quantità  $\delta a$

infinitesima, parallelamente alla direzione in cui evolve la fessura, e contemporaneamente si estende la fessura della medesima quantità (**fig. 2.3**).



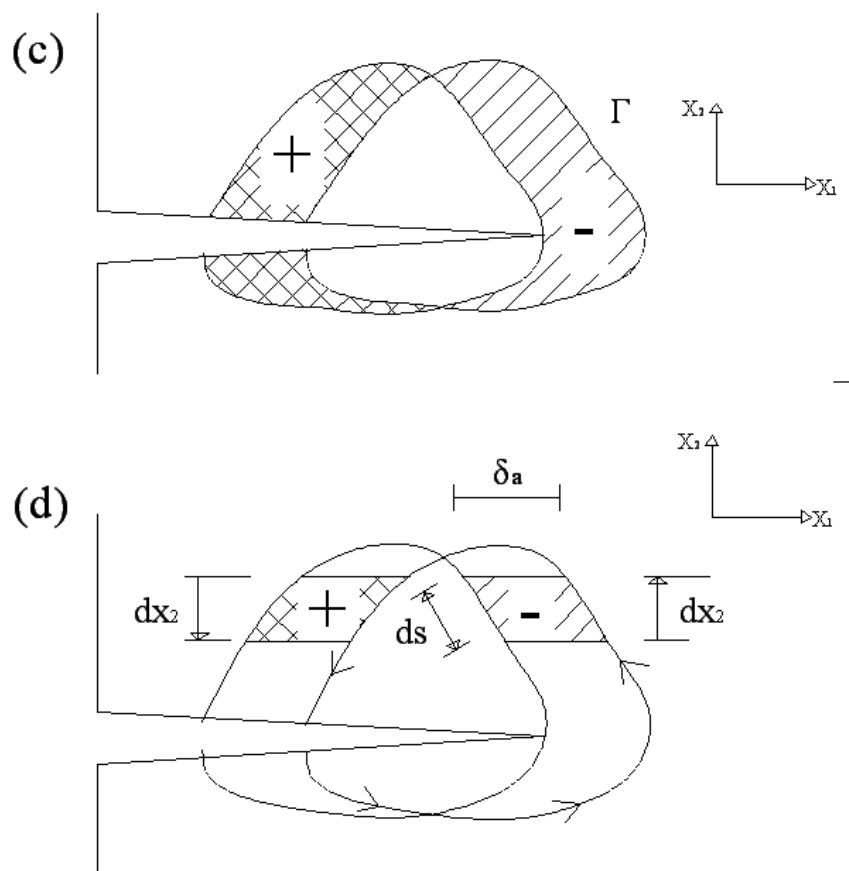
**Figura 2.3.** Determinazione della variazione di energia elastica in presenza di una lesione con la tecnica dell'integrale  $J$

La variazione dello spostamento di un punto materiale assegnato di coordinate  $(x_1; x_2)$  per effetto della traslazione è dato da:

$$\delta u_i(x_1, x_2) = u_i(x_1 - \delta a, x_2) - u_i(x_1, x_2) = -u_{i,1}(x_1, x_2) \delta a \quad (2.6.5)$$

dove  $u_{i,1}$  sta per  $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$

Quindi si calcola la variazione dell'energia elastica, rappresentata dall'integrale nell'Eq. (2.6.4). Si può procedere con modi differenti; il metodo più semplice consiste nel ricavare una soluzione analitica diretta che fa uso di un'espressione per la densità di energia elastica analoga alla precedente equazione [vedi Eq. (2.6.5)]. Tuttavia, la soluzione si può ottenere procedendo per via grafica nel modo seguente:



**Figura 2.4** Determinazione della variazione di energia elastica per via grafica con la tecnica dell'integrale  $J$

Sia l'area della sezione trasversale tratteggiata in **fig. 2.3a** il sottodominio di area  $A(\Gamma)$ , definito dal contorno  $\Gamma$  nella configurazione iniziale. Quando la fessura è estesa ed i vari campi sono traslati di  $\delta a$ , il sottodominio raggiunge la configurazione definita in **fig. 2.3b**. Essendo per costruzione grafica i campi della parte (b) della figura corrispondenti a quelli della parte (a)

traslati, l'energia finale del sottodominio  $A(\Gamma)$  coincide con l'energia iniziale del sottodominio  $A'(\Gamma')$  definito dal contorno  $\Gamma'$ , ottenuto traslando  $\Gamma$  di  $\delta a$  verso sinistra, come mostrato in **fig.2.3**; il sottodominio di area  $A'(\Gamma')$  è rappresentato dall'area ombreggiata ed in parte nascosta da  $A(\Gamma)$ . Quindi, la variazione di  $U$  tra gli stati iniziali e finali, eguaglia la differenza delle energie iniziali tra i due domini  $A'(\Gamma')$  e  $A(\Gamma)$ :

$$\delta U = U[A'(\Gamma')] - U[A(\Gamma)] \quad (2.6.6)$$

e, da un punto di vista grafico, tale energia si riduce all'energia contenuta nei due spicchi mostrati in **fig. 2.4**, positiva per la parte colorata (sulla sinistra) e negativa per la parte tratteggiata (sulla destra). Questo risultato può esprimersi mediante un integrale di contorno utilizzando elementi di area infinitesima e l'orientazione del contorno mostrati in **fig. 2.4**:

$$\delta U = b \delta \left[ \int_{A(\Gamma)} \bar{U} \, dA \right] = -b \left[ \int_{\Gamma} \bar{U} \, dx_2 \delta a \right] \quad (2.6.7)$$

La sostituzione nell'Eq. (2.6.4) delle espressioni di  $\partial U$  e  $\partial u_i$ , definite rispettivamente nell'equazione precedente e nell'Eq. (2.6.5), fornisce la seguente espressione per l'energia di rilascio:

$$G = \int_{\Gamma} (\bar{U} \, dx_2 - t_i \, u_{i,1} \, ds) \quad (2.6.8)$$

L'espressione presente al secondo membro dell'equazione precedente è l'integrale  $J$  di Rice. L'integrale può essere calcolato se tutti i punti appartenenti al contorno  $\Gamma$  sono elastici ed anche nei casi in cui la teoria della meccanica della frattura in ambito elastico-lineare non può essere applicata. Tuttavia, l'integrale  $J$  è uguale all'energia di rilascio  $G$ , a patto che siano rispettate le seguenti condizioni:

- 1) la zona plastica si riduce ad un punto all'interno del contorno  $\Gamma$ ;

- 2) le facce della fessura sono libere da trazioni;  
 3) la fessura è piana e si estende nel proprio piano di frattura.

L'integrale  $J$  che compare nell'Eq. (2.6.8) è, per via del segno che assume il fattore  $dx_2$ , un integrale di linea orientato. Per ottenere risultati corretti, esso deve essere calcolato in senso antiorario, partendo dalla faccia inferiore della fessura e procedendo fino a quella superiore. L'inconveniente della procedura di integrazione può essere superato notando che il segno dell'integrale è correttamente definito se si pone  $dx_2 = n_1 ds$ , dove  $n_1$  è la componente della normale unitaria uscente dal contorno lungo la linea di frattura e  $ds$  è la lunghezza dell'arco infinitesimo, indipendente dal percorso. Dunque, l'integrale  $J$  può scriversi come un integrale di contorno indipendente dal percorso, con lunghezza dell'arco infinitesimo positiva: ciò equivale a considerare l'integrale di linea come un integrale di superficie per unità di spessore, dove  $ds = \frac{dA}{b}$  è l'area della superficie laterale per unità di spessore. L'espressione risultante di  $J$  è:

$$J = \oint_{\Gamma} (\bar{U} \cdot n_1 - t_i \cdot u_{i,1}) ds \quad (2.6.9)$$

Sebbene l'integrale  $J$  possa essere calcolato in modo analitico solo in pochi casi semplici, esso costituisce comunque un potente strumento di calcolo nell'ambito della teoria della meccanica della frattura.

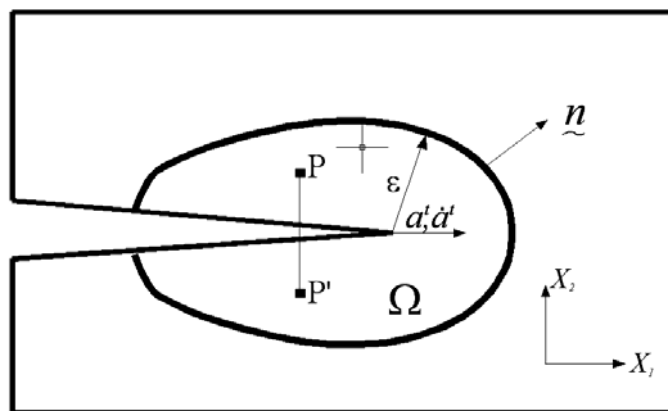


Figura 2.5 Intorno del crack Tip

In generale, la densità energia di deformazione  $W$  è definita nell'elastostatica lineare come:

$$W = W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6.10)$$

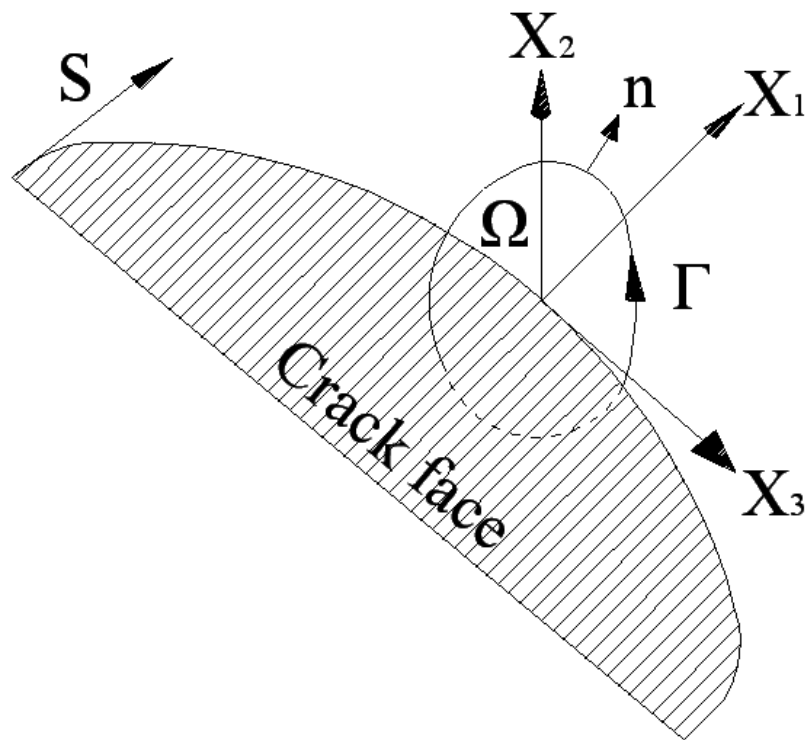
dove:

-  $\sigma_{ij}$  è il tensore delle tensioni;

-  $\varepsilon_{ij}$  è il tensore delle deformazioni:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6.11)$$

con  $u_{i,j}$  derivata dello spostamento  $u_i$  rispetto alle coordinate del crack  $x_j$  (vedi **fig. 2.6**).



**Figura 2.6** Piano passante per la superficie della faccia del crack tip

Differenziando la densità dell'energia di deformazione  $W$  rispetto a  $x_k$  si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_k} &= \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{j,i}}{\partial x_k} \right) \quad i,j,k = 1,2,3 \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Differenziando ancora rispetto a  $x_j$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k} \quad (2.6.13)$$

Dall'equilibrio si ottiene che è  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$  pari a zero. Sostituendo la (2.6.13) nell'Eq. (2.6.12), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

Per l'equilibrio alla rotazione deve risultare:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . In forma compatta l'Eq. (2.6.12) diventa:

$$\frac{\partial P_{kj}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (2.6.15)$$

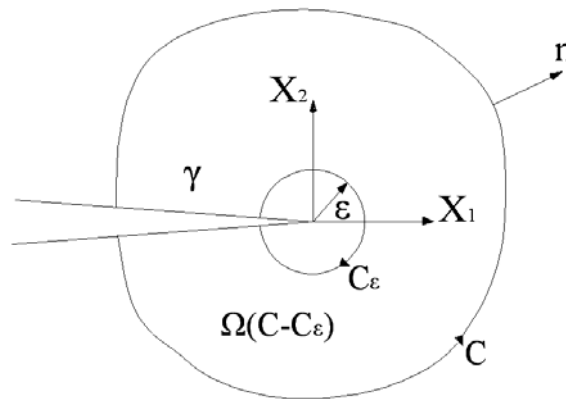
dove  $\delta_{kj}$  è la delta di Kronecker, mentre la quantità in parentesi rappresenta il tensore momento di Eshelby indicato con il simbolo  $P_{kj}$ . I parametri di tale tensore dipendono dal sistema di coordinate della fessura. Con riferimento alla **fig.2.7** si definiscono tre contorni che racchiudono l'area  $\Omega$ :  $C$ ,  $C_\epsilon$ ,  $\gamma$ .  $C$  racchiude l'area  $\Omega(C-C_\epsilon)$  ed il suo verso di percorrenza è antiorario;  $C_\epsilon$  include l'apice della fessura ossia la zona in cui i campi tensionali sono elevati ed il suo verso di percorrenza è orario;  $\gamma$  include le facce superiore ed inferiore della fessura. Dunque integrando sull'area ed escludendo la zona della singolarità si ottiene:

$$\int_{\Omega(C-C_\epsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W \delta_{kj} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Omega = 0 \quad (2.6.16)$$

In accordo con il teorema di Green si può scrivere:

$$\int_{\Gamma} T dx_1 + Q dx_2 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) d\Omega \quad (2.6.17)$$

Se  $\Gamma$  è il contorno dell'area  $\Omega(C-C_\epsilon)$



**Figura 2.7** Intorno del tipo delimitato dalla circonferenza C



si ottiene:  $dx_1 = -n_2 d\Gamma$  e  $dx_2 = n_1 d\Gamma$  (dove  $\mathbf{n}$  è la normale al contorno  $\Gamma$ ); dunque dall'Eq. (2.6.16) si ricava:

$$\int_{\Gamma} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Omega = 0 \quad (2.6.18)$$

dove con  $\Gamma$  si è indicato il contorno che delimita l'area  $\Omega(C-C_\varepsilon)$ ; esso è dato dalla somma dei seguenti contorni:  $\Gamma = \gamma + C + C_\varepsilon$ . L'Eq. (2.6.18) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & \int_{C+\gamma} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Omega = \\ & - \int_{C_\varepsilon} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

Sia  $C_\varepsilon$  un contorno circolare di raggio  $\varepsilon$ . Se  $\varepsilon \rightarrow 0$  si può affermare che il termine integrale sull'area  $C_\varepsilon$  tende a zero. Nell'Eq. (2.6.19) si può indicare l'integrale  $J$  sopra definito con la notazione  $J_k(s)$ :

$$\begin{aligned} J_k(s) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma \\ &= \int_{C+\gamma} \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

dove  $\Gamma_\varepsilon$  coincide con il contorno  $C_\varepsilon$  ad meno del verso di percorrenza.  $J_k(s)$  è strettamente dipendente dalla posizione del fronte della fessura ed è definito sul piano passante per  $x_3 = 0$ . Ponendo  $k=1$  (trazioni libere sulla superficie della fessura), l'integrale sul contorno  $\gamma$  è nullo ( $t_i = \sigma_{ij} n_j = 0$   $n_1 = 0$ ). Dall'Eq. (2.6.20) si ricava:

$$\begin{aligned}
J_I(s) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma \\
&= \int_C \left( W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{2.6.21}$$

con  $\Gamma_\varepsilon$  costante. I termini del secondo membro dell'Eq. (2.6.21) sono costanti per ogni contorno  $C$  e tale caratteristica è indicata come indipendenza dal percorso.

## 2.7 Decomposizione dell'integrale $J$

In questo paragrafo verrà affrontata la decomposizione dell'integrale  $J$  (Greco, Lonetti, 2009), che consente di ricavarne le componenti simmetriche e quelle antisimmetriche. Tali componenti vengono calcolate considerando i campi tensionali e deformativi rispettivamente simmetrici ed antisimmetrici. Con riferimento ai campi tensionali si considerino due punti  $P$  e  $P'$  di coordinate  $P(a, b, c)$  e  $P'(a, -b, c)$  entrambi simmetrici rispetto al piano passante per  $x_2 = 0$ . Allora è possibile esprimere le componenti di tensione per i due punti in termini delle componenti simmetriche e di quelle antisimmetriche:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11p} \\ \sigma_{12p} \\ \sigma_{13p} \\ \sigma_{22p} \\ \sigma_{23p} \\ \sigma_{33p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11p}^S \\ \sigma_{12p}^S \\ \sigma_{13p}^S \\ \sigma_{22p}^S \\ \sigma_{23p}^S \\ \sigma_{33p}^S \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{11p}^{AS} \\ \sigma_{12p}^{AS} \\ \sigma_{13p}^{AS} \\ \sigma_{22p}^{AS} \\ \sigma_{23p}^{AS} \\ \sigma_{33p}^{AS} \end{Bmatrix} \tag{2.7.1}$$

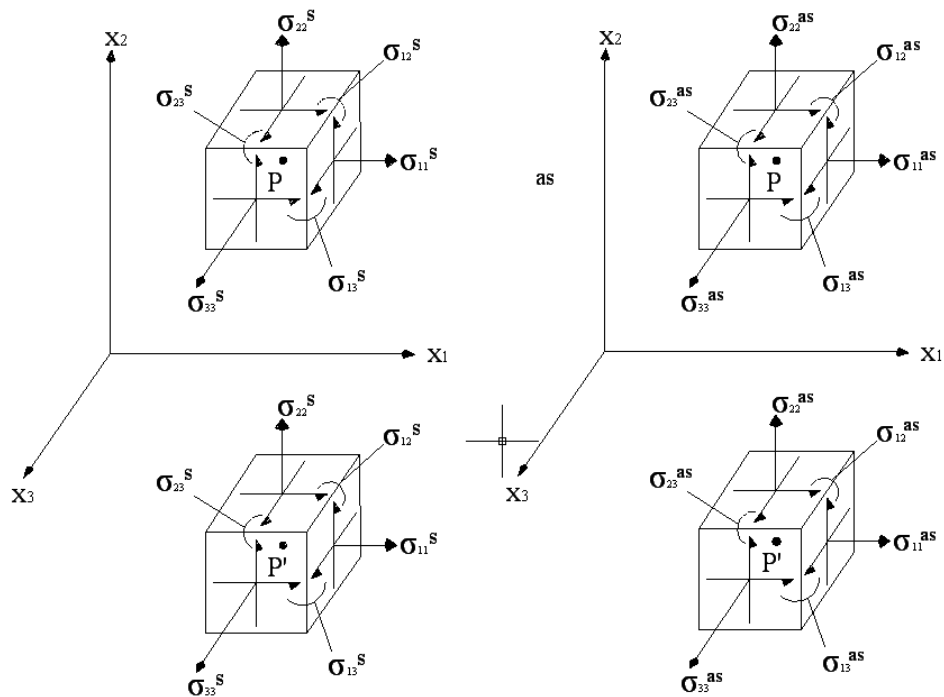


Figura 2.8 Componente simmetrica ed antisimmetrica del tensore delle tensioni

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11p'} \\ \sigma_{12p'} \\ \sigma_{13p'} \\ \sigma_{22p'} \\ \sigma_{23p'} \\ \sigma_{33p'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11p'}^S \\ -\sigma_{12p'}^S \\ \sigma_{13p'}^S \\ \sigma_{22p'}^S \\ -\sigma_{23p'}^S \\ \sigma_{33p'}^S \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sigma_{11p'}^{AS} \\ \sigma_{12p'}^{AS} \\ -\sigma_{13p'}^{AS} \\ -\sigma_{22p'}^{AS} \\ \sigma_{23p'}^{AS} \\ -\sigma_{33p'}^{AS} \end{Bmatrix} \quad (2.7.2)$$

Con gli apici  $S$  ed  $AS$  si indicano rispettivamente la componente simmetrica e quella antisimmetrica; dunque le componenti simmetriche e antisimmetriche di tensione sono rispettivamente espresse come:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11}^S \\ \sigma_{12}^S \\ \sigma_{13}^S \\ \sigma_{22}^S \\ \sigma_{23}^S \\ \sigma_{33}^S \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11p} + \sigma_{11p'} \\ \sigma_{12p} - \sigma_{12p'} \\ \sigma_{13p} + \sigma_{13p'} \\ \sigma_{22p} + \sigma_{22p'} \\ \sigma_{23p} - \sigma_{23p'} \\ \sigma_{33p} + \sigma_{33p'} \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11}^{AS} \\ \sigma_{12}^{AS} \\ \sigma_{13}^{AS} \\ \sigma_{22}^{AS} \\ \sigma_{23}^{AS} \\ \sigma_{33}^{AS} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11p} - \sigma_{11p'} \\ \sigma_{12p} + \sigma_{12p'} \\ \sigma_{13p} - \sigma_{13p'} \\ \sigma_{22p} - \sigma_{22p'} \\ \sigma_{23p} + \sigma_{23p'} \\ \sigma_{33p} - \sigma_{33p'} \end{array} \right\} \quad (2.7.3)$$

Le relazioni tra deformazioni e tensioni sono esprimibili mediante la legge di Hooke:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right) \sigma_{kk} \right] \quad (2.7.4)$$

Dove  $\delta_{ik}$  è il delta di Kronecker e  $\mu$  è il modulo di taglio. Analogamente le deformazioni possono essere scritte come somma delle componenti simmetrica e antisimmetrica:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^S + \varepsilon_{ij}^{AS} \quad (2.7.5)$$

Ancora, con ovvio significato dei simboli, si ha:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11p} + \varepsilon_{11p'} \\ \varepsilon_{12p} - \varepsilon_{12p'} \\ \varepsilon_{13p} + \varepsilon_{13p'} \\ \varepsilon_{22p} + \varepsilon_{22p'} \\ \varepsilon_{23p} - \varepsilon_{23p'} \\ \varepsilon_{33p} + \varepsilon_{33p'} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11p} - \varepsilon_{11p'} \\ \varepsilon_{12p} + \varepsilon_{12p'} \\ \varepsilon_{13p} - \varepsilon_{13p'} \\ \varepsilon_{22p} - \varepsilon_{22p'} \\ \varepsilon_{23p} + \varepsilon_{23p'} \\ \varepsilon_{33p} - \varepsilon_{33p'} \end{array} \right\} \quad (2.7.6)$$

Si esaminano nello specifico le deformazioni nel punto  $P'$ . A tal proposito si consideri una funzione:

$$\sigma'_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{ij}(x_1, -x_2, x_3) \quad (2.7.7)$$

differenziando rispetto a  $x_2$  in  $P'$  si ottiene:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \right|_{(a,-b,c)} = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, -x_2, x_3)}{\partial -x_2} \right|_{(a,b,c)} = - \left. \frac{\partial \sigma'_{ij}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \right|_{(a,b,c)} \quad (2.7.8)$$

per l'equilibrio delle forze in  $P'$  si ha:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right|_{(a,-b,c)} = \left[ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_3} \right]_{(a,b,c)} = 0 \quad (2.7.9)$$

Dall'Eq.(2.7.3) si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^S}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{AS}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.7.10)$$

L'Eq.(2.7.10) individua il campo delle tensioni simmetriche ed antisimmetriche. Le corrispondenti derivate degli spostamenti  $u_i^S$  e  $u_i^{AS}$  sono ottenute dalle deformazioni  $\varepsilon_{ij}$ . A titolo di esempio si effettua il calcolo di  $\partial u_3^{AS} / \partial x_2$ .

Si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23}^{AS} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{23p} + \varepsilon_{23p'}) = \frac{1}{2}[\varepsilon_{23}(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon_{23}(x_1, -x_2, x_3)]_{(a,b,c)} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{23} + \varepsilon'_{23}); \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

allora :

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{23}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{23}(x_1, x_2, x_3)|_{(a,-b,c)} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \right]_{(a,-b,c)} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_2(x_1, -x_2, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3(x_1, -x_2, x_3)}{\partial(-x_2)} \right]_{(a,b,c)} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u'_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial u'_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_2)} \right]_{(a,b,c)}
\end{aligned} \tag{2.7.12}$$

quindi:

$$\varepsilon_{23}^{AS} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} \right]_{(a,b,c)} \tag{2.7.13}$$

Il campo di deformazione delle componenti simmetriche ed antisimmetriche è relazionata alle derivate degli spostamenti tramite la seguente espressione:

$$\varepsilon_{ij}^N = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^N}{\partial x_i} \right) \tag{2.7.14}$$

Poiché si è nell'ipotesi di piccole deformazioni, con l'apice N si è indicato il valore.

