Capitolo 1
Richiami sulla teoria delle deformazioni finite

Nel presente capitolo vengono richiamati i concetti fondamentali sulla teoria delle deformazioni finite. Verranno fornite le relazioni che legano le misure di deformazioni coniugate con i rispettivi tensori delle tensioni. Inoltre si riprenderanno i concetti sui legami costitutivi incrementali con particolare riferimento ai materiali incrementalmente lineari. Infine si richiameranno le condizioni di stabilità e unicità della soluzione con riferimento alla soluzione di equilibrio incrementale. Per maggiori dettagli si rimanda a (Greco F., Tesi di Dottorato, 2002).

1.1 Quantità cinematiche

Un corpo continuo (il quale verrà indicato con *C*) è costituito da infiniti punti materiali, che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i punti di una regione regolare dello spazio euclideo *E*. Si definisce configurazione, per *C* all'istante *t*, quell'applicazione biunivoca χ che associa ad ogni particella *P* di *C* un punto di *E* caratterizzato da un vettore posizione $\boldsymbol{x}$. Si definisce moto del corpo continuo un'applicazione del tipo:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(P,t) \quad P \in C \qquad t \in \left[t_0, t_1\right] \tag{1.1}$$

la quale associa ad ogni particella *P* di *C* il vettore posizione $\boldsymbol{x}$; Risulta utile, comunque, descrivere il moto del corpo rispetto ad una configurazione di riferimento

χ_0, configurazione che verrà indicata con B_0. Rispetto a tale configurazione la descrizione del moto viene fatta secondo la seguente espressione:

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.2}$$

Con questa descrizione χ rappresenta un'applicazione che porta il corpo dalla configurazione B_0 alla configurazione B, dove $\boldsymbol{X}$ indica la pozione del punto P di C nella configurazione di riferimento. Questo tipo di descrizione viene detta *referenziale* o *lagrangiana*, ed in essa le variabili indipendenti sono il tempo e la pozione della particella nella configurazione di riferimento (Figura 1.1).

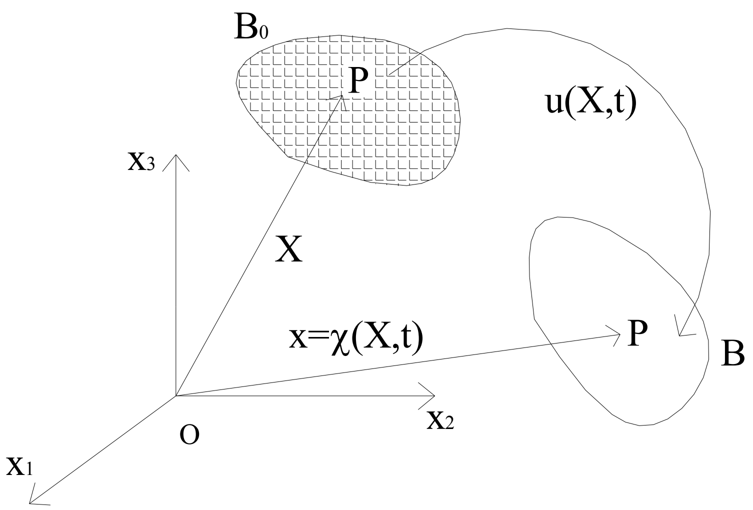

Figura 1.1 Descrizione lagrangiana del moto.

Un modo analogo per definire il moto di un corpo continuo rispetto alla configurazione di riferimento B_0, si ottiene assegnando il vettore spostamento di una generica particella:

$$\boldsymbol{u} = u(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.3}$$

che caratterizza, per ogni particella P di C, la differenza tra la posizione da essa occupata nella configurazione attuale e quella nella configurazione di riferimento (Figura 1.2).

$$u(\boldsymbol{X}, t) = \chi(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X} \tag{1.4}$$

Quindi la descrizione del moto per *C* viene fatta attraverso la seguente relazione:

$$\chi(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{X} + u(\boldsymbol{X},t) \tag{1.5}$$

Per una configurazione di riferimento fissata B_0, l'operatore che consente di esaminare la trasformazione che porta *C* dalla configurazione di riferimento alla configurazione attuale *B* è detto *gradiente di deformazione*, e risulta espresso dalla seguente relazione:

$$\boldsymbol{F} = \nabla\chi(\boldsymbol{X}) \tag{1.6}$$

il quale risulta essere un tensore del secondo ordine di tipo *lagrangiano*. Se il cambio di configurazione per il corpo continuo *C* viene espresso attraverso il campo di spostamenti, il gradiente della deformazione assumerà la seguente espressione:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{1.7}$$

