

Capitolo 5

Simulazioni numeriche

Premessa

Ultimata l'attività sperimentale, si è approfondito lo studio del fenomeno erosivo attraverso l'applicazione del modello numerico di Adduce e Sciortino (2006), realizzato presso l'Università di Roma Tre, per simulare buona parte dei dati sperimentali, come si dirà nel prosieguo.

Il codice di calcolo è stato adeguato al caso di studio, in collaborazione con gli autori, ridefinendo lo sforzo tangenziale per moto uniforme, la portata solida con l'approccio di Einstein (1950), al posto di quello di Meyer-Peter e Müller (1948), e considerando che il materiale eroso non si deposita a valle delle fosse di scavo, ma viene trasportato allo sbocco della canaletta.

Le simulazioni numeriche sono state svolte soltanto per la prima fossa di scavo a valle del fondo fisso di monte, in letto di sola sabbia, in moto permanente e vario, a causa della complessità e della difficoltà nel riprodurre, con le leggi del trasporto solido di fondo, il fenomeno nel secondo tratto a fondo mobile a valle della soglia di fondo, nonché nel letto di miscela coesiva.

5.1 Modello numerico

Il modello matematico utilizzato per descrivere il fenomeno erosivo è basato sull'equazione di continuità dei sedimenti, con un'attenta descrizione degli sforzi agenti su una generica particella e delle proprietà fisico-meccaniche della sabbia uniforme.

Le prime righe del codice descrivono i parametri seguenti:

parametri geometrici:

- $B=0,485$ m, larghezza del canale;
- $L_f=1,5$ m lunghezza tratto erodibile;
- $N_n=50$ numero nodi di discretizzazione;
- $dt=0,5$ s intervallo di discretizzazione temporale;
- $n_{st}=30$ numero di istanti temporali in cui il processore restituisce i risultati;

parametri sedimentologici:

- $\varphi = 30^\circ$, angolo di attrito interno della sabbia;
- $\rho_s = 2633 \text{ kg/m}^3$, densità dei granelli solidi;
- $d_{50} = 0,86 \text{ mm}$, diametro mediano dei sedimenti (sabbia uniforme);
- $n_p = 0,426$, indice di porosità;

parametri fisico-idraulici:

- $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, densità dell'acqua;
- $h_u = 0,1 \text{ m}$, tirante idrico di moto uniforme;
- $Q = 0,02337 \text{ m}^3/\text{s}$, portata di moto permanente.

Indicando con τ_{idr} la tensione tangenziale idrodinamica e con $\bar{\tau}_{cr}$ quella critica al fondo, la condizione di moto incipiente, per un fondo orizzontale, è definita come segue:

$$\tau_{idr} > \bar{\tau}_{cr} = W_g \tan \varphi \quad (5.1)$$

in cui:

- $\bar{\tau}_{cr} = \text{cost.} \cdot (\gamma_s - \gamma) \cdot d_{50}$ (Shields, 1936);
- W_g è il rapporto del peso alleggerito di una particella di diametro d e l'area caratteristica della stessa, circa uguale a d^2 ;
- φ è l'angolo di attrito interno.

Gli autori definirono, per fondo non orizzontale, le grandezze W_g , τ_{cr} , τ_g e τ_{idr} come le azioni cui una generica particella solida è sottoposta (Fig. 5.1).

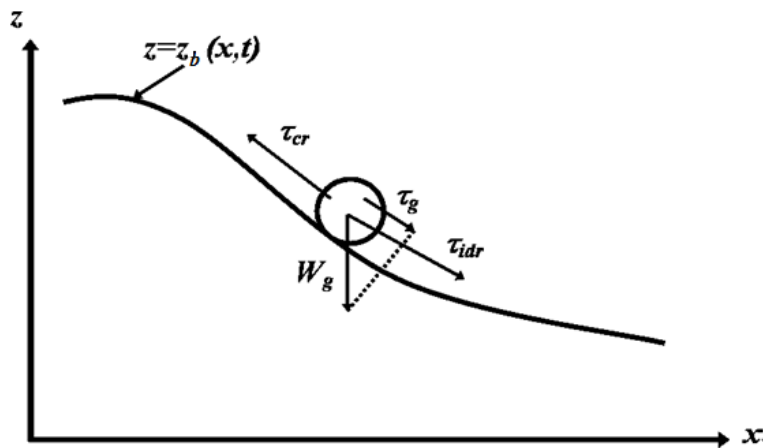


Figura 5.1. Azioni tangenziali cui è sottoposta una particella solida (Adduce e Sciortino, 2006).

dove W_g è l'azione relativa al peso proprio della particella per unità di area e τ_g è la corrispondente componente tangenziale.

Per descrivere il percorso di una particella all'interno della fossa di scavo, gli autori

considerarono la pendenza del fondo attraverso la relazione funzionale $z=z_b(x,t)$.

Posti:

- n_f e τ_f i vettori unitari rispettivamente ortogonale e tangente al fondo;
- k il versore parallelo all'asse z e diretto verso l'alto, con $n_f k < 0$;
- i il versore parallelo all'asse x ,

il versore τ_f risulta avere la stessa direzione del moto medio nelle vicinanze del fondo (Fig. 5.2):

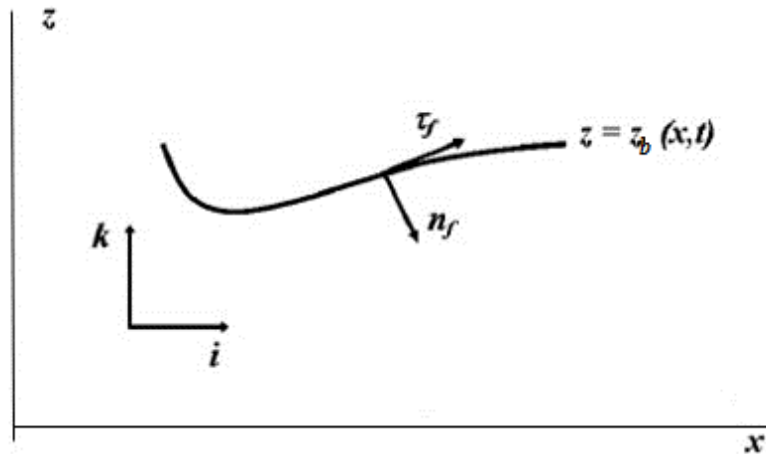


Figura 5.2. Vettori unitari n_f , τ_f , k e i (Adduce e Sciortino, 2006).