Nel caso considerato si ha:

$$\varepsilon_{ij}^{AS} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2^{AS}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{AS}}{\partial x_2} \right) \tag{2.7.15}$$

di seguito si ricava:

$$\frac{\partial u_3^{AS}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} \right) \tag{2.7.16}$$

determinando la parte simmetrica ed antisimmetrica del campo delle derivate degli spostamenti si ottiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^S}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i^{AS}}{\partial x_j} \right) \quad (2.7.17)$$

in particolare:

$$= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_2}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_j} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_j} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_3}{\partial x_j} \end{Bmatrix} \quad (2.7.18)$$

L'integrale J, dunque, può essere riscritto con riferimento alle componenti simmetriche ed antisimmetriche:

$$J_1 = \int_C \left[ \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}} (\sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^{AS}) d(\varepsilon_{ij}^S + \varepsilon_{ij}^{AS}) \right) n_1 - (\sigma_{ij}^S + \sigma_{ij}^{AS}) n_j \frac{\partial}{\partial x_1} (u_i^S + u_i^{AS}) \right] d\Gamma \quad (2.7.19)$$

$$- \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ (\sigma_{i3}^S + \sigma_{i3}^{AS}) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_i^S + u_i^{AS}) \right] d\Omega$$

Usando la definizione di W e ponendo a zero l'area  $\Omega(C_\varepsilon)$ . Dalla **fig.2.8** si evince che le tensioni simmetriche ed antisimmetriche  $\sigma'_{ij}$  nel punto  $P'$  sono in relazione con le tensioni  $\sigma_{ij}$  nel punto P come segue:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11}^{1S} \\ \sigma_{12}^{1S} \\ \sigma_{13}^{1S} \\ \sigma_{22}^{1S} \\ \sigma_{23}^{1S} \\ \sigma_{33}^{1S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11}^S \\ -\sigma_{12}^S \\ \sigma_{13}^S \\ \sigma_{22}^S \\ -\sigma_{23}^S \\ \sigma_{33}^S \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11}^{1AS} \\ \sigma_{12}^{1AS} \\ \sigma_{13}^{1AS} \\ \sigma_{22}^{1AS} \\ \sigma_{23}^{1AS} \\ \sigma_{33}^{1AS} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\sigma_{11}^{AS} \\ \sigma_{12}^{AS} \\ -\sigma_{13}^{AS} \\ -\sigma_{22}^{AS} \\ \sigma_{23}^{AS} \\ -\sigma_{33}^{AS} \end{array} \right\} \quad (2.7.20)$$

Per le deformazioni si ha:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11}^{1S} \\ \varepsilon_{12}^{1S} \\ \varepsilon_{13}^{1S} \\ \varepsilon_{22}^{1S} \\ \varepsilon_{23}^{1S} \\ \varepsilon_{33}^{1S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11}^S \\ -\varepsilon_{12}^S \\ \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{22}^S \\ -\varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{33}^S \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11}^{1AS} \\ \varepsilon_{12}^{1AS} \\ \varepsilon_{13}^{1AS} \\ \varepsilon_{22}^{1AS} \\ \varepsilon_{23}^{1AS} \\ \varepsilon_{33}^{1AS} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\varepsilon_{11}^{AS} \\ \varepsilon_{12}^{AS} \\ -\varepsilon_{13}^{AS} \\ -\varepsilon_{22}^{AS} \\ \varepsilon_{23}^{AS} \\ -\varepsilon_{33}^{AS} \end{array} \right\} \quad (2.7.21)$$

Le derivate degli spostamenti rispetto a  $x_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{1,1}^{1S} \\ u_{2,1}^{1S} \\ u_{3,1}^{1S} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{1,1}^S \\ -u_{2,1}^S \\ u_{3,1}^S \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} u_{1,1}^{1AS} \\ u_{2,1}^{1AS} \\ u_{3,1}^{1AS} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -u_{1,1}^{AS} \\ u_{2,1}^{AS} \\ -u_{3,1}^{AS} \end{array} \right\} \quad (2.7.22)$$

Si consideri, a titolo di esempio, il contorno  $C$  simmetrico intorno al piano passante per  $x_2 = 0$ . La relazione tra le normali  $n'$  in  $P'$  ed  $n$  in  $P$  può essere scritta come:

$$(n'_1, n'_2) = (n_1, -n_2) \quad (2.7.23)$$

Perciò dalle Eq.(2.7.20) alle Eq.(2.7.22) i prodotti della Eq.(2.7.19) diventano:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^{1M} d(\varepsilon_{ij}^{1N}) &= \pm \sigma_{ij}^M d(\varepsilon_{ij}^N) \\
 \sigma_{ij}^{1M} n'_j \frac{\partial u_i^{1N}}{\partial x_1} &= \pm \sigma_{ij}^M n_j \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \\
 \sigma_{i3}^{1M} \frac{\partial u_i^{1N}}{\partial x_1} &= \sigma_{i3}^M \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1}
 \end{aligned} \quad (2.7.24)$$



Dove:

-  $M, N = S$  o  $AS$  e  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  sono riferite al punto  $P$  ;

-  $\sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}, \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$  sono riferite al punto  $P'$ .

Nelle Eq.(2.7.24) si usa il segno positivo quando  $M = N$ ; si usa, invece il segno negativo quando  $M \neq N$ . Se  $M \neq N$ , gli integrandi nell'Eq.(2.7.19) elidono ogni altro punto simmetrico intorno al piano della fessura. Se il contorno  $C$  è simmetrico rispetto al piano della fessura l'Eq.(2.7.19) si riduce all'espressione:

$$J_1 = \sum_{N=1}^2 \int_C \left[ W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right] d\Gamma - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right] d\Omega \quad (2.7.25)$$

$$= J^S + J^{AS}$$

Poichè si sono indicate con  $N=1$  le componenti simmetriche e con  $N=2$  le componenti antisimmetriche, possiamo scrivere:  $W^N = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij}^N d(\varepsilon_{ij}^N)$ . L'integrale  $J$ , in questo caso, è detto indipendente dal percorso nelle sue componenti  $J^S$  e  $J^{AS}$ . Dall'Eq.(2.6.21) e dalle Eq.(2.7.24) si ricava:

$$J_1 = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma = \sum_{N=1}^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma \quad (2.7.26)$$

Quindi, l'Eq.(2.7.25) può essere riordinata nella forma seguente:

$$\sum_{N=1}^2 \int_{\Gamma} \left[ W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right] d\Gamma - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right] d\Omega = 0 \quad (2.7.27)$$

Dove  $\Gamma = C + C_\varepsilon + \gamma$ ; per ogni  $N$ .

Applicando il teorema di Green alla Eq.(2.7.27) si ottiene per  $N = S$  o AS:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \left[ \frac{\partial W^N}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.7.28)$$

Nella Eq.(2.7.28) l'area  $\Omega(C-C_\varepsilon)$  non contiene singolarità. Per l'Eq.(2.6.12) si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^N}{\partial x_1} &= \sigma_{ij}^N \frac{\partial \varepsilon_{ij}^N}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^N \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_i^N}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^N}{\partial x_i} \right) \\ &= \sigma_{ij}^N \frac{\partial^2 u_i^N}{\partial x_1 \partial x_j} \end{aligned} \quad (2.7.29)$$

Ne consegue che:  $\sigma_{ij}^N = \sigma_{ji}^N$ . Dunque, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right) = \sigma_{ij}^N \frac{\partial^2 u_i^N}{\partial x_j \partial x_1} \quad (2.7.30)$$

poichè  $\sigma_{ij,j}^N = 0$ , dall'Eq.(2.7.18) si ricava:

$$\frac{\partial^2 u_i^N}{\partial x_j \partial x_1} = \frac{\partial^2 u_i^N}{\partial x_1 \partial x_j} \quad (2.7.31)$$

e dalle Eq.(2.6.20) e dalla Eq.(2.6.21):

$$\int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \left[ \frac{\partial W^N}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (2.7.32)$$

riordinando l'Eq.(2.7.28) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C-C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right] d\Omega \\ = - \int_{C_\varepsilon} \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

dove l'integrale di contorno su  $\gamma$  è nullo ed i valori delle trazioni sono:  $t_i^N = \sigma_{ij}^N n_j = 0$  e  $n_1 = 0$ . Nel caso in cui il contorno  $C_\varepsilon$  è costante, il termine a sinistra della Eq.(2.7.33) è costante per ogni contorno simmetrico  $C$ . Esso è dunque detto indipendente dal percorso. Inoltre, poichè  $\varepsilon \rightarrow 0$  l'integrale su l'area  $\Omega(C_\varepsilon)$  tende ad un valore nullo. Dunque dall'Eq.(2.7.33) l'integrale indipendente dal percorso è espresso dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} J^N &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma \\ &= \int_C \left( W^N n_1 - \sigma_{ij}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma - \int_{\Omega(C)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \sigma_{i3}^N \frac{\partial u_i^N}{\partial x_1} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (2.7.34)$$

Con  $N = S$  o  $AS$ . In questo caso il contorno  $\Gamma_\varepsilon$  coincide con il contorno  $C_\varepsilon$  ad eccezione del verso di percorrenza antiorario. La parte simmetrica  $J^S$  si riferisce al modo I, mentre la parte antisimmetrica contiene la seguente relazione tra modo II e modo III:

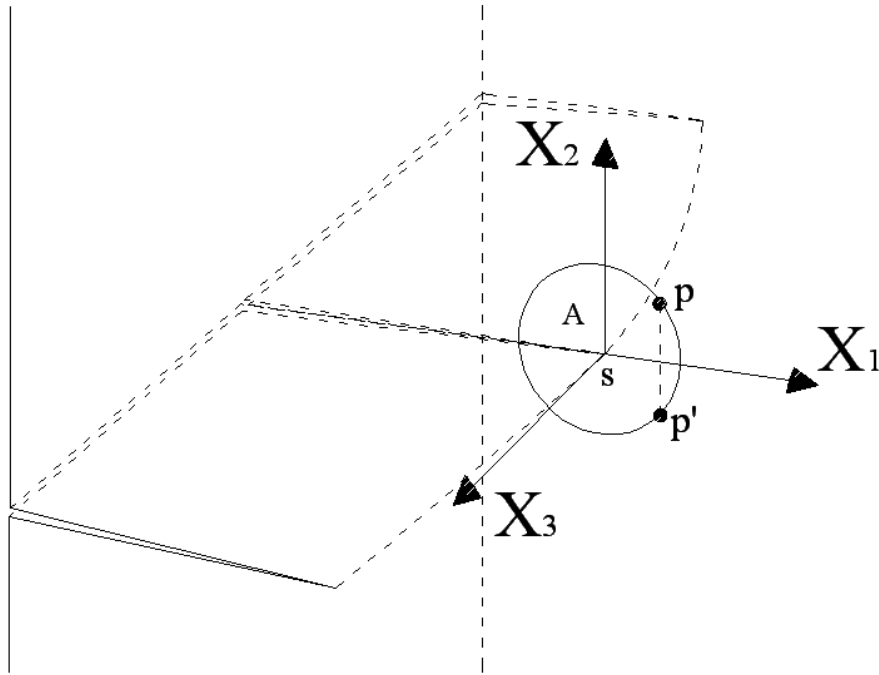
$$J^{AS} = J^{II} + J^{III} \quad (2.7.35)$$

dove:  $C$  è un percorso chiuso che circonda il fronte dell'apice della fessura ed il valore dell'integrale  $J$  è dato dall'espressione:

$$J = G_T = J_I + J_{II} \quad (2.7.36)$$

## 2.8 La decomposizione dell'integrale $J$ per il calcolo delle componenti dell'ERR nel caso tridimensionale

L'ERR (acronimo di *Energy Release Rate*) è stata ampiamente utilizzata per determinare l'inizio della propagazione della frattura. L'uso dei materiali compositi ha recentemente avuto uno sviluppo notevole sia nel campo ingegneristico che nel campo industriale ed aerospaziale, in virtù dell'applicazione del concetto di energia di rilascio alla propagazione del crack, originariamente sviluppata per materiali isotropi 2D ed opportunamente estesa a strutture composite costituite da differenti lamine. In molti casi d'interesse pratico, l'ERR può essere calcolata per solidi tridimensionali e per crack interfacciali, nell'ipotesi di materiali ortotropi. Inoltre, data la complessità dei campi di spostamenti e tensioni presenti all'interno dei materiali compositi, l'analisi richiede il calcolo delle componenti dell'energia di rilascio associate ad ogni modo di rottura. In letteratura sono note diverse metodologie per la determinazione dell'ERR: la CCT(Crack Closure Technique), la VCCT(Virtual Crack Closure Technique) e la tecnica di decomposizione dell'integrale  $J$ . Per quanto riguarda quest'ultima tecnica, si consideri un punto  $s$  lungo il fronte del crack di un corpo elastico, come mostrato in **fig.2.9**; inoltre sia  $X_3$  l'asse tangente al fronte del crack e  $X_1$  la normale uscente in  $s$  e giacente nel piano di  $X_3$ .



**Figura 2.9** Rappresentazione contorno ed area di integrazione al punto  $s$

L'integrale  $J$  riferito al piano passante per  $s$  in un solido tridimensionale è definito come segue:

$$J_{X_1}(s) = J^\Gamma + J^A = \int_\Gamma \left\{ \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right) dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right\} - \int_A \left( \sigma_{i3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dA \quad (2.8.1)$$

Tale espressione è indipendente dal percorso in due dimensioni ed è *path-area independent* nel caso a tre dimensioni. L'integrale  $J$  non interessa la zona della singolarità e ciò lo rende particolarmente adatto ai fini dell'implementazione numerica. Il calcolo accurato dell'integrale  $J$  non è immediato, data la necessità di calcolare derivate tensionali, deformazioni e spostamenti nelle vicinanze del punto singolare. Tuttavia, il limite dell'integrale di area tende a zero per  $R$  tendente a zero:

$$\lim_{R \rightarrow 0} J_{X_1}(s) = J^\Gamma \Big|_{R \rightarrow 0} \quad (2.8.2)$$

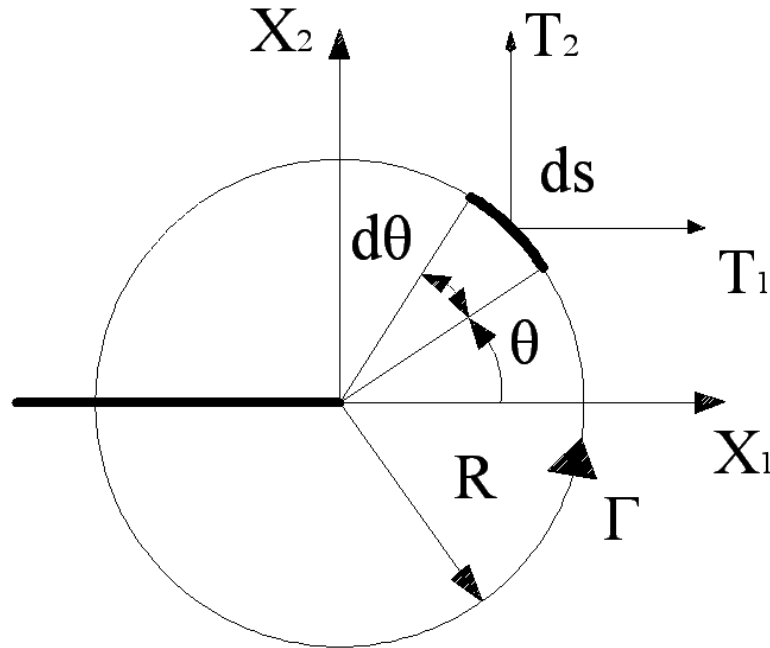
L'applicazione dell'integrale J in problemi tridimensionali caratterizzati da modo misto in campo elastico lineare richiede una decomposizione dell'integrale J in una parte simmetrica  $J_I$  (modo I) ed una parte antisimmetrica  $J_{II}$  e  $J_{III}$ , corrispondenti rispettivamente a modo II e modo III. La decomposizione è ottenuta esprimendo le componenti modali dell'integrale J come somma di una parte simmetrica e di una parte antisimmetrica relative al fronte del crack di assi coordinati ( $X_1$ ).

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^I + u_i^{II} + u_i^{III} \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^I + \varepsilon_{ij}^{II} + \varepsilon_{ij}^{III} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Mediante tale trasformazione le componenti modali dell'integrale J nel punto  $s$  per un solido tridimensionale possono essere scritte come segue:

$$\begin{aligned} J_M &= J_M^\Gamma + J_M^A = \int_\Gamma \left\{ \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^M d\varepsilon_{ij}^M \right) dx_2 - t_i^M \frac{\partial u_i^M}{\partial x_1} d\Gamma \right\} + \int_A \left( \frac{\partial \sigma_{i1}^M}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}^M}{\partial x_2} \right) \frac{\partial u_i^M}{\partial x_1} dA \\ &\quad - \int_A \left( \sigma_{i3}^M \frac{\partial^2 u_i^M}{\partial x_1 \partial x_3} \right) dA \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

con  $M=I,II,III$  ed  $t_i^M = \sigma_{ij}^M n_j$ . Ad esempio si supponga che il percorso considerato sia di forma circolare e che abbia raggio  $R_v$  (vedi **fig.2.10**); in virtù delle precedenti relazioni è lecito scrivere:



**Figura 2.10.** Rappresentazione contorno circolare di raggio  $R$

$$J_M^\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \left( \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^M d\varepsilon_{ij}^M \right) \cos \theta - t_i^M \frac{\partial u_i^M}{\partial x_1} \right\} R d\theta \quad (2.8.5)$$

$$J_M^A = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial \sigma_{i1}^M}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}^M}{\partial x_2} \right) \frac{\partial u_i^M}{\partial x_1} r d\theta dr - \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sigma_{i3}^M \frac{\partial^2 u_i^M}{\partial x_1 \partial x_3} \right) r d\theta dr \quad (2.8.6)$$

Poiché  $\sigma_{ij}$  è lineare rispetto a  $\varepsilon_{ij}$ , per il modo I si può scrivere:

$$\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}^I d\varepsilon_{ij}^I = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I) = \frac{1}{2} (\sigma_{11}^I \varepsilon_{11}^I + \sigma_{22}^I \varepsilon_{22}^I + \sigma_{33}^I \varepsilon_{33}^I + 2\sigma_{12}^I \varepsilon_{12}^I + 2\sigma_{13}^I \varepsilon_{13}^I + 2\sigma_{23}^I \varepsilon_{23}^I) \quad (2.8.7)$$

Allora segue:

$$J_I^\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{11}^I \varepsilon_{11}^I + \sigma_{22}^I \varepsilon_{22}^I + \sigma_{33}^I \varepsilon_{33}^I + 2\sigma_{12}^I \varepsilon_{12}^I + 2\sigma_{13}^I \varepsilon_{13}^I + 2\sigma_{23}^I \varepsilon_{23}^I) \cos \theta - \left( t_1^I \frac{\partial u_1^I}{\partial x_1} + t_2^I \frac{\partial u_2^I}{\partial x_1} + t_3^I \frac{\partial u_3^I}{\partial x_1} \right) \right] R d\theta \quad (2.8.8)$$

Analogamente, per modo II e modo III, si ottiene:

$$J_{II}^\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{11}^{II} \varepsilon_{11}^{II} + \sigma_{22}^{II} \varepsilon_{22}^{II} + \sigma_{33}^{II} \varepsilon_{33}^{II} + 2\sigma_{12}^{II} \varepsilon_{12}^{II}) \cos \theta - \left( t_1^{II} \frac{\partial u_1^{II}}{\partial x_1} + t_2^{II} \frac{\partial u_2^{II}}{\partial x_1} \right) \right] R d\theta \quad (2.8.9)$$

$$J_{III}^\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} (2\sigma_{13}^{III} \varepsilon_{13}^{III} + 2\sigma_{23}^{III} \varepsilon_{23}^{III}) \cos \theta - \left( t_3^{III} \frac{\partial u_3^{III}}{\partial x_1} \right) \right] R d\theta \quad (2.8.10)$$

Per  $\sigma_{ij,j}^S = \sigma_{ij,j}^{AS} = 0$ , dove  $\sigma_{ij}^S = \sigma_{ij}^I$  e  $\sigma_{ij}^{AS} = \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$  sono le componenti simmetriche ed antisimmetriche del tensore delle tensioni, si possono scrivere le componenti simmetriche ( $J_S^A$ ) e antisimmetriche ( $J_{AS}^A$ ) dell'integrale di area come:

$$J_S^A = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sigma_{i3}^S \frac{\partial^2 u_i^S}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{i3}^S}{\partial x_3} \frac{\partial u_i^S}{\partial x_1} \right) r d\theta dr \quad (2.8.11)$$

$$J_{AS}^A = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sigma_{i3}^{AS} \frac{\partial^2 u_i^{AS}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{i3}^{AS}}{\partial x_3} \frac{\partial u_i^{AS}}{\partial x_1} \right) r d\theta dr \quad (2.8.12)$$

Allora  $J_S = J_S^\Gamma - J_S^A = J_I^\Gamma - J_I^A$  e  $J_{AS} = J_{AS}^\Gamma - J_{AS}^A = J_{II}^\Gamma + J_{III}^\Gamma - J_{AS}^A$ . Si noti che in generale  $\sigma_{ij,j}^{II} \neq 0$  e  $\sigma_{ij,j}^{III} \neq 0$ .

Si osserva che:



- 1) *nella decomposizione dell'integrale  $J$ , esiste una simmetria geometrica del crack; inoltre le facce del crack devono essere piane all'interno del percorso.*
- 2) *il percorso dell'integrale  $J$  non interessa alcun punto singolare e questo lo rende particolarmente adatto all'implementazione numerica.*
- 3) *con una corretta costruzione della mesh, l'integrale  $J$  può essere calcolato per un percorso arbitrario che rende la qualità della soluzione non influenzata dalla singolarità.*
- 4) *operando per diversi valori del raggio per  $R \rightarrow 0$  nel percorso di integrazione si ottengono informazioni sulla convergenza dell'integrale circuitale  $J$ .*
- 5) *la forma del fronte del crack non risulta soggetta a vincoli.*
- 6) *l'integrale di area richiede il calcolo di parametri che presentano singolarità, pertanto esso non è adatto al calcolo numerico. Di conseguenza tale l'integrale non può essere utilizzato per calcolare l'energia di rilascio totale, ma piuttosto per una stima del suo contributo al calcolo dell'integrale  $J$  totale relativa all'integrale di percorso.*

## 2.9 Criteri di frattura in ambito dinamico

Ai fini progettuali occorre adottare un dominio di rottura che tenga in considerazione l'interazione tra  $G_I$  e  $G_{II}$ , ed a tal riguardo in letteratura sono presenti diversi modelli empirici. In questa sede si preferisce utilizzare un criterio di frattura generale applicabile ad una ampia tipologia di materiali compositi. L'equazione del moto dell'apice della fessura scritta in funzione del fattore di intensificazione degli sforzi per puro modo I è dunque:

$$\gamma = \frac{1+\nu}{E} \frac{v^2 \alpha_d}{C_s^2 R(\nu)} \left[ k(\nu) K_I^0(t, l(t), 0) \right]^2 \quad (2.9.1)$$

Pertanto noti  $K_I^0$  e  $\gamma$  dall'Eq.(2.9.1) è possibile determinare la velocità istantanea dell'apice della fessura. La dissipazione di energia può essere determinata per via sperimentale misurando simultaneamente ed indipendentemente il fattore di intensificazione delle tensioni e la velocità di propagazione della fessura. Numerosi risultati sperimentali hanno evidenziato

significative divergenze riguardo all'estensione del criterio dell'Eq.(2.9.1) per condizioni di carico generiche, pertanto l'adattabilità e l'applicabilità di tale criterio in ambito dinamico è stato oggetto di lunghi dibattiti da parte della comunità scientifica. Le divergenze sono da attribuirsi alla scelta della geometria del campione, alla velocità di deformazione e all'accelerazione. Da un punto di vista applicativo il criterio di frattura dinamico è strutturato in tre parti:

- 1) un criterio dinamico di innesco della fessura;
- 2) un criterio dinamico di avanzamento della fessura;
- 3) un criterio dinamico di arresto della fessura.

