

# Capitolo 3

## Analisi omogeneizzata per microstrutture porose contenenti microfratture

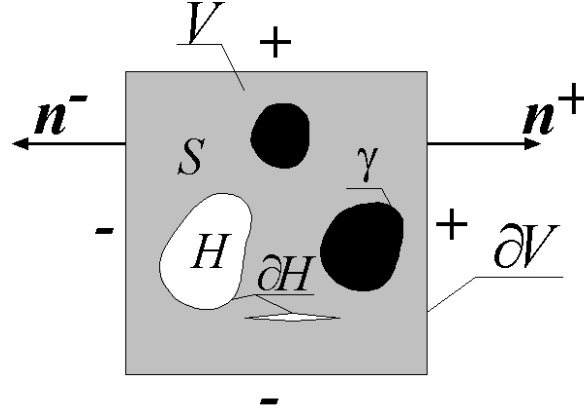
Nel presente capitolo verranno studiati i fenomeni di non linearità, nell'ambito delle deformazioni infinitesime, connessi alla presenza di microfratture presenti nella microstruttura. Pertanto si richiameranno i concetti della micromeccanica nell'ambito delle deformazioni infinitesime, affiancando quelli della meccanica della frattura e le leggi di interfaccia. In particolare lo studio sarà affrontato con riferimento ai materiali compositi a matrice porosa, in cui si ha la presenza di due microfratture poste in modo simmetrico rispetto al vuoto. Per quanto riguarda l'energia di rilascio, per una configurazione fissata delle microfratture, verrà ricavata attraverso la tecnica dell'integrale  $J$ . Inoltre con riferimento alla modellazione numerica sono state impiegate tre tipi di condizioni al contorno ed in particolare la condizione di *spostamenti lineari*, quella di *trazioni uniformi* e quella *deformazioni periodiche e trazioni antiperiodiche* (che in seguito verrà identificata come *fluttuazioni periodiche* per brevità).

### 3.1 Formulazione

In Figura 3.1 viene rappresentato l'elemento rappresentativo di volume (RVE) relativo ad una microstruttura di un materiale composito, caratterizzato da una parte solida, denominata con  $S$ , e da una parte vuota, denominata con  $H$ , la quale a sua volta può includere una serie di discontinuità microscopiche come: microfratture o microdifetti alle interfacce tra i vari costituenti ed inoltre microcavità. A tal riguardo, il volume totale  $V$  di tale cella unitaria può essere rappresentato mediante l'unione di tali due porzioni di volume fondamentali:

$$V = S \cup H \quad (3.1)$$

Si indicherà inoltre con  $\partial H$  il contorno della parte vuota, il quale include , le superfici dei microvuoti nonché delle microfratture, che possono essere presenti all'interno della microstruttura. Indichiamo con  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  il campo di spostamenti in corrispondenza del punto materiale  $\mathbf{x}$  all'interno della microstruttura, mentre con  $\varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  viene indicata la corrispondente microdeformazione. Il campo di trazione microscopico  $\mathbf{t}$  viene assunto nullo in assenza di contatto sulla superficie di contorno dei vuoti e delle fratture presenti all'interno della microstruttura, ed inoltre risulta essere diverso da zero solo sul contorno  $\partial V$  dell'RVE.



**Figura 3.1** Elemento di volume rappresentativo della microstruttura.

Viene, pertanto, imposta la seguente condizione sul contorno  $\partial H$  della parte vuota:

$$\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial H \quad (3.2)$$

Data la grande differenza tra la micro e la macro scala, ed in accordo con la classica teoria sulla omogeneizzazione, si può assumere che le forze di volume pari a zero. Pertanto il campo di microtensione risulta essere a divergenza nulla come indicato dalla seguente relazione indefinita di equilibrio sul volume:

$$\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{su } S \quad (3.3)$$

I macrocampi di tensione e deformazione possono essere ottenuti mediante l'introduzione dei campi di trazione  $\mathbf{t}$  e spostamento  $\mathbf{u}$ , assegnati sul contorno della cella unitaria, ottenendo le seguenti relazioni fondamentali della *Teoria dei campi medi* (Hill R., 1972):

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} dS \end{cases} \quad (3.4)$$

dove con  $\otimes_s$  si è indicata la parte simmetrica del prodotto tensoriale  $\otimes$ , mentre  $\mathbf{n}$  rappresenta il vettore normale al contorno  $\partial V$  dell'elemento di volume rappresentativo, nel punto individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x}$ . Le espressioni (3.4) per le macrovariabili coincidono, nell'ambito della *Teoria dei campi medi*, con i valori medi calcolati sul volume  $V$  dei microcampi di tensione e, solo in assenza di vuoti o inclusioni all'interno della microstruttura, di deformazione. A tal riguardo, applicando il teorema della divergenza, è possibile ottenere le seguenti espressioni per i campi macroscopici:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV - \frac{1}{V} \int_{\partial H} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{N} dS \end{cases} \quad (3.5)$$

dove  $\mathbf{N}$  rappresenta il vettore normale alla superficie di contorno della parte vuota  $\partial H$ .