Si osservi ora la Fig. 5.3:

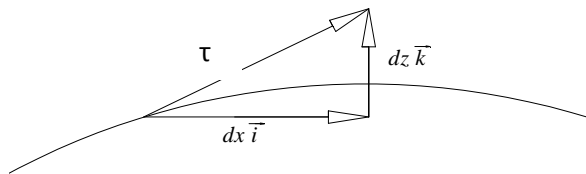


Figura 5.3. Composizione dei vettori

Risulta:

$$\vec{t} = dx \left(\vec{i} + \frac{dz}{dx} \vec{k} \right) \quad (5.2)$$

per cui:

$$\vec{t} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{dx \left(\vec{i} + \frac{dz}{dx} \vec{k} \right)}{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}} \quad (5.3)$$

Considerando, inoltre, i vettori unitari τ_f e n_f , rispettivamente tangente e ortogonale al fondo (Fig. 5.3) e indicando con $z_{b,x}$ la derivata spaziale di $z_b(x,t)$, si può scrivere:

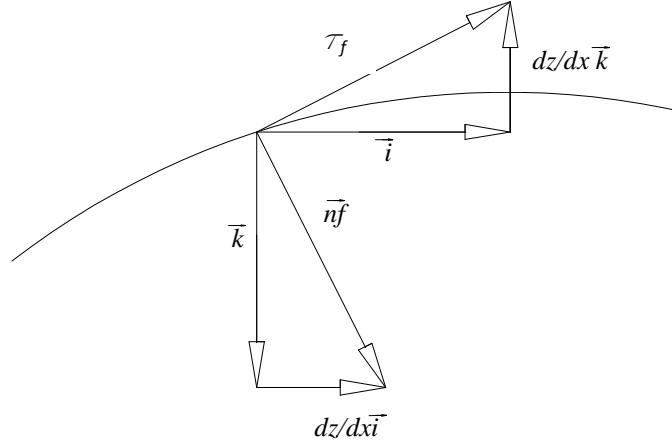


Figura 5.3. Composizione dei vettori unitari tangente e ortogonale al fondo.

$$\tau_f = \frac{z_{b,x}k + 1}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \quad (5.4)$$

$$n_f = \frac{z_{b,x}i - k}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \quad (5.5)$$

Ricordando la formula del prodotto scalare tra due generici vettori \vec{a} e \vec{b} , si ha:

$$\vec{a}(x_a, y_a) \cdot \vec{b}(x_b, y_b) = x_a x_b + y_a y_b \quad (5.6)$$

Lo sforzo tangenziale critico risulta:

$$\tau_{cr} = W_g \cdot n_f \phi = (-W_g k) \cdot n_f \phi = \frac{W_g \phi}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \quad (5.7)$$

e, poiché $\bar{\tau}_{crf} = W_g \phi$, si ha:

$$\tau_{cr} = \frac{\bar{\tau}_{cr}}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \quad (5.8)$$

dove $\bar{\tau}_{cr}$ è lo sforzo tangenziale critico per letto piano.

Lo sforzo tangenziale generico τ che agisce su un grano si ottiene sommando lo sforzo idrodinamico sul fondo e lo sforzo tangenziale dovuto alla gravità, τ_g :

$$\tau = \tau_{idr} + \tau_g = \tau_{idr} + (-W_g K) \cdot \tau_f \quad (5.9)$$

Quindi:

$$\tau = \tau_{idr} - \frac{\bar{\tau}_{cr} z_{b,x}}{\phi \sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \quad (5.10)$$

in cui:

$$- \tau_g = (-W_g K) \cdot \tau_f ;$$

$$- \tau_{idr} = \frac{G(x, z) \cdot \rho g R \cdot q^2}{\chi^2 R A^2} ;$$

$$- \bar{\tau}_{cr} = \text{cost} \cdot (\gamma_s - \gamma) \cdot d_{50} ;$$

dove:

$$- \chi^2 = (1/n)^2 R^{1/3} \quad \text{con} \quad n = 0,13(2 \cdot d_{50})^{1/6} / \sqrt{g} \quad (\text{coefficiente di scabrezza di Manning}) \quad \text{e} \quad R \quad \text{raggio idraulico};$$

$$- \text{la costante della formula della tensione tangenziale critica è stata ricavata in funzione del diametro sedimentologico: per } D_* = 20 \div 150, \text{ si ha: } \text{cost.} = 0,013 D_*^{0,29}; \text{ si è ottenuto}$$

$$D_* = d \left(\frac{\Delta g}{\nu^2} \right)^{1/3} = 21,4 \quad \text{e cost.} = 0,0316.$$

$$- G(x, z) \text{ è la funzione gaussiana (Fig. 5.5; Hogg } et al., 1997), \text{ che viene associata alla tensione idrodinamica per definire lo sforzo all'interno della fossa di scavo. Più precisamente, essa distingue il tratto in discesa della fossa di scavo, } x \leq X_c(t), \text{ da quello in salita, } x \geq X_c(t). \text{ Analiticamente essa è espressa come segue:}$$

$$G(x, t) = \begin{cases} \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) \exp \left[- \left(\frac{x - X_c(t)}{\sigma^2 \cdot X_c(t)} \right)^2 \right] & x \leq X_c(t) \\ \zeta_2 & x \geq X_c(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

in cui:

$$- \zeta_1 = 0,01 \text{ è la costante del ramo di sinistra della gaussiana};$$

$$- \zeta_2 = 1 \text{ è la costante del ramo di destra della gaussiana};$$

$$- \sigma = 0,3 \text{ è la varianza};$$

$$- X_c = 1,4 \sqrt{|A(t)|} \text{ indica la posizione della massima profondità di scavo. Il valore costante } 1,4 \text{ è stato determinato sperimentalmente per ogni prova eseguita.}$$

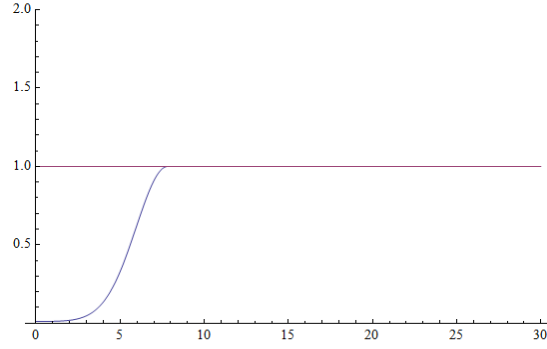


Figura 5.5. Gaussiana.