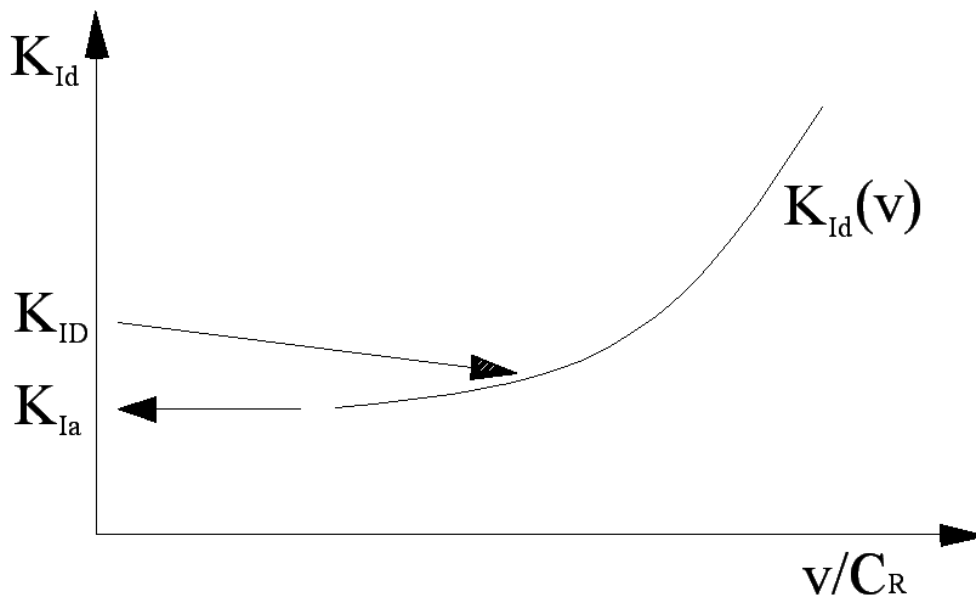
Inoltre le quantità come la resistenza iniziale dinamica, la resistenza di propagazione dinamica, la resistenza di arresto dell'apice della fessura dinamica viene definita come indipendente dalle proprietà del materiale. Poiché lo stato tensionale in prossimità dell'apice della fessura può essere espresso in termini del fattore di intensificazione delle tensioni dinamiche,  $K_I(t)$ , l'innesco della fessura si verifica quando il fattore di intensificazione delle tensioni raggiunge il suo valore critico, seguendo l'approccio utilizzato da Irwin nel caso statico. Perciò, il criterio di innesco può essere scritto nella seguente forma:

$$K_I(t_f) = K_{Id}(T, \dot{K}_I) \quad (2.9.2)$$

dove il secondo membro indica la resistenza dinamica alla frattura all'innesco. La dipendenza della resistenza dinamica all'innesco dalla temperatura e dalla velocità di carico è stata ampiamente dimostrata attraverso prove sperimentali, nelle quali sono stati indicati gli intervalli d'interesse delle temperature e delle velocità di applicazione dei carichi. La dipendenza dalla temperatura della resistenza dinamica all'innesco deriva dall'incremento di duttilità all'aumentare della temperatura oppure dal riscaldamento associato alle deformazioni inelastiche in prossimità dell'apice della fessura, oppure da entrambe le cause. La dipendenza dalla velocità di carico può avere due possibili origini: una legata alla dipendenza dalla velocità della risposta del materiale inelastico all'interno della zona di processo e l'altra di natura inerziale dovuta allo sviluppo di campi tensionali vicino alla cricca e nella zona di processo. Il termine di sinistra rappresenta il fattore di intensificazione delle tensioni calcolato

al tempo  $t_f$ . Le condizioni in cui è verificato il criterio dinamico sono precedute da quelle che caratterizzano la propagazione iniziale della fessura. Inoltre l'avanzamento della fessura viene determinato attraverso il bilancio energetico durante l'avanzamento della stessa. Il campo tensionale nelle vicinanze della fessura è ancora caratterizzato dal fattore di intensificazione delle tensioni dinamiche  $K_I(t, v)$ , che in questo caso è funzione dei carichi, del tempo, della posizione istantanea e della velocità all'apice della fessura. L'Eq.(2.9.1) di bilancio energetico può essere scritta come una relazione tra il fattore di intensificazione delle tensioni e la sua resistenza equivalente di  $\gamma$ , chiamata resistenza dinamica alla crescita della fessura. Si nota che tale resistenza dovrebbe essere funzione della velocità dell'apice della fessura, della temperatura e della velocità di applicazione di carico. Perciò, il criterio di resistenza dinamica alla crescita della cricca può essere scritto come:

$$K_I(t, v) = K_{ID}(v, T, \dot{K}_I^{dyn}) \quad (2.9.3)$$



**Figura 2.11** Criterio di crescita dinamico della frattura

Il pedice D, in questo caso, è utilizzato per indicare la resistenza dinamica alla crescita della fessura; nel caso precedente, invece, si è indicato con d la resistenza iniziale dinamica

dell'apice della lesione. Il termine a destra dipende dalle proprietà del materiale le quali vengono determinate per via sperimentale. Il criterio di crescita dinamica della fessura è rappresentato attraverso dei grafici come quello rappresentato in **fig.2.11** sull'asse delle ascisse è riportata la velocità  $v$  mentre in ordinata vi sono i vari fattori di intensificazione delle tensioni. Tale figura mette in evidenza che il punto corrispondente alla propagazione iniziale della cricca non si trova sulla curva caratterizzata dal criterio di crescita dinamica della fessura. Perciò, è lecito scrivere:

$$K_{ID}(v \rightarrow 0, T, \dot{K}_I^{dyn}) \neq K_{Id}(T, \dot{K}_I) \quad (2.9.4)$$

Ciò è possibile dalla smussatura della cricca iniziale, dovuta all'intrinseca dipendenza della velocità dal materiale o dagli effetti inerziali. Un'interessante conseguenza della differenza tra inizio fessura e resistenza alla crescita è che la fessura salta degli intervalli di velocità fino a portarsi sul punto della curva indicato dalla freccia (**fig.2.11**). I tentativi sperimentali effettuati per determinare  $K_{ID}(v, T, \dot{K}_I)$  hanno avuto successi misti: variazioni nelle misure di campioni aventi differenti geometrie (*Kobayashi e Mall, 1978; Kalthoff, 1983*) e velocità di applicazione di carico (*Ravi-Chandar e Knauss, 1984c*) non sono stati risolti completamente. Dunque le indicazioni sulle misure sono isteretiche (principalmente le accelerazioni e decelerazioni dell'apice della fessura esibiscono un comportamento differente) così come riportarono (*Arakawa e Takahashi, 1991*). Queste discrepanze sono state notate maggiormente nei materiali fragili rispetto ai materiali duttili. Il fenomeno di arresto della fessura non appare naturalmente nel limite  $K_{ID}(v \rightarrow 0, T, \dot{K}_I^{dyn})$  poiché si necessita di un postulato separato dal criterio di arresto della fessura. Infatti se  $v \rightarrow 0$  la velocità della fessura è molto sensibile a piccoli cambiamenti del fattore di intensificazione delle tensioni, ed il criterio di crescita dinamica della fessura è incapace di predire l'arresto della fessura in modo affidabile. La differenza tra resistenza iniziale alla frattura dinamica e resistenza dinamica alla crescita della fessura introduce complicazioni nella caratterizzazione dell'arresto della fessura. L'arresto della fessura non è l'inverso della resistenza iniziale e quindi la resistenza iniziale non è rilevante all'arresto della fessura; quindi la caratterizzazione del criterio di crescita della fessura a basse velocità è molto difficoltoso. Questo può essere apprezzato attraverso l'esame

di un piccolo incremento di velocità con un piccolo cambiamento del fattore di intensificazione delle tensioni, in modo particolare nei materiali fragili. La grande dispersione di dati ottenuti in questo regime ha indotto alla formulazione di un postulato relativo ad un criterio separato per l'arresto della fessura: la resistenza dinamica dell'arresto della fessura è definita come il più piccolo valore del fattore di intensificazione delle tensioni dinamiche per la quale la crescita della fessura non può essere mantenuta; perciò la crescita del difetto si arresta quando si verifica la seguente relazione:

$$K_I(t) < K_{Ia}(T) \quad (2.9.5)$$

Nelle applicazioni reali i progetti più conservativi possono utilizzare l'Eq.(2.9.5), così facendo si assicura che in qualunque condizione di carico il fattore di intensificazione delle tensioni non possa superare la resistenza all'arresto della fessura. Una repentina crescita della fessura durante la vita di una struttura provoca complicazioni nel calcolo dei fattori di intensificazione delle tensioni e nella determinazione del criterio di crescita dinamica della fessura. Con la formulazione dei tre criteri separati di innesco, crescita e arresto per la rapida propagazione della fessura, l'analisi dinamica può essere effettuata per valutare l'integrità strutturale. Il processo è mostrato nella **fig. 2.11** : l'innesco della fessura avviene per un valore  $K_{Ia}(T, \dot{K})$ ; la soluzione allora salta nel punto di coordinate  $(v/C_R, K_{ID})$  sulla curva di crescita della fessura dinamica e si arresta se il fattore di intensificazione delle tensioni raggiunge  $K_{Ia}(T)$ .

# CAPITOLO 3

## Modellazione ed analisi dei fenomeni di propagazione dinamica

### 3.1 Introduzione ai fenomeni di propagazione dinamica

I materiali compositi sono frequentemente caratterizzati da modi di danneggiamento di natura interfacciale, che comportano una sostanziale riduzione dell'integrità strutturale del laminato, determinando modalità e meccanismi di rottura di tipo catastrofico. Da un punto di vista meccanico, molte osservazioni sperimentali su strutture in materiale composito del tipo multistrato hanno evidenziato che l'evolversi dei difetti interfacciali è un problema tipicamente dinamico in cui sia le caratteristiche inerziali che l'influenza temporale influenzano fortemente l'evoluzione del processo (*Freund, 1990*). In particolare, le velocità misurate durante l'evoluzione delle fessure interfacciali presentano velocità di crescita paragonabili con quelle delle onde di Rayleigh del materiale. Inoltre, il comportamento di propagazione della fessura è fortemente dipendente dalla velocità di applicazione dei carichi esterni, che produce una amplificazione notevole dei parametri di frattura (*Freund et. al., 1986*).

Una breve revisione della letteratura denota che i meccanismi interfacciali di propagazione della fessura sono frequentemente analizzati per mezzo di modelli semplificati, sviluppati in un contesto statico o stazionario. In tale ambito, la dipendenza temporale nella descrizione del processo di avanzamento viene trascurata e quindi la soluzione è basata su metodi di tipo quasi-statico, trascurando, a priori, gli effetti inerziali del complesso strutturale (*Hutchinson Suo, 1992*). L'analisi dei processi di crescita interfacciale può essere simulata facendo riferimento a modelli di avanzamento di natura stazionaria, in cui il modo del crack viene assunto a velocità costante. In tale contesto, si assume un sistema di riferimento mobile fissato all'apice del difetto, in funzione del quale è possibile descrivere la dipendenza temporale della soluzione in termini di variabili spaziali,

introducendo, nelle equazioni di governo relazioni differenziali del tipo ordinario (Bruno et al., 2009; Greco Lonetti, 2009).

Dal punto di vista sperimentale, le principali osservazioni fanno riferimento allo studio del percorso di difetti preesistenti ed a materiali del tipo monolitico. In tale contesto, si è riscontrato che i materiali presentano limitate velocità di propagazione del crack, in ragione del fatto che all'interno della struttura si hanno fenomeni di micro e macro branching della fessura (Lambros Rosakis, 1995; Rosakis et al., 1998). Nell'ambito dei materiali compositi, lo studio dei fenomeni di crescita interfacciale non è stato sviluppato in modo esteso. Infatti, diversi studi sperimentali fanno riferimento principalmente a condizioni di carico di tipo statico oppure condizionate da basse velocità di propagazione della fessura (Barbero, 2007). Tipicamente le strutture in materiale composito sottoforma di laminato multistrato, durante il processo di assemblaggio, sono caratterizzate da zone interfacciali, in cui si possono sviluppare, a causa della fabbricazione stessa, difetti o microfratture interne. Tali discontinuità interne determinano nei laminati piani preferenziali in cui possono formarsi ed evolvere fenomeni di delaminazione. Le limitate capacità di resistenza lungo le zone di interfaccia fanno sì che tali modalità di danneggiamento caratterizzano esclusivamente una zona prossima all'interfaccia, escludendo quindi i fenomeni di diramazione lungo lo spessore. Inoltre, essendo la fessura confinata a svilupparsi nelle zone interfacciale, le velocità di avanzamento riscontrate risulta abbastanza superiori rispetto a quelle dei materiali monolitici con la possibilità anche di raggiungere gli intervalli di propagazione in regime ipersonico (Rosakis, 2002).

Da un punto di vista computazionale, l'analisi dei fenomeni di delaminazione richiede una descrizione dettagliata dell'intorno dell'apice della fessura, perché in tali zone si verificano elevati campi e gradienti di velocità e di tensione. In tale ambito sono rare le soluzioni analitiche, che sostanzialmente si riferiscono a semplici geometrie e condizioni di carico (Bruno et al., 2009). In letteratura, la valutazione del percorso incrementale è stata sviluppata facendo riferimento a diverse tecniche come: La tecnica di rilascio nodale (Yagawa et al., 1977; Keegstra et al., 1978), Il metodo della chiusura virtuale (Xie Biggers, 2007) I modelli coesivi d'interfaccia (Park et al., 2009; Iannucci, 2006). Nel presente lavoro si è sviluppato un modello generale basato sui concetti classici della Meccanica della Frattura e sulla metodologia delle mesh mobili. Nel primo ambito, sono state sviluppate formulazioni analitiche, ricavando espressioni delle componenti modali in ambito non stazionario, facendo uso della tecnica di decomposizione modale dell'integrale

J. Tale formulazione ha consentito contrariamente agli attuali metodi di calcolo esistenti in letteratura, di ricavare in modo diretto le componenti modali dell'energia di rilascio evitando le complessità di analisi derivanti dagli elevati gradienti delle variabili di tensione e di deformazione presenti all'apice del difetto.

### 3.2 Formulazione del modello laminato

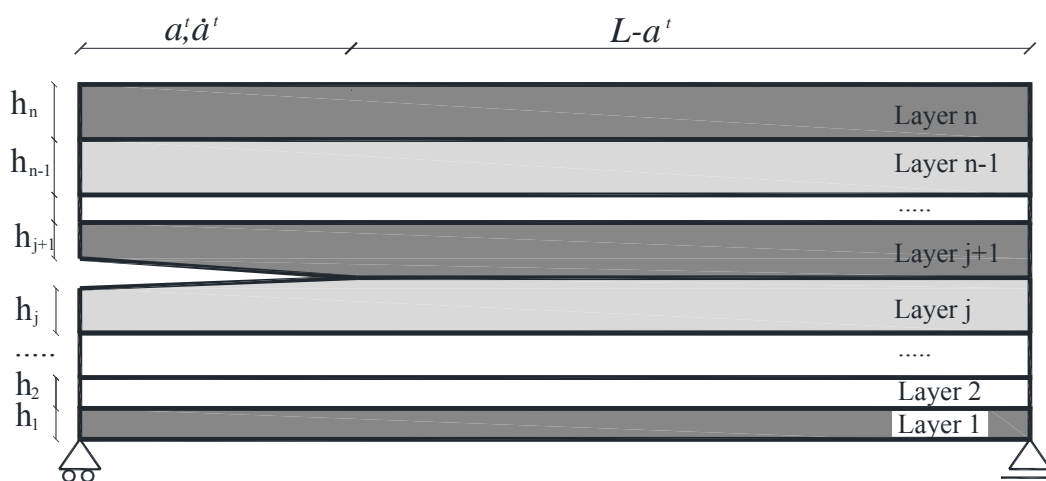
I compositi sono fabbricati in fogli sottili, generalmente definiti come "lamine". Un insieme di più lamine tra loro incollate e diversamente orientate forma un laminato. I laminati presentano proprietà meccaniche differenti, in relazione alla diversa orientazione delle lamine, che è, opportunamente, scelta in funzione del campo di sollecitazione applicato e del criterio progettuale adottato. In particolare, le lamine sono posizionate secondo varie orientazioni in modo tale che il rinforzo (le fibre) sia presente lungo tutte le direzioni di carico, tenendo conto del fatto che un laminato composito possiede proprietà maggiori nella direzione di orditura delle fibre. Ciò conferisce all'elemento strutturale un'adeguata rigidità e capacità di resistenza in tutte le direzioni. I laminati in materiale composito convenzionale presentano spessori ridotti rispetto alle dimensioni in pianta e di conseguenza, lo studio delle strutture laminate può essere eseguito tramite modellazioni bidimensionali. Il modello strutturale, riportato in **fig.3.1**, si basa su uno schema più livelli in cui è considerato il laminato come un insieme di lamine ortotrope a seconda del prescritto lay-up di configurazione. Il laminato è caratterizzato da una fessura iniziale, arbitrariamente posizionata lungo lo spessore e parallelamente all'asse longitudinale del laminato. Le relazioni tra le tensioni e le deformazioni nel piano della lamina e lungo le direzioni interlaminari, nel riferimento locale assumono rispettivamente le seguenti espressioni:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}^n \quad (3.2.1)$$

in cui gli indici 1,2,6 si riferiscono alla direzione longitudinale (1), trasversale (2) e tangenziale (6),  $[C]$  è la matrice di rigidità ridotta avente le seguenti componenti:



$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\
 c_{12} = c_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\
 c_{22} &= \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\
 c_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$



**Figura 3.1** Rappresentazione geometrica del laminato

Con riferimento alla **fig.3.1**, le equazioni di governo per la *i*-esima lamina si possono ottenere dalle equazioni di equilibrio nella forma indefinita e particularizzando le stesse al comportamento ortotropo descritto dalle Eq. (3.2.1):

$$\begin{aligned}
 c_{11}^i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial X_1^2} + c_{12}^i \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial X_2 \partial X_1} + c_{66}^i \left( \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial X_2 \partial X_1} + \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial X_1^2} \right) - \mu \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} &= 0 \\
 c_{22}^i \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial X_2^2} + c_{12}^i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial X_2 \partial X_1} + c_{66}^i \left( \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial X_1 \partial X_2} \right) - \mu \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Al fine di ricostruire il comportamento del laminato nella sua totalità, è necessario introdurre opportune equazioni di compatibilità tra le lamine. In particolare, la simulazione della perfetta adesione tra le facce non delaminate e il contatto interfacciale nelle porzioni di interfaccia soggette a distacchi e delaminazione può essere simulata mediante la tecnica dei moltiplicatori lagrangiani imponendo le seguenti relazioni (**fig.3.2**):

$$\begin{aligned} \Delta u_1^i = u_1^{i+1} - u_1^i = 0 \quad \Delta u_2^i = u_2^{i+1} - u_2^i = 0 & \quad (\text{interfacce non delaminate}) \\ \Delta u_2^i = u_2^{i+1} - u_2^i > 0 & \quad (\text{interfacce delaminate}) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

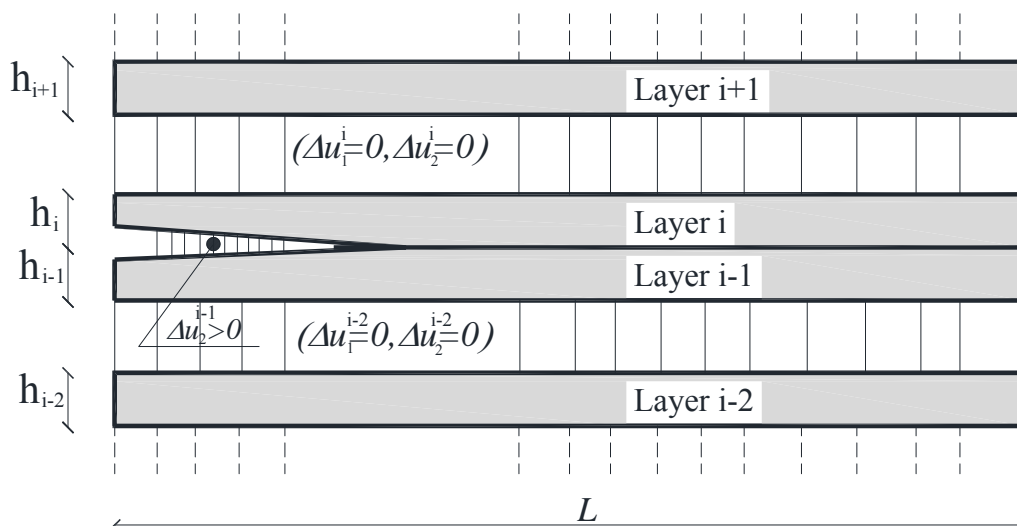


Figura 3.2 Rappresentazione delle condizioni di vincolo degli strati all'interno del laminato

### 3.3 L'integrale J in campo dinamico

La valutazione dell'energia di rilascio è stata effettuata facendo riferimento ad una formulazione basata sulla metodologia di decomposizione modale dell'integrale J. In particolare, l'energia di rilascio è definita come la quantità di flusso di energia meccanica richiesta per un determinato avanzamento unitario del crack, secondo seguente espressione:

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Omega} \left[ (W + K) n_1 - t \frac{\partial u}{\partial X} \right] dS \quad (3.3.1)$$

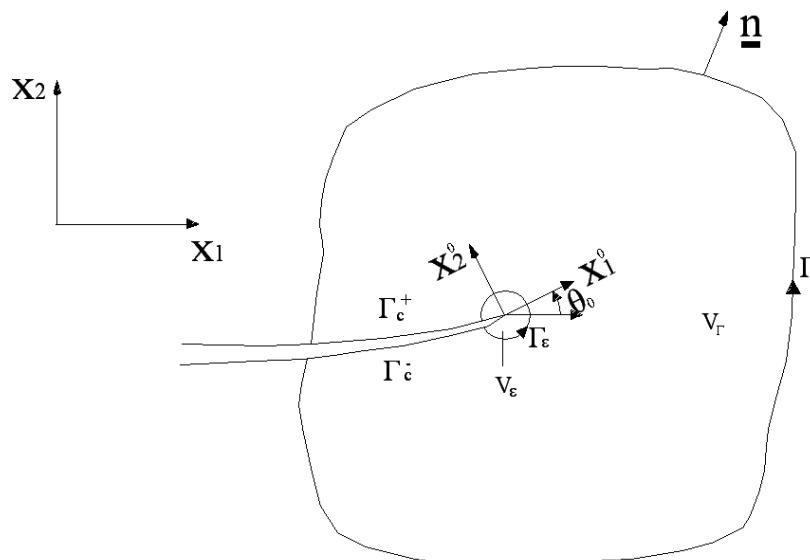
dove  $n_1$  è la componente lungo  $X_1$  del vettore normale unitario lungo il circuito  $\Omega$ ,  $W$  è la densità di energia di deformazione e  $K$  è l'energia cinetica. Da un punto di vista teorico e computazionale, l'integrale  $J$  statico possiede le seguenti caratteristiche:

1) da un punto di vista fisico esso rappresenta l'energia di rilascio;

2) possiede le proprietà di un integrale indipendente dal percorso e fornisce un valore univoco dell'energia di rilascio per un generico percorso che circonda l'apice della fessura;

3) può essere correlato ai fattori di intensificazione degli sforzi restringendo il percorso di integrazione all'apice della fessura.

Nell'ambito della *dinamica della frattura*, Nishioka e Atluri (1983) hanno derivato l'integrale  $J$  dinamico, indicato con  $J'$ , che possiede le tre caratteristiche precedentemente illustrate, a differenza di  $J$ ,  $J'$  possiede le proprietà di indipendenza del percorso. Si consideri un processo dinamico di propagazione di una fessura che si manifesta all'interno di un solido elastico così come mostrato in **fig.3.3**. Le componenti dell'integrale  $J'$  dinamico lungo gli assi globali possono esprimersi come:



**Figura 3.3** Rappresentazione generica dell'apice della fessura

$$J'_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} [(W + K)n_k - t_i \cdot u_{i,k}] dS \quad (3.3.2)$$

$$J'_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} [(W + K)n_k - t_i \cdot u_{i,k}] dS + \int_{V_\Gamma - V_\epsilon} [(\rho \ddot{u}_i - f_i)u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] dV \right\} \quad (3.3.3)$$

dove  $u_i, t_i, f_i, n_k$  e  $\rho$  denotano rispettivamente spostamenti, trazioni, forze di volume, direzione della normale esterna e densità di massa,  $W$  e  $K$  sono, rispettivamente, la densità

di energia di deformazione e l'energia cinetica e con il simbolo  $(\ )_{,k} = \partial(\ ) / \partial X_k$  si indica la derivata parziale di una variabile rispetto al  $k$ -esimo asse del sistema di riferimento globale di coordinate  $X_1$  ed  $X_2$ . Inoltre, i percorsi degli integrali sono definiti in **fig.3.3**.  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\Gamma$  e  $\Gamma_c$  denotano rispettivamente un percorso di campo vicino alla fessura, un percorso di campo lontano alla fessura ed un percorso lungo le facce del crack,  $V_\Gamma$  è la regione circondata da  $\Gamma$ , mentre  $V_\varepsilon$  è la regione circondata da  $\Gamma_\varepsilon$ .