Nel passaggio dalle (3.4) alle (3.5), occorre osservare come all'interno dell'espressione delle tensioni medie è stata effettuata la seguente posizione:

$$-\frac{1}{V} \int_{\partial H} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

La quale è giustificata dal fatto che la parte vuota è caratterizzata da valori nulli della trazione  $\mathbf{t}$ . Nel caso in cui sia assume la presenza delle forze di contatto tra le superfici della singola microfrattura, la (3.6) continua ad essere valida data la continuità del vettore tensione. Il campo di spostamenti locale risulta essere controllato mediante una

deformazione macroscopica  $\bar{\epsilon}$  ed è costituita di due aliquote : una parte *lineare* ed un campo di *fluttuazione*. Avremo, pertanto, il seguente campo di spostamenti microscopico:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\epsilon}\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

Dal campo di spostamenti è possibile ricavare il corrispondente campo di microdeformazioni:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\epsilon}\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

dove con  $\nabla_s$  si è indicata la parte simmetrica del gradiente rispetto alla variabile  $\mathbf{x}$ . Dalla seconda delle (3.4), si ha che il campo di fluttuazione deve rispettare la seguente condizione:

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{w} \otimes_s \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Tale condizione può essere rispettata imponendo una delle seguenti tre differenti condizioni sul contorno  $\partial V$  dell'RVE:

1) <i>Fluttuazioni omogenee</i>	$\mathbf{w} = \mathbf{0};$	
2) <i>Fluttuazioni periodiche</i>	$\mathbf{w}(\mathbf{x}^+) = \mathbf{w}(\mathbf{x}^-);$	(3.10)
3) <i>Tensioni uniformi</i>	$\mathbf{t} = \bar{\sigma}\mathbf{n};$	

In particolare, la condizione (1) delle (3.10) assicura la linearità degli spostamenti come si può facilmente verificare sostituendo la condizione  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$  all'interno della (3.7). La condizione di fluttuazione periodiche (2), invece, garantisce che ogni componente del campo  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  assume gli stessi valori nei medesimi punti dei lati opposti,  $\partial V^+$  e  $\partial V^-$ , del contorno  $\partial V$  della microstruttura, caratterizzati dall'avere normale esterna, nei punti  $\mathbf{x}^+$  ed  $\mathbf{x}^-$ , opposta:

$$\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^- \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda, invece, la condizione (3) occorre osservare come la (3.9) può essere soddisfatta in senso globale, poichè le macrotensioni non risultano note a priori, ma

possono essere calcolate attraverso un'assegnata macrodeformazione  $\bar{\varepsilon}$ , valutata a sua volta mediante la seconda delle (3.4). In particolare, si ottiene la seguente equazione di vincolo in forma debole:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \bar{\sigma} \cdot (\mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n}) dS &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{V} \int_{\partial V} \bar{\sigma} \cdot (\mathbf{w} \otimes_s \mathbf{n}) dS &= 0\end{aligned}\tag{3.12}$$

All'interno della quale il tensore di macrotensione assume il significato di un moltiplicatore di *Lagrange*. Assumendo, a questo punto, che il campo di microtensione sia a divergenza nulla nella zona solida  $S$  come espresso dalla relazione (3.3), nonché l'antiperiodicità delle trazioni sul contorno  $\partial V$ , le tre condizioni al contorno, espresse dalla relazioni (3.10), soddisfano il teorema della media (Hill R., 1972):

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_V \sigma \cdot \varepsilon dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS,\tag{3.13}$$

nella quale il vettore tensione  $\mathbf{t}$  può essere legato alla macrotensione mediante la terza delle condizioni (3.10).