Estendendo la (5.9) al nostro studio, si possono definire le condizioni di moto incipiente all'interno della fossa di scavo:

$$\tau = \tau_{idr} + \tau_g > \tau_{cr} \quad (5.12)$$

Per stimare la portata solida, gli autori utilizzarono un approccio di tipo stocastico come quello di Einstein (1950), che si basa sulle seguenti ipotesi:

- il trasporto avviene in condizioni stazionarie di moto assolutamente turbolento con fondo completamente scabro;
- le particelle si muovono a salti con una lunghezza costante e assunta sempre uguale, pari ad un valore medio caratteristico.

Assunta F_y la forza di sollevamento agente su di una generica particella solida, la condizione $F_y/G > 1$ definisce l'inizio del trasporto solido. Sia P_N la probabilità che in un intervallo di tempo t , una particella sia sollevata N volte, il numero di particelle solide su un area Ω sarà: $N_p = \Omega / (a_1 D^2)$; dove $a_1 D^2$ è la superficie media occupata da una particella. Per cui il numero di particelle adagate su di una striscia d'alveo che in un intervallo di tempo compie almeno N salti è:

$$N_p^{(N)} = P_N \cdot N_p = P_N \Omega / (\alpha_1 D^2) \quad (5.13)$$

Estendendo questa schematizzazione medio-stocastica ad una striscia indefinita di alveo di larghezza unitaria, e divisa in $L \times 1$ rettangoli, tale da assumere $\Omega \equiv L \times 1$, si può definire il numero

totale di particelle che attraversa una generica sezione, σ_E , ortogonale al fondo come:

$$N_p^{Tot} = \sum_{i=1}^{\infty} N_p^{(i)} = \frac{L}{\alpha_1 D^2} \sum_{i=1}^{\infty} P_i \quad (5.14)$$

dove $N_p^{(i)}$ indica il numero di particelle adagate in $\Omega_i \equiv \Omega = L \cdot 1$.

A tal punto si può ottenere la portata solida Q_{s1} considerando il peso delle N_p^{Tot} particelle che

attraversano la sezione σ_E nell'unità di tempo T_i .

$$Q_{s1} = \frac{\gamma_s \alpha_1 D^3}{T_i} N_p^{Tot} = \frac{\gamma_s \alpha_1 D^3}{T_i \alpha_1 D^2} \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \frac{\gamma_s D L}{T_i} \sum_{i=1}^{\infty} P_i \quad (5.15)$$

Inoltre, ipotizzando:

- $L = \alpha_L D$ con $\alpha_L \cong 100$,
- $T_i = \alpha_L D / W_p$, in cui W_p indica il valore asintotico di velocità di caduta libera del grano,
- $P_i = P_1^i = P_1 \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_1$ gli eventi *...almeno un salto, almeno due salti, ... etc.* fra loro indipendenti.

La portata solida può essere riscritta come di seguito:

$$Q_{s1} = \frac{\gamma_s \alpha_L D^2}{\frac{\alpha_T}{\alpha_w} \sqrt{\frac{\rho D}{\gamma_s}}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \right) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \left(\frac{\alpha \cdot \alpha_w \alpha_L}{\alpha_1 \alpha_T} \right) \cdot \frac{\gamma_s D^{3/2}}{\sqrt{\rho}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} P_1^i \quad (5.16)$$

La sommatoria $\sum_{i=1}^{\infty} P_1^i$ è convergente a $\frac{P_1}{1-P_1}$, essendo, per definizione di probabilità, $P_1 < 1$;

posta l'intensità di trasporto solido $Q_s = \frac{1}{\frac{\gamma_s D^{3/2}}{\sqrt{\rho}}} \cdot Q_{s1}$ e $A_* = 1 / \left(\frac{\alpha \cdot \alpha_w \alpha_L}{\alpha_1 \alpha_T} \right) = 43,5$, la (5.16) diventa:

$$Q_s A_* = \frac{P_1}{1-P_1} \quad (5.17)$$

Indicando con $P_0 = 1 - P_1$ la probabilità che nell'intervallo T la particella non si muova, la densità di probabilità sarà:

$$P_0 = 1 - P_1 = \int_{-\infty}^{a-1} \tilde{f}(r') dr' \quad (5.18)$$

in cui $a = \frac{G}{F_y}$, $\tilde{f}(r') = f(r' + 1)$ indica la densità di probabilità di $R' = R - 1$ con valore atteso nullo,

dove $R = \frac{F_y}{F_y} > a$ esprime la condizione di trasporto solido con valore atteso unitario.

Einstein, successivamente, ha corretto la (5.18), in quanto la densità di R e quindi di R' non può essere a rigore una gaussiana, visto che questa densità ammette in linea di principio valori negativi.

Tale correzione equivale ad assumere come condizione di trasporto $|R| > a$ anziché $R > a$. Pertanto, la (5.18) diventa:

$$P_0 = 1 - P_1 = \int_{-a-1}^{a-1} \tilde{f}(r') dr' \quad (5.19)$$

Dunque, la (5.16) si può riscrivere come:

$$Q_s = \frac{1 - \int_{-a-1}^{a-1} \tilde{f}(r') dr'}{A^* \int_{-a-1}^{a-1} \tilde{f}(r') dr'} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-a-1}^{a-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{\sigma}\right)^2} dr'}{\frac{A^*}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-a-1}^{a-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{\sigma}\right)^2} dr'} \quad (5.20)$$

dove il parametro $a = \frac{G}{F_y} = \frac{\alpha \gamma_s D^3}{\rho \bar{u}^2 D^2 \Psi_y} = \frac{\alpha}{\Psi_y} \cdot \frac{1}{Y}$.

Di conseguenza, la (5.20) diventa:

$$Q_s(1/Y) = d_{50}^{3/2} \cdot \sqrt{g \frac{\rho_s - \rho}{\rho}} \cdot \begin{cases} Q_{s1}(1/Y) & \text{se } Y > 0 \\ -Q_{s1}(-1/Y) & \text{se } Y < 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

dove Y è il parametro di mobilità secondo la formulazione di Einstein, definito nel codice attraverso la seguente relazione:

$$Y = \tau_{ein} = \cos \theta \frac{\tau_{idr} - \tau_g}{\frac{\bar{\tau}_{cr}}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}}} \quad (5.22)$$

Per l'implementazione del modello è stato necessario definire anche le condizioni iniziali:

$$z_b = 0 \cdot \begin{cases} x = 0 \\ x = L_f \end{cases} \text{ per } t = 0 \text{ e quindi assenza di scavo;}$$

e la condizione al contorno di Robin, che è la combinazione di quella di Dirichlet e quella di Neumann:

$$\frac{\partial z_b}{\partial x} + \alpha \cdot z_b = 0,$$

valida per definire la presenza della soglia di fondo e il passaggio da fondo fisso a fondo mobile.