Le componenti dell'integrale  $J$  dinamico, proiettate sugli assi del sistema di riferimento con origine nell'apice della fessura, possono essere calcolate adottando la seguente trasformazione di coordinate:

$$J_i^0 = \alpha_{ik}(\theta_0) J_k' \quad (3.3.4)$$

dove  $\alpha_{ik}$  è il tensore che esprime la trasformazione di coordinate. La componente tangenziale dell'integrale  $J_i^0$  dinamico corrisponde alla variazione dell'energia potenziale per unità di lunghezza della fessura definita come *energia di rilascio dinamica*. Le caratteristiche essenziali dell'*integrale  $J'$*  possono essere così riassunte:

1) *fisicamente esso rappresenta l'energia di rilascio  $G$  in ambito dinamico (Nishioka e Atluri, 1983);*

2) *facendo riferimento al percorso di campo lontano dalla fessura,  $J'$  risulta essere indipendente dal percorso (Nishioka e Atluri, 1983);*

3) *con riferimento al percorso di campo vicino alla fessura,  $J'$  non varia al variare della forma del percorso infinitesimo posto nelle immediate vicinanze della fessura (Nishioka, 1994).*

Tuttavia, nel ambito dell'analisi numerica, le grandezze calcolate sul percorso lontano dall'apice della lesione sono di solito utilizzate per la determinazione dell'integrale  $J$  dinamico. In questo caso, facendo il limite per  $\varepsilon$  che tende a zero si può utilizzare la seguente espressione:

$$J'_k = \oint_{\Gamma+\Gamma_c} [(W+K)n_k - t_i \cdot u_{i,k}] dS + \int_{V_\Gamma} [(\rho\ddot{u}_i - f_i)u_{i,k} - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,k}] dV \quad (3.3.5)$$

da cui è immediato verificare che :

$$\oint_{\Gamma_c} [(W+K)n_k - t_i \cdot u_{i,k}] dS = 0 \quad (3.3.6)$$

Pertanto, l'integrale circuitale sulle facce dell'apice della fessura è nullo, da cui emerge che l'equazione (3.3.5) può essere riscritta nelle seguente forma:

$$J'_k = \oint_{\Gamma} [(W+K)n_k - t_i \cdot u_{i,k}] dS + \int_{V_\Gamma} [(\rho\ddot{u}_i - f_i)u_{i,k} - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,k}] dV \quad (3.3.7)$$

L'energia di rilascio totale e le corrispondenti componenti modali sono calcolate mediante la *metodologia di decomposizione* che sfrutta la definizione basata sull'espressione dell'integrale J (vedi cap.2 sez.2, Greco Lonetti, 2009; Lonetti, 2010; Lonetti, 2011). In particolare, l'integrale  $J'$  è scomposto in una forma additiva, la quale coinvolge una decomposizione diretta dell'energia di rilascio. L'integrale J dinamico è quindi ottenuto sommando tra loro un termine dipendente dai *campi elastici simmetrici*  $J_S$  ed un secondo termine legato invece ai *campi elastici anti-simmetrici*  $J_{AS}$ . La simmetria e l'anti-simmetria sono da intendersi con riferimento al piano che contiene il difetto (fessura). In notazione matematica, la suddetta metodologia di decomposizione assume la seguente forma:

$$J = J_S + J_{AS} \quad (3.3.8)$$

dove  $J_S$  e  $J_{AS}$  coincidono nel caso bidimensionale, rispettivamente, con  $J_I = G_I$  e  $J_{II} = G_{II}$ , ovvero con gli integrali calcolati con riferimento al Modo I (*Modo di Apertura*) e al Modo II (*Modo di scorrimento*). Per completezza di esposizione si riportano le espressioni dell'integrale J in ambito dinamico relativamente al Modo I ed al Modo II (Greco e Lonetti, 2009; Lonetti, 2010; Lonetti, 2011):

$$J_I = G_I = \oint_{\partial\Omega} \left[ (W^S + K^S) n_1 - \sigma_{ij}^S n_j \frac{\partial u^S}{\partial x} \right] ds + \int_{\Omega} \left[ \rho (\ddot{u}^S - f^S) \nabla u - \rho \dot{u}^S \nabla \dot{u}^S \right] dA \quad (3.3.9)$$

$$J_{II} = G_{II} = \oint_{\partial\Omega} \left[ (W^{AS} + K^{AS}) n_1 - \sigma_{ij}^{AS} n_j \frac{\partial u^{AS}}{\partial x} \right] ds + \int_{\Omega} \left[ \rho (\ddot{u}^{AS} - f^{AS}) \nabla u - \rho \dot{u}^{AS} \nabla \dot{u}^{AS} \right] dA \quad (3.3.10)$$

### 3.4 Criterio dinamico di avanzamento della frattura

Durante il processo di delaminazione, la resistenza alla frattura di un materiale è definita come *resistenza dinamica alla frattura*  $G_D$ , la quale, in generale, non è una quantità costante. Il parametro  $G_D$  rappresenta la resistenza di un materiale all'avanzamento della fessura. L'intensità di  $G_D$ , per particolari valori della temperatura di esercizio, dipende dalla velocità di avanzamento della fessura e dalle proprietà intrinseche del materiale. Inoltre, la resistenza dinamica alla frattura  $G_D$  tiene conto degli effetti plastici, inerziali e di velocità connessi al fenomeno della delaminazione. In generale, i risultati sperimentali disponibili in letteratura nell'ambito della propagazione dinamica della frattura sono limitati. Da numerose sperimentazioni eseguite in ambito dinamico su materiali metallici e polimerici (*Kobayashi Dally, 1980; Rosakis Freund, 1984; Rosakis et al., 1989*), è emerso che la soglia di resistenza del materiale all'avanzamento della fessura può in parte dipendere dal valore istantaneo della velocità di propagazione. Questi risultati, in pieno accordo con i casi trattati in letteratura da vari autori, suggeriscono che  $G_D$  è quasi indipendente dalla velocità per basse velocità di propagazione della fessura. Infatti, il valore di  $G_D$  può essere influenzato dalla suddetta velocità di propagazione, solo quando quest'ultima supera una soglia prestabilita. Per poter ricavare un'equazione in grado di descrivere adeguatamente l'intero processo di delaminazione, è necessaria la formulazione di un criterio di avanzamento in ambito dinamico. Tipicamente siffatti criteri possono esprimersi mediante relazioni che coinvolgono i fattori di intensificazione degli sforzi oppure l'energia di rilascio e la velocità di propagazione della fessura. Nella modellazione proposta, il criterio di frattura (*Kanninen Popelar, 1985*), è basato su una legge di evoluzione di tipo logaritmica governata da tre parametri fondamentali. In particolare, tale criterio dipende, per bassi livelli di velocità di avanzamento della fessura, dal valore

iniziale dell'energia di rilascio, la quale è solitamente prossima alla resistenza alla frattura del materiale. Inoltre, all'aumentare della quantità di energia rilasciata durante il processo di delaminazione, la velocità con cui si propaga la fessura raggiunge in modo asintotico la velocità  $V_R$  di Rayleigh  $V_R$ .

Il criterio di resistenza nei riguardi dell'avanzamento della cricca interfacciale può essere descritto dalla seguente relazione:

$$G_D = \frac{G_0}{1 - \left(\frac{\dot{a}}{V_l}\right)^m} \quad (3.4.1)$$

dove  $G_0, V_l$  ed  $m$  sono delle costanti dipendenti dal tipo di materiale che possono essere determinate empiricamente. Tali costanti rappresentano particolari variabili a cui si può dare un evidente significato fisico. In particolare,  $V_l$  rappresenta la velocità limite che può essere posta tipicamente pari a  $V_R$ , i.e. velocità di Rayleigh del materiale;  $G_0$  è la resistenza di innesco all'avanzamento della fessura, vicina al valore critico in ambito statico ed  $m$  rappresenta un fattore adimensionale che definisce l'ordine di singolarità nell'evoluzione del criterio di fratture. Pertanto, l'Eq. (3.5.1) di particolare significato ingegneristico, può essere identificata in funzione di dati noti e facilmente reperibili dalla letteratura in funzione del materiale con cui si intende realizzare il laminato.

Nell'ambito dei materiali compositi, in ragione dell'eterogeneità del materiale il processo di avanzamento dipende fortemente dai rapporti modali dell'energia di rilascio (*Ravi-Chandar, 2004*). La valutazione di un criterio dinamico in modo misto è stata effettuata in analogia a quanto riportato nell'Eq. (3.4.1) relativa al caso generale, assumendo che le singole resistenze modali siano governate dalle seguenti relazioni::

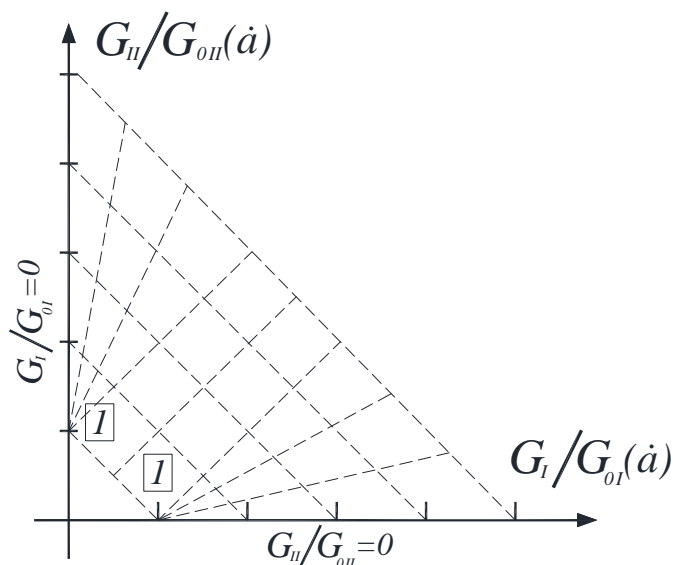
$$G_{ID} = \frac{G_{0I}}{1 - \left(\frac{\dot{a}}{V_l}\right)^m} \quad G_{IID} = \frac{G_{0II}}{1 - \left(\frac{\dot{a}}{V_l}\right)^m} \quad (3.4.2)$$

in cui  $G_{0I}, G_{0II}$  corrispondono alla resistenza iniziale delle componenti modali. La valutazione delle condizioni di crescita è stata simulata introducendo un funzione di

frattura definita dai rapporti tra i valori attuali delle componenti modali dell'energia di rilascio ed i corrispondenti valori critici, le cui curve di livello sono riportate in **fig.3.4**:

$$g_f = \frac{G_I}{G_{ID}(\dot{a})} + \frac{G_{II}}{G_{IID}(\dot{a})} - 1 \leq 0 \quad (3.4.3)$$

dove  $G_I$  e  $G_{II}$  sono le componenti dell'energia di rilascio relative al modo fondamentale di frattura I e II, ed  $\dot{a}$  rappresenta la velocità di avanzamento dell'apice della fessura. Il processo di delaminazione ha inizio nel momento in cui la diseuguaglianza (3.4.3) risulta pari a zero e si mantiene tale durante l'evoluzione del difetto. Al contrario, la funzione di frattura è minore di zero, il crack non presenta alcun incremento posizionale.

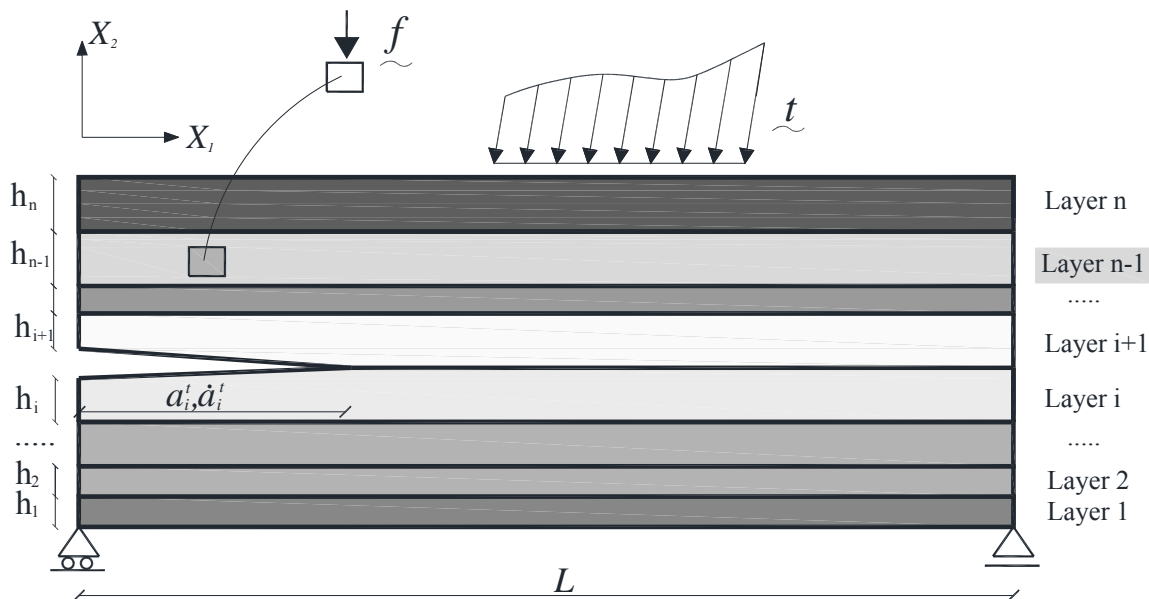


**Figura 3.4.** Rappresentazione del criterio di avanzamento

### 3.5 Equazioni di governo nelle variabili strutturali

Si presentano di seguito, nell'ipotesi di piccole deformazioni, le equazioni di governo per un modello bidimensionale basato su una formulazione di stato piano di tensione. Per descrivere il comportamento meccanico del laminato, si adotta una *formulazione multistrato*. In particolare, la struttura in composito è modellata assemblando una serie di strati elastici ortotropi, connessi fra loro mediante interfacce perfette, tali, cioè, da ripristinare la continuità di ciascuna lamina, ed *interfacce imperfette*, atte, invece, a simulare la presenza di difetti iniziali (vedi **fig.3.5**).





**Figura 3.5.** Rappresentazione del laminato in condizioni generiche di carico

Le equazioni di governo, riferite alla configurazione materiale, possono essere scritte attraverso il principio di Hamilton scritto per ognuna delle  $n$  lamine, tenendo in considerazione per ciascuna lamina, i lavori virtuali eseguiti dalle forze esterne, interne ed inerziali:

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} \underline{\sigma}^i \delta \nabla \underline{u}^i dV + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho \ddot{\underline{u}} \delta \underline{u} dV = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \underline{t}_i \delta \underline{u} dA + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \underline{f}_i \delta \underline{u} dV \quad (3.5.1)$$

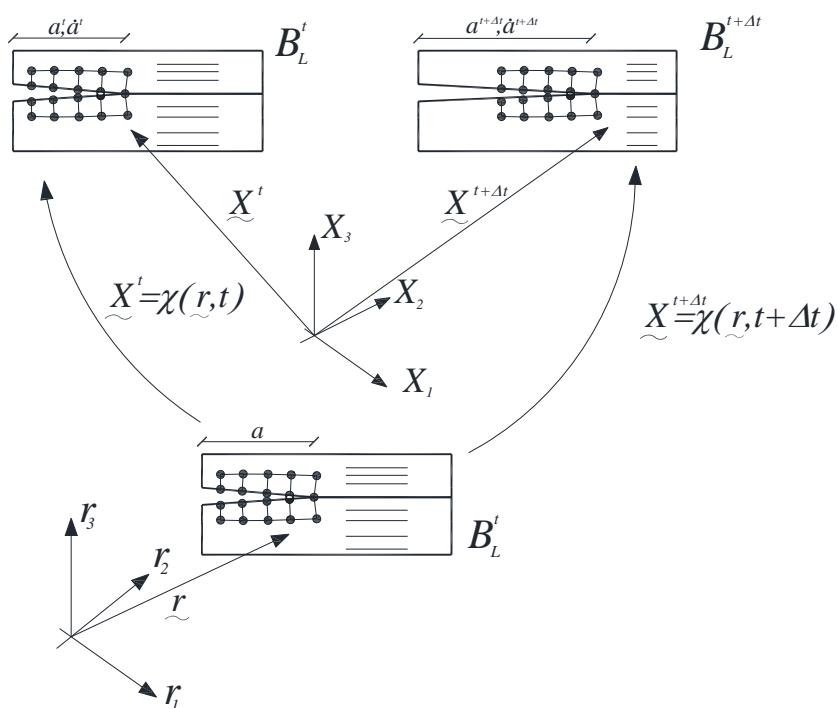
dove  $\underline{u}$  è il vettore spostamento,  $\underline{\sigma}$  è il tensore degli sforzi di Cauchy,  $\underline{t}$  è il vettore delle forze di trazione agenti sulle superfici libere,  $\underline{f}$  è il vettore delle forze di volume,  $dV$  e  $dA$  sono, rispettivamente, il volume e l'area del composito nella configurazione materiale soggetti all'azione dei carichi esterni. Conformemente alla formulazione *ALE*, il moto del corpo è descritto nella configurazione materiale e dunque l'Eq.(3.5.1) dovrebbe essere riscritta per tenere conto della trasformazione di coordinate tra il sistema di riferimento lagrangiano e quello referenziale. Si vuole analizzare nel dettaglio l'Eq.(3.5.1) il primo termine può essere esplicitato usando l'Eq.(3.5.2) di trasformazione tra il sistema di riferimento materiale e quello referenziale come mostrato in **fig.3.6**:

$$\nabla_{\underline{\chi}} \underline{u} = \nabla_{\underline{r}} \underline{u} \underline{J}^{-1} \tag{3.5.2}$$

dove la matrice  $\underline{J}$  rappresenta la matrice di trasformazione tra i sistemi di riferimento materiale  $\underline{\chi}$  referenziale  $\underline{r}$ . In particolare, sostituendo, l'Eq.(3.5.2) nella Eq.(3.5.1), si ottiene la seguente espressione :

$$\sum_{i=1}^n \int_{V_i} \underline{\sigma}^i \delta \underline{\nabla} \underline{u}^i dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \underline{C}^i (\nabla_{\underline{r}} \underline{u}^i \underline{J}^{-1}) \delta (\nabla_{\underline{r}} \underline{u}^i \underline{J}^{-1}) \det(\underline{J}) dV_r \tag{3.5.3}$$

dove  $V_r$  è il volume nella configurazione referenziale,  $\underline{C}$  è la matrice dei moduli elastici contenente i coefficienti di rigidezza definiti dall'Eq. (3.2.1) dell'*i-esima* lamina di cui si compone la struttura laminata.



**Figura 3.6** Rappresentazione del laminato nello spazio temporale  $\Delta t$

Il lavoro fatto dalle forze inerziali, che compare al primo membro dell'Eq.(3.5.1), richiede il calcolo della derivata seconda dello spostamento rispetto alla variabile temporale. Quest'ultima può valutarsi facendo riferimento all'equazione riportata in precedenza nel Cap.2, da cui si ottiene la seguente relazione:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{u}' - \dot{X} \frac{d}{dX} \underline{u}(X, t) \quad (3.5.4)$$

Applicando in modo ricorsivo l'Eq.(3.5.4) al campo di velocità è possibile ottenere l'espressione generale del campo di accelerazione:

$$\ddot{\underline{u}} = \underline{u}'' - 2\nabla_x \underline{u}' \cdot \underline{X}' - \nabla_x \underline{u} \cdot X'' + \nabla_x (\nabla_x \underline{u}) \underline{X}' \underline{X}' + \nabla_x \underline{u} \nabla_x \underline{X}' \underline{X}' \quad (3.5.5)$$

Inoltre, introducendo la legge di trasformazione spaziale definita dall'Eq.(3.5.4) l'espressione generale nel campo di accelerazione nella configurazione referenziale è definita dalla seguente relazione:

$$\ddot{\underline{u}} = \underline{u}'' - 2\nabla_r \underline{u}' \cdot J^{-1} \underline{X}' - (\nabla_r \underline{u} J^{-1}) \cdot X'' + \nabla_r (\nabla_r \underline{u} J^{-1}) J^{-1} \underline{X}' \underline{X}' + \nabla_r \underline{u} J^{-1} \cdot (\nabla_r \underline{X}' J^{-1}) \underline{X}' \quad (3.5.6)$$

Sostituendo l'espressione di  $\ddot{\underline{u}}$  definita nell'Eq.(3.5.6) nell' Eq. (3.5.1), il lavoro eseguito dalle forze inerziali, può essere riscritto secondo la seguente espressione

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho \ddot{\underline{u}} \delta \underline{u} dV &= \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho \left[ \underline{u}'' - 2\nabla_r \underline{u}' J^{-1} \cdot \underline{X}' - (\nabla_r \underline{u} J^{-1}) \cdot X'' \right] \delta \underline{u} \det J dV_r + \\ &\sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho \left[ \nabla_r (\nabla_r \underline{u} J^{-1}) J^{-1} \underline{X}' \underline{X}' + \nabla_r \underline{u} J^{-1} (\nabla_r \underline{X}' J^{-1}) \underline{X}' \right] \delta \underline{u} \det J dV_r \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Per quanto riguarda il secondo membro dell'Eq.(3.5.1) contenente il lavoro dei carichi esterni, la sua definizione nella configurazione referenziale, richiede l'uso dell'Eq.(3.5.2), da cui emerge la seguente espressione:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} t_i \delta \underline{u} dA + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f_i \delta \underline{u} dV = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \underline{t}^i \delta \underline{u} \det(\bar{J}) d\Omega_r + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f^i \delta \underline{u} \det(J) dV_r \quad (3.5.8)$$

dove  $\det(\bar{J})$  è il determinante di una metrica scalare che rappresenta il rapporto tra i differenziali in termini di area ed  $\Omega_r$  è l'area caricata nella configurazione referenziale.

