

---

# Capitolo 3

## Macrolegami costitutivi per microstrutture contenenti fratture in evoluzione

Nel presente capitolo viene investigata l'influenza dell'evoluzione di microfratture sulle proprietà effettive dei materiali compositi, caratterizzati da microstrutture eterogenee. In particolare si osserverà come, tenendo in conto i forti cambiamenti subiti dalla microstruttura, associati alla crescita dei micro-cracks presenti, risulti possibile ottenere dei macrolegami costitutivi di tipo non-lineare per i materiali compositi. A tal riguardo, alle classiche tecniche di omogeneizzazione sviluppate nei precedenti capitoli e basate sui concetti della *Micromeccanica*, sarà affiancato l'utilizzo della *Meccanica della Frattura*, al fine di considerare in maniera accurata gli aspetti legati all'evoluzione del danno.

### 3.1 Introduzione

La valutazione delle proprietà costitutive macroscopiche per i materiali compositi, basata su un'attenta analisi del loro comportamento microscopico, rappresenta un problema di notevole interesse, dato il sempre crescente utilizzo di tali materiali nei diversi ambiti dell'ingegneria [Bruno D. et al., 2007].

Rappresentare in maniera esplicita la microstruttura di un composito mediante un modello matematico, individuando al suo interno le varie fasi che la caratterizzano, come la matrice, le fibre, le interfacce e le varie imperfezioni, richiederebbe uno sforzo computazionale notevole. A tal riguardo, sono stati proposti numerosi approcci in letteratura, atti a valutare la risposta macroscopica di un materiale eterogeneo.

In particolare, si è già visto come, oltre ai classici metodi analitici, possono essere adottati due tipi di metodologia, che vanno sotto il nome di *Teoria dei Campi medi* e *Teoria dell'Omogeneizzazione*.

Si è osservato come il primo approccio, di tipo fisico, si basa sul concetto che le proprietà meccaniche, misurate durante le prove sperimentali, possono essere ottenute attraverso i valori medi sul volume di saggi microscopici eterogenei.

Il secondo, invece, formula le relazioni tra micro e macrovariabili mediante la procedura matematica della perturbazione multi-scala, assumendo una microstruttura di tipo periodico. Come mostrato nei precedenti capitoli, i due metodi possono produrre le stesse proprietà omogeneizzate, sotto determinate ipotesi, e vengono utilizzati spesso con l'ausilio del metodo agli elementi finiti (FEM).

In molti casi i problemi di danneggiamento possono verificarsi a livello microscopico, come, ad esempio, la crescita di micro-vuoti, la creazione e l'evoluzione di microfratture, i fenomeni di distacco all'interfaccia tra le differenti fasi, influenzando in maniera notevole il comportamento macroscopico del materiale eterogeneo. Ciò comporta che, anche nel caso in cui ciascuna fase presenti un comportamento di tipo elastico lineare, l'evoluzione subita dalla microstruttura, associata a tali fenomeni di danneggiamento, dà origine a relazioni costitutive macroscopiche fortemente non-lineari. Tali non-linearità nella risposta macroscopica si manifestano mediante una progressiva perdita di rigidità del materiale, che può condurre al collasso sotto assegnate macrodeformazioni omogenee, associate ad una crescita di tipo instabile delle fratture presenti. A tal riguardo, appare evidente come un modello micromeccanico realistico ed efficace deve essere in grado di prevedere un legame costitutivo a livello della macro-scala che tenga conto, con la dovuta accuratezza, dei meccanismi di danno che si instaurano all'interno del materiale.

Molte ricerche sono state indirizzate alla valutazione delle proprietà costitutive di compositi eterogenei caratterizzati dalla presenza di difetti microscopici, con particolare attenzione a due casi fondamentali, come quello dei compositi fibrorinforzati in presenza del problema del *debonding* fibra-matrice [Yuan F.G. et al., 1997]-[Caporale A. et al., 2006], o quello dei materiali porosi contenenti microvuoti e microcracks [Li S. et al., 2004]-[Jensen H.M., 1999].

Rappresentando il danneggiamento all'interno di un composito un fenomeno progressivo e di tipo non-lineare, lo studio dell'evoluzione delle proprietà elastiche effettive, causata dalla crescita dei difetti, risulta essere molto complesso ma di fondamentale importanza. A tal riguardo, occorre osservare come i classici modelli puramente micromeccanici non siano in grado di tenere in conto, in maniera accurata, l'evoluzione di tali microdifetti, come è possibile osservare in numerosi lavori, in cui gli autori assumono fissata, in maniera arbitraria, la configurazione del danno [Bisegna P. et al, 1998]-[Zheng S.F. et al., 2000].

Approcci di tipo più generale considerano, invece, una distribuzione di tipo random dei microcracks o dei difetti all'interfaccia tra i microcostituenti [Teng H., 2007], altri includono gli effetti dell'evoluzione dei difetti nei legami costitutivi macroscopici utilizzando modelli di interfaccia fragile [Caporale A. et al., 2006], mentre altri ancora utilizzano la Meccanica della Frattura in collaborazione con le classiche tecniche di Omogeneizzazione [Wimmer S.A., Karr D.G., 1996].

Come alternativa agli approcci presenti in letteratura, in questo capitolo si vuole investigare l'influenza della crescita e dell'evoluzione di micro-cracks sulle effettive proprietà meccaniche di un materiale composito con microstruttura fortemente eterogenea, utilizzando il metodo degli elementi finiti (FEM) accoppiato ai modelli di interfaccia. In particolare, l'obiettivo principale consiste nell'ottenere i macrolegami costitutivi di materiali eterogenei, che tengano conto della progressiva evoluzione della configurazione della microstruttura, associata con la crescita dei vari microdifetti. L'evoluzione del danno può essere simulata mediante l'utilizzo della Meccanica della Frattura, che viene ad essere affiancata ai classici approcci micromeccanici. Come sarà possibile osservare nel capitolo relativo alle simulazioni numeriche, si è posta l'attenzione su due casi fondamentali: (1) i compositi a matrice porosa caratterizzati da una microstruttura, all'interno della quale sono presenti delle microcavità; (2) i compositi fibro-rinforzati caratterizzati da difetti all'interfaccia tra i microcostituenti.

Per quanto riguarda la modellazione numerica, sono stati impiegati tre tipi di condizioni al contorno ed in particolare la condizione di *spostamenti lineari*, quella di *trazioni uniformi* e quella di *deformazioni periodiche e trazioni antiperiodiche*. La propagazione dei microcracks è stata, poi, modellata mediante l'utilizzo della tecnica

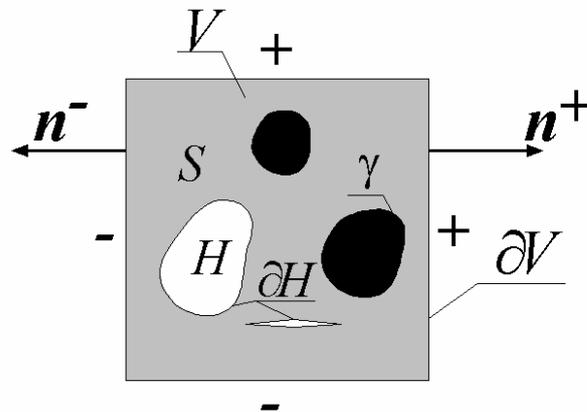
del  $J$ -integral accoppiata ai modelli di interfaccia, in grado di tenere in conto il contatto tra le facce della frattura.

