
Introduzione

I.1 Sommario

Oggetto del presente lavoro di tesi è lo studio dei materiali compositi caratterizzati da una microstruttura eterogenea. La tesi è composta da 4 capitoli fondamentali.

Nel capitolo 1, vengono presentate le diverse tecniche di omogeneizzazione, che hanno lo scopo di ricavare le proprietà macroscopiche di un materiale eterogeneo, tenendo in conto le varie componenti presenti a livello microstrutturale. Vengono presentate, in particolare, le due principali metodologie utilizzate in micromeccanica, e cioè *la teoria dei campi medi* e *la teoria dell'omogeneizzazione*. Si osserva come il primo approccio, di tipo fisico, valuti i campi macroscopici di tensione e deformazione, partendo dai valori medi, calcolati su un elemento rappresentativo di volume, dei corrispondenti microcampi. A tal riguardo viene illustrato il concetto di RVE, che rappresenta l'elemento di volume in grado di rappresentare le proprietà della microstruttura del materiale analizzato, e sul quale vengono valutati i campi medi di tensione e deformazione, necessari per realizzare il passaggio dalla micro alla macroscale. Il secondo approccio, di tipo matematico, realizza tale transizione mediante l'utilizzo delle tecniche di perturbazione multi-scala, utilizzando una microstruttura di tipo periodico. I due approcci risultano, quindi, sostanzialmente differenti, in virtù anche delle diverse ipotesi sulla configurazione della microstruttura rappresentativa. In particolare, la teoria dei Campi Medi utilizza una tipologia di microstruttura abbastanza semplice, mentre la teoria dell'Omogeneizzazione richiede una microstruttura di tipo periodico, risultando quindi applicabile a compositi con un arrangiamento microscopico sufficientemente regolare.

Nel capitolo 2 è posta l'attenzione sui compositi con microstruttura caratterizzata dalla presenza di inclusioni e micro-cracks, che influenzano fortemente il comportamento macroscopico del materiale. In particolare vengono presentate le diverse metodologie utilizzate, in ambito micromeccanico, per la valutazione delle proprietà macroscopiche dei materiali eterogenei soggetti ad una continua evoluzione della loro microstruttura. A tal riguardo vengono presentate le variazioni subite dai campi medi di tensione e deformazione, legate alla presenza di discontinuità come vuoti, inclusioni o micro-cracks all'interno della microstruttura, che rendono, quindi, il problema della valutazione delle proprietà globali fortemente non-lineare. Basandosi, poi, su un approccio di tipo energetico, viene mostrato come sia possibile ottenere dei valori limite per i moduli del materiale eterogeneo, al variare delle possibili condizioni applicabili sul contorno dell'RVE durante la procedura di omogeneizzazione.

Nel successivo capitolo 3 viene, quindi, presentato il modello micromeccanico utilizzato nelle applicazioni numeriche per la determinazione dei macrolegami costitutivi di materiali caratterizzati dalla presenza di micro-cracks in continua evoluzione all'interno della loro microstruttura. In particolare, è stato analizzato il comportamento di due differenti materiali: un composito con matrice porosa ed un composito rinforzato mediante fibre corte immerse all'interno della matrice. Nel primo caso è stato analizzato un RVE, contenente un vuoto circolare da cui si dipartono due micro-cracks disposti simmetricamente rispetto al centro dello stesso. Il secondo RVE analizzato, invece, contiene una fibra corta disposta in posizione centrale, caratterizzata da due difetti all'interfaccia con la matrice, che evolvono simmetricamente dal centro della stessa. Nella modellazione, al fine di simulare la crescita del micro-crack, è stata utilizzata una legge costitutiva d'interfaccia, in grado di imporre la continuità degli spostamenti nella zona non danneggiata, e il contatto tra le superfici del crack nella zona interessata dalla frattura stessa. Al fine di determinare i macrolegami costitutivi in funzione dell'evoluzione del danno, è stata accoppiata la Meccanica della Frattura alle tecniche di Omogeneizzazione, legando le macrotensioni e le macrodeformazioni all'energia di rilascio valutata per ciascuna configurazione danneggiata. A tal riguardo l'energia di rilascio totale è stata valutata mediante la tecnica dell'integrale J.