Pertanto, considerando le sostituzioni definite dall'Eq. (3.5.3), (3.5.7) e (3.5.8) nella forma variazionale del problema strutturale, i.e. Eq.(3.5.1), si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{V_{r_i}} \tilde{C}^i (\nabla_{\tilde{r}} \tilde{u}^i J^{-1}) \delta (\nabla_{\tilde{r}} \tilde{u}^i J^{-1}) \det(J) dV_r + \\
& \sum_{i=1}^n \int_{V_{r_i}} \rho [\tilde{u}'' - 2 \nabla_{\tilde{r}} \tilde{u}' J^{-1} \cdot \tilde{X}' - (\nabla_{\tilde{r}} \tilde{u} J^{-1}) \cdot \tilde{X}'' + \\
& + \nabla_{\tilde{r}} (\nabla_{\tilde{r}} \tilde{u} J^{-1}) J^{-1} \cdot \tilde{X} \tilde{X}' + \nabla_{\tilde{r}} \tilde{u} J^{-1} \cdot (\nabla_{\tilde{r}} \tilde{X} J^{-1}) \tilde{X}'] \delta \tilde{u} \det(J) dV_r = \\
& = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \tilde{t}^i \delta \tilde{u} \det(\bar{J}) d\Omega_r + \sum_{i=1}^n \int_{V_{r_i}} \tilde{f}^i \delta \tilde{u} \det(J) dV_r
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

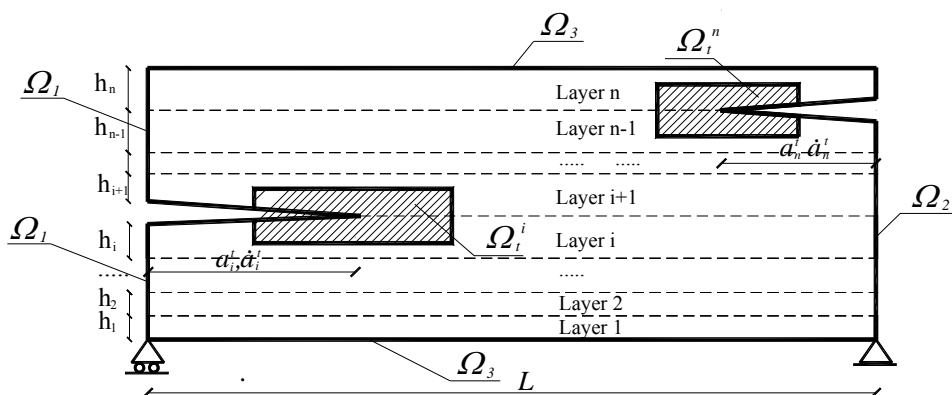
### 3.6 Equazioni di governo del modello ALE

Nell'ambito della metodologia *ALE* il reticolo di calcolo è libero di muoversi in modo arbitrario rispetto al continuo in esame. In particolare, gli spostamenti del reticolo di calcolo potrebbero ridurre le distorsioni degli elementi finiti e consentire i cambiamenti di geometria prodotti dall'avanzamento della fessura. E' importante notare che le equazioni di equilibrio fornite dalla Eq.(3.5.9) dipendono dagli spostamenti dei punti del reticolo. Tuttavia, per calcolare gli spostamenti dei punti del reticolo con il quale è stato discretizzato l'intero dominio, è richiesto un metodo che sia in grado di aggiornare continuamente il reticolo di calcolo. Lo scopo della tecnica di regolarizzazione del reticolo consiste nel consentire gli spostamenti della zona in corrispondenza dell'apice della fessura mantenendola, durante l'intera fase di calcolo, quanto più regolare possibile. Nella modellazione proposta, il processo di delaminazione è in accordo con il criterio di avanzamento che fornisce l'energia di rilascio o l'energia di rilascio relativa ai modi componenti [vedi par. 3.4]. Lo spostamento della fessura è stato definito mediante il criterio di avanzamento; in corrispondenza dell'apice della fessura è applicata una velocità prescritta e di conseguenza si attiva il processo di delaminazione. Lo spostamento del reticolo all'interno del dominio e sui contorni del corpo, interessati dal fenomeno dell'avanzamento dovrebbe essere quanto più regolare possibile in modo da evitare la distorsione della griglia di calcolo e le irregolarità degli elementi finiti. Come è noto, una distorsione eccessiva degli elementi della griglia potrebbe ridurre eccessivamente l'accuratezza dei risultati e la comprensione dell'intero processo di avanzamento. Nella

formulazione proposta, si utilizza un metodo variazionale regolare basato sull'approccio alla Winslow, in cui gli spostamenti orizzontali e verticali dei punti del reticolo facendo riferimento alla  $i$ -esima lamina, indicati rispettivamente con  $\Delta X_1^i = X_1^i - r_1^i$  e  $\Delta X_2^i = X_2^i - r_2^i$  sono calcolati risolvendo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 \Delta X_1^i &= 0 \\ \nabla_x^2 \Delta X_2^i &= 0 \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Per riprodurre le condizioni di avanzamento della fessura è necessario introdurre le condizioni al contorno interne ed esterne. Nei modelli utilizzati nel presente lavoro di tesi si sono considerati laminati costituiti da soli due strati, in generale però, con riferimento alla geometria riportata in **fig. 3.7**, le condizioni al contorno esterne devono essere scritte per riprodurre lo spostamento dei reticoli, il quale sono fissati nella direzione verticale ed orizzontale in corrispondenza di tutti i contorni del corpo ( $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_i^i, \Omega_i^n$ ).



**Figura 3.7** Rappresentazione della geometria e dei contorni nel modello

In particolare, la simulazione dei meccanismi di evoluzione interfacciale richiede opportune condizioni al contorno di tipo interno ed esterno. Nella presente esposizione, senza perdita di generalità e per semplicità di esposizione si farà riferimento ad un modello di laminato basato soggetto essenzialmente a due delaminazioni preesistenti (**fig.3.7**). In particolare, le condizioni al contorno devono essere scritte in modo da riprodurre il moto della fessura nel rispetto delle seguenti condizioni:

1) gli spostamenti longitudinali e trasversali degli elementi verticali i.e.  $\Delta X_1^i$  and  $\Delta X_2^i$ , sono nulli;

2) gli spostamenti verticali delle linee orizzontali sono nulli, i.e.  $\Delta X_2^i = 0$ , mentre quelli orizzontali sono liberi di muoversi.

Inoltre, per simulare l'avanzamento della fessura, ci si riferisce al criterio di avanzamento in modo misto, la cui espressione è proposta nell'Eq.(3.4.3). Pertanto, per evitare le grandi distorsioni del reticolo nelle zone in cui si calcolano l'energia di rilascio e le sue componenti modali, si assume che le proprietà cinematiche non varino all'interno di una zona di estensione limitata che circonda l'apice della fessura. In tale zona, i.e.  $\Omega_t^i$ , gli spostamenti sono praticamente descritti da un moto rigido. Per far sì che l'assunzione dell'intorno della fessura si muova rigidamente con velocità costante è necessaria che la zona intorno alla cricca sia abbastanza piccola e che la mesh sia molto fitta. Ciò consente di evitare irregolarità nella geometria ed inaccurately nella valutazione delle componenti modali, essenzialmente ottenute mediante procedura di integrazione sulla porzione di area  $\Omega_t^i$ . Con riferimento al modello proposto schematizzato in **fig.3.7**, le condizioni al contorno possono essere così sintetizzate:

$$\begin{aligned}
 & \left( \Delta X_1^i = 0, \Delta X_2^i = 0 \right) \quad \text{on } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\
 & \Delta X_2^i = 0 \quad \text{on } \Omega_3, \\
 & \Delta X_1^{ii} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{if } g_f^i < 0 \quad \text{on } \Omega_t^i, \\
 & \Delta X_1^{ii} = c_t^i \quad \Leftrightarrow \text{if } g_f^i \geq 0 \quad \text{on } \Omega_t^i, \\
 & \Delta X_2^{ii} = 0 \quad \text{on } \Omega_t^i \\
 & \Delta X_1^i(0) = 0, \Delta X_2^i(0) = 0, \Delta \dot{X}_1^i(0) = 0, \Delta \dot{X}_2^i(0) = 0
 \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

La forma debole delle equazioni differenziali di regolarizzazione definite dalle Eq.(3.6.2), si ottiene moltiplicando le equazioni di campo per le funzioni peso  $w_1(X_1, X_2)$  e  $w_2(X_1, X_2)$  e integrando successivamente per parti. Considerando le condizioni al contorno di tipo esterno, nonché quelle interne riguardanti la velocità assegnata dell'apice della fessura mediante condizioni deboli non ideali, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\int_{V^i} \nabla_{\underline{x}} \Delta X_1^i \nabla_{\underline{x}} w_1^i dV + \oint_{\Omega_i^i} \left[ \delta \lambda_1^i (X_1^{ii} - c_1^i) + \lambda_1^i \delta X_1^{ii} \right] dA = 0, \quad (3.6.3)$$

$$\int_{V^i} \nabla_{\underline{x}} \Delta X_2^i \nabla_{\underline{x}} w_2^i dV = 0,$$

con

$$\delta \lambda_1^i \geq 0, \quad g_f^i \leq 0, \quad \delta \lambda_1^i \cdot g_f^i = 0 \quad (3.6.4)$$

dove  $\delta \lambda$  rappresenta il moltiplicatore lagrangiano e  $g_f^i$  il relativo criterio di frattura. Introducendo il vettore  $\Delta X^T = [\Delta X_1, \Delta X_2]$ , l'Eq.(3.6.3) può essere riscritta nel sistema di coordinate referenziali usando le regole di trasformazione espresse dall'Eq.(3.5.2), ottenendo:

$$\int_{V^i} (\nabla_r \Delta \underline{X} J^{-1})^i \cdot (\nabla_r \underline{w} J^{-1})^{T_i} \underline{I} \det(J^i) dV_r^i + \oint_{\Omega_i^i} \left[ \delta \lambda_f^i (\underline{X}_f^{ii} - \underline{c}_f^i) \underline{k} + \lambda_f^i \delta \underline{X}_f^{ii} \right] \det(\overline{J_f^i}) dA_r^i = 0, \quad (3.6.5)$$

essendo  $\underline{w}^T = [w_1, w_2]$  il vettore delle funzioni peso,  $\underline{i}^T = [i_1, i_2]$  il vettore che indica la direzione di propagazione della fessura all'interfaccia (nel caso del modello studiato la componente  $i_1 = 1$  e la componente  $i_2 = 0$ ),  $\underline{c}_f^T = [c_f, 0]$  rappresenta il vettore velocità con cui avanza la fessura, le cui componenti si ottengono risolvendo l'Eq.(3.4.3).

### 3.7 Formulazione numerica del modello mediante la tecnica degli elementi finiti

Le equazioni di governo espresse dalle Eq.(3.5.9) e dalle Eq.(3.6.5) con le condizioni al contorno descritte dalla relazione (3.6.2) introducono un sistema di equazioni

non lineari, che devono essere risolte numericamente, usando un programma ad elementi finiti. Per il problema in esame è stato utilizzato il *Comsol Multiphysics versione 3.5*. Il modello agli elementi finiti è stato costruito con riferimento ad uno stato piano di tensione e mediante l'utilizzo delle funzioni di forma lagrangiane. Le equazioni di campo che comprendono quelle rappresentative dello stato piano di tensione e quelle proprie della formulazione *ALE* vengono risolte usando un approccio con elementi finiti isoparametrici. Nello specifico, le funzioni di forma isoparametriche sono utilizzate per rappresentare gli spostamenti, la velocità e l'accelerazione dei punti materiali oltre alle altre variabili presenti nella formulazione *ALE*:

$$\begin{aligned} \underline{u}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) u_i(t), & \underline{\dot{u}}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) \dot{u}_i(t), & \underline{\ddot{u}}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) \ddot{u}_i(t), \\ \underline{X}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) X_i, & \underline{\dot{X}}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) \dot{X}_i, & \underline{\ddot{X}}(r,t) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) \ddot{X}_i, \\ \underline{\lambda}(s) &= \sum_{i=1}^{n_j} \zeta_i(r) \Lambda_i \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

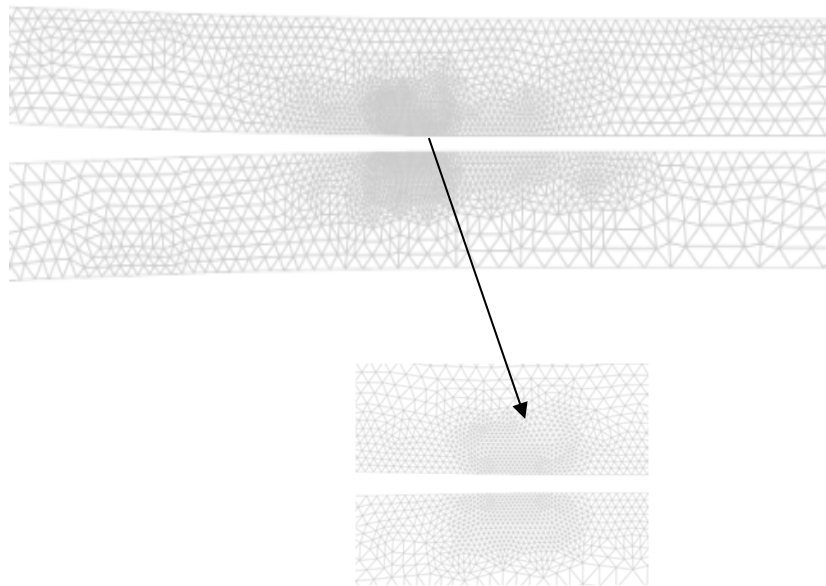
dove  $n_j$  indica il numero di nodi dell'elemento finito tipo implementato nelle analisi. Sostituendo le (3.7.1) nelle Eq.(3.5.9) e (3.6.5), si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio in forma discreta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_j} M_i \ddot{\underline{u}}_i + \sum_{i=1}^{n_j} C_i \dot{\underline{u}}_i + \sum_{i=1}^{n_j} (K_i + K_{0i} + K_{1i} + K_{2i}) \underline{u}_i - \sum_{i=1}^{n_j} t_i + \sum_{i=1}^{n_j} p_i = 0 \\ W \Delta \underline{X} + Q \Delta \underline{\dot{X}} + L = 0 \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Dove  $[C_i, K_{0i}, K_{1i}, K_{2i}]$  sono, rispettivamente, le matrici di smorzamento e di rigidità associate alla formulazione *ALE*,  $M_i$  è la matrice delle masse consistente,  $K_i$  è la matrice di rigidità,  $t_i$  e  $p_i$  sono i vettori di carico esterno,  $W$  la matrice di discretizzazione della formulazione *ALE*,  $Q$  ed  $L$  sono la matrice di smorzamento ed il vettore contenente i moltiplicatori di lagrange relativi alla formulazione *ALE*. Le equazioni algebriche sono risolte utilizzando uno schema di integrazione temporale implicito basato sulle formule di discretizzazione all'indietro sull'ordine della variabile e sulla misura del passo (BDF). Le equazioni sono risolte utilizzando un approccio interamente accoppiato in cui si fa

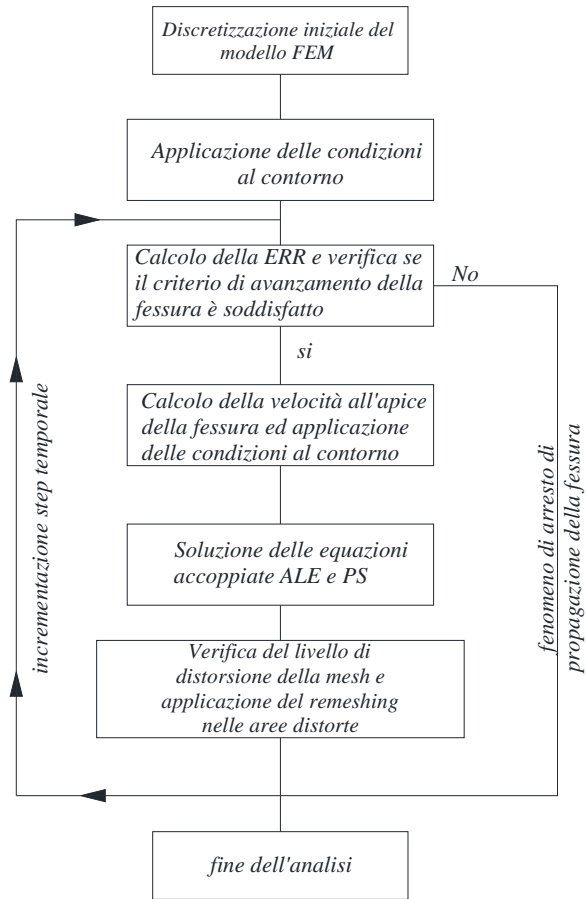


riferimento agli operatori dell'approccio disaccoppiato. In particolare, in un generico istante temporale, le incognite del problema sono il vettore degli spostamenti e la posizione dei punti del reticolo. E' importante notare che la procedura interamente accoppiata, se confrontata con la procedura disaccoppiata, fornisce una descrizione più dettagliata del fenomeno dell'avanzamento. Tuttavia, dal punto di vista computazionale, i metodi basati sull'approccio disaccoppiato consentono di implementare e calcolare in modo semplice la soluzione attuale (Ponthot Belytschko, 1998). La procedura di integrazione è tale da calcolare i termini convettivi non simmetrici dipendenti dal moto relativo tra il sistema di riferimento materiale e quello referenziale. Ad un generico istante di tempo, le equazioni non lineari sono risolte utilizzando lo schema iterativo alla Newton-Raphson ed un processo di linearizzazione dei sistemi di equazioni sopra riportate è introdotto nella procedura di soluzione *step by step*. Durante l'integrazione temporale, a causa delle elevate velocità coinvolte nel processo di avanzamento, si utilizza un passo temporale ridotto. Per calcolare accuratamente l'energia di rilascio ERR mediante l'espressione dell'integrale  $J$ , si adottano, sulle linee di contorno e all'interno del dominio che circonda l'apice della fessura, un fitto reticolo di discretizzazione ed un metodo standard di integrazione numerica (quadratura). A tale scopo, devono essere condotte analisi per stabilire la dimensione della maglia del reticolo in grado di evitare instabilità numeriche. La procedura di integrazione nel tempo controlla, in corrispondenza di ciascun passo temporale, il criterio di avanzamento. Nel caso in cui il criterio dovesse essere soddisfatto, si applica al dominio che circonda la fessura una velocità che può essere ricavata risolvendo il criterio di avanzamento; successivamente si applicano, sempre in corrispondenza dell'apice della fessura, le condizioni sullo spostamento dei contorni. E' importante notare che, a causa del processo di avanzamento, il reticolo di discretizzazione è affetto da elevate distorsioni nella regione che circonda la fessura vedi **fig. 3.8**:



**Figura 3.8** Particolare della zona in corrispondenza dell'apice della lesione. Distorsione degli elementi del reticolo di discretizzazione al termine del processo di avanzamento.

Da ciò ne consegue una perdita di accuratezza nel calcolo delle variabili del problema e per terminare la fase di calcolo è necessario adottare un algoritmo capace di riaggiornare la griglia. La procedura di aggiornamento è stata implementata all'interno dell'ambiente di calcolo utilizzato, imponendo che il minimo valore del parametro che governa la qualità del reticolo, con riferimento alla geometria degli elementi nella configurazione indeformata, sia maggiore di una tolleranza fissata. Nel caso in cui tale condizione non sia soddisfatta, viene eseguita una “*procedura di update*” del reticolo partendo dalla configurazione deformata nel sistema referenziale attuale e successivamente si riparte con una nuova procedura di aggiornamento dal passo precedente. Tale procedura, definita come “*remeshing*”, è implementata nei moderni software di calcolo al fine di ottenere un'accurata descrizione del problema dinamico. Più dettagli sull'algoritmo di remeshing possono essere consultati nella guida del *comsol multiphysics*. Una sinottica rappresentazione della procedura è riportata nel seguente flow chart **Fig.3.9**.



**Figura3.9** Rappresentazione flow chart della procedura di soluzione

# CAPITOLO 4

## Validazione del modello e risultati numerici

### 4.1 Introduzione

Si riportano confronti tra i risultati del modello proposto e dati esistenti in letteratura, in modo da verificare e validare la modellazione proposta. In particolare, i casi di carico oggetto di analisi fanno riferimento a condizioni semplici che coinvolgono i singoli modi di frattura, i.e. Modo I e Modo II oppure condizioni complesse di tipo misto. La prima parte del capitolo è incentrata sulla validazione del modello proposto con i dati sperimentali. Successivamente si propone un'analisi parametrica facendo riferimento a casi di studio che si riferiscono a condizioni di semplice o multipla delaminazione.

### 4.2 Modo I

Si propone un confronto con dati esistenti in letteratura secondo una condizione di carico a spostamento controllato secondo una modalità di apertura in uno schema del tipo DCB (Double Cantilever Beam) (*Guo e Sun, 1998*). Le caratteristiche del materiale utilizzato fa riferimento ad un laminato in Graphite/Epoxy del tipo AS 3501-6, le cui proprietà meccaniche sono riportate in **tab. n.4.1**.

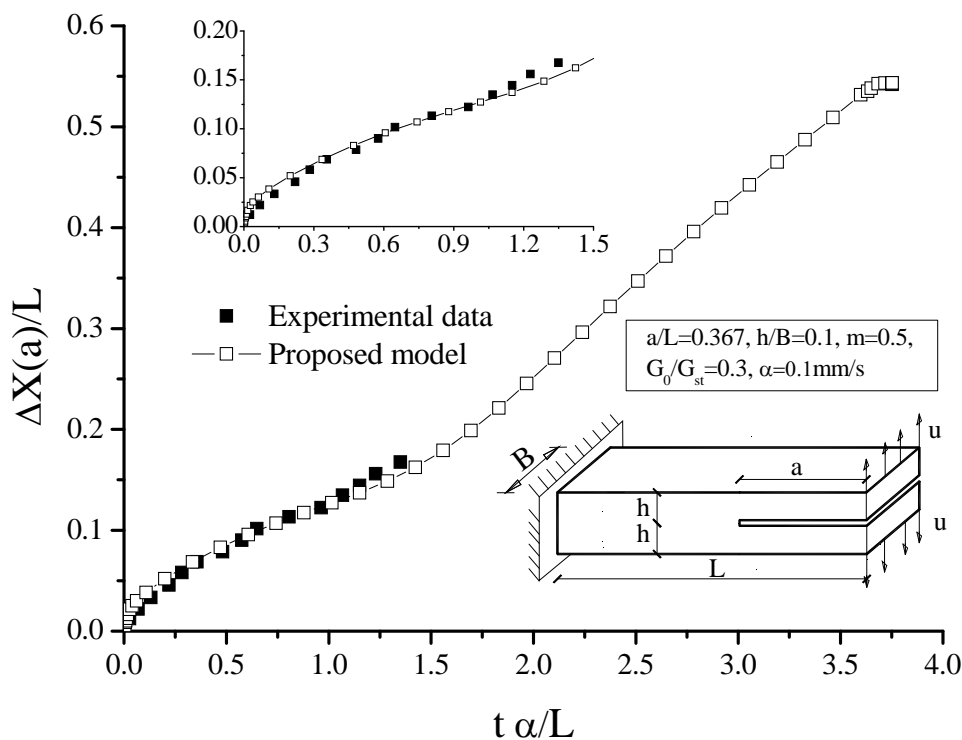
Materiali	$E_1$	$E_2=E_3$	$G_{12}=G_{23}$	$\rho$	$\nu_{12}=\nu_{13}$
	[Mpa]	[Mpa]	[Mpa]	[Kg/m <sup>3</sup> ]	[adi]
AS4 Graphite/Epoxy	142E3	10.3E3	7.2E3	1580	0.3

**Tabella4.1.** Proprietà meccaniche del composito con fibre unidirezionali AS4 graphite/epoxy.

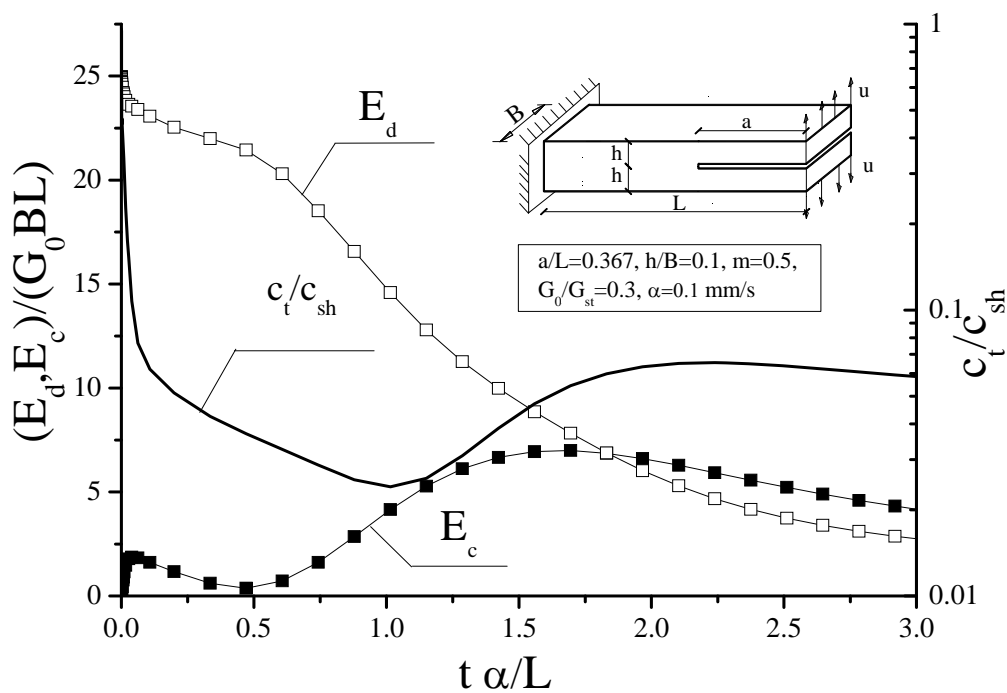
Il laminato è formato da lamine unidirezionali e presenta le seguenti caratteristiche geometriche:

- lunghezza di 260 mm, larghezza di 20 mm e spessore di 3.7 mm.