### 3.2 Formulazione

Nella successiva Fig. 3.1 viene mostrato l'RVE rappresentativo della microstruttura di un materiale composito, caratterizzato da una zona solida  $S$  e da una parte vuota  $H$ , contenente, a sua volta, tutta una serie di discontinuità microscopiche (micro-cracks o microdifetti alle interfacce tra i vari costituenti) e/o di microcavità. A tal riguardo, il volume totale  $V$  di tale cella unitaria può essere rappresentato mediante l'unione di tali due porzioni di volume fondamentali:

$$V = S \cup H \quad (3.1)$$

L'elemento di volume rappresentativo può, pertanto, contenere un numero arbitrario di fasi, imperfezioni, micro-cracks e microvuoti.



**Figura 3.1.** RVE per una microstruttura eterogenea contenente microcavità, micro-cracks ed inclusioni.

Con  $\partial H$  viene indicato il contorno della zona vuota, che include, come detto, le superfici dei microvuoti nonché dei micro-cracks, che possono sorgere all'interno dell'RVE. Indichiamo con  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  il campo di spostamenti in corrispondenza del punto materiale  $\mathbf{x}$  all'interno della microstruttura, mentre con  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  viene indicata la corrispondente microdeformazione. Il campo di trazione microscopico  $\mathbf{t}$ , assunto nullo

in assenza di contatto sulla superficie di contorno dei vuoti e dei cracks presenti all'interno della microstruttura, risulta essere diverso da zero solo sul contorno  $\partial V$  dell'RVE. Viene, pertanto, imposta la seguente condizione sul contorno  $\partial H$  della parte vuota:

$$\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial H \quad (3.2)$$

Data la notevole differenza tra macro e microscala, la valutazione della risposta macroscopica del materiale composito con microstruttura eterogenea, in accordo con le classiche teorie di Omogeneizzazione, viene effettuata mediante la risoluzione di un problema di equilibrio elastico con condizioni al contorno, in assenza di forze di volume. Tale posizione implica, quindi, che il campo di microtensione risulta essere a divergenza nulla, come espresso dalla seguente relazione, valida nella zona solida  $S$ :

$$\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{in } S \quad (3.3)$$

I macrocampi di tensione e deformazione possono essere ottenuti mediante l'introduzione dei campi di trazione  $\mathbf{t}$  e spostamento  $\mathbf{u}$ , assegnati sul contorno della cella unitaria, ottenendo le seguenti relazioni fondamentali della *Teoria dei campi medi* [Hill R., 1972]:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} dS \end{cases} \quad (3.4)$$

dove con  $\otimes_s$  si è indicata la parte simmetrica del prodotto tensoriale  $\otimes$ , mentre  $\mathbf{n}$  rappresenta il vettore normale al contorno  $\partial V$  dell'elemento di volume rappresentativo, nel punto individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x}$ . Le espressioni (3.4) per le macrovariabili coincidono, nell'ambito della *Teoria dei campi medi*, con i valori medi calcolati sul volume  $V$  dei microcampi di tensione e, solo in assenza di vuoti o inclusioni all'interno della microstruttura, di deformazione. A tal riguardo, applicando

il teorema della divergenza, è possibile ottenere le seguenti espressioni per i campi macroscopici:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{\sigma} dV \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{\varepsilon} dV - \frac{1}{V} \int_{\partial H} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{N} dS \end{cases} \quad (3.5)$$

dove  $\mathbf{N}$  rappresenta il vettore normale alla superficie di contorno della parte vuota  $\partial H$ . Occorre osservare come il valore medio sul volume dell'RVE del campo di deformazione venga decurtato dell'aliquota di deformazione associata alla presenza di microvuoti e micro-cracks, al fine di valutare la macrodeformazione  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Nel passaggio dalle (3.4) alle (3.5), occorre osservare come all'interno dell'espressione delle tensioni medie è stata effettuata la seguente posizione:

$$-\frac{1}{V} \int_{\partial H} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dS = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

La (3.6) è giustificata dal fatto che la parte vuota è caratterizzata da valori nulli della trazione  $\mathbf{t}$ . Nel caso in cui, poi, sia assunta nella modellazione la presenza delle forze di contatto tra le superfici del singolo micro-cracks, la (3.6) continua ad essere valida data la continuità del vettore tensione. Il campo di spostamenti locale risulta essere controllato mediante una deformazione macroscopica  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  e consta di due aliquote fondamentali: una parte *lineare* ed un campo di *fluttuazione*. Avremo, pertanto, il seguente campo di spostamenti microscopico:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{x} + \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

All'interno della (3.7)  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  rappresenta, dunque, il campo di fluttuazione, che, al variare delle condizioni al contorno, può essere nullo, periodico o arbitrario, ma con deformazione media associata nulla, come vedremo. Da tale campo di spostamenti è possibile risalire, a questo punto, al corrispondente campo di microdeformazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \nabla_S \boldsymbol{w} \quad (3.8)$$

dove con  $\nabla_S$  si è indicata la parte simmetrica del gradiente rispetto alla variabile  $\mathbf{x}$ . Osservando la seconda delle (3.4), rappresentativa della macrodeformazione, emerge chiaramente come il campo di fluttuazione deve rispettare la seguente condizione:

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{w} \otimes_S \boldsymbol{n} dS = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Tale condizione può essere rispettata mediante l'imposizione di una delle tre differenti condizioni sul contorno  $\partial V$  seguenti:

$$\begin{aligned} 1) \textit{ Fluttuazioni omogenee} & \quad \boldsymbol{w} = \mathbf{0}; \\ 2) \textit{ Fluttuazioni periodiche} & \quad \boldsymbol{w}(\mathbf{x}^+) = \boldsymbol{w}(\mathbf{x}^-); \\ 3) \textit{ Tensioni omogenee} & \quad \boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