Tale equazione riveste un ruolo fondamentale nella definizione delle proprietà macroscopiche per un materiale composito. Occorre osservare, come la prima e la terza delle possibili condizioni applicabili sul contorno  $\partial V$ , forniscono l'estremo superiore e quello inferiore per l'energia di deformazione macroscopica per una cella unitaria di dimensioni finite (RVE), rappresentativa del comportamento microscopico di un materiale composito fortemente eterogeneo. Si ottiene, in particolare, la convergenza ad unico valore dell'energia nel caso in cui le dimensioni dell'RVE tendano all'infinito. D'altro canto la seconda condizione al contorno risulta esattamente applicabile ai materiali periodici, la cui struttura può essere pensata come generata da una ripetizione periodica della cella unitaria, caratterizzata dalla presenza di una zona vuota.

### 3.2 Formulazione variazionale per compositi iperelastici nell'ambito delle deformazioni infinitesime

Il comportamento meccanico dei micro-costituenti viene assunto iperelastico lineare, definendo il tensore di elasticità microscopico  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ . La condizione di omogeneizzazione può essere ottenuta, a questo punto, mediante il seguente problema di minimizzazione:

$$\bar{W}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \inf_{\mathbf{w} \in A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \frac{1}{V} \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{x}) dV, \quad (3.14)$$

soggetto ad una delle tre differenti condizioni al contorno viste nel precedente paragrafo. La (3.14) consente, quindi, di valutare il macropotenziale elastico  $\bar{W}$  come il minimo valore medio dell'energia di deformazione microscopica  $W$ , rispetto ad un campo di fluttuazione appartenente all'insieme  $A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$  di tutte le fluttuazioni ammissibili, in grado di soddisfare una delle tre condizioni al contorno.

Mediante le derivate prima e seconda rispetto alle macrodeformazioni del macropotenziale elastico, è possibile risalire alle macrotensioni e ai moduli del materiale omogeneizzato:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \bar{\mathbf{C}} = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Se il problema di minimizzazione (3.14) risulta essere di tipo lineare, è possibile riscrivere le (3.15) nella forma seguente:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV = \bar{\mathbf{C}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{C}}_{ijkl} = \frac{1}{V} \int_V C_{ijmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}(u^{hk}) dV = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(u^{hk}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u^{ij}) dV \end{cases} \quad (3.16)$$

dove  $u^{ij}$  rappresenta la soluzione del problema (3.14) per un'assegnata macrodeformazione unitaria  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij} = \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j$ . Il problema di minimizzazione (3.14) può

essere risolto, come detto, imponendo una della tre differenti condizioni al contorno espresse. In particolare, al variare della condizione al contorno, è possibile ottenere le equazioni di *Eulero-Lagrange* del problema variazionale, mediante le quali viene definito lo stato di equilibrio della microstruttura.

A tal riguardo, nel caso in cui venga imposta la condizione di *spostamenti lineari*, il principio variazionale può esprimersi mediante le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV &= \frac{1}{V} \int_V \nabla \delta \mathbf{w} \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{V} \int_V \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \mathbf{w} \right) dV - \frac{1}{V} \int_V \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} \right) dS - \frac{1}{V} \int_V \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

In particolare con  $\delta \mathbf{w}$  si è indicato un campo di fluttuazione virtuale, il quale deve soddisfare la condizione di spostamenti lineari sul contorno della microstruttura. E' possibile quindi ottenere le equazioni di *Eulero-Lagrange* del problema:

$$\begin{cases} \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} & \text{in } V \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \end{cases} \tag{3.18}$$

Pertanto, appare evidente come il principio variazionale sia in questo caso consistente con uno stato di equilibrio della microstruttura, accoppiato a valori nulli del vettore tensione sul contorno  $\partial H$  della parte vuota. Nel caso in cui vengano imposte, invece, le *condizioni periodiche* sul contorno della microstruttura il principio variazionale assume la forma seguente:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^+ + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^- \right] dS + \frac{1}{V} \int_{\partial H} \delta \mathbf{w} \cdot \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} dS + \\
 - \frac{1}{V} \int_V \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV = 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

In questo caso il campo di fluttuazione virtuale  $\delta \mathbf{w}$  deve soddisfare la condizione di tipo periodico per la quale deve valere  $\mathbf{w}(\mathbf{x}^+) = \mathbf{w}(\mathbf{x}^-)$  sul contorno della microstruttura. Inoltre, occorre osservare come, per tale condizione al contorno, lo stato di equilibrio della microstruttura viene determinato a meno di un moto rigido, il quale può essere eliminato mediante l'imposizione di appropriate condizioni di vincolo. Le equazioni di *Eulero-Lagrange* del problema assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \text{Div}\left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \mathbf{0} & \text{in } V \\ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^+ + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^- = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \\ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \end{cases} \quad (3.20)$$

Il principio variazionale risulta essere consistente, in questo caso, con uno stato di equilibrio della microstruttura caratterizzato da un comportamento antiperiodico del vettore tensione sul contorno esterno  $\partial V$  della microstruttura, e da valori nulli dello stesso sul contorno  $\partial H$  della parte vuota.