Nel capitolo 4, in conclusione, vengono presentati i risultati delle simulazioni numeriche condotte sui due tipi di materiale composito considerati. Per entrambi sono stati determinati i macrolegami costitutivi, in funzione della crescita dei micro-cracks, nel primo caso, e dei difetti interfacciali, nel secondo. Le applicazioni hanno mostrato il comportamento fortemente non-lineare a livello macroscopico dei due materiali, legato alla continua evoluzione della microstruttura durante il processo deformativo. Nella modellazione sono state considerate tre possibili condizioni al contorno per l'RVE, tutte comunque guidate mediante l'imposizione di una macrodeformazione. In particolare, la prima condizione considerata assume che il campo di spostamento sia di tipo lineare sul contorno, la seconda che il campo di fluttuazione sia di tipo periodico e la terza che le trazioni siano uniformi. L'imposizione di tre diversi tipi di condizione al contorno ha permesso di verificare come i macrolegami costitutivi siano fortemente influenzati dal percorso di macrodeformazione imposta, specie per il caso del composito a matrice porosa. Inoltre, emerge chiaramente come i moduli omogeneizzati associati alle condizioni periodiche siano limitati superiormente da quelli relativi alla condizione di spostamenti lineari ed inferiormente da quelli legati alla condizione di trazioni uniformi. Al fine di validare la procedura di omogeneizzazione proposta, in conclusione, i macrolegami costitutivi ottenuti sono stati impiegati nello studio di un macroelemento, soggetto ad uno spostamento assegnato. In particolare, dal confronto tra i valori dell'energia di rilascio ottenuti mediante l'analisi diretta di una lastra piana, costituita da una sequenza regolare di 5x5 microcelle, e quelli calcolati mediante l'analisi microscopica di un singolo RVE, al quale sono state applicate le condizioni al contorno controllate da una macrodeformazione ottenuta tramite l'analisi omogeneizzata del macroelemento, si evince come per il materiale a matrice porosa sia la condizione di fluttuazioni periodiche che garantisce la più accurata transizione dalla micro alla macro-scala. Al contrario, per quanto riguarda il composito rinforzato mediante l'inserimento di fibre corte, è stato possibile verificare come la transizione dalla micro alla macro-scala non dipenda sensibilmente dal tipo di condizione al contorno utilizzato.

Abstract

The object of this thesis is the study of composite materials characterized by heterogeneous microstructure. The thesis is composed by four fundamental chapters.

In chapter 1, the different techniques of homogenization are introduced, which allow to compute the macroscopic properties of heterogeneous material taking into account for individual components of the microstructure. Particularly, the two principal methodologies used in micromechanics are introduced, the *average-field theory* and the *homogenization theory*. The former physical approach computes the macroscopic stress and strain fields, starting from the average values of the corresponding micro-fields, calculated on a representative volume element (RVE). Therefore, the concept of RVE is illustrated, which represents the element of volume able to represent the properties of the microstructure of the analyzed material, and on which the average fields of stress and strain are computed, in order to realize the micro-to-macro transition. The latter mathematical approach gives this transition through the use of the multi-scale perturbation technique, using a periodic model for the microstructure. The two approaches turn out to be, therefore, substantially different, due to the different hypotheses on the microstructure configuration. Particularly, the average-field theory usually adopt a very simple kind of microstructure, while the homogenization theory uses a periodic microstructure, being mainly applied to composite materials with more or less regularly arranged microstructure.