I parametri di Robin sono stati assunti pari a 322 per $x < X_c$ (ramo sinistro della gaussiana) e 12 per $x > X_c$ (ramo destro della gaussiana).

Definita, in seguito, l'equazione differenziale del trasporto solido (Graf, 1971,1998):

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \left(\frac{1}{1-p} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_s}{\sqrt{1 + z_{b,x}^2}} \right) = 0 \quad (5.23)$$

si è proceduto alla sua integrazione con lo schema di MacCormack.

Esso è uno schema di tipo esplicito centrato del second'ordine sia nello spazio sia nel tempo, che si articola in due fasi temporali: *predictor* e *corrector*.

Nel passo *predictor* si usano differenze in avanti per le derivate temporali e differenze all'indietro per le derivate spaziali, in cui i termini sorgente vengono valutati puntualmente, utilizzando le variabili al tempo t_{n+1} in prima approssimazione con un'accuratezza del prim'ordine:

$$z_{bi}^{(P)} = z_{bi}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{1-P} \right) B \left(\frac{Q_s}{\sqrt{1 + F z_{bi}^n}} \right) \quad (5.24)$$

mentre con il passo *corrector*, corrispondente al tempo t_{n+2} , i termini sorgente vengono valutati puntualmente utilizzando le variabili di predizione, invertendo la differenza:

$$z_{bi}^{(C)} = z_{bi}^P - \Delta t \left(\frac{1}{1-P} \right) F \left(\frac{Q_s}{\sqrt{1 + B z_{bi}^P}} \right) \quad (5.25)$$

dove \dot{B} ed \dot{F} indicano due operatori così definiti:

$$\dot{B} z_{bi}^{(n)} = \left(\frac{z_{bi}^n + z_{bi-1}^n}{\Delta x} \right)$$

$$\dot{F} z_{bi}^{(n)} = \left(\frac{z_{bi+1}^n + z_{bi}^n}{\Delta x} \right)$$

La soluzione al tempo t_{n+1} si valuta come la media aritmetica della differenza in avanti al tempo t_n e, quella all'indietro del valore precedentemente calcolato al tempo $t=n+2$:

$$z_{bi}^{(n+1)} = 0,5 \cdot \left(z_{bi}^{(P)} + z_{bi}^{(C)} \right) \quad (5.26)$$

5.2 Confronto con i dati sperimentali

Nelle Figg. 5.6÷5.13 si confrontano i profili di scavo monodimensionali simulati numericamente con quelli misurati sperimentalmente nella serie A nel letto di sabbia (profili longitudinali medi):

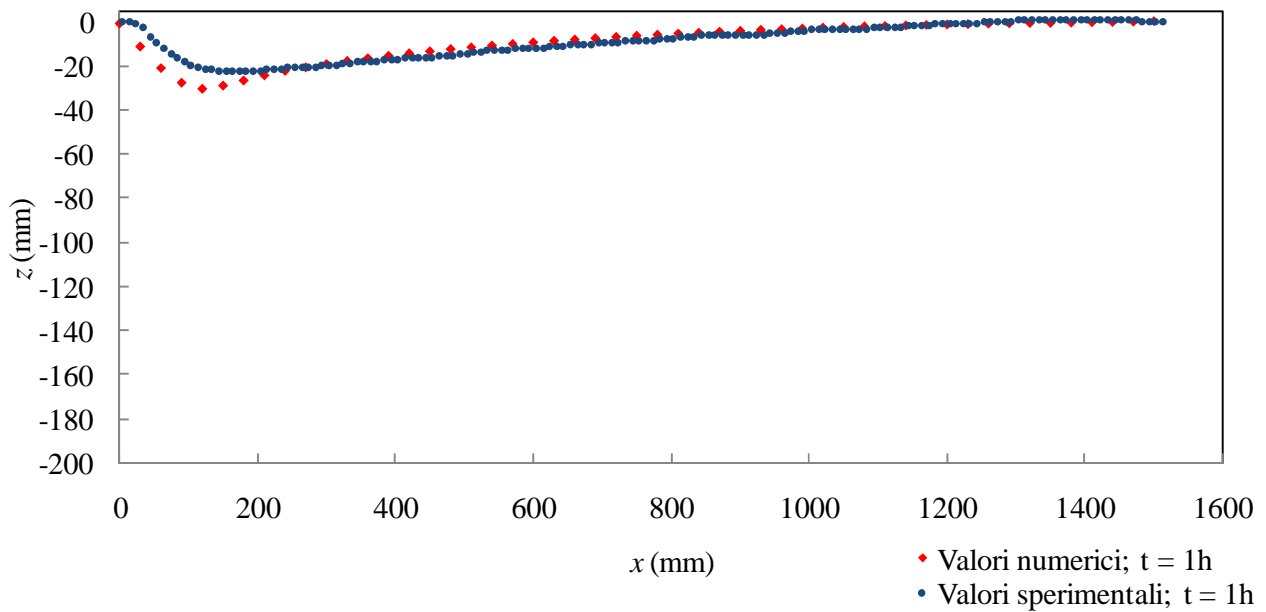


Figura 5.6. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A_1 (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