Nello schema di carico considerato, condotto in controllo di spostamenti, le estremità della trave sono sottoposte ad una velocità di carico pari a 0.1 mm/s. La propagazione del crack è forzata mediante l'introduzione di una striscia di film adesivo in corrispondenza dell'apice della fessura che ha l'effetto di accumulare ulteriore energia per fare crescere la fessura ad alte velocità. Inoltre, al fine di riprodurre accuratamente i risultati sperimentali, la prima e l'ultima lamina sono portate ad un valore di spostamento limite in modo da accumulare un valore iniziale della ERR, lasciando il crack fissato nella posizione iniziale. Durante tale passo di carico, la struttura laminata accumula una quantità di energia di deformazione che, successivamente, verrà rilasciata non appena la lesione comincerà ad evolversi nel suo percorso di crescita. E' immediato notare che la relazione tra la velocità dell'apice della fessura e la resistenza all'avanzamento dinamico della ERR non sono fornite dai risultati sperimentali. I parametri del materiale ( $m, G_0$ ) che entrano in gioco nel criterio di avanzamento sono considerati come variabili di interne. Nella **fig.4.1** sono mostrati i risultati sperimentali (*Guo e Sun, 1998*), descritti in termini di storie temporale dello spostamento normalizzato dell'apice del difetto. In particolare, viene riportato un confronto tra i dati sperimentali e quelli ottenuti dal modello proposto. I risultati numerici sono stati estrapolati assumendo un range di propagazione più ampio rispetto a quello analizzato dai dati sperimentali. I confronti evidenziano un buon accordo tra i dati sperimentali ed i risultati numerici della formulazione proposta.



**Figura 4.1** Avanzamento dinamico della fessura in Modo I per lo schema DCB. Confronto tra i dati sperimentali (Guo and Sun, 1998) ed i risultati del modello proposto in termini di storia temporale dello spostamento della fessura



**Figura 4.2.** Storia temporale dell'energia di deformazione ( $E_d$ ), dell'energia cinetica ( $E_c$ ) e della velocità in corrispondenza dell'apice della fessura ( $c_t$ ).

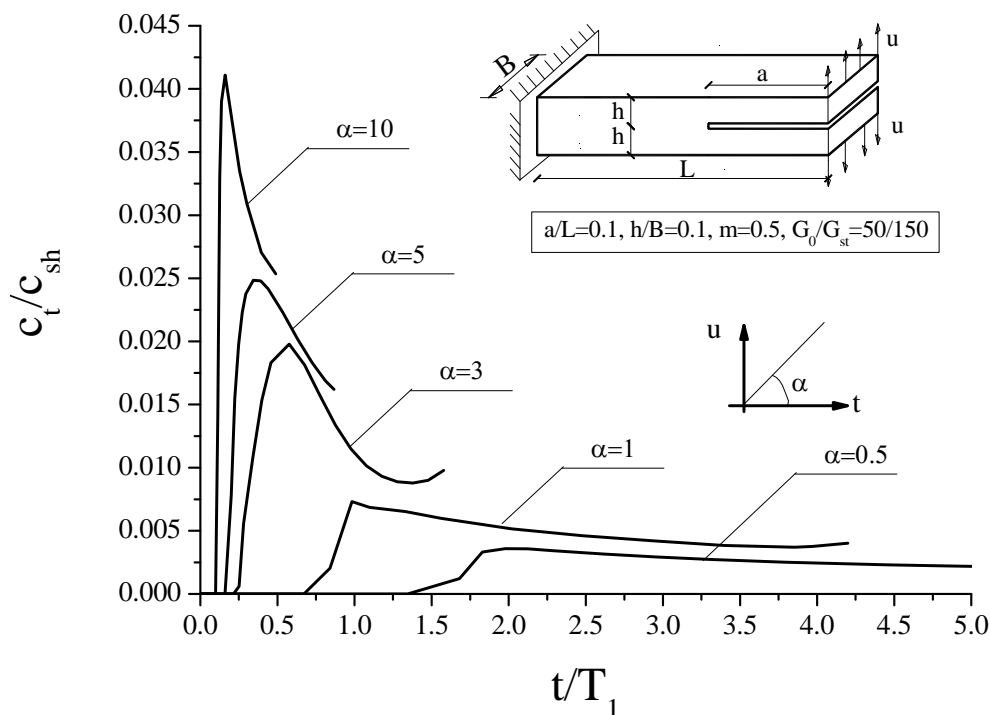
Nella **fig. 4.2** sono riportate le curve di evoluzione dell'energia cinetica e di deformazione coinvolte durante il processo; l'analisi mostra che durante il processo di avanzamento della fessura l'energia di deformazione si converte in energia cinetica; tale trasformazione è tipica dei processi dinamici. Inoltre la velocità di propagazione della fessura raggiunge il suo massimo valore durante la fase iniziale del processo; tale valore è sufficientemente elevato da essere paragonabile alla velocità caratteristica delle onde da taglio. Inoltre, al fine di studiare l'influenza della velocità di carico sull'evoluzione della fessura, nella **fig.4.3** è riportato un grafico nel quale sono rappresentati al variare del tempo le velocità dell'apice della fessura per diversi valori della velocità di carico. Nella **fig.4.4** sono riportate al variare del tempo la velocità e lo spostamento dell'apice della fessura per differenti velocità di carico. L'analisi mostra che nella fase iniziale gli effetti della velocità producono maggiori amplificazioni in corrispondenza della zona che si trova nelle immediate vicinanze della fessura; a dimostrazione di ciò, la velocità in corrispondenza della stessa cresce in modo brusco raggiungendo il suo valore massimo proprio in questo step; successivamente l'evoluzione della velocità della fessura tende a stabilizzarsi intorno ad un valore che rimane pressoché costante.

### 4.3 Modo II

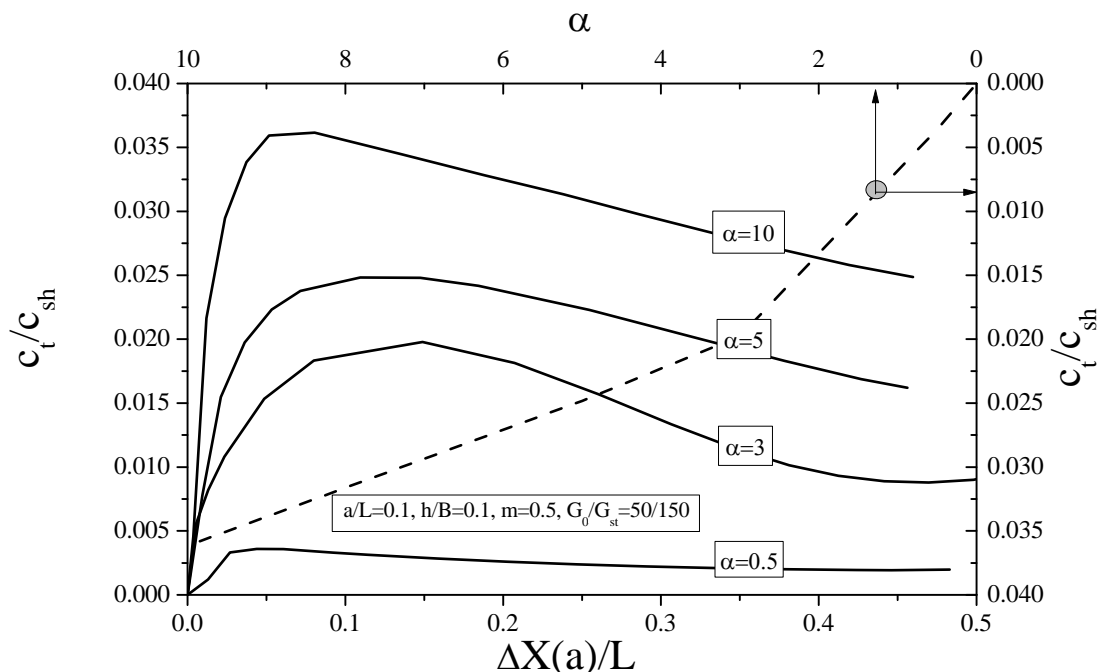
Si propone un confronto con i risultati sperimentali disponibili nella letteratura scientifica (*Tsai et. Al, 2001*) facendo riferimento ad materiale del tipo glass/epoxy S2/8553. Lo schema strutturale fa riferimento ad un laminato unidirezionale secondo uno schema di trave appoggiata EFN. Le caratteristiche meccaniche dei dati del materiale sono riportate nella **tab. 4.2**;

Materiale	$E_1$	$E_2=E_3$	$G_{12}=G_{23}$	$\rho$	$\nu_{12}=\nu_{13}$
	[Mpa]	[Mpa]	[Mpa]	[Kg/m <sup>3</sup> ]	[adi]
S2/8553 Glass/Epoxy	43E3	12.7E3	4.46E3	2100	0.3

**Tabella 4.2** Proprietà meccaniche del composito con fibre unidirezionali S2 glass/epoxy.



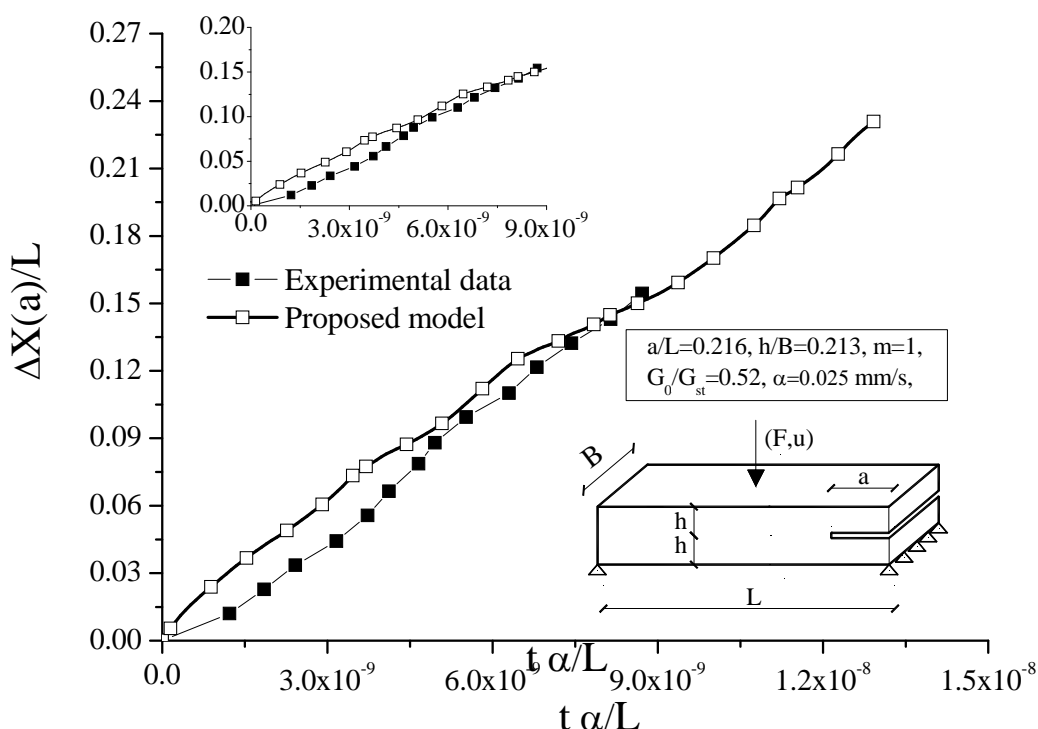
**Figura 4.3** Evoluzione dinamica in Modo I dell'apice della fessura per uno schema DCB .Evoluzione temporale della velocità dell'apice della fessura ( $c_t$ ) per differenti valori di velocità di applicazione del carico esterno( $\alpha$ )



**Figura 4.4** Evoluzione dinamica in Modo I dell'apice della fessura per uno schema DCB. Relazione tra la velocità al tip ( $c_t$ ), aperture e spostamento ( $\Delta X(a)$ ) e velocità di applicazione del carico esterno ( $\alpha$ ).



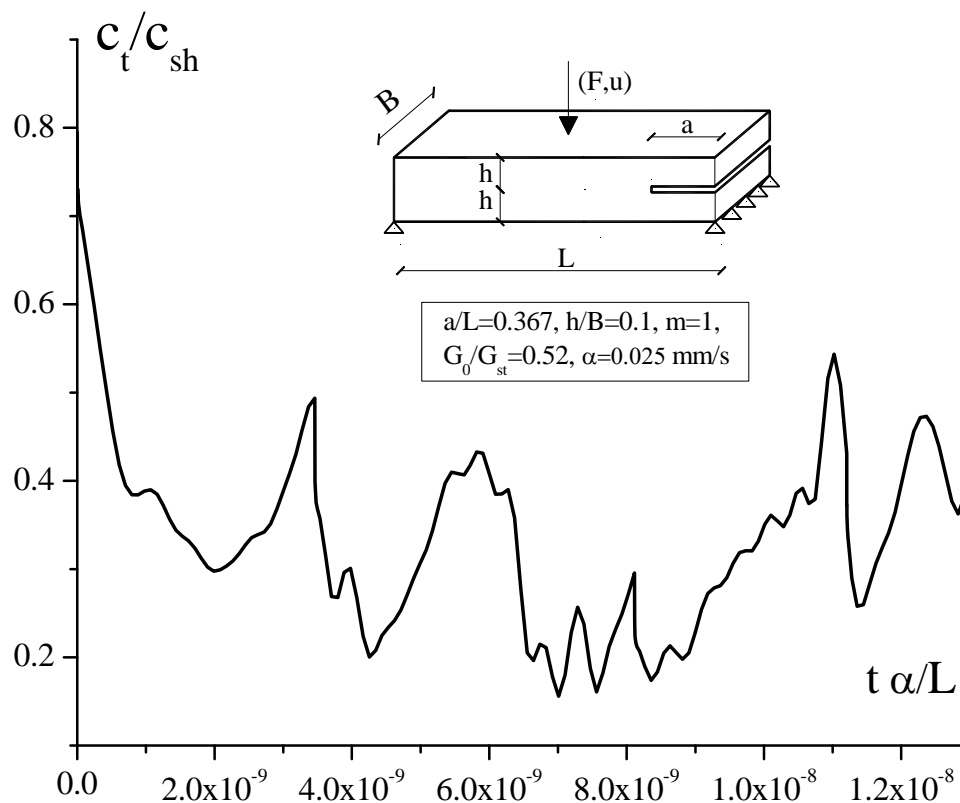
Il provino ha le seguenti caratteristiche geometriche: lunghezza pari a 278 mm, larghezza pari a 12.7 mm e spessore pari a 11.6 mm, il carico applicato procede ad una velocità pari a 0.025 mm/s. La metodologia di analisi sperimentale utilizzata prevede per il provino un comportamento strutturale simile a quello riguardante la condizione di carico da modo I (vedi par. 4.2).



**Figura 4.5** Evoluzione dinamica in Modo II dell'apice della fessura in uno schema di trave semplicemente appoggiata. Confronto tra i risultati sperimentali (Tsai et al., 2001) e quelli del modello proposto in termini di storia temporale dello spostamento del crack tip ( $\Delta X(a)$ ) normalizzato rispetto alla lunghezza totale del laminato ( $L$ ).

Nella **figura 4.5** è mostrato il confronto tra i risultati sperimentali in termini di spostamenti dell'apice della fessura al variare del tempo in forma adimensionale. Si nota facilmente che l'andamento delle grandezze relative all'apice della fessura misurate sperimentalmente è in accordo con i risultati del modello proposto. Tuttavia, la prima parte del fenomeno di crescita della fessura non è molto accurata e questo comportamento è in parte giustificato dalla metodologia sperimentale, che soprattutto nella fase iniziale (caratterizzata da elevate velocità in corrispondenza dell'apice della frattura) ha richiesto uno strato adesivo non modellato nel modello proposto. Inoltre nelle **figure 4.6** e **4.7** sono riportati rispettivamente la storia temporale della velocità dell'apice della fessura ed il fattore di

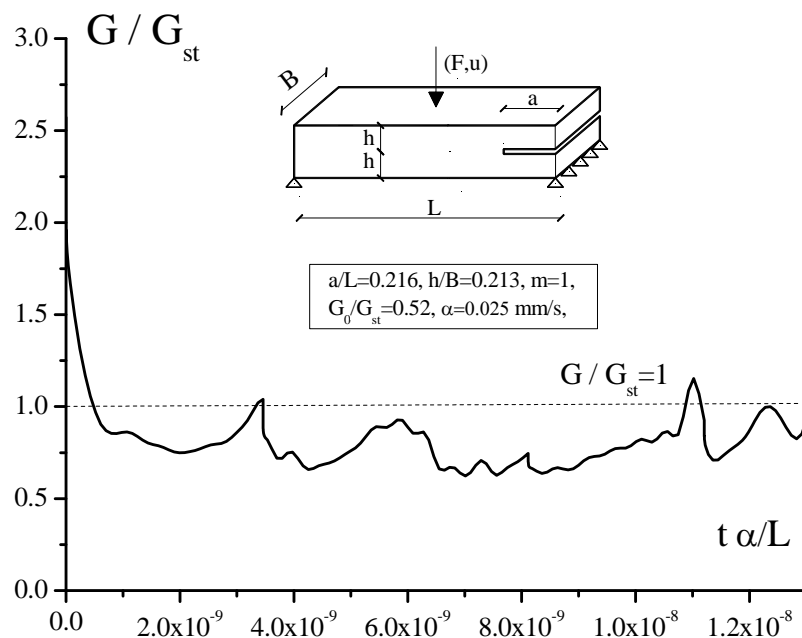
amplificazione dinamica della ERR. In particolare, i risultati evidenziano che la velocità dell'apice della fessura attinge il valore massimo in corrispondenza della fase di innesco della delaminazione, con valori di intensità paragonabile alle velocità delle onde da taglio del materiale  $c_{sh}$ . Successivamente, all'evolversi della delaminazione si nota un riduzione delle velocità coinvolte secondo un'evoluzione di natura oscillatoria.



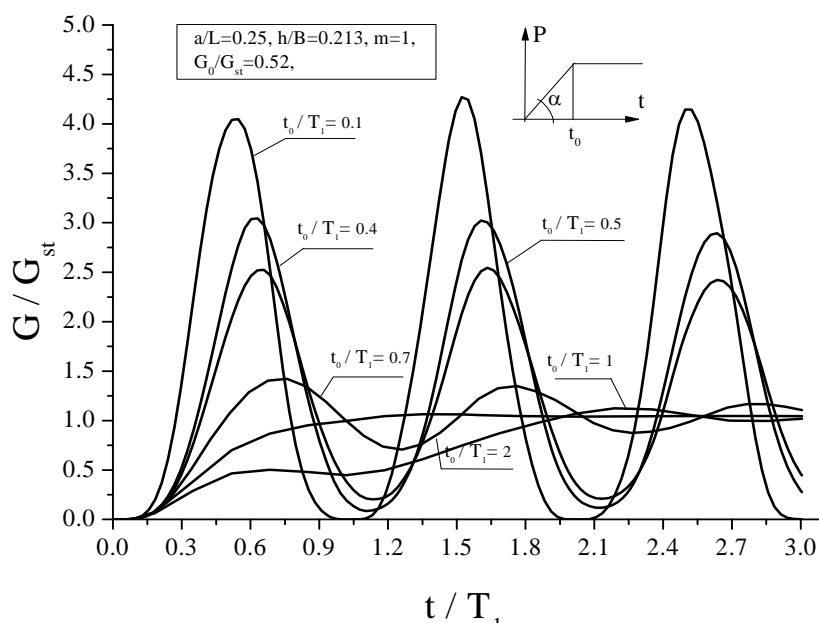
**Figura 4.6** Evoluzione dinamica in Modo II dell'apice della fessura per lo schema di trave semplicemente appoggiato: storia temporale della velocità in corrispondenza dell'apice della fessura ( $c_t$ ) normalizzata rispetto alla velocità delle onde da taglio del materiale ( $c_{sh}$ ).

Nella **figura 4.7**, si riporta la storia temporale del rapporto adimensionale tra l'energia di rilascio dinamica e la corrispondente ottenuta applicando staticamente alla struttura una tipologia di carico di natura quasi statica. Tale rapporto evidenzia come gli effetti di amplificazione dinamica risultino maggiori di un fattore pari a due nei primi istanti temporale dove il laminato è soggetto essenzialmente alla fase di innesco della delaminazione. In **figura 4.8**, si riporta per il medesimo fattore le curve di variabilità temporale in funzione della velocità di applicazione del carico esterno. Le analisi evidenziano che gli effetti dinamici sono strettamente legati alla velocità di applicazione

del carico; è possibile notare, inoltre, come per elevati valori di  $\alpha$  si ottengono elevati valori del rapporto  $G/G_{st}$ .



**Figura 4.7** Evoluzione dinamica in Modo II dell'apice della fessura per lo schema appoggiato. Storia temporale della energia di rilascio dinamica normalizzata rispetto il suo valore statico ( $G_{st}$ ).



**Figura 4.8** Evoluzione dinamica in Modo II dell'apice della fessura per lo schema appoggiato. Storia temporale del fattore di amplificazione dinamica ( $G/G_{st}$ ) per differenti valori di velocità di applicazione del carico, con  $G_{st}$  che rappresenta il valore statico della ERR.

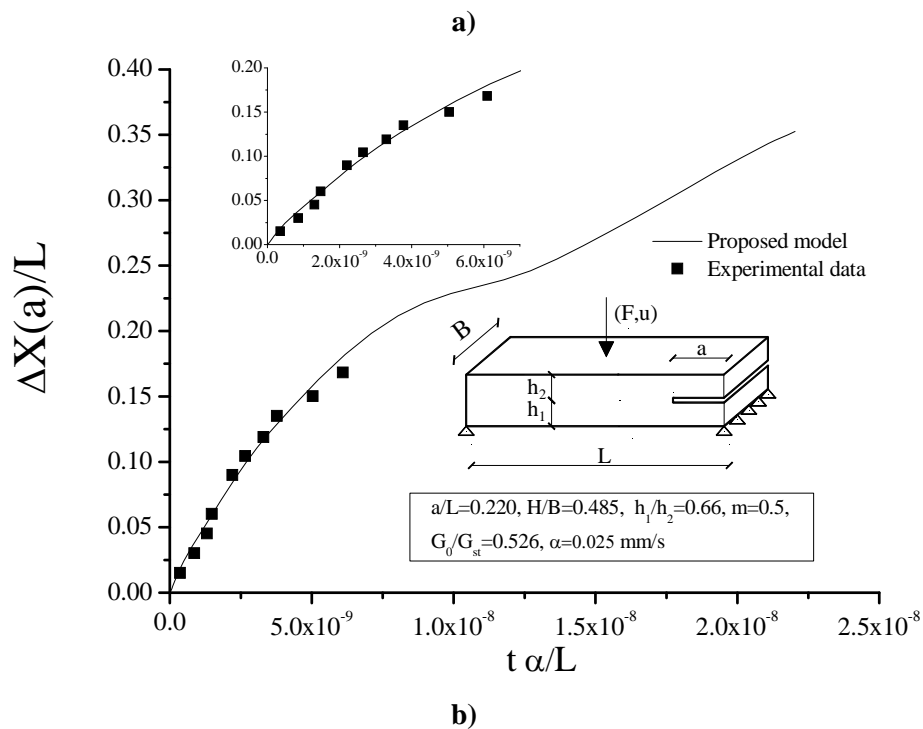
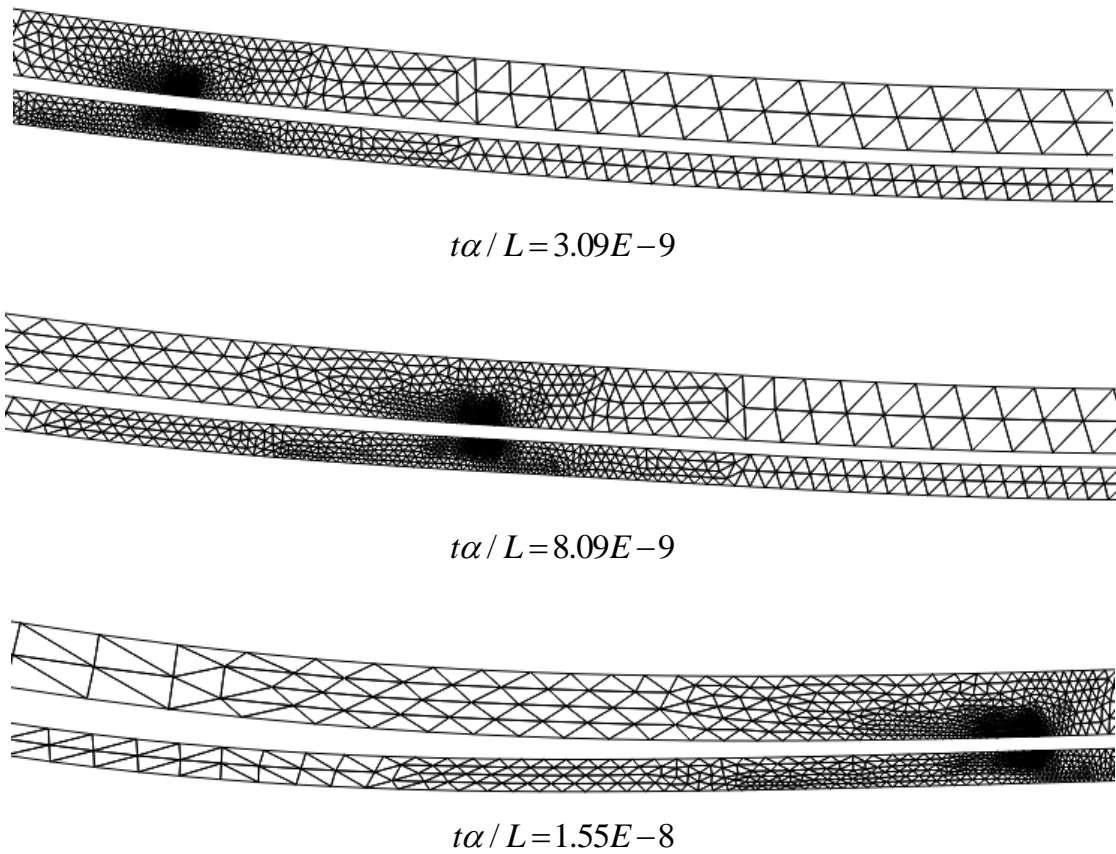
## 4.4 Modo misto

In questo paragrafo viene analizzata una trave sottoposta a condizioni di carico da modo misto. Il confronto è stato fatto con i dati sperimentali presenti in letteratura (*Tsai et. Al, 2001*); il materiale utilizzato è un composito unidirezionale carbon/epoxy AS4/3501-6. mentre, lo schema strutturale si riferisce a uno schema ENF. Le caratteristiche meccaniche del composito sono riportate nella tabella n.3.