Chapter 2 deals with composite materials with microstructure characterized by the presence of inclusions and micro-cracks, that strongly influence the macroscopic behavior of the material. Various methodologies are introduced, in the context of micromechanics, for the evaluation of the macroscopic constitutive properties of the heterogeneous materials subjected to a continuous evolution of their microstructure. Therefore changes on average fields of stress and strain are analyzed, due to the presence of discontinuity as voids, inclusions or micro-cracks inside the microstructure. As a consequence the problem of the evaluation of the overall properties becomes strongly non-linear. Then, by using an energetic approach, it is shown how it is possible to obtain bounds for the overall moduli of heterogeneous

material, associated with different boundary conditions on the RVE used in the homogenization procedure.

Therefore, in the subsequent chapter 3 the micromechanical model, used in the numerical simulations for the determination of the macroscopic constitutive law for materials affected by evolving of micro-cracks embedded in the microstructure, are presented. Particularly, the behavior of two different composite materials has been investigated: a porous matrix composite and a short fiber reinforced composite. In the first case an RVE, containing a circular void with two micro-cracks spreading symmetrically from the cavity walls, has been analyzed. Instead, the second investigated RVE contains a short fiber in the middle, affected by a defect at the interface with the matrix, spreading symmetrically from the fiber-matrix interface middle point. In order to simulate micro-crack growth, an interface constitutive law has been used, able to impose displacement continuity in the uncracked region and to impose unilateral frictionless contact in the cracked one. In order to determine the macroscopic constitutive law as function of damage evolution, Fracture Mechanics has been coupled to the Homogenization techniques, computing macro-stress and macro-strain as function of the energy release rate, evaluated for each damaged configuration. Therefore, the energy release rate has been computed by means of the J-integral technique.

In chapter 4 results of numerical simulations, for the two types of investigated composite material, are presented. Macroscopic constitutive laws has been determined as function of micro-cracks growth, in the first case, and as function of interface debonding, in the second one. Numerical simulations have shown the strongly non-linear macroscopic behavior for the two materials, due to the continuous evolution of their microstructure. In the analysis three types of boundary conditions for the RVE have been considered, in the context of deformation controlled micro-structures. Particularly, the first condition considered assumes that the displacement field is linear on boundary, the second one assumes periodic fluctuations and antiperiodic tractions on boundary and the third one assumes that the tractions are uniform on boundary. By means of the three different types of boundary condition is possible to verify as the macroscopic constitutive laws are strongly affected by the prescribed macro-strain paths, especially for the case of the porous matrix composite. Moreover it is verified

as the macroscopic constitutive properties associated with periodic conditions are bounded from above by those corresponding to linear deformations and from below from those associated to uniform tractions. Finally, in order to validate the proposed homogenization procedure, the obtained macroscopic constitutive laws have been used in the study of a macroscopic element, subjected to an imposed displacement. Particularly, comparison between energy release rate values obtained by means of direct analysis of a 2D macro-element, constituted by a regular arrangement of 5x5 unit cells, and those computed by means of a microscopic analysis of a single RVE, driven by an imposed macro-strain obtained by a macroscopic analysis of the homogenized macro-element, shows as the most accurate micro-to-macro transition for porous matrix material is obtained when periodic boundary conditions are applied to the RVE. On the contrary, for the short fiber reinforced composite it has been verified how an efficient micro-to-macro transition can be obtained for all the analyzed boundary conditions imposed on the RVE.

I.2 Scopi del lavoro e collocazione bibliografica

In ragione del sempre più crescente utilizzo dei materiali compositi nei diversi ambiti dell'ingegneria, acquista un ruolo sempre più importante la previsione delle proprietà macroscopiche di tali materiali nonché il loro comportamento meccanico microscopico [Wang W.X. et al., 2006].