In particolare, la condizione (1) assicura la linearità degli spostamenti come emerge sostituendo la condizione  $\boldsymbol{w} = 0$  all'interno della (3.7). La condizione di fluttuazioni periodiche (2), invece, garantisce che ogni componente del campo  $\boldsymbol{w}(\mathbf{x})$  assume gli stessi valori nei medesimi punti dei lati opposti,  $\partial V^+$  e  $\partial V^-$ , del contorno  $\partial V$ , caratterizzati dall'aver normale esterna, nei punti  $\mathbf{x}^+$  ed  $\mathbf{x}^-$ , opposta:

$$\boldsymbol{n}^+ = -\boldsymbol{n}^- \quad (3.11)$$

Per quanto riguarda, invece, la condizione (3) occorre osservare come la (3.9), in questa situazione, può essere soddisfatta in senso globale, nel senso che le macrotensioni non risultano note a priori, ma possono essere calcolate attraverso un'assegnata macrodeformazione  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , valutata a sua volta mediante la seconda delle (3.4). In particolare, si ottiene la seguente equazione di vincolo in forma debole:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n}) dS &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{V} \int_{\partial V} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{w} \otimes_s \mathbf{n}) dS &= 0\end{aligned}\tag{3.12}$$

all'interno della quale il tensore di macrotensione assume il significato di un moltiplicatore di Lagrange. Assumendo, a questo punto, che il campo di microtensione sia a divergenza nulla nella zona solida  $S$  come espresso dalla relazione (3.3), nonché l'antiperiodicità delle trazioni sul contorno  $\partial V$ , le tre condizioni al contorno, espresse dalle relazioni (3.10), soddisfano il teorema della media [Hill R., 1972]:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS\tag{3.13}$$

nella quale il vettore tensione  $\mathbf{t}$  può essere legato alla macrotensione mediante la terza delle condizioni (3.10). Tale equazione riveste un ruolo fondamentale nella definizione delle proprietà macroscopiche per un materiale composito. Occorre osservare, come la prima e la terza delle possibili condizioni applicabili sul contorno  $\partial V$ , forniscono l'estremo superiore e quello inferiore (*upper* e *lower bound*) per l'energia di deformazione macroscopica per una cella unitaria di dimensioni finite (RVE), rappresentativa del comportamento microscopico di un materiale composito fortemente eterogeneo. Si ottiene, in particolare, la convergenza ad unico valore dell'energia nel caso in cui le dimensioni dell'RVE tendano all'infinito. D'altro canto la seconda condizione al contorno risulta esattamente applicabile ai materiali periodici, la cui struttura può essere pensata come generata da una ripetizione periodica della cella unitaria, caratterizzata dalla presenza di una zona vuota.

Il comportamento meccanico dei microcostituenti viene assunto iperelastico lineare, definendo il tensore di elasticità microscopico  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ . La condizione di omogeneizzazione può essere ottenuta, a questo punto, mediante il seguente problema di minimizzazione:

$$\Phi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \inf_{\mathbf{w} \in A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \frac{1}{V} \int_S \phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{x}) dV \quad (3.14)$$

soggetto ad una delle tre differenti condizioni al contorno viste in precedenza. La (3.14) consente, quindi, di valutare il macropotenziale elastico  $\Phi$  come il minimo valore medio dell'energia di deformazione microscopica  $\phi$ , rispetto ad un campo di fluttuazione appartenente all'insieme  $A(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$  di tutte le fluttuazioni ammissibili, in grado di soddisfare una delle tre condizioni (3.10).

Mediante le derivate prima e seconda rispetto alle macrodeformazioni del macropotenziale elastico, ottenuto dalla soluzione del principio di minimizzazione (3.14) accoppiato all'equazione di vincolo (3.13), è possibile risalire alle macrotensioni e ai moduli del materiale omogeneizzato:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \bar{\mathbf{C}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Se il problema di minimizzazione (3.14) risulta essere di tipo lineare, è possibile riscrivere le (3.15) nella forma seguente:

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV = \bar{\mathbf{C}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{C}}_{ijhk} = \frac{1}{V} \int_V C_{ijmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}(u^{hk}) dV = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(u^{hk}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(u^{ij}) dV \end{cases} \quad (3.16)$$

dove  $u^{ij}$  rappresenta la soluzione del problema (3.14) per un'assegnata macrodeformazione unitaria:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ij} = \mathbf{e}_i \otimes_S \mathbf{e}_j \quad (3.17)$$

dove con  $\mathbf{e}_i$  si è indicato, a sua volta, il versore dell'asse  $x_i$ . Occorre notare come il tensore di elasticità omogeneizzato, definito attraverso la seconda delle (3.16), risulta essere simmetrico rispetto alla diagonale, dato il comportamento iperelastico dei microcostituenti. Il problema di minimizzazione (3.14) può essere risolto, come detto, imponendo una delle tre differenti condizioni al contorno espresse dalle (3.10), a ciascuna delle quali è legata una differente formulazione variazionale. In particolare, al variare della condizione al contorno, è possibile ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange del problema variazionale, mediante le quali viene definito lo stato di equilibrio della microstruttura e le relative condizioni al contorno. A tal riguardo, nel caso in cui venga imposta la condizione di *spostamenti lineari* o *fluttuazioni omogenee*, definita dalla prima delle (3.10), il principio variazionale può esprimersi mediante le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV &= \frac{1}{V} \int_S \nabla \delta \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{V} \int_S \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \mathbf{w} \right) dV - \frac{1}{V} \int_S \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV &= 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{V} \int_{\partial S} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} \right) dS - \frac{1}{V} \int_S \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

In particolare con  $\delta \mathbf{w}$  si è indicato un campo di fluttuazione virtuale, che deve soddisfare la prima delle (3.10), per la quale  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  sul contorno esterno dell'RVE. Dai lemmi fondamentali del calcolo variazionale, è possibile quindi ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange del problema:

$$\begin{cases} \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} & \text{in } S \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \end{cases} \tag{3.19}$$

Pertanto, appare evidente come il principio variazionale sia in questo caso consistente con uno stato di equilibrio della microstruttura, accoppiato a valori nulli del vettore

tensione sul contorno  $\partial H$  della parte vuota. Nel caso in cui vengano imposte, invece, le *condizioni periodiche* sul contorno della cella unitaria il principio variazionale assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^+ + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^- \right] dS + \frac{1}{V} \int_{\partial H} \delta \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} dS + \\ & - \frac{1}{V} \int_S \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

In questo caso il campo di fluttuazione virtuale  $\delta \mathbf{w}$  deve soddisfare la seconda delle (3.10), per la quale  $\mathbf{w}(\mathbf{x}^+) = \mathbf{w}(\mathbf{x}^-)$  sul contorno dell'RVE. Inoltre, occorre osservare come, per tale condizione al contorno, lo stato di equilibrio della microstruttura viene determinato a meno di un moto rigido, che può essere eliminato mediante l'imposizione di appropriate condizioni di vincolo. In questo caso le equazioni di Eulero-Lagrange del problema assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} & \text{in } S \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^+ + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}^- = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \end{cases} \quad (3.21)$$

Il principio variazionale risulta essere consistente, in questo caso, con uno stato di equilibrio della microstruttura caratterizzato da un comportamento antiperiodico del vettore tensione sul contorno esterno  $\partial V$  dell'RVE, e da valori nulli dello stesso sul contorno  $\partial H$  della parte vuota.