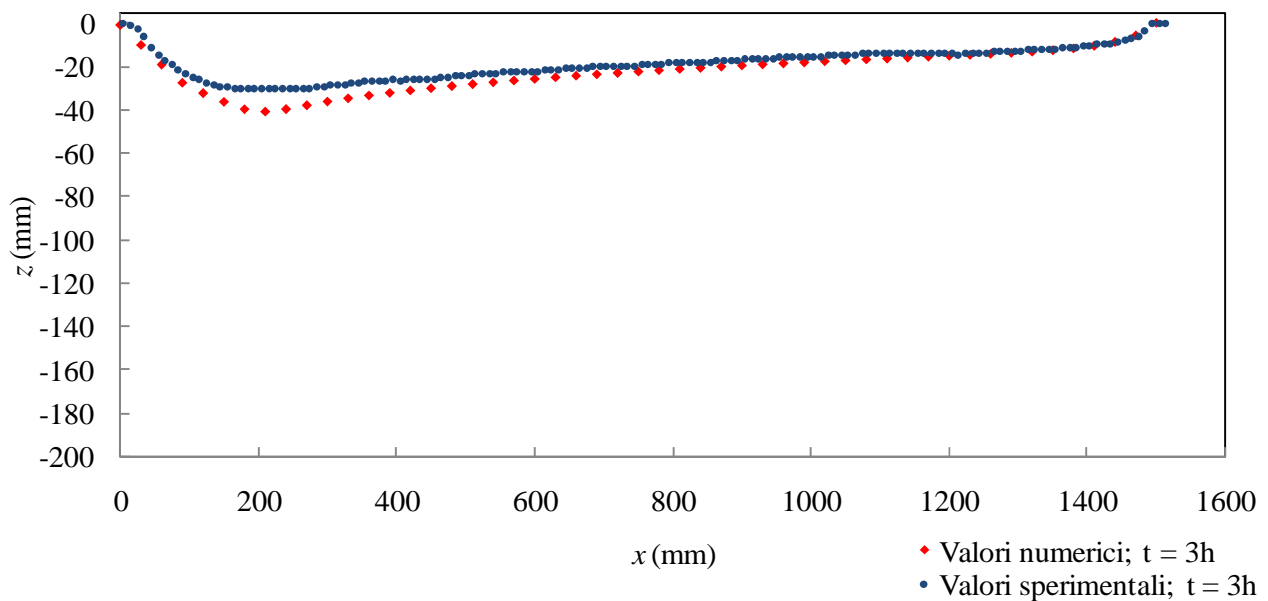


Figura 5.7. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A_2 (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

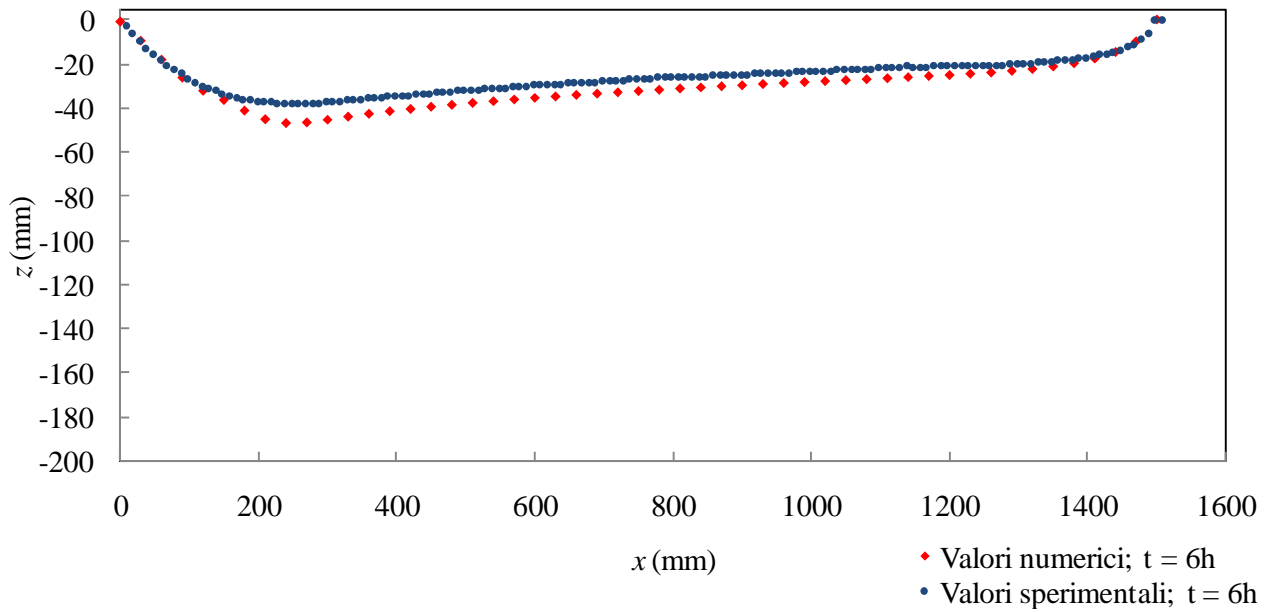


Figura 5.8. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₃ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

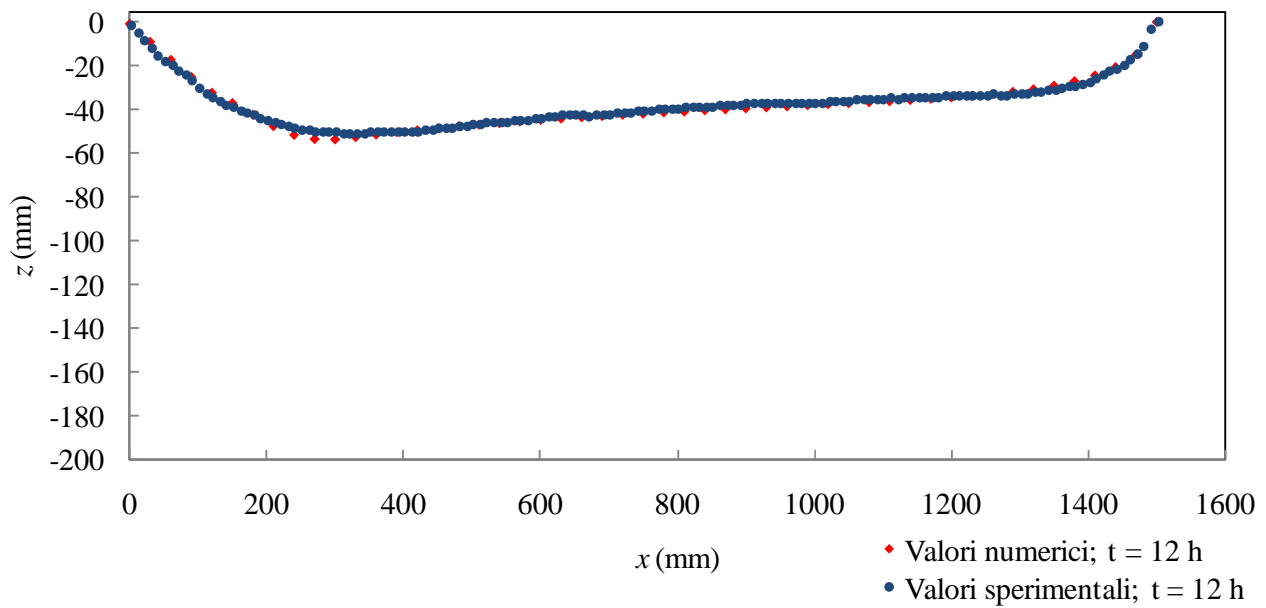


Figura 5.9. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₄ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