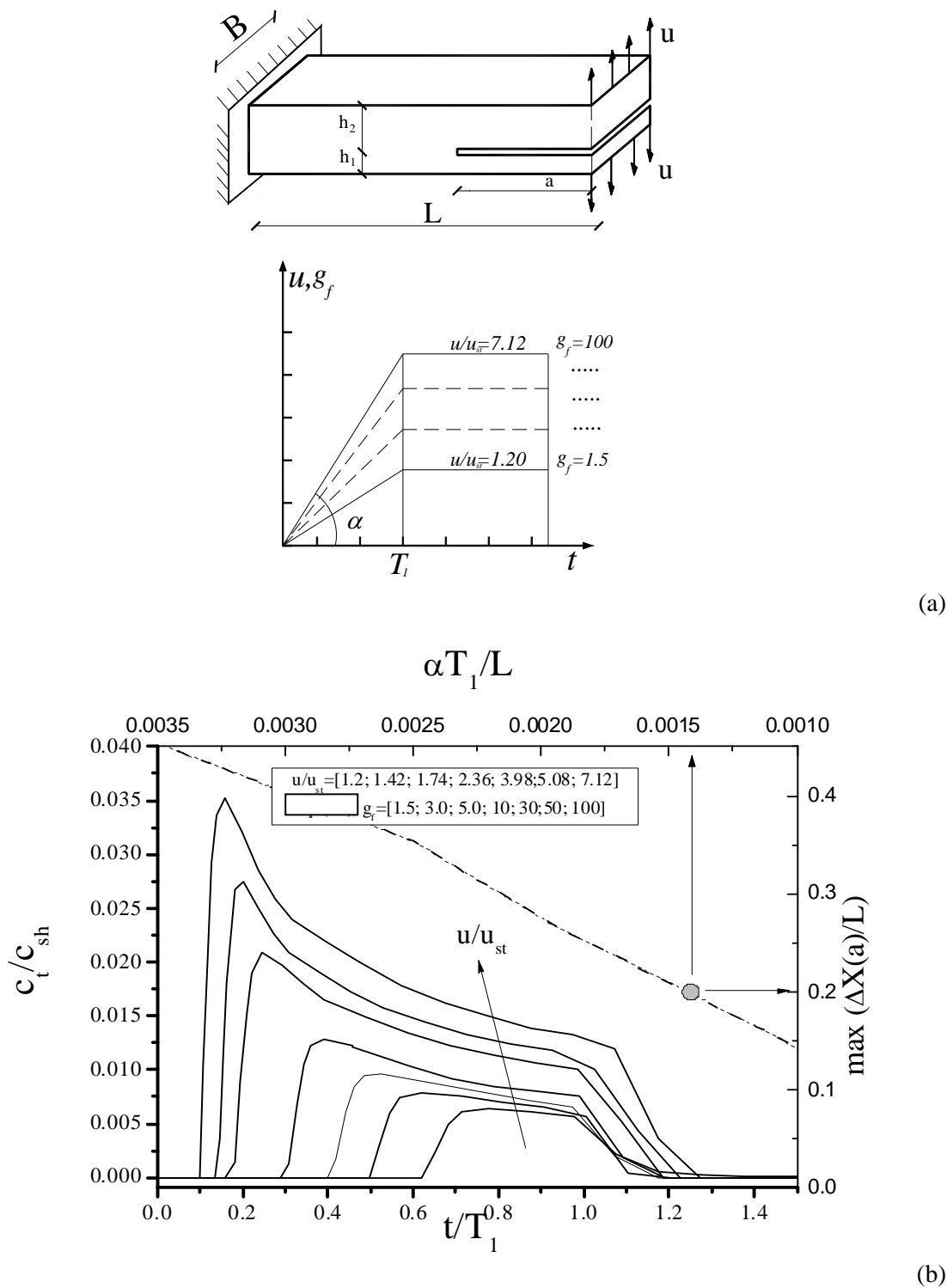
$E_1$	$E_2=E_3$	$G_{12}=G_{23}$	$\rho$	$\nu_{12}=\nu_{13}$	$m$	$G_0$
[Mpa]	[Mpa]	[Mpa]	[Kg/m <sup>3</sup> ]	[adi]	[adi]	
142E3	10.3E3	7.2E3	1580	0.27	0.5	300

**Tabella 3.** Proprietà Meccaniche del composito a fibre unidirezionali AS4/3501-6 Carbon/Epoxy

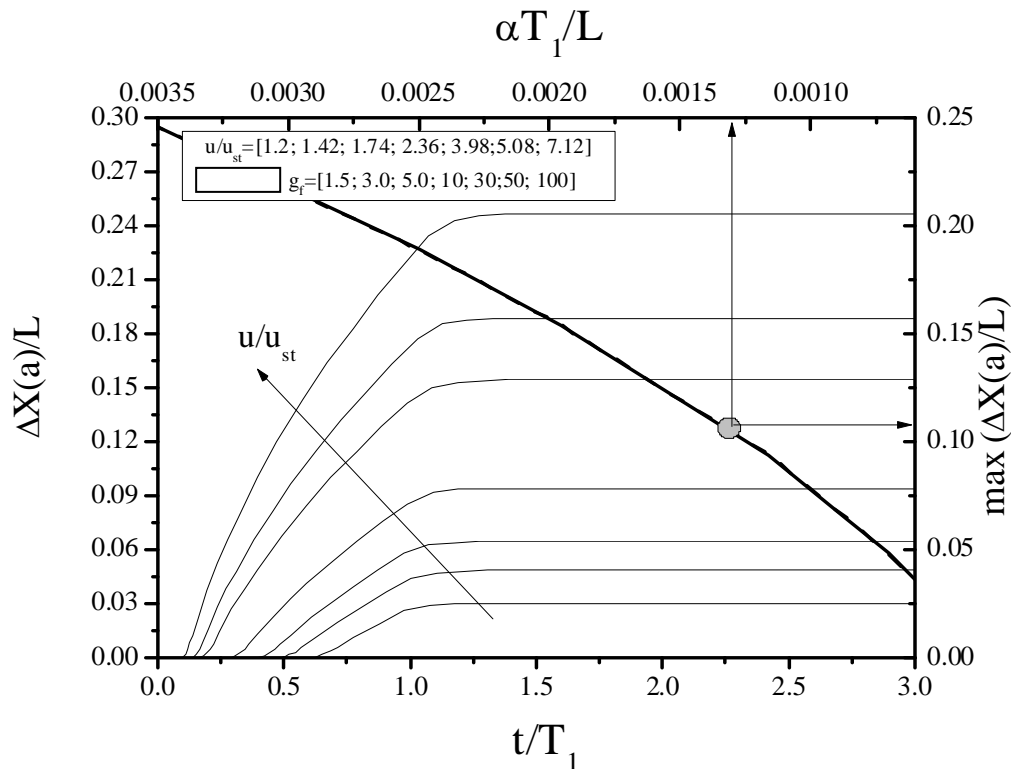
La geometria del laminato presenta i seguenti dati:  $L = 274\text{mm}$ ,  $B = 14.0$ ,  $H = 6.8$  mm, con  $a/L=0.1$ ,  $h_1/h_2 = 0.66$ , un crack preesistente di lunghezza pari a 59 mm è situato ad  $1/3$  di  $L$ ; dove  $L$ ,  $B$  ed  $H$  sono rispettivamente la lunghezza, la larghezza e lo spessore del laminato,  $\frac{h_1}{h_2}$  è il rapporto tra gli spessori delle lamine superiore ed inferiore, la velocità  $\alpha$  di applicazione di carico della prova sperimentale è di  $0.025\text{ mm/s}$ . Lo scopo principale della modellazione è la valutazione su una tipica struttura in laminato composito degli effetti della velocità di carico sul calcolo della ERR e sulla propagazione della fessura. In particolare l'analisi è condotta su un laminato soggetto ad una prova di flessione su tre punti. Nella prova sperimentale è stata introdotta una striscia di un film adesivo al fine di ottenere elevate velocità di propagazione della fessura. Per riprodurre nel modo più fedele possibile i risultati sperimentali si è pensato di far riferimento nel modello proposto ad valore limite di ERR, oltre il quale la fessura inizia a propagarsi; in tal modo il modello accumula energia sotto forma di energia interna. In fig. 4.9 a) e b) è mostrata la storia temporale della propagazione della fessura in termini spostamento adimensionale dell'apice del difetto ed il relativo confronto con i risultati sperimentali, da cui emerge una buona corrispondenza.



**Figura 4.9:** **a)** Evoluzione temporale della fessura a crescenti intervalli di tempo; **b)** Schema di carico ENF in Modo Misto: confronto tra i risultati sperimentali e quelli del modello proposto in termini di storia temporale dell'apice della fessura adimensionalizzato rispetto alla lunghezza del campione.

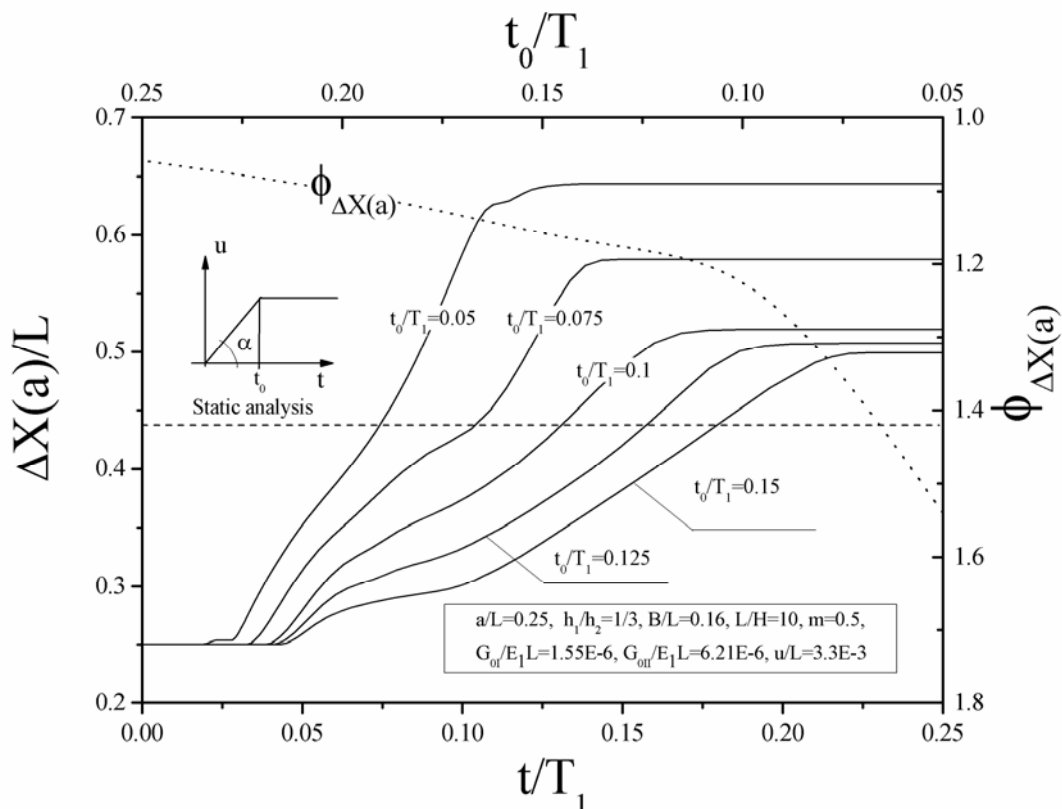


**Figura 4.10** Condizioni di carico da modo misto per lo schema DCB. a) Rappresentazione schematica delle curve di carico e dello schema geometrico. b) Storia temporale della velocità e massimo spostamento dell'apice della fessura per diverse curve di carico.



**Figura 4.11** Condizioni di carico da modo misto per lo schema DCB. Storia temporale dello spostamento dell'apice della fessura per differenti curve di carico.

Nelle **fig.4.10** e **4.11** per lo stesso materiale e per diverse condizioni di vincolo sono riportate rispettivamente la storia temporale della velocità all'apice della fessura e l'andamento dello spostamento relativo della fessura per diversi valori incrementali di carico applicato. Le analisi evidenziano che all'aumentare del l'andamento della velocità presenta i valori maggiori nella fase di innesco della delaminazione. Successivamente, si osserva una forte riduzione del valore di picco fino ad un tratto caratterizzato da un andamento decrescente fino al valore di nullo, che corrisponde alla condizione di arresto del crack interfacciale. Dai risultati riportato in Fig.4.11, si evidenzia come lo spostamento del crack risulti essere fortemente influenzato dalla curva di carico applicata alla struttura laminata.



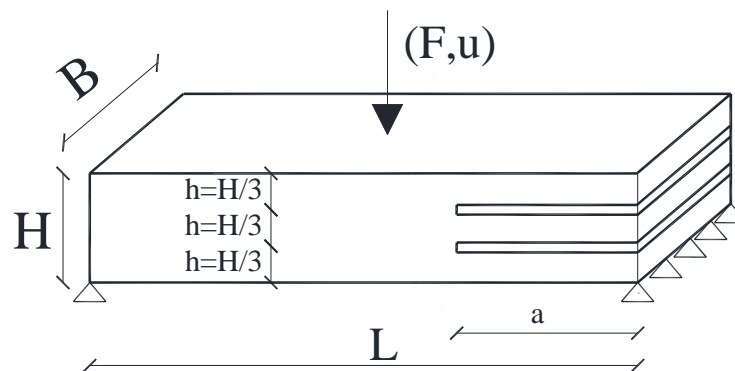
**Figura 4.12.** Condizioni di carico da modo misto in uno schema DCB. Evoluzione temporale dello spostamento  $\Delta X(a)$  normalizzato sulla lunghezza totale del laminato ( $L$ ) per differenti velocità di applicazione del carico esterno; inoltre è riportato il fattore di amplificazione dinamico  $\Phi_{\Delta X(a)}$

Sempre per lo stesso schema di vincolo e con le caratteristiche meccaniche riportate nella **tab.4.1** e con le seguenti caratteristiche geometriche:  $a/L=0.25$ ,  $h_1/h_2=0.33$ ,  $B/L=0.16$ ,  $L/H=10$ , si vuole rappresentare il comportamento di delaminazione in funzione delle effetti inerziali prodotti dal carico esterno. In particolare, in Fig.4.12, si propongono risultati in funzione dello spostamento dell'apice del difetto assumendo, a parità di spostamento applicato, una diversa velocità di applicazione del carico esterno. Le analisi evidenziano una forte dipendenza dal carattere inerziale del carico esterno, da cui emerge che gli effetti di amplificazione rispetto al caso puramente statico risultano abbastanza significativi.

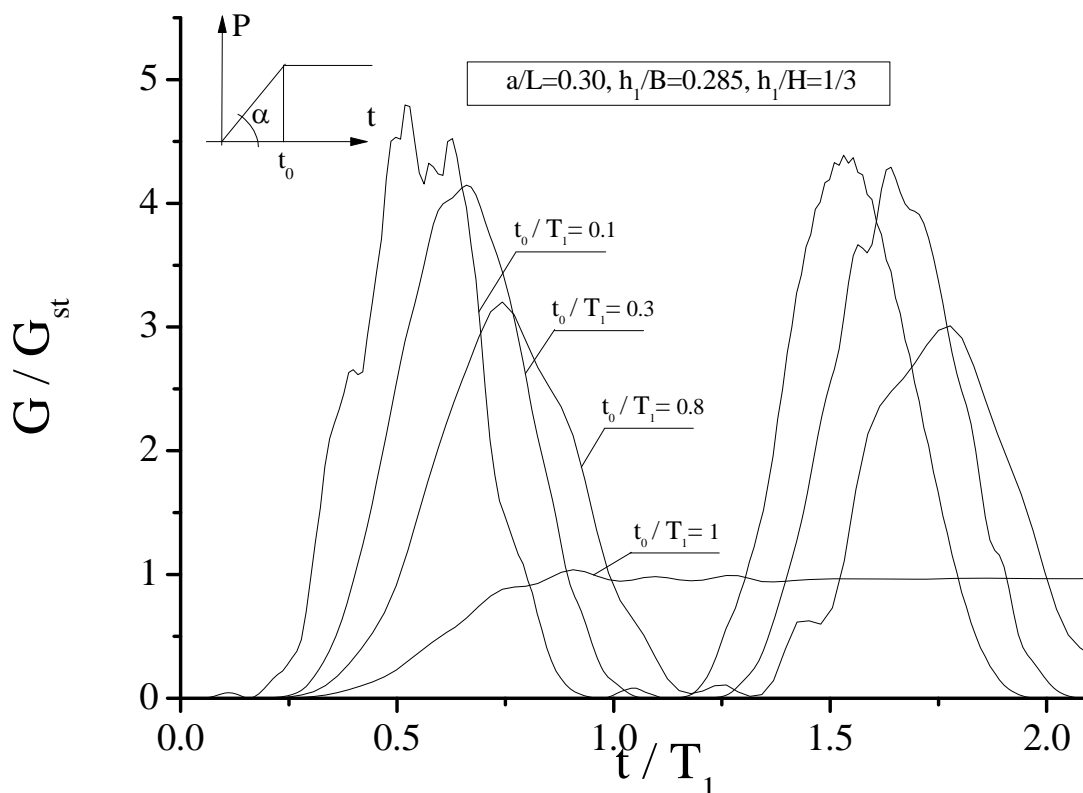


## 4.5 Analisi su travi laminate soggette a fenomeni di delaminazione multipla

Dopo aver validato il modello con i dati sperimentali, sono state sviluppate ulteriori analisi di approfondimento. In particolare per la geometria riportata in **fig. 4.13** è stata considerata una trave con materiale riportato nella **tab. n.3**; nella **fig. 4.14** è riportata l'influenza della velocità di applicazione del carico sulla ERR per una struttura laminata caratterizzate da due delaminazioni equispaziate lungo lo spessore. I risultati vengono proposto analizzando la storia temporale del fattore di amplificazione dinamica dell'energia di rilascio. sono riportati in termini di storia temporale del fattore di amplificazione della ERR; si notano alte amplificazioni rispetto al caso statico e quando la curva di carico è proporzionale al primo periodo di vibrazione della struttura ( $T_1$ ), la ERR tende al valore statico.

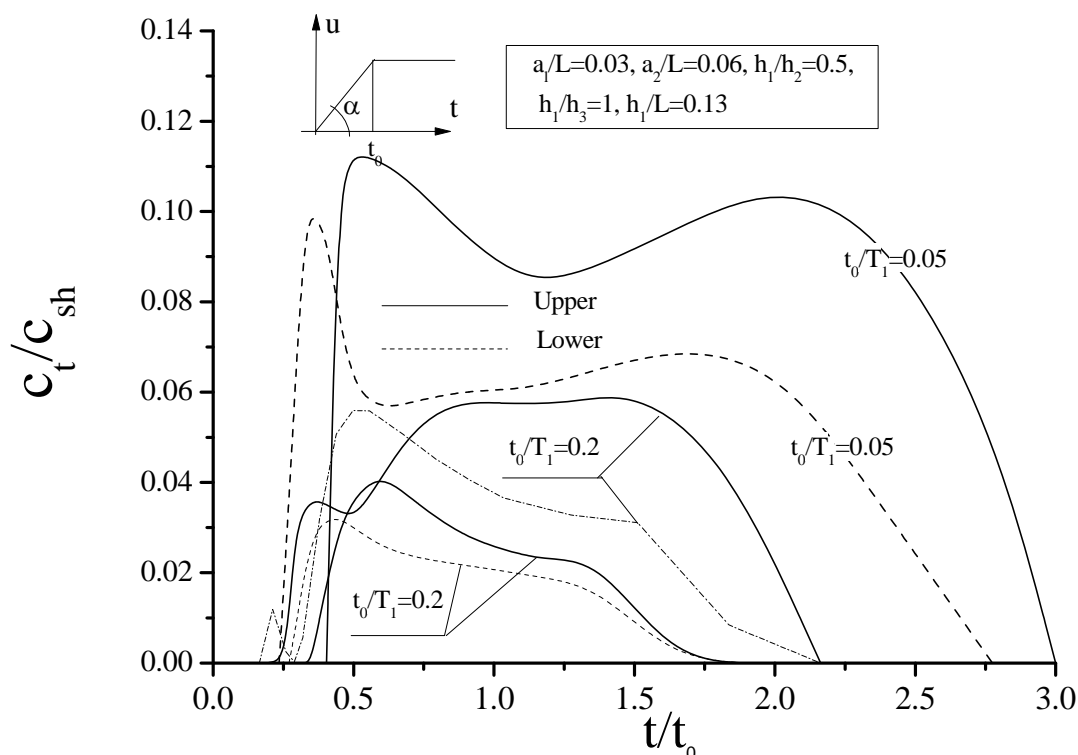


**Figura 4.13** Schema ENF con doppia delaminazione equispaziata sullo spessore del laminato..

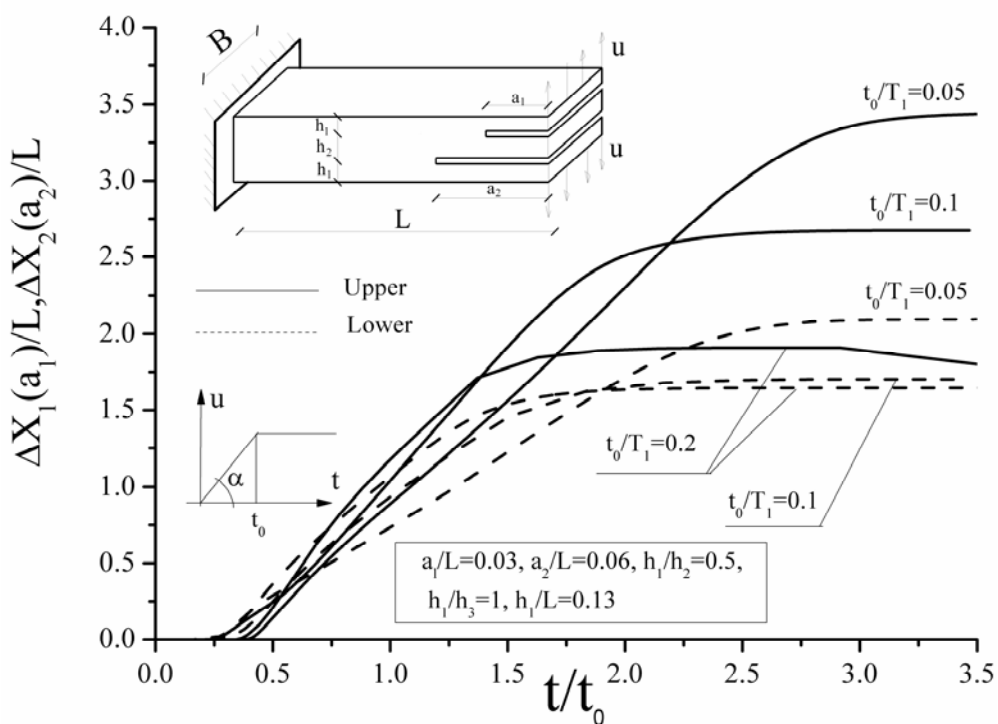


**Figura 4.14** Schema ENF con doppia delaminazione equispaziata sullo spessore del laminato: storia temporale del fattore di amplificazione dinamica ( $G/G_{st}$ ), dove  $G_{st}$  rappresenta il valore statico della ERR.