Per quanto riguarda, infine, il caso in cui venga imposta sul contorno della microstruttura la condizione di *tensioni uniformi*, occorre osservare come all'interno della formulazione del problema dell'omogeneizzazione guidata mediante una macrodeformazione assegnata, tale condizione al contorno può essere incorporata mediante l'utilizzo del metodo dei moltiplicatori di *Lagrange*. A tal riguardo il principio variazionale assume la forma di un problema di stazionarietà:

$$\bar{W} = \inf_{\mathbf{w}} \sup_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \left\{ \frac{1}{V} \int_V W \, dV - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{w} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}) \, dS \right\} \quad (3.21)$$

nella quale è stato combinato il problema di minimizzazione espresso dalla (3.14) con l'equazione di vincolo in forma debole rappresentata nella (3.12). Nella (3.21), dunque, la macro tensione  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  assume il significato di un moltiplicatore di *Lagrange*, garantendo il soddisfacimento della condizione di vincolo (3.9) sul campo di fluttuazione. Anche in questo caso lo stato di equilibrio della microstruttura può essere determinato a meno di un



moto rigido, il quale viene eliminato mediante l'imposizione di opportune condizioni di vincolo. In tale situazione occorre effettuare le variazioni rispetto ai due parametri in gioco, il campo di fluttuazione  $\mathbf{w}$  e la macrotensione  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , ottenendo la seguente espressione per il problema di stazionarietà:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \right) dS + \frac{1}{V} \int_{\partial H} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} \right) dS + \\ & - \frac{1}{V} \int_V \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV - \frac{1}{V} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \int_{\partial V} (\mathbf{w} \otimes_s \mathbf{n}) dS = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

e quindi risulta possibile ottenere le equazioni di *Eulero-Lagrange*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Div} \left( \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} & \text{in } V \\ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \\ \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{w} \otimes_s \mathbf{n}) dS = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \end{array} \right. \quad (3.23)$$

In tale situazione, il punto di stazionarietà del macropotenziale determina uno stato d'equilibrio per la microstruttura, caratterizzato da valori nulli della trazione su  $\partial H$  e da uno stato tensionale macroscopico omogeneo governato dal moltiplicatore di *Lagrange*  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ . Nel caso in cui sia assume la presenza delle forze di contatto tra le superfici danneggiate delle diverse microfratture presenti, il principio variazionale espresso dalla (3.13) può essere opportunamente modificato al fine di tenere in conto la condizione cinematica di contatto unilaterale. In particolare, tale condizione sul contatto può essere introdotta mediante un'opportuna scelta del campo di spostamenti ammissibili, il quale viene forzato ad essere di tipo convesso al fine di evitare la compenetrazione delle superfici della frattura (Bisegna P. et al, 1998). Quando si prende in considerazione il contatto tra le superfici della frattura, il comportamento costitutivo macroscopico del materiale composito eterogeneo diviene di tipo non-lineare, pur mantenendosi iperelastico e indipendente da

percorso di macro-deformazione. Pertanto, l'area di contatto non risulta essere nota a-priori, dipendendo solo dalla direzione dell'assegnata macro-deformazione. Ciò implica che il tensore di elasticità macroscopico  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$  risulta essere in grado di soddisfare, per ogni valore reale positivo del parametro  $\lambda$ , la seguente relazione:

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (3.24)$$

### 3.3 Legami costitutivi macroscopici

Per un'assegnata configurazione danneggiata della microstruttura, e in assenza di contatto tra le superfici delle microfratture, i moduli macroscopici omogeneizzati e le macro-tensioni possono essere ricavate mediante la (3.14), solo in funzione dell'energia di deformazione macroscopica:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{ijhk}(l) &= \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}_{ijmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}(\mathbf{u}^{hk}) dV \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \bar{\mathbf{C}}(l) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

osservando inoltre come il tensore di elasticità macroscopico dipenda dalla lunghezza  $l$  della singola microfrattura.