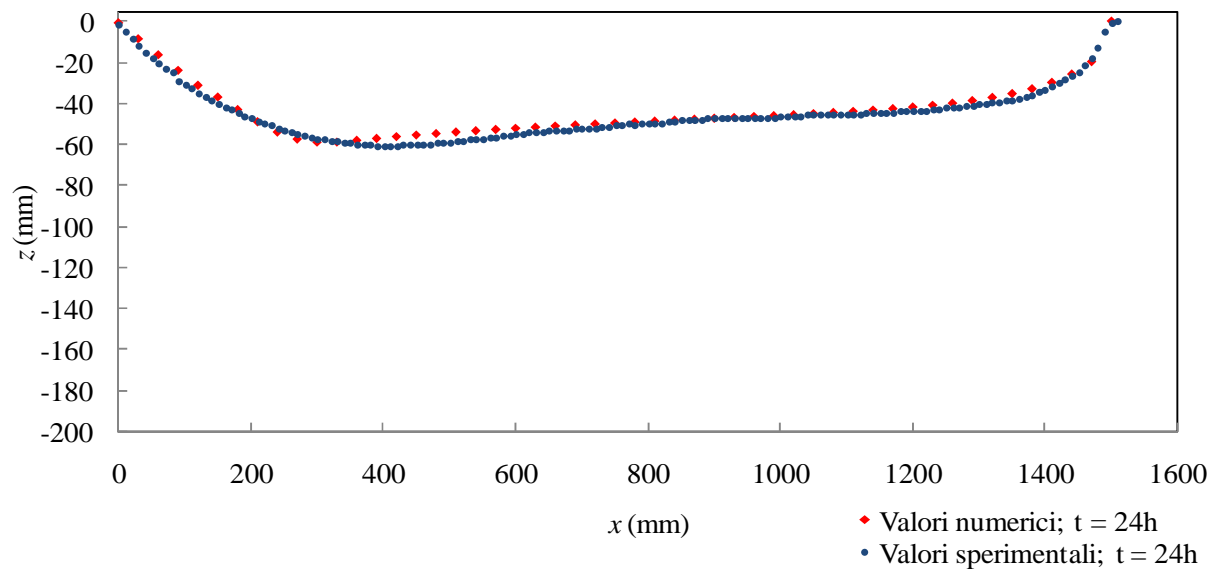


Figura 5.10. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₅ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

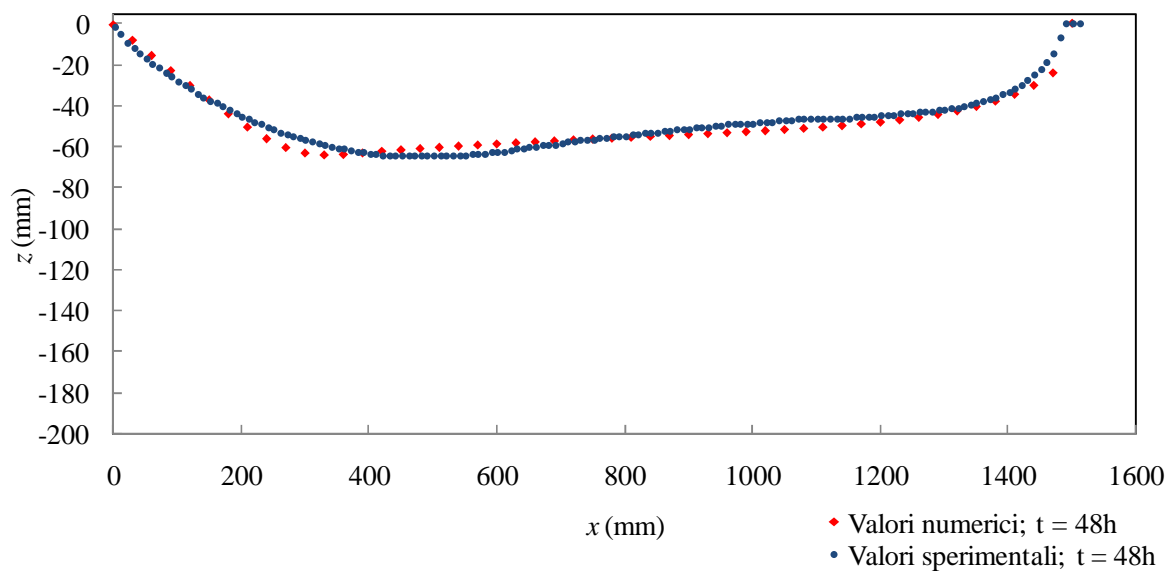


Figura 5.11. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₆ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

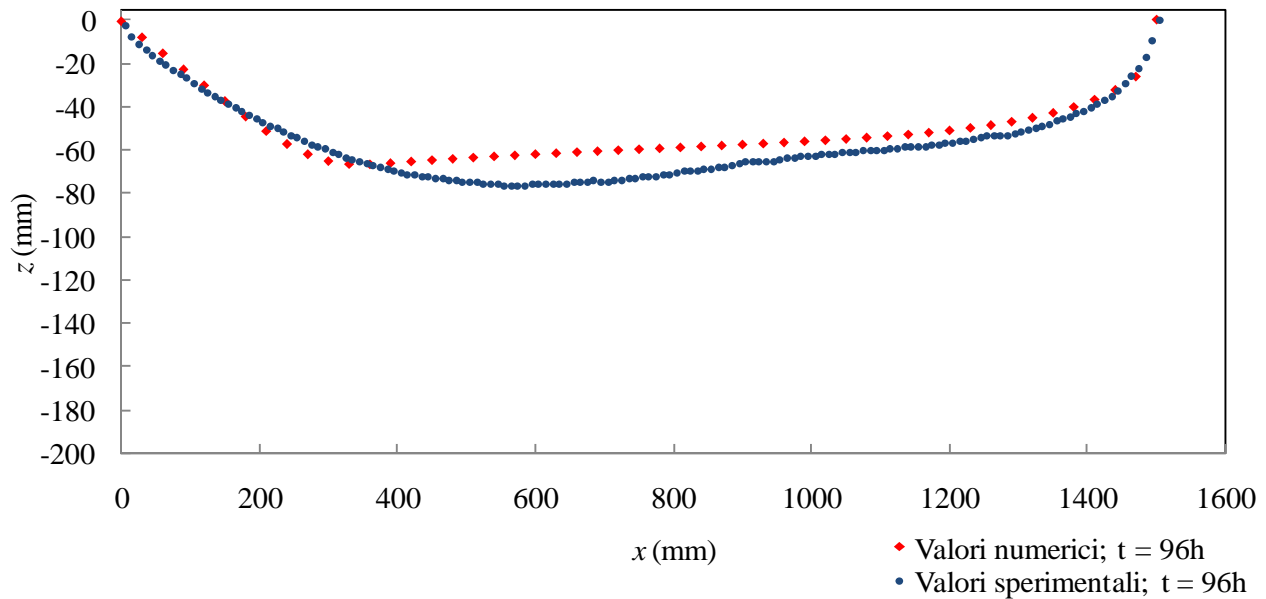


Figura 5.12. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₇ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