Per quanto riguarda, infine, il caso in cui venga imposta sul contorno dell'RVE la condizione di *tensioni omogenee*, occorre osservare come all'interno della formulazione del problema dell'omogeneizzazione guidata mediante una macrodeformazione assegnata, tale condizione al contorno può essere incorporata mediante l'utilizzo del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. A tal riguardo il principio variazionale assume la forma di un problema di stazionarietà:

$$\Phi = \inf_{\mathbf{w}} \sup_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \left\{ \frac{1}{V} \int_S \phi \, dV - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{w} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}) \, dS \right\} \quad (3.22)$$

nella quale è stato combinato il problema di minimizzazione espresso dalla (3.14) con l'equazione di vincolo in forma debole rappresentata nella (3.12). Nella (3.22), dunque, la macrotensione  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  assume il significato di un moltiplicatore di Lagrange, garantendo il soddisfacimento della condizione di vincolo (3.9) sul campo di fluttuazione. Anche in questo caso lo stato di equilibrio della microstruttura può essere determinato a meno di un moto rigido, che viene eliminato mediante l'imposizione di opportune condizioni di vincolo. In tale situazione occorre effettuare le variazioni rispetto ai due parametri in gioco, il campo di fluttuazione  $\mathbf{w}$  e la macrotensione  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , ottenendo la seguente espressione per il problema di stazionarietà:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \int_{\partial S} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} \right) \, dS - \frac{1}{V} \int_S \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \, dV - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \, dS + \\ & - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{w} \otimes_S \mathbf{n}) \, dS = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \right) \, dS + \frac{1}{V} \int_{\partial H} \delta \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} \right) \, dS - \frac{1}{V} \int_S \delta \mathbf{w} \cdot \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \, dV \\ & - \frac{1}{V} \int_{\partial V} \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{w} \otimes_S \mathbf{n}) \, dS = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Per cui è possibile ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange associate al problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Div} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} & \text{in } S \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \\ \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{N} = \mathbf{0} & \text{su } \partial H \\ \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\mathbf{w} \otimes_S \mathbf{n}) \, dS = \mathbf{0} & \text{su } \partial V \end{array} \right. \quad (3.24)$$

In tale situazione, il punto di stazionarietà del macropotenziale determina uno stato d'equilibrio per la microstruttura, caratterizzato da valori nulli della trazione su  $\partial H$  e da uno stato tensionale macroscopico omogeneo governato dal moltiplicatore di Lagrange  $\bar{\sigma}$ .

Nell'ipotesi in cui sia assunta la presenza delle forze di contatto tra le superfici danneggiate dei diversi micro-cracks presenti, il principio variazionale espresso dalla (3.14) può essere opportunamente modificato al fine di tenere in conto la condizione cinematica di contatto unilaterale. In particolare, tale condizione sul contatto può essere introdotta mediante un'opportuna scelta del campo di spostamenti ammissibili, che viene forzato ad essere di tipo convesso al fine di evitare la compenetrazione delle superfici del crack [Bisegna P. et al, 1998]. Quando viene tenuto in conto il contatto tra le superfici del crack, il comportamento costitutivo macroscopico del materiale composito eterogeneo diviene di tipo non-lineare, pur mantenendosi iperelastico e indipendente da percorso di macro-deformazione.

L'area di contatto non risulta essere, infatti, nota a-priori, dipendendo solo dalla direzione dell'assegnata macro-deformazione. Ciò implica che il tensore di elasticità macroscopico  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$  risulta essere in grado di soddisfare, per ogni valore reale positivo del parametro  $\lambda$ , la seguente relazione:

$$\bar{\mathbf{C}}(\lambda\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (3.25)$$

Come mostrato nel precedente capitolo 2, se l'RVE non risulta essere statisticamente omogeneo, per un'assegnata macrodeformazione comune  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , vale la seguente disuguaglianza fondamentale, valida nell'ipotesi di microcostituenti di tipo convesso:

$$\bar{\mathbf{C}}^{(3)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \bar{\mathbf{C}}^{(2)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \bar{\mathbf{C}}^{(1)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.26)$$

dove  $\bar{\mathbf{C}}^{(i)}$  rappresenta il tensore di elasticità macroscopico corrispondente all'*i*-esima condizione al contorno, valutato per un'assegnata direzione di macro-deformazione.

### 3.2.1 Legami costitutivi macroscopici

Per un'assegnata configurazione danneggiata della microstruttura, il legame costitutivo macroscopico può essere valutato mediante le relazioni (3.15), dipendenti dal macropotenziale elastico  $\Phi$ . Occorre osservare come il tensore di elasticità macroscopico dipenda dalla lunghezza  $l$  del singolo micro-crack:

$$\bar{\sigma} = \bar{C}(l)\bar{\varepsilon} \quad (3.27)$$

D'altro canto, nel caso in cui venga tenuto in conto il contatto tra le superfici dei micro-cracks, i moduli omogeneizzati risultano essere funzione anche della direzione dell'assegnata macrodeformazione:

$$\hat{\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\|\bar{\varepsilon}\|} \quad (3.28)$$

Il danneggiamento risulta localizzato a livello dell'interfaccia tra i microcostituenti o in corrispondenza delle superfici dei singoli micro-cracks, e viene utilizzato il classico criterio di avanzamento della Meccanica della Frattura:

$$G(\bar{\varepsilon}, l) = G_c \quad \text{per} \quad \dot{l} \geq 0 \quad (3.29)$$

dove con  $G$  viene indicata l'energia di rilascio associata ad una lunghezza del crack pari ad  $l$ , mentre  $G_c$  rappresenta l'energia di frattura critica associata al materiale analizzato [Hutchinson J.W., Suo Z., 1992]. Dall'equazione (3.29) è possibile risalire ad una legge di evoluzione del danno di tipo non-lineare, che mette in relazione l'assegnata macrodeformazione e la lunghezza del crack:

$$l = l(\bar{\varepsilon}) \quad (3.30)$$

In conseguenza della relazione (3.30), occorre osservare come il legame costitutivo macroscopico divenga fortemente non-lineare e dipenda notevolmente dalla storia deformativa.