Nel caso in cui si prenda in considerazione il contatto tra le superfici della microfrattura, i noduli omogeneizzati risultano essere anche funzione della direzione della macrodeformazione assegnata:

$$\hat{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\|\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\|} \quad (3.26)$$

Pertanto in questo caso i moduli macroscopici omogeneizzati e le macro-tensioni si possono ricavare attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}}(l, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \bar{\mathbf{C}}(l, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (3.27)$$

Quando il contatto tra le superfici danneggiate viene trascurato nella modellazione, i moduli macroscopici  $\bar{\mathbf{C}}(l)$  possono essere ottenuti, per una fissata configurazione danneggiata ed un'assegnata microstruttura, mediante la seconda delle (3.15):

$$\bar{C}_{ijhk}(l) = \frac{1}{V} \int_V C_{ijmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}(\mathbf{u}^{hk}) dV \quad (3.28)$$

### 3.4 Descrizione del modello d'interfaccia

Al fine di prendere in considerazione il contatto tra le superfici delle microfratture, è stata utilizzata nelle analisi numeriche una legge costitutiva d'interfaccia, in grado di imporre la continuità degli spostamenti nella zona non danneggiata, e il contatto tra le superfici della frattura nella zona afflitta dal debonding. In particolare, tale legge costitutiva d'interfaccia può essere espressa mediante la relazione seguente:

$$\mathbf{t} = \{t_n, t_t\} = \mathbf{k}(d)[[\mathbf{u}]] \quad (3.29)$$

la quale utilizza un parametro di rigidezza  $\mathbf{k}$ , il quale può essere inteso, a sua volta, come un parametro di penalizzazione. In particolare nella relazione (3.29)  $n$  e  $t$  rappresentano, rispettivamente, le direzioni normale e tangenziale all'interfaccia, mentre  $[[\mathbf{u}]]$  rappresenta la discontinuità degli spostamenti, valutata come differenza tra i valori di spostamento assunti, in corrispondenza della stessa ascissa, tra la superficie di normale positiva e quella di normale negativa dell'interfaccia analizzata:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+ \quad (3.30)$$

dove  $\mathbf{u}^+$  rappresenta il valore di  $\mathbf{u}$  in prossimità dell'interfaccia per il lato che presenta la normale  $\mathbf{n}$  positiva, mentre  $\mathbf{u}^-$  rappresenta il valore di  $\mathbf{u}$  in prossimità dell'interfaccia per il lato che presenta la normale  $\mathbf{n}$  negativa. Inoltre  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  presenta le seguenti componenti:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \{\llbracket u_n \rrbracket, \llbracket u_t \rrbracket\} \quad (3.31)$$

Occorre osservare come nella (3.37)  $\mathbf{t}$  rappresenta il vettore trazione agente dalla parte positiva della superficie d'interfaccia di normale  $\mathbf{n}$ , mentre  $\mathbf{k}(d)$  rappresenta la matrice diagonale contenente i parametri di penalizzazione:

$$\mathbf{k}(d) = \text{diag}\{k_n, k_t\} \quad (3.32)$$

In particolare, con  $d$  viene indicato un parametro di danneggiamento, il quale assume il valore 1 nella zona danneggiata dell'interfaccia materiale mentre è pari a 0 nella restante regione. I due parametri di penalizzazione, poi, assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} k_t &= \begin{cases} 0 & d = 1 \\ k & d = 0 \end{cases}; \\ k_n &= \begin{cases} \frac{k}{2}(1 - \text{sign}\llbracket u_n \rrbracket) & d = 1 \\ k & d = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Tali parametri di rigidità assumono, in particolare, valori sufficientemente alti al fine di garantire la perfetta adesione nella zona non danneggiata, ma tuttavia non eccessivamente elevati in modo da impedire problemi di instabilità numerica. Nelle applicazioni numeriche, a tal riguardo, è stato assunto un valore per tali parametri di penalizzazione in grado di soddisfare la seguente relazione:

$$kh = 1e07E_m \quad (3.34)$$

dove  $h$  rappresenta la dimensione caratteristica dell'RVE, mentre con  $E_m$  è stato indicato il modulo di elasticità della matrice. La procedura numerica utilizzata si basa su di una tecnica di continuazione, la quale conduce ad un'analisi parametrica in  $k$ , nella quale il

solutore non-lineare assume la soluzione relativa al parametro precedente come scelta iniziale per lo step successivo.

### **3.5 Valutazione dell'energia di rilascio attraverso la tecnica dell'integrale- $J$**

L'energia di rilascio  $G$  per una configurazione danneggiata fissata e un'assegnata macro-deformazione può essere valutata attraverso la tecnica dell'integrale  $J$  (Rice J.R., 1968). È stato dimostrato che, per corpo omogeneo ed iperelastico ed in presenza di una frattura lineare, l'energia di rilascio  $G$  è uguale al valore dell'integrale  $J$  per un qualsiasi percorso che include il tip della frattura (Appendice 3.1). Al contrario per un corpo non omogeneo, l'energia di rilascio si può ricavare come valore limite dell'integrale  $J$  quando le dimensioni del percorso di integrazione tendono ad eguagliare quelle di un intorno infinitesimo del tip della frattura stessa.