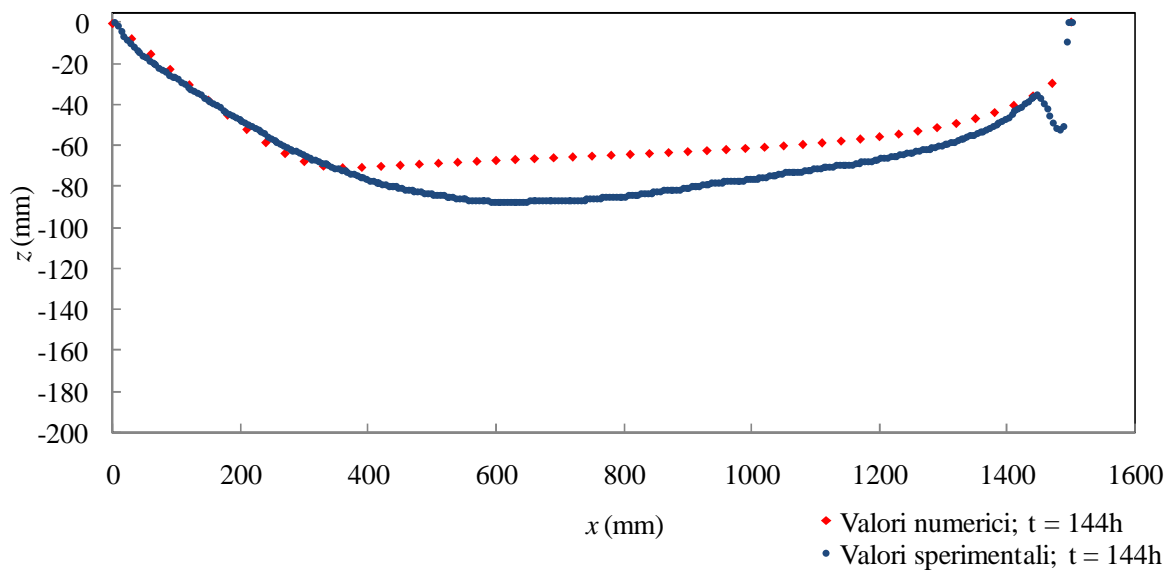


Figura 5.13. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova A₈ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

Per le prove in moto vario (serie B), si è proceduto alla simulazione dei profili erosi utilizzando lo stesso codice di calcolo del moto permanente. La variazione temporale della portata è stata indicata mediante una discretizzazione a gradini degli idrogrammi di piena. Ciò ha permesso di considerare la portata costante negli intervalli temporali $\Delta t=10$ min, intercorrenti tra due valori consecutivi della portata.

Nelle Figg. 5.14÷5.17 si confrontano i profili di scavo monodimensionali simulati numericamente con quelli misurati sperimentalmente nella serie B nel letto di sabbia (profili

longitudinali medi):

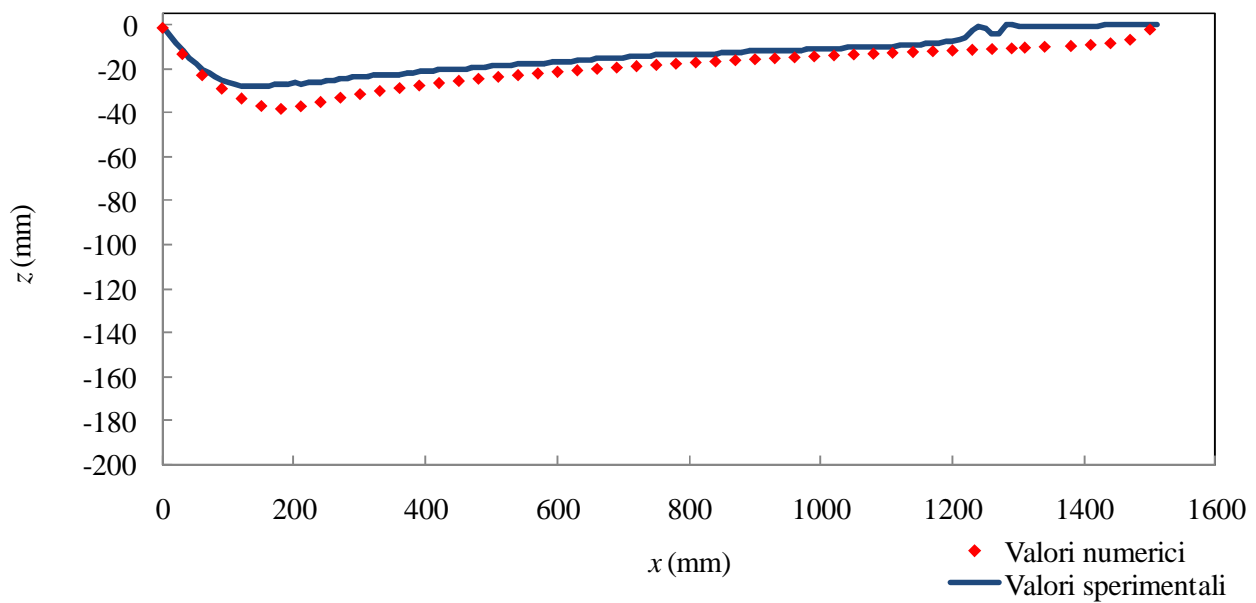


Figura 5.14. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova B₁ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