La trasformazione descritta inoltre risulta essere una trasformazione lineare, quindi gode di tutte le proprietà della trasformazione lineare. Quindi attraverso questa analisi si è in grado di descrive come un generico segmento $\mathbf{d}\boldsymbol{X}$ nel punto $\boldsymbol{X}$ della configurazione di riferimento B_0 si trasforma nel segmento $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ nel punto $\boldsymbol{x}$ della configurazione attuale *B*.
Si prenda ora in considerazione un qualunque moto che porti il corpo continuo *C* dalla configurazione di riferimento a quella attuale, e prendendo in considerazione l'istante iniziale t_0 si avrà che:

$$J = \det\boldsymbol{F} = \det\boldsymbol{I} = 1 \tag{1.8}$$

Durante il moto del corpo la funzione *J* deve conservarsi positiva. Il gradiente della trasformazione può essere decomposto secondo il teorema di decomposizione polare (Gurtin, 1981), secondo la seguente relazione:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{RU} = \boldsymbol{VR} \tag{1.9}$$

La trasformazione $\boldsymbol{F}$ viene così decomposta come prodotto di due trasformazioni, di cui una corrispondente ad un tensore di rotazione $\boldsymbol{R}$, l'altra corrispondente ai tensori $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ detti rispettivamente *tensore destro* e *sinistro della deformazione*. Gli autovettori unitari $\boldsymbol{u}^{(i)}$ di $\boldsymbol{U}$ sono chiamati anche assi principali *Lagrangiani*, mentre quelli $\boldsymbol{v}^{(i)}$ di $\boldsymbol{V}$ assi principali *Euleriani*. Gli autovalori di $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$, λ_i, prendono il nome di deformazioni principali. Comunque da un punto di vista operativo è molto complesso lavorare con i tensori $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$, risulta invece più conveniente lavorare con i tensori destro e sinistro di *Cauchy-Green*, definiti rispettivamente come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.2 Misure di deformazione

Nella meccanica dei continui è importante scegliere una grandezza che compendi i caratteri della deformazione determinando le variazioni che questa produce sulle lunghezze, gli angoli, i volumi, che prende il nome di misura della deformazione. Pertanto, in questo paragrafo, facendo riferimento ai lavori di Hill (1968, 1970, 1972) ed Ogden (1974, 1983), si riprendono le varie misure di deformazione. Un materiale si dice indeformato in $\boldsymbol{X}$ se la lunghezza di un elemento lineare d$\boldsymbol{X}$ non cambia a deformazione avvenuta. Si può ottenere dalla relazione $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}$ che:

$$|d\boldsymbol{x}|^2 - |d\boldsymbol{X}|^2 = d\boldsymbol{X}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - 1)d\boldsymbol{X} \tag{1.11}$$

La quale rappresenta la differenza tra il quadrato della lunghezza di un elemento lineare misurato nella configurazione corrente B e nella configurazione di riferimento B_0. Quindi dalla relazione (1.11) il materiale risulta indeformato per ogni $\boldsymbol{X}$ se risulta valida la seguente relazione:

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \tag{1.12}$$

Se la relazione (1.12) non è soddisfatta significa che l'elemento è deformato, pertanto chiameremo *misura di Green* la quantità:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \tag{1.13}$$

Il tensore $\boldsymbol{E}$ a differenza dei tensori $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ è di facile determinazione. La misura di *Green* è stata ricavata partendo da un'analisi di tipo *lagrangiano*. Un discorso analogo può essere fatto per un'analisi del moto di tipo *euleriano* ricavando il corrispondente del tensore di *Green* $\boldsymbol{E}$ che in questo caso prenderà il nome di tensore di *Almansi- Hamel*:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}) \tag{1.14}$$

dove la quantità $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}^{-1}$.

Delle misure di deformazione presentate, si può facilmente verificare che la deformazione risulterà nulla se e solo se $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}$.

Comunque è possibile definire delle ulteriori misure di deformazione basate su $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ analoghe ai tensori di *Green* e di *Almansi – Hamel*. Se $\boldsymbol{f}$ è una funzione tensoriale di $\boldsymbol{U}$ coassiale con $\boldsymbol{U}$ stesso, allora si può definire come misura della deformazione il tensore $\bar{\boldsymbol{U}}$:

$$\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}) \tag{1.15}$$

L'attenzione comunque sarà rivolta ai casi in cui ogni valore principale $\bar{\lambda}_i$ di $\bar{\boldsymbol{U}}$ è funzione solo del corrispondente valore principale λ_i di $\boldsymbol{U}$, così che:

$$\bar{\lambda}_i = f(\lambda_i) \quad i = 1,2,3 \tag{1.16}$$

Da ciò si ottengono le misure di deformazione introdotte da Hill (1968). La funzione scalare $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ introdotta da Hill (1978) è tale che:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f'(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda > 0 \tag{1.17}$$