Al fine di poter utilizzare la tecnica dell'integrale  $J$  per valutare l'energia di rilascio anche in presenza di una frattura acuta immerso in una microstruttura eterogenea costituita da costituenti iperelastici omogenei e in presenza di contatto unilaterale bisogna fare delle dovute considerazioni sul percorso di integrazione da adottare. L'indipendenza dal percorso di integrazione per la valutazione dell'integrale  $J$  risulta essere una proprietà molto importante soprattutto nelle applicazioni di modelli agli elementi finiti. Pertanto al fine di evitare forti gradienti di tensione e di deformazione che si manifestano in prossimità della frattura è conveniente scegliere un percorso di integrazione sufficientemente lontano dal tip della frattura. Questa scelta viene influenzata dal fatto che la zona in prossimità del tip della frattura è sede di singolarità che non permettono una accurata valutazione dell'integrale  $J$ .

Dall'applicazione del teorema della divergenza ad una regione che contiene superfici di discontinuità o interfacce tra i diversi micro-costituenti e utilizzando il teorema del trasporto, si può dimostrare che l'energia di rilascio totale coincide con il valore limite dell'integrale  $J$  lungo un percorso le cui dimensioni tendono ad eguagliare quelle di un intorno infinitesimo all'apice della frattura. Tale considerazione è valida anche per corpi

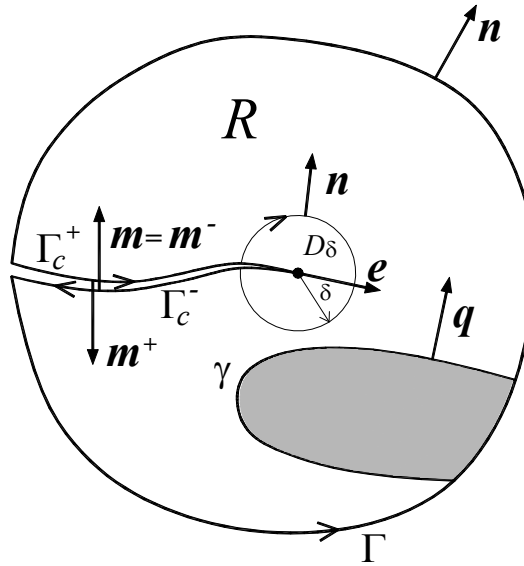
contenenti delle inclusioni, grazie alla condizione di continuità delle trazioni all'interfaccia tra i diversi costituenti:

$$[[\sigma]]N = 0 \quad (3.35)$$

A tal riguardo è possibile ottenere la seguente relazione per l'energia di rilascio totale in corrispondenza del tip della frattura:

$$G(\bar{\epsilon}, l) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} (W\mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \sigma \mathbf{n}) d\mathbf{s} \quad (3.36)$$

dove  $D_\delta$  rappresenta un disco di raggio  $\delta$  centrato nel tip,  $\mathbf{n}$  è il versore della normale esterna al contorno  $\partial D_\delta$  di tale disco, mentre  $\mathbf{e}$  rappresenta la direzione di propagazione della frattura (Figura 3.2).



**Figura 3.2 Schema del percorso di integrazione e notazione.**

L'indipendenza dal percorso per l'integrale  $J$  può essere garantita per un arbitrario percorso  $\Gamma$ , costruito attorno al tip della frattura e con inizio e fine sulla frattura stessa, nel momento in cui le due superfici danneggiate e il contorno  $\partial D_\delta$  del percorso racchiudono

una regione contenente solo interfacce materiali allineate con la direzione di propagazione della frattura  $\mathbf{e}$ :

$$G(\bar{\mathbf{e}}, l) = J(\Gamma, \bar{\mathbf{e}}, l) = \mathbf{e} \cdot \int_{\Gamma} (W\mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS \quad (3.37)$$

dove, in questo caso,  $\mathbf{n}$  rappresenta la normale esterna al percorso  $\Gamma$ . Tale dimostrazione è fornita in (Greco, 2009) e viene qui riportata per completezza. Tenendo in considerazione le interfacce tra i diversi micro-costituenti nell'applicazione del teorema della divergenza all'integrale sulla regione  $R$ , individuata da  $\Gamma$ ,  $\partial D_\delta$  e dalle due superfici della frattura  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , del campo tensoriale  $W\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}$ , il quale risulta essere a divergenza nulla all'interno della regione occupata dai micro-costituenti omogenei, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (W\mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds - \int_{\partial D_\delta} (W\mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds + \\ \int_{\Gamma_c^+ + \Gamma_c^-} (W\mathbf{m} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}) ds + \int_{\gamma} \llbracket W\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \mathbf{q} ds = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