E' possibile, dunque, risalire a delle relazioni costitutive macroscopiche incrementali, capaci di tenere in conto l'evoluzione delle proprietà di rigidezza del materiale associata all'avanzamento progressivo dei micro-cracks presenti. Il tensore di elasticità omogeneizzato può essere, in particolare, ottenuto effettuando la derivata, rispetto ad un parametro temporale  $t$ , della relazione (3.27):

$$\begin{cases} \dot{\bar{\sigma}} = \bar{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \bar{\mathbf{K}}_{ijkh}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \bar{\mathbf{C}}_{ijkh}(l(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})) + \frac{d\bar{\mathbf{C}}_{ijmn}(l(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}))}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mn} \end{cases} \quad (3.31)$$

nella quale con il punto si è indicata la derivata rispetto al parametro temporale  $t$ , mentre si è assunto un incremento positivo della lunghezza del crack  $\dot{l} > 0$ , in quanto in caso contrario ( $\dot{l} \leq 0$ ) il secondo termine del membro di destra della seconda delle (3.31) tende ad essere nullo. Utilizzando metodi approssimati per la valutazione degli effettivi legami costitutivi macroscopici nei materiali compositi con microdifetti in continua evoluzione, è possibile ottenere soluzioni in forma chiusa [Wimmer S.A., Karr D.G., 1996], per le quali il secondo termine del membro di destra della seconda relazione delle (3.31) può essere rappresentato nella forma seguente:

$$\left( \frac{d\bar{\mathbf{C}}_{ijmn}(l(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}))}{dl} \right) \left( \frac{dl}{d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk}} \right) \quad (3.32)$$

Occorre osservare come, mentre il tensore di elasticità macroscopico  $\bar{\mathbf{C}}(l)$  è caratterizzato dai moduli omogeneizzati tangenti rispetto alla macrodeformazione assegnata, nell'ipotesi che la configurazione danneggiata resti fissa, il tensore di elasticità macroscopico incrementale  $\bar{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$  contiene i moduli tangenti in seguito all'applicazione del criterio di frattura (3.29).

### 3.3 Descrizione del modello e soluzione numerica mediante FEM

Quando il contatto tra le superfici danneggiate viene ad essere trascurato nella modellazione, i moduli macroscopici  $\bar{\mathbf{C}}(l)$  possono essere ottenuti, per una fissata configurazione danneggiata ed un'assegnata microstruttura, mediante la seconda delle (3.16):

$$\bar{\mathbf{C}}_{ijhk}(l) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{C}_{ijmn}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}(\mathbf{u}^{hk}) dV \quad (3.33)$$

Per un assegnato percorso di macrodeformazione  $\beta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , controllato mediante il parametro  $\beta > 0$ , che può essere inteso come fattore di carico, l'energia di rilascio, per un'assegnata lunghezza del crack, può essere ottenuta valutando l'integrale  $J$  lungo un percorso chiuso che racchiude il tip della microfrattura. Data la linearità del problema, l'energia di rilascio soddisfa la seguente equazione:

$$G(\beta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) = \beta^2 G(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) \quad (3.34)$$

per cui, accoppiando la (3.34) al criterio di frattura (3.29), è possibile ottenere il seguente fattore di carico critico:

$$\beta = \sqrt{G_c / G(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l)} \quad (3.35)$$

In tale situazione il tensore di elasticità macroscopico  $\bar{\mathbf{C}}(l)$  può essere ottenuto in funzione della macrodeformazione  $\beta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , in seguito all'imposizione del criterio di frattura.

Nel momento in cui le superfici dei micro-cracks vengono ad essere sovrapposte, i moduli omogeneizzati, attraverso i quali è possibile scrivere il macrolegame costitutivo (3.27), risultano essere dipendenti dalla direzione di macrodeformazione  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Di conseguenza, il tensore di elasticità effettivo  $\bar{\mathbf{C}}(l, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$  deve essere valutato

mediante la seconda equazione delle (3.15), effettuando la derivata seconda del macropotenziale elastico rispetto alla macrodeformazione  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . In particolare è possibile prendere in considerazione tre possibili percorsi di macrodeformazione:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\pm = \pm \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\pm = \pm \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\pm = \pm \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \end{cases} \quad (3.36)$$

In particolare la prima e la seconda delle (3.36) individuano i percorsi deformativi di trazione/compressione uniassiale nelle direzioni  $x_1$  ed  $x_2$ , rispettivamente, mentre la terza indica un tipo di percorso associato a deformazioni da taglio. Occorre osservare come all'apice positivo siano associate direzioni positive di macrodeformazione, mentre a quello negativo direzioni negative.

Emerge come il generico modulo  $\bar{\mathbf{C}}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_h] \cdot \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j$  ( $h=1,2,3$ ) possa essere valutato come la macro-componente di tensione  $ij$ , eventualmente cambiata di segno per il caso di compressione, associata alla macrodeformazione unitaria positiva o negativa  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_h$ . Tale procedura è in accordo con il fatto che il tensore dei moduli omogeneizzati risulta essere positivamente omogeneo di grado zero, oltre che dipendente solo dalla direzione del percorso di macrodeformazione.

Il macrolegame costitutivo del tipo rappresentato nella relazione (3.27), lungo un assegnato percorso di macrodeformazione, può, a questo punto, essere valutato calcolando, rispettivamente, la macrodeformazione imposta inizialmente unitaria, mediante il fattore di carico critico  $\beta$ , che può essere a sua volta ottenuto mediante la (3.35), e la corrispondente macrotensione mediante la prima delle (3.5), che risulta essere funzione della lunghezza del crack, nell'ipotesi di crescita monotona del danno. Al fine di simulare la crescita del micro-crack, è stata utilizzata nelle simulazioni numeriche una legge costitutiva d'interfaccia, in grado di imporre la continuità degli spostamenti nella zona non danneggiata, e il contatto tra le superfici del crack nella zona afflitta dal debonding. In particolare, tale legame costitutivo d'interfaccia può

essere espresso mediante la relazione seguente, che utilizza un parametro di rigidità  $k$ , che può essere inteso, a sua volta, come un parametro di penalizzazione:

$$\mathbf{t} = \{t_n, t_t\} = \mathbf{k}(d)[[\mathbf{u}]] \quad (3.37)$$

dove  $n$  e  $t$  rappresentano, rispettivamente, le direzioni normale e tangenziale, mentre  $[[\mathbf{u}]]$  rappresenta la discontinuità degli spostamenti, valutata come differenza tra i valori di spostamento assunti, in corrispondenza della stessa ascissa, tra la superficie di normale positiva e quella di normale negativa dell'interfaccia analizzata:

$$[[\mathbf{u}]] = \{[[u_n]], [[u_t]]\} \quad (3.38)$$

Occorre osservare come nella (3.37)  $\mathbf{t}$  rappresenta il vettore trazione agente dalla parte positiva della superficie d'interfaccia di normale  $\mathbf{n}$ , mentre  $\mathbf{k}(d)$  rappresenta la matrice diagonale contenente i parametri di penalizzazione:

$$\mathbf{k}(d) = \text{diag}\{k_n, k_t\} \quad (3.39)$$

In particolare, con  $d$  viene indicato un parametro di danneggiamento, che assume il valore 1 nella zona danneggiata dell'interfaccia materiale mentre è pari a 0 nella restante regione. I due parametri di penalizzazione, poi, assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} k_t &= \begin{cases} 0 & d = 1 \\ k & d = 0 \end{cases}; \\ k_n &= \begin{cases} \frac{k}{2}(1 - \text{sign}[[u_n]]) & d = 1 \\ k & d = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tali parametri di rigidità assumono, in particolare, valori sufficientemente alti al fine di garantire la perfetta adesione nella zona non danneggiata, ma tuttavia non eccessivamente elevati in modo da impedire problemi di instabilità numerica. Nelle

applicazioni numeriche, a tal riguardo, è stato assunto un valore per tali parametri di penalizzazione in grado di soddisfare la seguente relazione:

$$kh = 1e07E_m \quad (3.41)$$

dove  $h$  rappresenta la dimensione caratteristica dell'RVE, mentre con  $E_m$  è stato indicato il modulo di elasticità della matrice. La procedura numerica utilizzata si basa su di una tecnica di continuazione, che conduce ad un'analisi parametrica in  $k$ , nella quale il solutore non-lineare assume la soluzione relativa al parametro precedente come scelta iniziale per lo step successivo.