La monotonicità della funzione f assicura che ad un incremento di lunghezza di un segmento deve corrispondere un incremento di deformazione nella stessa direzione. La condizione di normalità è imposta affinché le diverse misure di deformazione siano equivalenti per piccole deformazioni. Le misure di deformazione introdotte con la (1.17) sono indicate con $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ ed ammettono la seguente rappresentazione spettrale in termini di assi principali:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U} &= \lambda_i \boldsymbol{u}^{(\mathrm{i})} \otimes \boldsymbol{u}^{(\mathrm{i})} \\ \mathscr{F}(\boldsymbol{U}) &= f(\lambda_i)\boldsymbol{u}^{(\mathrm{i})} \otimes \boldsymbol{u}^{(\mathrm{i})} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Particolarmente utile è la sottoclasse dei tensori di deformazione $\boldsymbol{E}^{(\mathrm{m})}$ definiti da:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_i &= \frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1) && m \neq 0 \\ \overline{\lambda}_i &= \lim_{m\to 0}\frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1) = \ln \lambda_i && m \to 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Alcuni elementi della classe (1.19) sono noti in letteratura, e verranno di seguito riportati:

-per m=0 si ottiene il tensore della deformazione di *Hencky*:

$$\boldsymbol{E}^{(0)} = \ln(\boldsymbol{U}) \tag{1.20}$$

-per m=1 si ottiene il tensore della deformazione di *Biot*:

$$\boldsymbol{E}^{(1)} = \boldsymbol{U} - 1 \tag{1.21}$$

-per m=2 si ottiene il tensore della deformazione di *Green*:

$$\boldsymbol{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}^2 - 1) \tag{1.22}$$

-per m=0 si ottiene il tensore della deformazione di *Almansi- Hamel*:

$$\boldsymbol{E}^{(-2)} = \frac{1}{2}(1 - \boldsymbol{U}^{-2}) \tag{1.23}$$

1.3 Tensori delle tensioni coniugati

Al il fine di introdurre i tensori delle tensioni coniugati, è importante introdurre prima di tutto il concetto di tensione (la quale verrà indicata con $\boldsymbol{t}$). La tensione viene associata alle forze di contatto che si esercitano i corpi, la quale risulta essere una funzione della pozione, della superficie del corpo e del tempo.

In particolare secondo il teorema di *Cauchy*:

- Se $\boldsymbol{t}$ è una funzione continua rispetto ad $\boldsymbol{x}$ e valgono le leggi di *Eulero* allora esiste un solo tensore del secondo ordine tale che risulti:

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n},t)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n} \tag{1.24}$$

Volendo descrivere il moto del corpo C attraverso una descrizione *lagrangiana*, bisogna introdurre il tensore nominale delle tensioni $\boldsymbol{T}_R$, detto anche *primo tensore di Piola-Kirchhoff*, che misura l'attuale forza di contatto per unità di area nella configurazione di riferimento, il quale è definito attraverso la seguente relazione:

$$\boldsymbol{T}_R=\boldsymbol{JTF}^{-T} \tag{1.25}$$

Seguendo Hill (1968) è possibile definire tensori delle tensioni generalizzati $\boldsymbol{T}_f \in Sym$ relativi alle misure di deformazione $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ come tensori simmetrici che soddisfano lungo un percorso di deformazione, specificato da una certa variazione continua delle componenti di $\boldsymbol{U}$ o $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ sugli assi *lagrangiani*, la seguente relazione:

$$\boldsymbol{T}_f \bullet \mathscr{F}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{T}_R \bullet \dot{\boldsymbol{F}} \tag{1.26}$$

dove $\boldsymbol{T}_R \bullet \dot{\boldsymbol{F}}$ rappresenta la densità della potenza dello stato di tensione per unità di volume in B_0, inoltre $\boldsymbol{T}_f$ *e* $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$ si dicono coniugati. Riprendiamo la famiglia dei tensori di deformazione definiti da:

$$E^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m}(\boldsymbol{U}^m - 1) & m \neq 0 \\ \ln \boldsymbol{U} & m = 0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Si possono definire alcune coppie coniugate di particolare interesse che sono:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}^{(2)} &= \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{F} \\ \dot{\boldsymbol{E}}^{(-2)} &= \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{D} \boldsymbol{F}^{-T} \end{aligned} \tag{1.28}$$

relazioni valide rispettivamente per le derivate materiali rispettivamente dei tensori di *Green* e di *Almansi - Hamel*. La potenza dello stato di tensione per unità di volume in B_0 può essere scritta, utilizzando le relazioni (1.25) e (1.28) come:

$$\boldsymbol{T}_R \dot{\boldsymbol{F}} = J\boldsymbol{T} \bullet \boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{(2)} \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{T}^{(-2)} \dot{\boldsymbol{E}}^{(-2)} \tag{1.29}$$