La meccanica del continuo assume che i materiali idealizzati siano costituiti da punti materiali e dal loro intorno infinitesimo, all'interno del quale la distribuzione del materiale, le tensioni e le deformazioni possano essere assunte sostanzialmente uniformi. A livello della microscala, tuttavia, l'intorno infinitesimo di un punto materiale risulta, in generale, non uniforme, annoverando vari costituenti con proprietà e forme differenti, che rendono la microstruttura complessa ed in continua evoluzione [Nemat-Nasser S., Hori M., 1993]. D'altro canto, tenere conto nelle applicazioni progettuali delle complesse eterogeneità di un composito, a livello microscopico, comporterebbe praticamente l'intrattabilità del problema. A tal fine l'attenzione dei ricercatori del settore è stata indirizzata, negli ultimi anni, all'individuazione di metodi di analisi semplificati, tali da consentire un'efficace valutazione delle proprietà

effettive dei materiali eterogenei. Principale obiettivo della Micromeccanica è quello di rappresentare in maniera rigorosa e sistematica le proprietà del continuo in funzione dei parametri che caratterizzano la microstruttura e le proprietà dei microcostituenti dell'intorno del punto materiale. A tal fine viene introdotto il concetto di RVE (*Representative Volume Element*) dovuto ad Hill (1963), che per un punto materiale consiste in un volume infinitesimo il quale risulta essere statisticamente rappresentativo delle proprietà dell'intorno del punto stesso. In Micromeccanica si definisce, quindi, *macro-elemento* il punto materiale all'interno del continuo, *micro-elementi*, invece, i corrispondenti microcostituenti dell'RVE. Al fine di risultare statisticamente rappresentativo delle proprietà locali del continuo, un RVE deve, quindi, contenere un ampio numero di micro-elementi.

In molti casi possono verificarsi a livello microscopico problemi di danneggiamento, come, ad esempio, la crescita di un vuoto, la creazione e l'evoluzione di microcracks, il distacco all'interfaccia tra le differenti fasi, che influenzano in maniera notevole il comportamento macroscopico del materiale eterogeneo. Ciò comporta che, anche nel caso in cui ciascuna fase presenti un comportamento di tipo elastico lineare, l'evoluzione subita dalla microstruttura, associata a tali fenomeni di danneggiamento, dia origine a delle relazioni costitutive macroscopiche fortemente non-lineari. Tali non-linearità nella risposta macroscopica si manifestano mediante una progressiva perdita di rigidità del materiale, che può condurre al collasso per macrodeformazioni omogenee, associate ad una crescita di tipo instabile dei cracks presenti. In ragione di ciò, appare evidente come un modello micromeccanico realistico ed efficace debba essere in grado di prevedere un legame costitutivo a livello della macro-scala, che tenga conto, con la dovuta accuratezza, dei meccanismi di danno che si instaurano all'interno del materiale.

Oltre alle notevoli soluzioni analitiche disponibili in letteratura [Halpin JC, Kardos JL, 1976; Mori T., Tanaka K., 1973], valide sotto ipotesi semplificative, quali bassi valori delle frazioni di volume delle inclusioni, è possibile individuare due metodologie di base per la valutazione della risposta macroscopica di compositi multi-fase: la *Teoria dei Campi Medi* e la *Teoria dell'Omogeneizzazione* [Hori M., Nemat-Nasser S., 1999]. In particolare, il primo approccio, di tipo fisico, si basa sull'evidenza che le proprietà meccaniche effettive valutate nelle sperimentazioni risultano essere delle

relazioni tra i campi medi di deformazione e tensione, valutati su volumi microscopici eterogenei. I macrocampi sono definiti, quindi, attraverso i valori medi sul volume dei microcampi. Il secondo approccio, invece, di tipo matematico, stabilisce un legame tra micro e macrocampi mediante l'utilizzo delle tecniche di perturbazione multi-scala, utilizzando una microstruttura di tipo periodico. I due metodi possono produrre le stesse proprietà effettive quando la teoria dell'Omogeneizzazione viene formulata sotto particolari condizioni, ed entrambi vengono utilizzate spesso con l'ausilio del metodo FE.