E' opportuno osservare come l'utilizzo della meccanica della frattura implica che il processo di innesco del crack non venga preso in considerazione, e che per un valore di  $l$  tendente a zero, la macrodeformazione critica associata tenda ad un valore infinito, essendo praticamente nulla l'energia di rilascio in tale configurazione. A tal proposito, il legame costitutivo macroscopico è stato valutato considerando un piccolo valore iniziale della lunghezza relativa del crack  $l_0/h$ , che nelle modellazioni numeriche è stato assunto pari a 0.04 per il caso del composito rinforzato mediante fibre corte, e 0.0625 per il materiale a matrice porosa.

### 3.3.1 Implementazione del problema

Al fine di risolvere il problema variazionale introdotto mediante la (3.14) è stato utilizzato un modello agli elementi finiti, basato su di un approccio agli spostamenti. Tale modello è stato sviluppato mediante il codice commerciale COMSOL MULTIPHISYCS<sup>TM</sup> [Comsol, 2005]. Nel caso in cui siano imposte sul contorno dell'RVE le condizioni 2) o 3) delle (3.10), rispettivamente di *fluttuazioni periodiche* o *trazioni uniformi*, sono state imposte particolari equazioni di vincolo, al fine di eliminare possibili spostamenti rigidi per l'RVE. In particolare, nel caso della condizione 2), è stato imposto che il campo di fluttuazione  $w(x)$  risulti nullo nei quattro spigoli della cella unitaria. Tale condizione, imposta puntualmente, implica che negli spigoli dell'RVE lo spostamento risulti essere lineare:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{x} \quad (3.42)$$

Occorre osservare come la condizione (3.42) deve essere, invece, rispettata su tutti i contorni dell'RVE nel caso in cui si voglia imporre che la fluttuazione sia omogenea su tutto il contorno. In particolare, ciò accade nel caso della condizione 1) delle (3.10), per la quale  $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$ .

Nel caso in cui, invece, si vuole condurre la procedura di omogeneizzazione nell'ipotesi di comportamento periodico delle fluttuazioni sul contorno, occorre rendere disponibile, mediante una procedura di estrusione, il campo di spostamenti di un lato del contorno dell'RVE su quello ad esso opposto. Tale procedura di estrusione degli spostamenti consta sostanzialmente di due fasi. Nella prima viene definito il lato del contorno sorgente e la variabile che vuole estrudersi, mentre nella seconda occorre definire il contorno sul quale tale variabile dovrà essere resa disponibile, e cioè la sua destinazione. Tale procedura, quindi, proietta i valori di una qualsiasi variabile (nel nostro caso i campi di spostamento) da un lato, definito come sorgente, su di un altro definito come destinazione. Essendo le caratteristiche dei domini sorgente e destinazione dello stesso tipo, tale estrusione risulta essere di tipo puntuale, nel senso che la proiezione di una variabile di spostamento da un lato su quello ad esso opposto viene fatta punto per punto. In tale ottica, possiamo osservare come tale trasformazione sia di tipo lineare.

Le condizioni di tipo periodico sugli spostamenti possono, quindi, essere imposte, nella maniera seguente, sul contorno dell'RVE definito come destinazione della variabile di spostamento estrusa, una volta che tale operazione è stata effettuata:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^+) = \mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \quad (3.43)$$

dove con  $\mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-)$  è stata indicata la variabile di spostamento estrusa da  $\mathbf{x}^+$  ad  $\mathbf{x}^-$ , mentre con  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  si intende, al solito, la macrodeformazione applicata. La condizione di trazioni uniformi sul contorno può essere, invece, implementata definendo in alcuni vertici prestabiliti delle variabili integrali, che garantiscono il soddisfacimento

dell'equazione (3.9). In particolare, in tali vertici fittizi, assegnati in maniera del tutto arbitraria, viene imposta l'uguaglianza tra la macrodeformazione imposta e la deformazione media, valutata all'interno dell'RVE mediante la seconda delle (3.4). Tale artificio consente di guidare anche tale problema, in cui la condizione al contorno è sulle trazioni, mediante una macrodeformazione assegnata. A questo punto, la suddetta condizione di tensioni uniformi ed omogenee sul contorno viene garantita, imponendo che le trazioni sul contorno stesso siano pari a:

$$\mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \quad (3.44)$$

dove le  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  rappresentano, a loro volta, le tensioni medie valutate mediante la prima delle (3.4). Occorre osservare come la (3.44) venga imposta come condizione di tipo debole direttamente sul contorno dell'RVE. In tale situazione lo spostamento rigido della cella unitaria è stato impedito vincolando due vertici dell'RVE stesso.

La crescita dei micro-cracks è stata simulata utilizzando una legge costitutiva d'interfaccia di tipo non-lineare come quella rappresentata mediante la relazione (3.37), imponendo la continuità degli spostamenti tra le superfici del crack nella zona non danneggiata, e garantendo un contatto di tipo unilaterale nella restante regione, al fine di impedire compenetrazioni all'interno del materiale. In particolare l'evoluzione della zona danneggiata è stata forzata mediante incrementi discreti della lunghezza del crack tali da soddisfare:

$$\frac{\Delta l}{h} = 0.01 \quad (3.45)$$

Le quantità macroscopiche, come macrotensioni e macrodeformazioni, nonché i moduli del materiale omogeneizzato, definite rispettivamente mediante le relazioni (3.5) e (3.16), sono state valutate, nella fase di post-processing, mediante l'integrazione sul volume dell'RVE dei microcampi ottenuti come soluzione del problema elastico con condizioni al contorno, risolto mediante la modellazione agli elementi finiti di cui si è detto. In particolare l'integrazione di tali variabili, di tipo globale, presenta una sorgente, che può essere un sottodominio della microstruttura

oppure un contorno, ed una destinazione rappresentata da tutto il dominio  $V$ , proprio per la globalità dell'operazione.