Dove sono stati introdotti i tensori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{(2)} &= J\boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F}^{-T} \\ \boldsymbol{T}^{(-2)} &= J\boldsymbol{F}^{T} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{1.30}$$

coniugati con i tensori di deformazioni rispettivamente di *Green* e di *Almansi - Hamel*. Il tensore $\boldsymbol{T}^{(2)}$ è anche noto come *secondo tensore di Piola-Kirchhoff*. Viene inoltre introdotto il tensore delle tensioni di *Kirchhoff* $\boldsymbol{T}_k = J\boldsymbol{T}$ per rappresentare il tensore coniugato di $\boldsymbol{D}$ nell'espressione della potenza dello stato di tensione per unità di volume nella configurazione di riferimento. È possibile inoltre ricavare una forma esplicita per il tensore $\boldsymbol{T}^{(1)}$ coniugato della deformazione $\boldsymbol{E}^{(1)}$ di *Biot*. Consideriamo allora a tal proposito che:

$$\boldsymbol{T}^{(2)} \dot{\boldsymbol{E}}^{(2)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{T}^{(2)} \bullet (\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}} + \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{T}^{(2)} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \boldsymbol{T}^{(2)} \right) \bullet \dot{\boldsymbol{U}} \tag{1.31}$$

Si può allora esprimere $\boldsymbol{T}^{(1)}$ come:

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{T}^{(2)} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \boldsymbol{T}^{(2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{T}_R^T \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{T}_R \right) \tag{1.32}$$

Utilizzando il teorema di decomposizione polare e le relazioni (1.29) e la relazione (1.25), si ricava la seguente relazione:

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}_R^T\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}_R\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\right) \tag{1.33}$$

Il tensore $\boldsymbol{T}^{(1)}$ viene chiamato tensore delle tensioni di *Biot*.

1.4 Derivate delle tensioni e delle deformazioni

Si può dimostrare che gli incrementi dei tensori delle deformazioni generalizzati coincidono se la configurazione di riferimento coincide con quella attuale (Ogden, 1984). Bisogna comunque sottolineare che la stessa cosa non si può dire per gli incrementi di tensioni. Al fine di determinare la relazione che lega differenti incrementi di tensione conviene esprimere in serie di *Taylor* nel punto λ_i=1 la funzione scala (1.16):

$$f(\lambda_i) = (\lambda_i - 1) + \frac{f''(1)}{2}(\lambda_i - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(\lambda_i - 1)^3 + \dots \tag{1.34}$$

Sfruttando la (1.18) si ricava che:

$$\mathscr{F}(\boldsymbol{U}) = (\boldsymbol{U} - 1) + \frac{f''(1)}{2}(\boldsymbol{U} - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(\boldsymbol{U} - 1)^3 + \dots \tag{1.35}$$

Derivando materialmente quest'ultima relazione si ottiene la seguente relazione:

$$\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \dot{\boldsymbol{U}} + \frac{f''(1)}{2}\left[\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}-1) + (\boldsymbol{U}-1)\dot{\boldsymbol{U}}\right] + \frac{f'''(1)}{6}\left[\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}-1)^2 + (\boldsymbol{U}-1)\dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U}-1) + (\boldsymbol{U}-1)^2\dot{\boldsymbol{U}}\right] + \dots \tag{1.36}$$

Dalla relazione di coniugio basata sulla potenza $\boldsymbol{T}_f \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}^{(1)} \bullet \dot{\boldsymbol{U}}$ e sostituendo l'ultima relazione si ottiene:

$$\boldsymbol{T}^{(1)} = \boldsymbol{T}_f + \frac{f''(1)}{2}\left[\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U}-1)+(\boldsymbol{U}-1)\boldsymbol{T}_f\right] + \frac{f'''(1)}{6}\left[\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U}-1)^2+(\boldsymbol{U}-1)\boldsymbol{T}_f(\boldsymbol{U}-1)+(\boldsymbol{U}-1)^2\boldsymbol{T}_f\right]+.... \tag{1.37}$$

Derivando materialmente questa relazione scritta per due generiche misure di tensione $\boldsymbol{T}_f$ e $\boldsymbol{T}_{\bar{f}}$ e valutata con la configurazione di riferimento coincidente con quella attuale, si ricava sottraendo membro a membro che:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_{\bar{f}} - \dot{\boldsymbol{T}}_f = \frac{f''(1)-\bar{f}''(1)}{2}\left[\boldsymbol{TD}+\boldsymbol{DT}\right] \tag{1.38}$$

Se $\boldsymbol{T}_f$ indica il tensore $\boldsymbol{T}^{(0)}$ coniugato con la misura logaritmica di deformazione $\boldsymbol{E}^{(0)} = \ln\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{T}_{\bar{f}}$ indica il generico tensore coniugato con la famiglia dei tensori di deformazione (1.27), la relazione (1.38) assumerà la seguente forma:

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(m)} - \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} = -\frac{m}{2}\left[\boldsymbol{TD}+\boldsymbol{DT}\right] \tag{1.39}$$

Da cui è possibile ricavare alcune utili relazioni, per incrementi di tensione comunemente usati:

- Se m=2 si ottiene l'incremento del secondo tensore di *Piola - Kirchhoff*:

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} - \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} = -\boldsymbol{TD} - \boldsymbol{DT} \tag{1.40}$$

- Se m=1 si ottiene l'incremento del tensore di *Biot*:

$$\dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} - \dot{\boldsymbol{T}}^{(0)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{TD}+\boldsymbol{DT}) \tag{1.41}$$

L'incremento del tensore nominale $\boldsymbol{T}_R$, invece soddisfa la seguente relazione:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = (\dot{\boldsymbol{T}}_k - \boldsymbol{T}_k\boldsymbol{L}^T)\boldsymbol{F}^{-T} \tag{1.42}$$

e se la configurazione di riferimento coincide con quella attuale:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = \dot{\boldsymbol{T}}_k - \boldsymbol{TL}^T \tag{1.43}$$

Altre utili relazioni in cui la configurazione di riferimento coincide con quella attuale:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)} &= \dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD}) \\ \dot{\boldsymbol{T}}_R &= \dot{\boldsymbol{T}}^{(1)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD}) + \boldsymbol{LT}\end{aligned} \tag{1.44}$$

Una relazione utile è quella tra l'incremento del primo tensore di *Piola - Kirchhoff* e quella della misura generalizzata di tensione $\boldsymbol{T}_f$. Questa può essere ottenuta eliminando $\dot{\boldsymbol{T}}^{(1)}$ dalla seconda della (1.44) e dalla (1.39) per $f(\lambda_i) = \lambda_i - 1$ si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = \dot{\boldsymbol{T}}_f + \frac{1}{2}\left[f''(1) - 1\right](\boldsymbol{DT} + \boldsymbol{TD}) + \boldsymbol{LT} \tag{1.45}$$

Questa relazione mette in luce come l'incremento del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* e l'incremento della tensione generalizzata dipenda dalla scelta della misura di deformazione.

Attraverso la relazione (1.36) è possibile ricavare relazioni che legano derivate delle misure di deformazione nel caso in cui la configurazione di riferimento coincide con quella attuale. Per quanto riguarda le derivate del primo e del secondo ordine valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) &= \dot{\boldsymbol{U}} \\ \ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) &= \ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{f}''(1)\boldsymbol{D}^{2'}\end{aligned} \tag{1.46}$$

E per la sottoclasse di misure $\boldsymbol{E}^{(m)}$ si specializzano nelle seguenti misure:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}^{(m)} &= \boldsymbol{D} \\ \ddot{\boldsymbol{E}}^{(m)} &= \ddot{\boldsymbol{U}} + (m-1)\boldsymbol{D}^{2'}\end{aligned} \tag{1.47}$$

Dalla seconda relazione delle (1.46), specializzata per la misura di deformazione di *Green – Lagrange*, quindi per m=2, si ricava che:

$$\ddot{\boldsymbol{E}}^{(2)} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}} + \ddot{\boldsymbol{F}}) = \ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{D}^2 \tag{1.48}$$

Con:

$$\ddot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}} + \ddot{\boldsymbol{F}}) - \boldsymbol{D}^2 \tag{1.49}$$

Allora dalla seconda relazione delle (1.44) segue che:

$$\ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L} + \frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}} + \ddot{\boldsymbol{F}}) + [f\,''(1) - 1]\boldsymbol{D}^2 \tag{1.50}$$

Dalle (1.44) e (1.45) si ricavano le seguenti relazioni per gli incrementi del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{E}}^{(m)} &= \ddot{\boldsymbol{E}}^{(1)} + (m-1)\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{2}} \\ \ddot{\boldsymbol{E}}^{(m)} &= \ddot{\boldsymbol{E}}^{(2)} + (m-2)\boldsymbol{D}^{2'} \end{aligned} \tag{1.51}$$

E quindi la seguente approssimazione al secondo ordine per la deformazione generalizzata $\mathscr{F}(\boldsymbol{U})$:

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}(\boldsymbol{U}) = \dot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})t + \ddot{\mathscr{F}}(\boldsymbol{U})\frac{t^2}{2} + 0(t^2) = \boldsymbol{E}^{(1)} + \frac{f\,''(1)}{2}\boldsymbol{D}^2t^2 + 0(t^2) = \\ &\boldsymbol{E}^{(2)} + \frac{f\,''(1) - 1}{2}\boldsymbol{D}^2t^2 + 0t^2 \end{aligned} \tag{1.52}$$

t parametro tipo tempo tale che $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{1}$ per t=0.