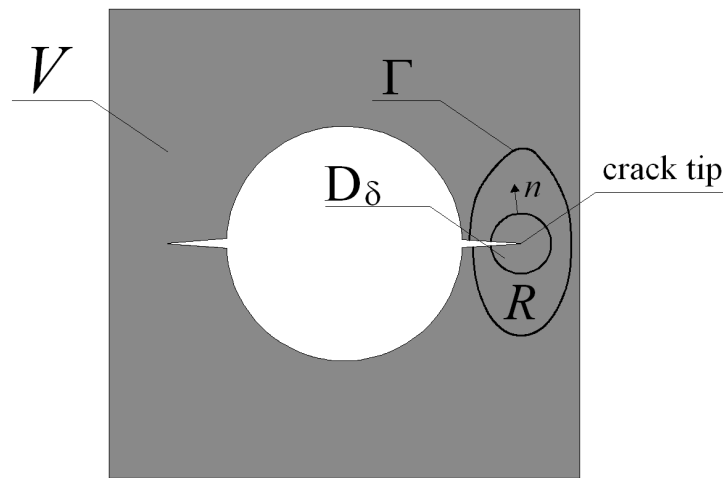
dove  $\gamma$  rappresenta l'unione delle interfacce dei materiali,  $\mathbf{n}$  è la normale esterna al contorno  $\partial D_\delta$  ed al percorso generico  $\Gamma$ ,  $\mathbf{q}$  rappresenta la normale alle superfici di discontinuità, mentre la doppia parentesi quadra rappresenta la quantità valutata come differenza relativa tra valori negativi e quelli positivi dell'interfaccia tra i micro-costituenti, cioè:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{u}^- - \mathbf{u}^+ \quad (3.39)$$

dove  $\mathbf{u}^+$  rappresenta il valore di  $\mathbf{u}$  in prossimità dell'interfaccia del materiale immediatamente vicino l'interfaccia del materiale sul lato positivo, mentre  $\mathbf{u}^-$  rappresenta il valore di  $\mathbf{u}$  in prossimità dell'interfaccia del materiale immediatamente vicino all'interfaccia del materiale sul lato negativo) della normale  $\mathbf{q}$  all'interfaccia del materiale. Definendo il percorso di integrazione associato a  $\Gamma_c$  dalla combinazione dei due percorsi lungo le facce della frattura  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , dalla parte positiva e negativa con il rispetto della

normale  $\mathbf{m}=\mathbf{m}^*$  alla superficie inferiore della frattura, e considerando il prodotto scalare con  $\mathbf{e}$ , si arriva a:

$$G(\bar{\mathbf{e}}, l) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} (W \mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e} \cdot \left[ \int_{\Gamma} (W \mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds + \int_{\Gamma_c} \llbracket W \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \mathbf{m} ds + \int_{\gamma} \llbracket W \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \mathbf{q} ds \right] \quad (3.40)$$



**Figura 3.3 Rappresentazione dell'indipendenza dal percorso di integrazione dell'integrale  $J$  per un materiale a matrice porosa.**

Dove il contributo del secondo e terzo integrale svanisce in assenza di contatto, in presenza di fratture rettilinee e con  $\mathbf{q}$  ortogonale ad  $\mathbf{e}$ . In Figura 3.3 viene illustrato il percorso che può essere utilizzato per la valutazione dell'integrale  $J$ , con il fine di valutare l'energia di rilascio, nel caso di un materiale a matrice porosa.