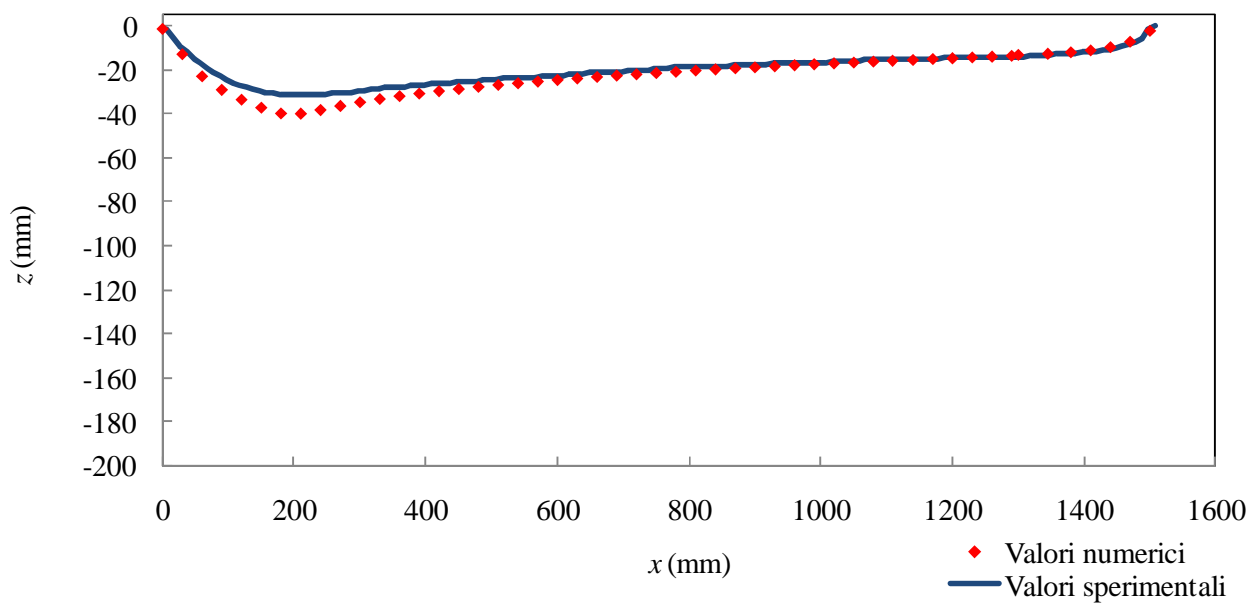


Figura 5.15. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova B₂ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

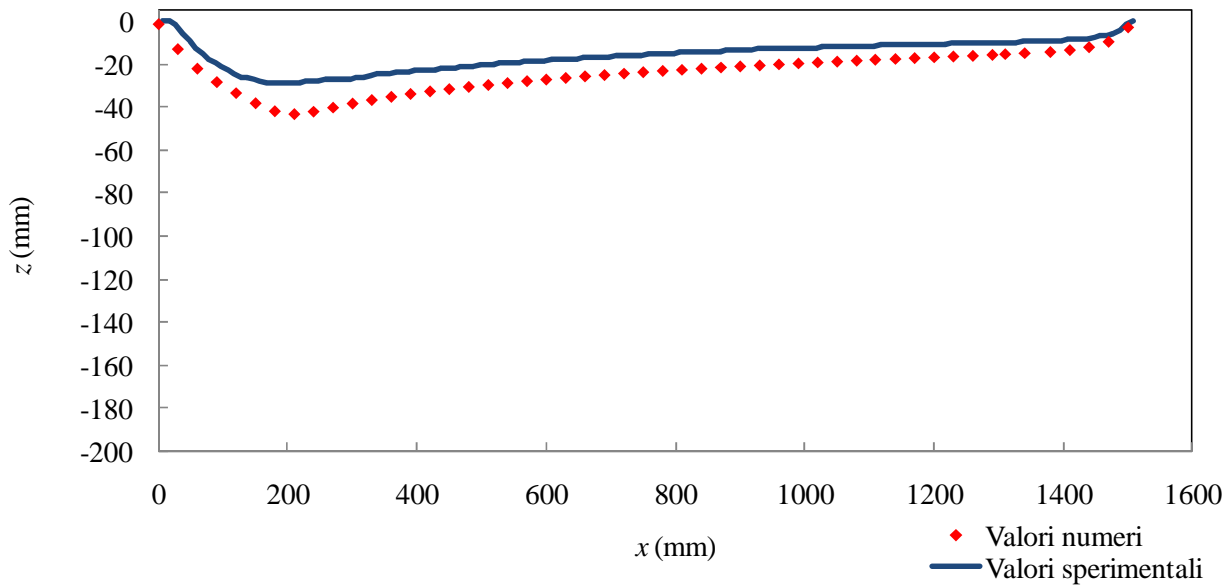


Figura 5.16. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova B₃ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

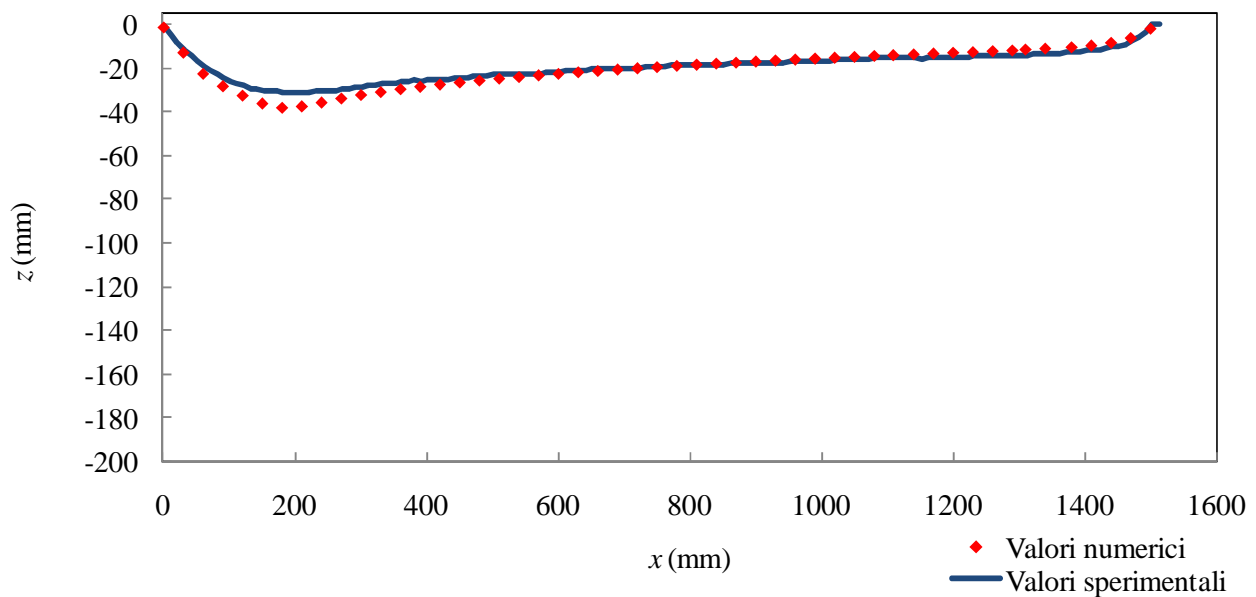


Figura 5.17. Confronto tra i profili longitudinali medi misurati nella prova B₄ (punti blu) e quelli simulati numericamente (punti rossi).

Le simulazioni hanno mostrato in generale un buon accordo con i dati sperimentali e saranno estese al caso del fondo costituito dalla miscela coesiva, considerando il valore della tensione tangenziale al fondo critica per il moto incipiente dei sedimenti e l'analogia con i profili di scavo ottenuti per la sabbia a parità di intensità della corrente.