I moduli macroscopici possono, a questo punto, essere ottenuti mediante una derivata di tipo numerico, utilizzando la tecnica della differenza centrale. Utilizzando, in particolare, i macrocampi di tensione è possibile scrivere la relazione seguente:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ijhk}(\beta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) &= \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk}}(\beta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) \cong \\ &\cong \frac{\bar{\sigma}_{ij}(\beta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk}) - \bar{\sigma}_{ij}(\beta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{e}_h \otimes \mathbf{e}_k \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk})}{2\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{hk}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3.2 La valutazione dell'integrale $J$

L'energia di rilascio totale  $G$  per una data configurazione danneggiata ed un'assegnata macrodeformazione può essere valutata per mezzo della tecnica dell'*integrale  $J$*  [Rice J.R., 1968]. E' stato mostrato mediante dimostrazioni rigorose come, per un corpo omogeneo ed iperelastico caratterizzato dalla presenza di un crack lineare,  $G$  risulti essere uguale al valore calcolato mediante l'integrale  $J$  lungo un qualsiasi percorso costruito attorno all'apice della frattura [Gurtin M.E., 1979]. Al contrario, per un corpo eterogeneo,  $G$  può essere valutato come limite dello stesso integrale  $J$  quando le dimensioni del percorso d'integrazione tendono ad eguagliare quelle di un intorno infinitesimo del tip della frattura stesso.

Al fine di poter utilizzare la tecnica dell'integrale  $J$  anche in ambito micromeccanico, per microstrutture i cui costituenti sono di tipo iperelastico ed omogeneo, occorre fare alcune osservazioni sulla forma del percorso d'integrazione da impiegare. L'indipendenza dal percorso (*path-independence*) dell'integrale  $J$  risulta essere una proprietà di fondamentale importanza utilizzando modelli agli elementi finiti, dovendo essere scelto tale percorso sufficientemente lontano dall'apice della frattura, a causa dei forti gradienti nei campi di tensione e deformazione che caratterizzano tale zona, date le singolarità che si verificano in prossimità del tip stesso. Proprio a causa di tali singolarità possono insorgere inesattezze nella valutazione dei campi tensionale e

deformativo, che possono condurre ad una perdita generale di accuratezza del metodo. Al fine di evitare, quindi, le integrazioni di tali campi nei pressi della zona dominata dalle singolarità di cui si è detto, diventa necessario scegliere un percorso di integrazione sufficientemente lontano dall'apice della frattura. A tal riguardo, in letteratura non sono presenti numerosi studi sulle relazioni tra l'integrale  $J$  e l'energia di rilascio  $G$ , nonché sul problema dell'indipendenza del percorso, per corpi eterogenei i cui microcostituenti risultano essere omogenei ed iperelastici.

Dall'applicazione del teorema della divergenza ad una regione contenente superfici di discontinuità o interfacce tra i vari microcostituenti e mediante il classico teorema del trasporto, è possibile dimostrare come l'energia di rilascio totale sia coincidente con il valore limite dell'integrale  $J$ , valutato su di un percorso le cui dimensioni tendono ad eguagliare quelle di un intorno infinitesimo dell'apice della frattura, anche per i corpi contenenti inclusioni, grazie alla condizione di continuità delle trazioni all'interfaccia tra i vari costituenti:

$$[[\boldsymbol{\sigma}]]\mathbf{N} = 0 \quad (3.47)$$

A tal riguardo è possibile ottenere la seguente relazione per l'energia di rilascio totale in corrispondenza del tip della frattura:

$$G(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} (\phi \mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds \quad (3.48)$$

dove  $D_\delta$  rappresenta un disco di raggio  $\delta$  centrato nel tip,  $\mathbf{n}$  è il versore della normale esterna al contorno  $\partial D_\delta$  di tale disco, mentre  $\boldsymbol{e}$  rappresenta la direzione di propagazione del crack. In particolare la relazione (3.48) può essere dimostrata introducendo il volume  $V_\delta$ , dipendente dalla lunghezza del crack  $l$  ed ottenuto sottraendo al volume  $V$  della microcella il volume occupato dal disco  $D_\delta$ :

$$V_\delta(l) = V - D_\delta(l) \quad (3.49)$$

Per il volume  $V_\delta$  è possibile scrivere la seguente equazione, ricordando che, essendo il tensore delle tensioni a divergenza nulla,  $\dot{\phi} = \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}^T \dot{\mathbf{u}})$ :

$$\int_{V_\delta} \dot{\phi} dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds - \int_{\partial D_\delta} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds + \int_{\gamma} (\boldsymbol{\sigma} N_i^+ + \boldsymbol{\sigma} N_i^-) \cdot \dot{\mathbf{u}} ds \quad (3.50)$$

dove con  $\gamma$  si è indicato l'unione di tutte le interfacce tra i vari microcostituenti e con  $N_i^+$  ed  $N_i^-$  la normale positiva e quella negativa, rispettivamente, a tali superfici di discontinuità. In particolare, l'ultimo integrale risulta essere nullo in quanto, nella zona danneggiata le superfici del crack sono caratterizzate da valori nulli del vettore tensione, mentre nella zona non danneggiata la discontinuità delle trazioni risulta essere uguale a zero, come mostrato nella (3.47). Nella (3.50) con  $\mathbf{v}$  è stata indicata la normale esterna al contorno  $\partial V$  dell'RVE, mentre con  $\dot{\mathbf{u}}$  si intende la derivata del campo di spostamento rispetto alla lunghezza del crack:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dl} \quad (3.51)$$

E' possibile, a questo punto applicare il classico teorema del trasporto, ottenendo la relazione seguente:

$$\frac{d}{dl} \int_{V_\delta} \phi dV = \int_{V_\delta} \dot{\phi} dV - \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} \phi \mathbf{n} ds \quad (3.52)$$

Sostituendo, quindi, la (3.52) all'interno della (3.50) si ottiene in definitiva l'equazione di bilancio energetico per il volume  $V_\delta$ :

$$\frac{d}{dl} \int_{V_\delta} \phi dV + \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} \phi \mathbf{n} ds = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds - \int_{\partial D_\delta} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} ds \quad (3.53)$$

Osservando poi come vale la seguente relazione al tendere a zero del raggio  $\delta$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{dl} \int_{V_\delta} \phi dV = \frac{d}{dl} \int_V \phi dV \quad (3.54)$$

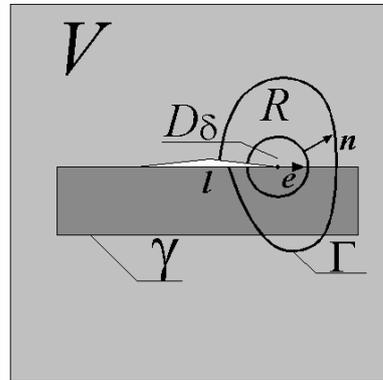
è possibile manipolare la (3.53), ottenendo:

$$G(\bar{\epsilon}, l) = -\frac{d}{dl} \int_V \phi dV + \int_{\partial V} \sigma v \cdot \dot{u} ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D_\delta} (\mathbf{e} \cdot \phi \mathbf{n} + \sigma \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) ds \quad (3.55)$$

Effettuando, a questo punto la seguente sostituzione:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial D_\delta} (\sigma \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}) ds = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} (\nabla \mathbf{u}^T \sigma \mathbf{n}) ds \quad (3.56)$$

si ottiene la relazione (3.48) per l'energia di rilascio totale in corrispondenza del tipo della frattura.