1.5 Legami costitutivi incrementali e leggi di variazione dei moduli tangenti

I materiali incrementalmente lineari sono caratterizzati da una relazione costitutiva data dalla seguente relazione:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = \boldsymbol{C}^R[\dot{\boldsymbol{F}}] \tag{1.53}$$

dove $\boldsymbol{C}^R$ è un tensore del quarto ordine detto "*tensore dei pseudo–moduli*" (Hill, 1978). Nei materiali incrementalmente lineari possiamo includere i materiali elastici per i quali vale:

$$\boldsymbol{T}_R = \mathscr{H}(\boldsymbol{F}) \tag{1.54}$$

e dalla seguente relazione si possono ricavare i moduli come:

$$\boldsymbol{C}^R = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{F}} \qquad C^R_{ijhk} = \frac{\partial \mathscr{H}_{ij}}{\partial F_{hk}} \tag{1.55}$$

Se il materiale è iperelastico si ha che:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_R &= \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} \qquad & T_{Rij} &= \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} \\ \boldsymbol{C}^R &= \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{F} \partial \boldsymbol{F}} \qquad & C^R_{ijhk} &= \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{hk}} \end{aligned} \tag{1.56}$$

Di conseguenza il tensore $\boldsymbol{C}^R$ risulta simmetrico rispetto allo scambio degli indici i, j, e h, k. I materiali incrementalmente lineari ammettono il seguente potenziale quadratico:

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}^R[\dot{\boldsymbol{F}}] \bullet \dot{\boldsymbol{F}} \tag{1.57}$$

Utili relazioni tra i moduli istantanei tangenziali possono essere ricavate considerando la (1.39) che lega due misure generiche di tensioni generalizzate e considerando un legame incrementale di tipo lineare. Si arriva così alla seguente equazione in forma di componenti cartesiane, che esprime l'equivalenza tra due misure di proprietà del materiale:

$$_0C^{\bar{f}}_{ijkm} D_{km} = {}_0C^{f}_{ijkm} D_{km} + \frac{f''(1) - \bar{f}''(1)}{2}(T_{ik}D_{kj} + D_{ik}T_{kj}) \tag{1.58}$$

Nella quale $_0\boldsymbol{C}^{\bar{f}}_{ijkm}$ *e* $_0\boldsymbol{C}^{f}_{ijkm}$ sono i tensori del quarto ordine dei moduli tangenziali istantanei (ricavati nell'ipotesi in cui la configurazione di riferimento coincide con quella attuale) relativi a due generiche misure di tensione generalizzate. Poiché quest'ultima relazione deve valere per un generico D_{km} e considerando la proprietà di simmetria $C_{ijkm}=C_{ijmk}$ si ottiene la seguente relazione:

$$ {}_0C^{\bar{f}}_{ijkm} = {}_0C^{f}_{ijkm} + \frac{f''(1) - \bar{f}''(1)}{4}(T_{ik}\delta_{jm} + T_{im}\delta_{kj} + T_{mj}\delta_{ki} + T_{kj}\delta_{mi}) \qquad (1.59) $$

Che preserva le condizioni di simmetria $C_{ijkm}= C_{ijmk}=C_{jikm}$.
Un'altra utile relazione si ottiene esprimendo l'incremento del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* in funzione di $\dot{\boldsymbol{T}}^{(2)}$, ottenendo:

$$ {}_0C^{R}_{ijkm} = {}_0C^{(2)}_{ijkm} + \delta_{ik}T_{mj} \qquad (1.60) $$

e specializzando la (1.59) per ${}_0C^{\bar{f}}_{ijkm} = {}_0C^{(2)}_{ijkm}$ si ricava che:

$$ {}_0C^{R}_{ijkm} = {}_0C^{f}_{ijkm} + \frac{f''(1) - 1}{4}(T_{ik}\delta_{jm} + T_{im}\delta_{kj} + T_{mj}\delta_{ki} + T_{kj}\delta_{mi}) + \delta_{ik}T_{mj} \qquad (1.61) $$

1.6 Problema incrementale di equilibrio

Supponiamo di conoscere una configurazione di equilibrio $\chi(\boldsymbol{X})$, non necessariamente unica, in un istante generico di un assegnato processo di carico quasi - statico per un corpo la cui posizione del generico punto materiale nella configurazione di riferimento B_0 è indicata con $\boldsymbol{X}$. Si assume, inoltre, che siano noti lo stato tensionale e le variabili di stato necessarie per descrivere completamente tale stato di equilibrio. La configurazione equilibrata nota è caratterizzata dalle seguenti equazioni:

$$ \begin{array}{lll} div\boldsymbol{T}_R + \rho_0\boldsymbol{b} = 0 & \boldsymbol{x} = \bar{\chi}(\boldsymbol{X}) & su\ \ \partial B_0^x \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}_R^T = \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{F}^T & \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{n}_R = \sigma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}) & su\ \ \partial B_0^\sigma \end{array} \qquad (1.62) $$

dove ρ_0 indica la densità nella configurazione di riferimento, $\boldsymbol{F}$ indica il gradiente della deformazione nella configurazione di riferimento, $\boldsymbol{b}$ le forze di volume dipendenti da $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{n}_R$ la normale esterna al contorno ∂B_0. Inoltre il contorno è suddiviso in una parte dove sono applicate le tensioni chiamata ∂B_0^{σ}, ed in un'altra dove sono imposte le posizioni chiamata ∂B_0^{x}. Ci si propone di cercare una soluzione incrementale $\dot{\chi}$ conseguente ai seguenti incrementi nelle condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \dot{\bar{\chi}}(\boldsymbol{X}) && su \ \ \partial B_0^{x} \\ \dot{\boldsymbol{T}}_R \boldsymbol{n}_R &= \dot{\sigma}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}) && su \ \ \partial B_0^{\sigma} \end{aligned} \tag{1.63}$$

La deformazione incrementale è supposta piccola in modo che i termini di ordine $|\dot{\boldsymbol{x}}|^2$ possono essere trascurati rispetto ai termini di ordine $|\dot{\boldsymbol{x}}|$. Le equazioni di equilibrio incrementali associate a tale problema sono:

$$\begin{aligned} & div\dot{\boldsymbol{T}}_R + \rho_0 \dot{\boldsymbol{b}} = 0 \\ & \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{T}_R^T + \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{T}}_R^T = \dot{\boldsymbol{T}}_R \boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{T}_R \dot{\boldsymbol{F}}^T \end{aligned} \tag{1.64}$$

dove la prima rappresenta l'equazione di equilibrio incrementale alla traslazione, e la seconda rappresenta l'equazione di equilibrio incrementale alla rotazione.
L'incremento del tensore nominale può essere espresso, in termini del tensore dei pseudo-moduli $\boldsymbol{C}^R$, come:

$$\dot{\boldsymbol{T}}_R = \boldsymbol{C}^R[\dot{\boldsymbol{F}}] + 0\left|\dot{\boldsymbol{F}}\right| \tag{1.65}$$

In forma di componenti cartesiane la prima delle (1.64), nel caso in cui il materiale ammetta un tensore dei pseudo-moduli tangenti, diventa:

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(C_{ijkl}^R \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial X_l} \right) + \rho_0 \dot{b}_i = 0 \tag{1.66}$$

1.7 Relazioni tra stabilità ed unicità

In questo paragrafo si prenderanno in considerazione i materiali caratterizzati dalla legge costitutiva (1.53), che è valida per rappresentare materiali elastici.

Si suppone che le forze di volume e le forze di superficie dipendono solo dalla χ. È opportuno comunque richiamare la relazione soddisfatta dal lavoro virtuale delle forze di superficie e di volume in equilibrio con lo stato tensionale interno:

$$\int_{\partial B_0} \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{n}_R \bullet \delta\chi ds_R + \int_{B_0} \rho_0 \boldsymbol{b} \bullet \delta\chi dv_R = \int_{B_0} \boldsymbol{T}_R \bullet \delta \boldsymbol{F} dv_R \tag{1.67}$$

Si considera il problema al contorno globale (1.62) e si supponga che ammetta due soluzioni distinte χ', χ, la cui differenza si data da $\Delta\chi = \chi' - \chi$ e soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} & div \Delta \boldsymbol{T}_R = 0 \quad in \;\; B_0 \\ & \Delta\chi = 0 \qquad su \;\; \partial B_0^x \\ & \Delta \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{n}_R = 0 \quad su \;\; \partial B_0^\sigma \end{aligned} \tag{1.68}$$

dove $\Delta \boldsymbol{T}_R = \boldsymbol{T}'_R - \boldsymbol{T}_R$, ed utilizzando una formula, opportunamente adattata, analoga alla (1.67) si ha:

$$\int_{\partial B_0} \Delta \boldsymbol{T}_R \boldsymbol{n}_R \bullet \delta\chi ds_R = \int_{B_0} \Delta \boldsymbol{T}_R \bullet \Delta \boldsymbol{F} dv_R \tag{1.69}$$

Dovendo essere soddisfatta in quest’ultima equazione la prima equazione delle (1.68), e se l’integrale al secondo membro della (1.69) è positivo per differenti deformazioni allora non ci potranno essere due soluzioni distinte. Pertanto una condizione sufficiente di stabilità è che:

$$\int_{B_0} \Delta \boldsymbol{T}_R \bullet \Delta \boldsymbol{F} dv_R > 0 \qquad \forall \Delta\chi \neq 0 / \Delta\chi = 0 \;\; su \;\; \partial B_0^x \tag{1.70}$$

Una condizione più forte che implica la relazione (1.70) è che:

$$\Delta \boldsymbol{T}_R \bullet \Delta \boldsymbol{F} dv_R > 0 \quad \forall \Delta \boldsymbol{F} \neq 0 \tag{1.71}$$

Si formulano ora condizioni sufficienti che assicurano l'unicità della soluzione per variazioni infinitesime delle condizioni al contorno, partendo da una nota configurazione di deformazione finita. Per questa formulazione basta supporre che la deformazione incrementale $\dot{\chi}$ si continua e differenziabile con continuità a tratti.