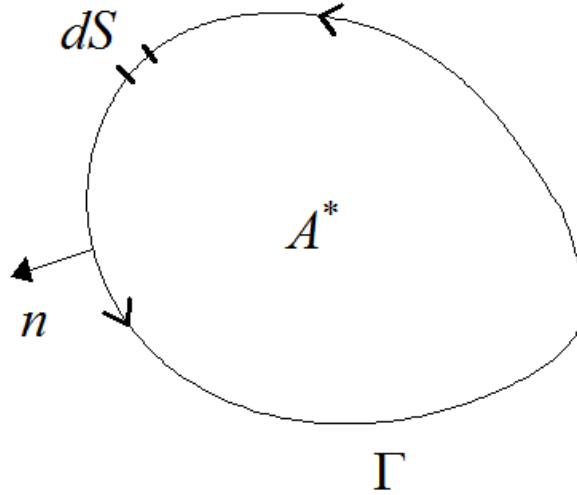


### Appendice 3.1 Indipendenza di $J$ dal percorso adottato

In questa appendice viene presentata la dimostrazione (Rice J.R., 1968), secondo la quale l'integrale  $J$ , per un corpo omogeneo ed iperelastico ed inoltre in presenza di una frattura rettilinea, è indipendente dalla scelta del percorso adottato. Si valuta quindi l'integrale  $J$  lungo un percorso chiuso (Figura 3.4):

$$J(\Gamma, \bar{\varepsilon}, l) = e \cdot \int_{\Gamma} (W \mathbf{n} - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) dS \quad (\text{A.1})$$

dove  $W$  rappresenta la densità di energia di deformazione,  $T_i$  rappresentano le componenti del vettore trazione,  $u_i$  rappresentano le componenti del campo di spostamenti, e  $dS$  rappresenta un incremento di lunghezza lungo il contorno  $\Gamma$ .



**Figura 3.4 Contorno chiuso  $\Gamma$ .**

La densità di energia di deformazione è definita come :

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Dove  $\sigma_{ij}$  ed  $\varepsilon_{ij}$  rappresentano rispettivamente i tensori delle tensioni e delle deformazioni. Il vettore trazione rappresenta un vettore tensione normale al contorno. Pertanto le componenti del vettore trazione sono date dalla seguente relazione:

$$T_{ij} = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A.3})$$

Dove  $n_j$  rappresentano le componenti di un vettore unitario normale a  $\Gamma$ . Applicando quindi il teorema della divergenza all'equazione A.1 si ha:

$$J(\Gamma, \bar{\varepsilon}, l) = \mathbf{e} \cdot \int_{A^*} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (\text{A.4})$$

Dove  $A^*$  rappresenta l'area racchiusa da  $\Gamma$ . Riprendendo l'equazione A.2:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

Applicando la relazione tra spostamenti e deformazione, nell'ambito delle deformazioni infinitesime, si ha:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (\text{A.6})$$

Essendo  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Riprendendo l'equazione di equilibrio:

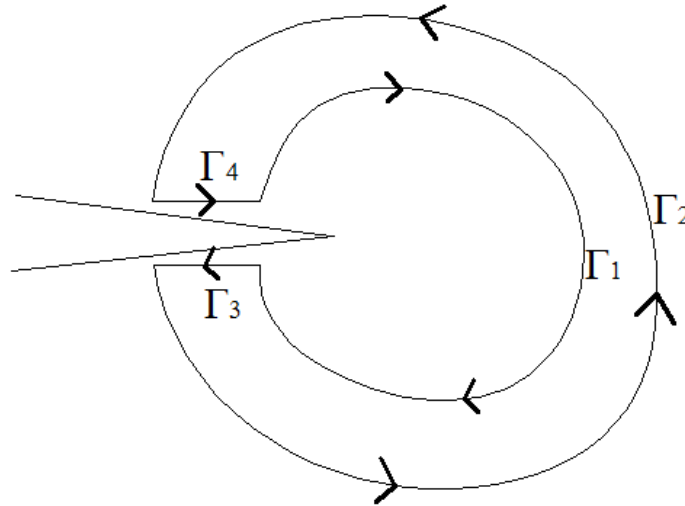
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.7})$$

si ha che :

$$\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \quad (\text{A.8})$$

In particolare quest'ultima espressione risulta uguale al secondo termine della A.4, pertanto l'integrando della A.4 si annulla e di conseguenza  $J=0$ .

Si prendano ora in considerazione due contorni arbitrari,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  intorno al tip della frattura, come illustrato in Figura 3.5. Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono connessi da segmenti lungo le facce della frattura ( $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ ) si verrà a formare un contorno chiuso.



**Figura 3.5** Due contorni arbitrari  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  connessi da  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ .

L'integrale  $J$  totale lungo il percorso chiuso è uguale alla somma dei contributi di ogni segmento:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0 \quad (\text{A.9})$$

Inoltre lungo le facce della frattura  $T_i \cdot n = 0$  pertanto  $J_3 = J_4 = 0$ , pertanto  $J_1 = -J_2$ , dimostrando quindi che lungo un qualsiasi percorso intorno al tip della frattura  $J$  è identico.