**Figura 3.2.** Rappresentazione dei contorni considerati per provare l'indipendenza dal percorso dell'integrale \$J\$.

E' necessario osservare come l'indipendenza dal percorso per l'integrale \$J\$ può essere garantita per un arbitrario percorso \$\Gamma\$, costruito attorno al tipo della frattura e con inizio e fine sul crack stesso, nel momento in cui le due superfici danneggiate e il contorno \$\partial D\_\delta\$ del percorso racchiudono una regione contenente solo interfacce materiali allineate con la direzione di propagazione della frattura \$\mathbf{e}\$:

$$G(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) = J(\Gamma, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, l) = \boldsymbol{e} \cdot \int_{\Gamma} (\phi \boldsymbol{n} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}) dS \quad (3.57)$$

dove, in questo caso,  $\boldsymbol{n}$  rappresenta la normale esterna al percorso  $\Gamma$ . Infatti, tenendo in conto le interfacce tra i diversi microcostituenti nell'applicazione del teorema della divergenza all'integrale sulla regione  $R$ , individuata da  $\Gamma$ ,  $\partial D_{\delta}$  e dalle due superfici del crack  $\Gamma_c^+$  e  $\Gamma_c^-$ , del campo tensoriale  $\phi \boldsymbol{I} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma}$ , che risulta essere a divergenza nulla all'interno della regione occupata dai microcostituenti omogenei, si ottiene:

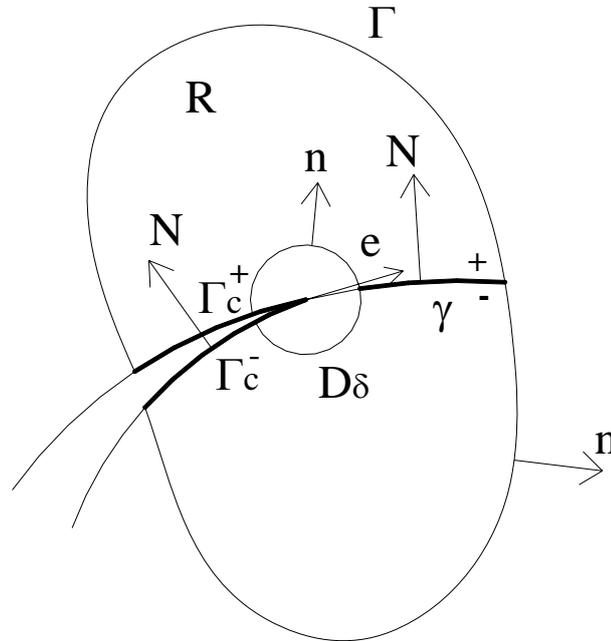
$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e} \cdot \int_{\Gamma} (\phi \boldsymbol{n} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}) dS - \boldsymbol{e} \cdot \int_{\partial D_{\delta}} (\phi \boldsymbol{n} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}) dS + \\ & + \boldsymbol{e} \cdot \int_{\gamma} \llbracket \phi \boldsymbol{I} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \boldsymbol{N} dS + \boldsymbol{e} \cdot \int_{\Gamma_c} \llbracket \phi \boldsymbol{I} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \rrbracket \boldsymbol{N} dS = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

dove  $\gamma$  rappresenta l'unione delle interfacce materiali,  $\boldsymbol{n}$  è la normale esterna al contorno  $\partial D_{\delta}$  ed al percorso generico  $\Gamma$ ,  $\boldsymbol{N}$  rappresenta la normale alle superfici di discontinuità, mentre la doppia parentesi quadra all'interno degli ultimi due integrali rappresenta la differenza relativa tra valori assunti dalla quantità  $\phi \boldsymbol{I} - \nabla \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma}$  nel passaggio dal lato negativo a quello positivo dell'interfaccia tra i microcostituenti:

$$\llbracket \boldsymbol{u} \rrbracket = \boldsymbol{u}^- - \boldsymbol{u}^+ \quad (3.59)$$

nella quale  $\boldsymbol{u}^+$  ( $\boldsymbol{u}^-$ ) rappresenta il valore assunto dalla variabile  $\boldsymbol{u}$  nei pressi dell'interfaccia tra i materiali dal lato di normale positiva (negativa). Nel caso in cui le superfici del crack risultino essere allineate con la direzione di propagazione del crack  $\boldsymbol{e}$ , l'integrale su  $\Gamma_c$  tende a zero, data l'ortogonalità dei vettori  $\boldsymbol{N}$  ed  $\boldsymbol{e}$  ed essendo le superfici del crack caratterizzate da valori nulli del vettore tensione. L'integrale su  $\gamma$  dell'equazione (3.58) assume invece, sviluppando i termini, il seguente aspetto:

$$\int_{\gamma} \{ [\phi \mathbf{I}] \mathbf{N} \cdot \mathbf{e} - [(\nabla \mathbf{u} \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N})] \} ds \quad (3.60)$$



**Figura 3.3.** Percorsi considerati per un crack di forma generica.

Osservando la (3.60), appare evidente come tale termine risulti essere nullo nel momento in cui  $\mathbf{N}$  ed  $\mathbf{e}$  rappresentano i versori di due direzioni ortogonali tra loro, nonché notando come la derivata direzionale di  $\mathbf{u}$  rispetto alla direzione di propagazione del crack  $\mathbf{e}$  è continua attraverso l'interfaccia tra i microcostituenti, data la condizione di compatibilità cinematica. Occorre osservare, infatti, come l'unica discontinuità per il campo di spostamenti a livello dell'interfaccia si verifica per la derivata rispetto alla normale  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{N}$ . Da tale risultato emerge chiaramente la seguente uguaglianza:

$$\mathbf{e} \cdot \int_{\Gamma} (\phi \mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS = \mathbf{e} \cdot \int_{\partial D_\delta} (\phi \mathbf{n} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) dS \quad (3.61)$$

dalla quale scaturisce direttamente la (3.57), che prova l'indipendenza dal percorso per l'integrale  $J$ . Occorre osservare, come le cose cambino nel momento in cui l'RVE sia

caratterizzato dalla presenza di un crack di forma curva come quello rappresentato nella precedente Fig. 3.3, per il quale non è possibile dimostrare l'indipendenza dell'integrale  $J$  dal percorso, visto che gli ultimi due integrali risultano non nulli, non essendo in questo caso ortogonali i due vettori  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{e}$ . Come vedremo nella sezione dedicata ai risultati numerici, tali condizioni sull'indipendenza dal percorso per la tecnica dell'integrale  $J$  sono state introdotte specie per il caso dei compositi fibrorinforzati. La valutazione dell'integrale  $J$  è stata effettuata mediante la relazione (3.57), effettuando un'integrazione di tipo globale delle variabili in gioco nella fase di post-processing delle analisi agli elementi finiti, attraverso il generico percorso  $\Gamma$ .