Infine, si presenta un'analisi su uno schema DCB caratterizzato da una condizione di doppia delaminazione equispaziata lungo lo spessore, ma di diversa estensione lungo lo sviluppo longitudinale del laminato. Tale condizione di carico determina un caso in cui vengono attivati entrambi i modi fondamentali di frattura. Il laminato è soggetto a condizioni di carico a spostamento controllato di estermità caratterizzato da medesimi spostamenti di estremità. Lo scopo principale di questo studio è analizzare l'interazione tra le due delaminazioni su un laminato soggetto ad una condizione di carico che induce sul laminato spostamenti di apertura. L'evoluzione temporale della curva di carico può essere rappresentata facendo riferimento ad una funzione di tipo bilineare, in cui il primo ramo risulta lineare fino allo spostamento massimo, mentre il secondo corrispondente alla fase a spostamento bloccato. L'ampiezza degli effetti della velocità è scelta al fine di produrre propagazione delle fessure a differenti intensità della curva di velocità. In **fig. 4.15** è riportata per differenti curve di carico l'evoluzione temporale della velocità all'apice della fessura, rispettivamente per le fessure superiore ed inferiore.



**Figura 4.15** Schema ENF con doppia delaminazione longitudinalmente sfalsate. storia temporale delle velocità agli apici delle fessure superiore ed inferiore adimensionalizzate rispetto alla velocità delle onde da taglio del materiale ( $c/c_{sh}$ ) per differenti curve di velocità di applicazione del carico.



**Figura 4.16** Schema DCB con doppia delaminazione longitudinalmente sfalsate: storia temporale degli spostamenti delle fessure superiori ed inferiori adimensionalizzati rispetto alla totale lunghezza del laminato per differenti velocità di applicazione dei carichi esterni.

Inoltre, in **fig.4.16**, per lo schema di trave DBC è rappresentata l'evoluzione temporale degli spostamenti delle fessure superiore ed inferiore adimensionalizzati rispetto alla lunghezza totale del laminato, in funzione delle diverse velocità di applicazione del carico. I risultati mostrano che l'avanzamento della fessura superiore avviene prima di quella inferiore così come ci si aspetta date le condizioni di carico. Dopo un certo periodo di tempo, la fessura inferiore soddisfa il criterio di avanzamento e si può osservare in modo simultaneo l'avanzamento di entrambe le delaminazioni.

# CAPITOLO 5

## Conclusioni

L'attività di ricerca svolta durante il corso di dottorato ha avuto come tema fondamentale lo studio dei meccanismi di propagazione interfacciale in ambito dinamico nei materiali compositi del tipo multistrato. L'obiettivo del lavoro di tesi è stato quello formulare un modello generalizzato per la valutazione del percorso di frattura di difetti interfacciali, facendo riferimento ad una modalità di crescita in regime dinamico e non stazionario.

I laminati compositi del tipo multistrato seppur presentano elevate proprietà meccaniche, quali elevati rapporti resistenza/peso, limitata degradabilità del materiale ecc., sono caratterizzati da imperfezioni e difetti interni di esecuzione o causati, in generale, durante la storia di carico della struttura. Tali difformità del materiale possono determinare una serie di fenomeni di degradazione, causando, in qualche caso per evoluzione degli stessi, anche il collasso totale della struttura. In particolare, uno dei meccanismi che si riscontra nelle applicazioni pratiche è quello noto in letteratura come meccanismo di delaminazione che, sostanzialmente, consiste nella presenza di difetti o microfratture nella zona di interfaccia che, per effetto del carico applicato, progrediscono e determinano elevati riduzioni di resistenza e rigidità con conseguente collasso di tipo catastrofico. L'evoluzione di tali meccanismi di natura interfacciale si può ritenere sostanzialmente confinata lungo le zone interlaminari, che rappresentano specie nei compositi multistrato piani preferenziali di crescita. In tali zone, i processi crescita delle delaminazioni possono raggiungere velocità di propagazione elevatissime, talvolta anche in regime intersonico. Pertanto l'obiettivo del presente lavoro di tesi stato quello di individuare una metodologia semplice per lo studio dei percorsi di frattura nell'ambito dei fenomeni di propagazione dinamica di tipo non stazionario. In particolare, si è sviluppato un modello generale basato sui concetti classici della Meccanica della Frattura e sulla metodologia delle mesh mobili. Nel primo ambito, sono state sviluppate formulazioni analitiche, ricavando espressioni delle componenti modali in ambito non stazionario, facendo uso della tecnica di

decomposizione modale dell'integrale  $J$ . Tale formulazione ha consentito contrariamente agli attuali metodi di calcolo esistenti in letteratura, di ricavare in modo diretto le componenti modali dell'energia di rilascio evitando le complessità di analisi derivanti dagli elevati gradienti delle variabili di tensione e di deformazione presenti all'apice del difetto. Inoltre, il modello prevede l'uso di un criterio di avanzamento basato su crescita del difetto secondo una modalità in modo misto, in cui la propagazione del difetti avviene facendo uso di una funzione di frattura. Quest'ultima viene proposta generalizzando le attuali formulazioni esistenti in letteratura e della stessa è stata proposta una validazione mediante confronti con risultati sperimentali esistenti in letteratura.

La metodologia delle mesh mobili è stata utilizzata per simulare la risposta di variazione geometrica del reticolo numerico, essenzialmente prodotta dal moto dei meccanismi di delaminazione. In particolare, la formulazione viene proposta in forma generalizzata facendo uso di un modello “*pienamente*” accoppiato che tiene conto, mediante un approccio variazionale, sia dei cambiamenti geometrici dovuti alle variazioni di forma del modello discreto che dei processi di crescita di difetti interfacciali generati dalla crescita delle delaminazioni. Per simulare i fenomeni di propagazione dinamica, è stata sviluppata una formulazione combinata basata su una formulazione del tipo ALE (Arbitrarian-Lagrangian Eulerian), mediante la quale è possibile, rispetto agli usuali approcci classici, imporre variazioni geometriche al modello numerico riducendo, ove possibile, le distorsioni del reticolo discreto. Inoltre, il modello fa uso di opportune tecniche di remeshing, che consentono al generico passo di carico una inizializzazione della modello numerico, e quindi un ripristino del livello di distorsione del reticolo discreto. In tal modo è possibile garantire un adeguato livello di dettaglio nelle zone in cui è necessaria un'adeguata accuratezza nella stima delle variabili di definizione della formulazione.

Il modello è stato implementato facendo uso di una tecnica agli elementi finiti sviluppata all'interno del codice commerciale COMSOL MULTIPHYSICS TM, che consente una diretta scrittura delle equazioni proprie della formulazione. In particolare, le equazioni del problema sono state formulate facendo uso di un approccio variazionale, in cui le variabili in soluzione sono sia quelle del problema strutturale che quelle relative alla formulazione ALE. Il processo di soluzione viene risolto facendo uso di un metodo di

---

integrazione diretta delle equazioni del problema secondo un modello incrementale ed iterativo.

Il modello è stato validato sviluppando confronti con dati sperimentali esistenti in letteratura. In particolare, sono stati analizzati casi di carico, che coinvolgono condizioni di puro modo I e II oppure condizioni in modo misto. Tali risultati evidenziano un buon accordo tra le stime del percorso evolutivo determinate dal modello proposto e quelle ottenute nell'ambito sperimentale, da cui emerge la consistenza del modello proposto. Inoltre, sono state sviluppate analisi parametriche sulla valutazione del comportamento dinamico, considerando laminati caratterizzati dalla presenza di una o più delaminazioni presenti all'interno della struttura multistrato. Le analisi evidenziano come il laminato sia fortemente influenzato dal carattere inerziale della soluzione e presenti rispetto al comportamento statico, un'amplificazione significativa dei principali parametri di controllo del comportamento strutturale. Inoltre, le velocità di avanzamento dell'apice del difetto risultano spesso confrontabili con quelle di propagazione delle onde nel materiale, da cui emerge chiaramente che il comportamento di tali meccanismi di delaminazione risulta essenzialmente dinamico.

## Bibliografia

- Aberson, J.A., Anderson, J.M. and King, W.W. (1977). *Fast Fracture and Crack Arrest*, G.T. Hahn and M.F. Kanninen (eds.), ASTM STP **627**, 123–134.
- Achenbach, J.D. and Bazant, Z.P. (1974). *Journal of Applied Mechanics* **42**, 183–189.
- Ando, Y., Yagawa, G. and Sakai, Y. (1975). Transactions of the 3rd International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology L7/1.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Kondo, H. and Sakata, M. (1978). *International Journal of Fracture* **14**–1, 59–68.
- Aoki, S., Kishimoto, K. and Sakata, M. (1984). *Engineering Fracture Mechanics* **19**–5, 827–836.
- Aoki, S. (1988). *JSME International Journal*, Series I, 31–3, 487–499.
- Atluri, S.N. (1982). *Engineering Fracture Mechanics* **16**, 341–364.
- Atluri, S.N. and Nishioka, T. (1985). *International Journal of Fracture* **27**, 245–261.
- Atluri, S.N., Nishioka, T. and Nakagaki, M. (1984). *Engineering Fracture Mechanics* **20**–2, 209–244.
- Baker, B.R. (1962). *Journal Applied Mechanics* **29**, 449–454.
- Barbero E.J. *Finite Element Analysis of Composite Materials*. Boca Raton, FL: CRC, 2007.
- Bazant, Z., Glazik, J.L. Jr. and Achenbach, J.D. (1978). *Computers and Structures* **8**, 193–198.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. and Tabbara, M. (1995). *International Journal of Solids and Structures* **32**, 2547–2570.
- Belytschko, T., Organ, D. and Krongauz, Y. (1995). *Computational Mechanics* **17**, 186–195.
- Belytschko, T. and Tabbara, M. (1996). *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **39**–6, 923–938.
- Bruno D, Greco F, Lonetti P. Dynamic Mode I and Mode II crack propagation in fiber reinforced composites. *Mechanics of Materials and Structures* 2009; **16**:442-455.
- Bruno D. , Greco F. , Lonetti P. , A dynamic model to predict crack propagation in z-pinned composite structures. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 2011, Vol. 2, pp. 143-157.
- Bruno D. , Greco F. , Lonetti P. , Manna A. , Nevone Blasi P. , " Dynamic crack propagation in composite structures including bridging effects". Atti del convegno "IV European Conference on Computational Mechanics (ECCM 2010)", Palais des Congrès, Paris (France), May 16-21, 2010.
- Bruno D. , Lonetti P. , Manna A. , " Dynamic phenomena of interfacial cracks in laminated structures". Atti del convegno "AIMETA", ANCONA, 2009.
- Budiansky, B. and Rice, J.R. (1973). *Journal of Applied Mechanics* **40**, 201–203.
- Burgers, P. (1980). *International Journal of Fracture* **16**, 261–274.
- Caruso C. , Lonetti P. , Manna A. , " Dynamic Crack Propagation in Fiber Reinforced Composites". Atti del convegno "COMSOL CONFERENCE 2009", MILANO, 2009
- Chen, E.P. and Sih, G.C. (1977). *Elastodynamic Crack Problems*, G.C. Sih (ed.) Noodhoff 1–58.
- Cherepanov, G.P. (1967). *Applied Mathematical Mechanics* **31**–3, 467–488.
- Comsol, Reference Manual, Stockholm, Comsol AB, 2007.
- Cundall, P.A. (1971). Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics, Nancy, France Vol. 1, No. II–8.
- Dally, J.W. (1979). *Experimental Mechanics* **19**, 349–367.
- Deng, X. (1993). *International Journal of Solids and Structures* **30**–4, 513–519.
- Dominguez, J. (1993). *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications.
- Donea J, Huerta A, Ponthot J-Ph and Rodriguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods, In: Erwin Stein, De Borst R, Hughes T, editors. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, 2004.
- Eshelby, J.D. (1956). *Solid State Physics*, III, Academic Press, 79–144.
- Fedelinski, P., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. (1995) *Dynamic Fracture Mechanics*, M.H. Aliabadi (ed.), Computational Mechanics Publications, 61–100.
- Freund, L.B. (1972). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **20**, 129–140.
- Freund, L.B. (1973). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **21**, 47–61.
- Freund, L.B. (1980). Private communication to A.J. Rosakis, *Engineering Fracture Mechanics* **13**, 331–347.
- Freund, L.B. and Douglas, A.S. (1982). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **30**, 59–74.
- Freund, L.B., Hutchinson, J.W. and Lam, P.S. (1986) *Engineering Fracture Mechanics* **23**, 119–129.
- Freund, L.B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge University Press.
- Freund, L.B. and Rosakis, A.J. (1992). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **40**–3, 699–719.
- Gadala MS and Wang J. ALE formulation and its application in solid mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1998; **167**(1–2):33–55.



- Gadala MS and Wang J. Simulation of metal forming processes with finite element methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1999;44(10):1397–1428.
- Gadala MS, Movahhedy MR and Wang J. On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes. *Finite Elem.Anal. Des.* 2002; 38(5):435–459.
- Greco F, Lonetti P. Mixed mode dynamic delamination in fiber reinforced composites. *Composites Part B: Engineering* 2009; 40 (5): 379-392.
- Guo C, Sun CT. Dynamic mode-I crack-propagation in a carbon/epoxy composite, *Composites Science and Technology* 1998; 58:1405-1410.
- Hsu, T.R. and Zhai, Z.H. (1984). *Engineering Fracture Mechanics* **20**, 521–533.
- Hutchinson JW, Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials. *Advances in Applied Mechanics In: Hutchinson JW, Wu TY editors. Vol. 29, 63-191, NewYork :Academic Press Inc., 1992.*
- Iannucci L. Dynamic delamination modelling using interface elements. *Computers and Structures* 2006; 84:1029–1048.
- Ishikawa, H., Kitagawa, H. and Okamura, H. (1979). *Proceedings of the 3rd International Conference of Mechanics Behaviors of Materials*, **3**, 447–455.
- Ivankovic, A. and Williams, J.G. (1995). *Dynamic Fracture Mechanics*, M.H. Aliabadi (ed.), Computational Mechanics Publications, Chapter 3, 101–136.
- Kannan, K.S., Kumar, R.K. and Prabhakar, O. (1993). *Computational Mechanics* 12–6, 349–359.
- Kanninen, M.F. (1978). *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, D.R.J. Owen and A.R. Luxmoore (eds), Pineridge Press, 612–634.
- Kanninen MF, Papelar CH. *Advanced fracture mechanics*. New-York: Oxford University Press, 1985.
- Keegstra, P.N.R. (1978). *Journal of Institute for Nuclear Engineering* 17–4, 89–96.
- Keegstra, P.N.R., Head, J.L. and Turner, C.E. (1978) *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R. Luxmoore and D.R.J. Owen (eds), University College, Swansea, 634–647.
- Kishimoto, K., Aoki, S. and Sakata, M. (1980). *Engineering Fracture Mechanics* **13**, 841–850.
- Kobayashi, A.S., Emery, A.F. and Mall, S. (1976). *Experimental Mechanics* **16**, 231–238.
- Kobayashi, A.S., Mall, S., Urabe, Y. and Emery, A.F. (1978). *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R.
- Koh HM and Haber RB. Elastodynamic formulation of the Eulerian Lagrangian kinematic description. *J. Appl. Mech* 1986; 53: 839-845.
- Lambros J, Rosakis AJ. Dynamic decohesion of bimaterials: Experimental observations and failure criteria. *International Journal of Solids and Structures* 1995; 32(17-18):2677-2702.
- Liu WK and Chang HG. Efficient computational procedures for long-time duration fluid-structure interaction problems. *J. Press.Vessel Technol.-Trans. ASME* 1984; 106:317–322.
- Liu WK and Chang HG. A method of computation for fluid structure interaction. *Comput. Struct.* 1985; 20(1–3):311–320.
- Liu WK and Gvildys J. Fluid-structure interaction of tanks with an eccentric core barrel. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1986; 58(1):51–77.
- Liu WK, Belytschko T and Chang H. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for path-dependent materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1986; 58(2):227–245.
- Liu WK, Chang H, Chen JS and Belytschko T. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1988;68(3):259–310.
- Liu WK, Chen JS, Belytschko T and Zhang YF. Adaptive ALE finite elements with particular reference to external work rate on frictional interface. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1991;93(2):189–216.
- Luxmoore and D.R.J. Owen (eds), University College, Swansea, 678–684.
- Koh, H.M. and Haber, R.B. (1986). *Journal of Applied Mechanics* **53**, 839–845.
- Koh, H.M. and Haber, R.B. (1988). *Computational Mechanics* **3**, 141–153.
- Kostrov, B.K. (1975). *International Journal of Fracture* 11–1, 47–56.
- Kostylev, V.I. and Margolin, V.Z. (1990). *Strength of Materials* 22–7, 943–953.
- Liu, C. and Rosakis, A.J. (1994). *Journal of Elasticity* **35**, 27–60.
- Lonetti P. , " Dynamic propagation phenomena of multiple delaminations in composite structures". *Computational materials scienze*, 2010, Vol. 48, n. 3, pp. 563-575.
- Mall, A. and Luz, J. (1980). *International Journal of Fracture* **16**, 33–36.
- Malluck, J.F. (1976). Crack propagation in finite bodies, *Ph.D. thesis of Georgia Institute of Technology*.
- Malluck, J.F. and King, W.W. (1978). *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R. Luxmoore and D.R.J.
- Nikishikov, G.P. and Atluri, S.N. (1987). *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20**, 1801–1821.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1980a). *Journal of Applied Mechanics* **47**, 570–576.

- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1980b). *Ibid.*, 577–582.
- Nishioka, T., Stonesifer, R.B. and Atluri, S.N. (1981). *Engineering Fracture Mechanics* **15**, 205–218.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1982). *Engineering Fracture Mechanics* **16–3**, 303–332.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1983a). *Engineering Fracture Mechanics* **18–1**, 1–22.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1983b). *Engineering Fracture Mechanics* **18–1**, 23–33.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1984a). *Engineering Fracture Mechanics* **20–2**, 193–208.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1984b). *AIAA Journal* **22**, 409–414.
- Nishioka, T. and Atluri, S.N. (1986). *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, S.N. Atluri (ed.), Elsevier Science Publishers, 335–383.
- H. Nishitani and T. Ishikawa (eds), North-Holland, Amsterdam, 561–573.
- Nishioka, T. (1989). *Engineering Fracture Mechanics* **32–2**, 309–319.
- Nishioka, T., Murakami, R. and Takemoto, Y. (1990). *International Journal of Pressure Vessels and Piping* **44**, 329–352.
- Nishioka, T., Maeda, N. and Matsuo, S. (1992). Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science, Hong Kong, December 17–22, 286–286.
- Nishioka, T. (1994). *JSME International Journal, Series A*, **37–4**, 313–333.
- Nishioka, T. and Kondo, K. (1995). In *Contemporary Research in Engineering Science*, R.C. Batra (ed.), Springer-Verlag, 393–417.
- Nishioka, T., Kobayashi, Y., Fujimoto, T. and Epstein, J.S. (1995). *International Journal of Pressure Vessels and Piping* **63**, 277–291.
- Nishioka, T., Ichikawa, Y. and Maeda, N. (1995). *Dynamic Fracture, Failure and Deformation*, ASME Publication, PVP-Vol. 300, T. Nishioka and J.S. Epstein (eds), 73–85.
- Nishioka, T. (1995). *Dynamic Fracture Mechanics*, M.H. Aliabadi (ed.), Computational Mechanics Publications, Chapter 1, 1–60.
- Nishioka, T. and Kondo, K. (1996a). *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, 62–596, 945–952.
- Nishioka, T. and Kondo, K. (1996b). *Ibid.* 62–595, 666–670.
- Nishioka, T. (1977a). *Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge Dedicated to Alan Arnold Griffith*, G.P. Cherepanov (ed.), Krieger Publishing Company, 536–572.
- Nishioka, T. (1997b). *Optics and Laser Engineering, Special Issue on Hybrid Methods in Experimental Mechanics*.
- Nuismer, R.J., Jr. and Achenbach, J.D. (1972). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **20**, 203–222.
- Ostlund, S. and Gudmondson, P. (1987). *Computers and Structures* **25–5**, 765–774.
- Ostlund, S. (1990). *International Journal of Fracture* **44**, 283–299.
- Park K, Paulino GH and Roesler JR. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2009; 57: 891-908.
- Patterson, C. and Oldale, M.C. (1979). *Stability Problems in Engineering Structures and Components*, T.H. Richards and P. Stanley (eds), Applied Science Publishers, 281–296.
- Ponthot JP, Belytschko T. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; 152(1-2): 19-46.
- Ramakrishnan, C.V., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C. (1986). *Engineering Fracture Mechanics* **23**, 145–157.
- Ravi-Chandar K. Dynamic Fracture of Nominally Brittle Materials. *International Journal of Fracture* 1998; 90(1):83-102.
- Ravi-Chandar K. *Dynamic Fracture*, Amsterdam: London : Elsevier, 2004.
- Rice, J.R. (1968a). In *Fracture, Volume II: Mathematical Fundamentals*, H. Liebowitz (ed.), Academic Press, New York, 191–311.
- Rice, J.R. (1968b). *Journal of Applied Mechanics* **35**, 379–386.
- Rigby RH, Aliabadi MH. Decomposition of the mixed-mode J-integral—revisited. *International Journal of Solids and Structures* 1998; 35 (17):2073-2099.
- Rosakis, A.J., Liu, C. and Freund, L.B. (1991). *International Journal of Fracture* **50**, R39-R45.
- Rosakis AJ, Samudrala O, Singh RP, Shukla A. Intersonic crack propagation in bimaterial systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1998; 46(10):1789-1814.
- Rydholm, G., Fredriksson, B. and Nilsson, F. (1978). *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R. Luxmoore and D.R.J. Owen (eds), University College, Swansea, 660–672.
- Shaw, R.D. and Pichen, R.G. (1978) *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **12**, 93–99.
- Swenson, D.V. and Ingrassia, A.R. (1988). *Computational Mechanics* **3**, 381–397.

- Takahashi, K. and Arakawa, K. (1987). *Experimental Mechanics* **27**, 195–200.
- Thesken, J.C., Bass, B.R. and Parrott, J.S. (1991). Proceedings of the 11th Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, G10/2, 255–260.
- Tsai JL, Guo C, Sun CT. Dynamic delamination fracture toughness in unidirectional polymeric composites. *Composites Science and Technology* 2001; 61(1):87-94.
- Valliappan, S. and Multi, V. (1986). *Computational Mechanics '86 – Theory and Applications*, G. Yagawa and S.N. Atluri (eds), Springer-Verlag **1**, V297–V303.
- Van Vroonhoven, J.C.W. (1992). *Reliability and Structural Integrity of Advanced Materials* 885–890.
- Washizu, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press.
- Williams, M.L. (1957). *Journal of Applied Mechanics* **24**, 109–114.
- Xie D, Biggers SB. Calculation of transient strain energy release rates under impact loading based on the virtual crack closure technique. *International Journal of Impact Engineering* 2007; 34 (6):1047-1060.
- Xu, X.P. and Needleman, A. (1994). *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **42**, 397–1434.
- Yagawa, G., Sakai, Y. and Ando, Y. (1977). *Fast Fracture and Crack Arrest*, G.T. Hahn and M.F. Kanninen (eds), ASTM STP **627**, 109–122.