Si suppone quindi che a variazioni infinitesime delle condizioni al contorno (1.63) corrispondano due soluzioni distinte $\Delta\dot{\chi}' = \dot{\chi}' - \dot{\chi}, \Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R = \dot{\boldsymbol{T}}'_R - \dot{\boldsymbol{T}}_R$, quindi si avrà che:

$$\begin{aligned} & div\Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R = 0 \quad in \;\; B_0 \\ & \Delta\dot{\chi} = 0 \qquad\; su \;\; \partial B_0^x \\ & \Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R \boldsymbol{n}_R = 0 \quad su \;\; \partial B_0^\sigma \end{aligned} \tag{1.72}$$

Da cui operando opportune trasformazioni si ricava che:

$$0 = \int_{\partial B_0} \Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R \boldsymbol{n}_R \bullet \Delta\dot{\chi} ds_R = \int_{B_0} \Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} dv_R \tag{1.73}$$

Se l'integrale al secondo membro della (1.69) è positivo per differenti deformazioni $\Delta\dot{\chi} = \dot{\chi}' - \dot{\chi}$ compatibili con le condizioni al contorno, l'ipotesi si due soluzioni distinte porterebbe ad un assurdo per la (1.73). Una condizione sufficiente per l'unicità incrementale è data da:

$$\int_{B_0} \Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} dv_R = \int_{B_0} \boldsymbol{C}^R[\Delta\dot{\boldsymbol{F}}] \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} dv_R = \int_{B_0} \Delta\dot{T}_{Rij} \Delta\dot{F}_{ij} dv_R > 0 \;\; \forall \Delta\dot{\chi} \neq 0 / \Delta\dot{\chi} = 0 \;\; su \;\; \partial B_0^x \tag{1.74}$$

Una condizione più forte che implica la (1.74) è la seguente:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{T}}_R \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} = \left\{ \boldsymbol{C}^R[\Delta\dot{\boldsymbol{F}}] \right\} \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} = C^R_{ijkl} \frac{\partial \Delta\dot{x}_i}{\partial X_j} \frac{\partial \Delta\dot{x}_k}{\partial X_l} > 0 \qquad \forall \Delta\dot{\boldsymbol{F}} \neq 0 \tag{1.75}$$

Questa condizione equivale a richiedere la definitezza positiva del tensore del quarto ordine $\boldsymbol{C}^R$. Nel caso di un materiale iperelastico, la condizione sufficiente di unicità diventa:

$$\int_{B_0} \Delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{F}^2}\right) \bullet \Delta\dot{\boldsymbol{F}} dv_R = \int_{B_0} \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} \Delta\dot{F}_{kl} \Delta\dot{F}_{ij} dv_R > 0 \qquad \forall \Delta\dot{\chi} \neq 0 \,|\, \Delta\dot{\chi} = 0 \;\; su \;\; \partial B_0^x \tag{1.76}$$

La condizione di stabilità infinitesima per la configurazione di equilibrio χ postula che il lavoro interno fatto in ogni deformazione infinitesima $\dot{\chi}$ compatibile con le condizioni al contorno è minore di quello richiesto dai carichi morti per effettuare la stessa deformazione infinitesima. Nel caso in cui il lavoro interno è maggiore di quello dei carichi morti di parla di condizione di superstabilità, che in termini dei pseudo-moduli diventa:

$$\int_{B_0} \boldsymbol{C}^R[\dot{\boldsymbol{F}}] \bullet \dot{\boldsymbol{F}} dv_R > 0 \qquad \forall \dot{\chi} \neq 0 \,|\, \dot{\chi} = 0 \;\; su \;\; \partial B_0^x \tag{1.77}$$

Le restrizioni imposte dalla (1.77) sono uguali a quelle imposte dalla (1.74) poiché $\dot{\chi}$ e $\Delta\dot{\chi}$ possono essere confuse tra di loro soddisfacendo le stesse condizioni al contorno. Per un solido incrementalmente lineare la condizione di superstabilità coincide con quella sufficiente di unicità, per cui la condizione di superstabilità implica l'unicità. Al contrario la condizione di stabilità ordinaria non implica l'unicità.