L'interesse di molti ricercatori è stato rivolto alla valutazione delle proprietà costitutive di compositi eterogenei interessati da difetti microscopici, con particolare attenzione a due casi fondamentali, come il caso dei compositi fibro-rinforzati caratterizzati dal problema del *debonding* fibra-matrice [Yuan F.G. et al., 1997]-[Caporale A. et al., 2006], e il caso di materiali porosi contenenti microvuoti e microcracks [Li S. et al., 2004]-[Jensen H.M., 1999]. A tal riguardo sono presenti in letteratura numerosi lavori atti a valutare le proprietà meccaniche complessive dei materiali compositi fibro-rinforzati, tenendo conto della loro microstruttura ed assumendo, ad esempio, un comportamento elastico lineare per le fibre, e di tipo non-lineare per quanto concerne la matrice. In molti di essi, poi, viene assunto un comportamento *ideale* per il composito, all'interno del quale si ipotizza la perfetta adesione tra le fibre e la matrice, garantita mediante la continuità degli spostamenti a livello delle interfacce tra i materiali. Tuttavia, un tale comportamento è poco veritiero per un composito fibro-rinforzato, specie sotto forti carichi o carichi ciclici. E' utile osservare come in molti casi, infatti, specie per quanto riguarda i compositi con matrice fragile, i fenomeni di danneggiamento possono verificarsi non solo all'interno della matrice e delle fibre, ma anche e soprattutto a livello delle loro interfacce. Le proprietà meccaniche di tali compositi fibro-rinforzati risultano, al riguardo, notevolmente influenzate dall'adesione tra le fibre e la matrice. All'evoluzione di tali difetti interfacciali, che possono verificarsi sia per il caso di fibre lunghe unidirezionali sia per il caso di fibre corte disposte in maniera random, risulta associata, in generale, una progressiva perdita di rigidità del materiale, la quale influenza notevolmente i legami costitutivi macroscopici. Occorre osservare come un'interfaccia danneggiata non sia in grado di trasferire sforzi tangenziali, a causa

della separazione tra fibra e matrice, garantendo, tuttavia, il trasferimento di tensioni di compressione, nel caso in cui venga tenuto in conto il contatto tra le due superfici del crack. Da tale aspetto emerge chiaramente il comportamento bi-modulare, dal punto di vista delle proprietà di rigidità, di un materiale composito interessato dal debonding fibra-matrice.

Al fine di garantire una valutazione accurata dei legami costitutivi macroscopici, occorre costruire dei modelli microscopici che tengano in conto i possibili fenomeni di danneggiamento o debonding a livello delle interfacce tra i vari microcostituenti. Appare evidente come sia sufficientemente semplice effettuare analisi all'interno delle quali, ad esempio, le fibre siano completamente separate dalla matrice, e distribuite mediante un arrangiamento regolare e di tipo periodico. In tale situazione, infatti, diventa possibile valutare la risposta meccanica macroscopica del composito, analizzando semplicemente il comportamento di una cella unitaria, contenente una singola fibra interamente separata dalla matrice circostante, sotto l'applicazione di condizioni periodiche sul contorno. In un materiale composito con microstruttura eterogenea, tuttavia, il danneggiamento interfacciale rappresenta un fenomeno in continua evoluzione, ed il caso in cui tutte le fibre siano contemporaneamente soggette al debonding all'interfaccia con la matrice, rappresenta solo lo stadio finale di tale fenomeno [Teng H., 2007]. Diventa, quindi, di fondamentale importanza determinare l'evoluzione delle proprietà costitutive globali durante la fase di crescita dei vari micro-cracks. Il problema del danneggiamento a livello microscopico riguarda un'altra categoria di materiali compositi ed in particolare i materiali caratterizzati da una matrice fragile di tipo poroso. Occorre osservare che quando tali materiali fragili, come ad esempio i materiali ceramici, sono soggetti a stati tensionali di compressione, all'interno della loro microstruttura si registra la nascita e l'evoluzione di tutta una serie di micro-cracks, che hanno origine, generalmente, da preesistenti vuoti, pori e altri tipi di microdiscontinuità [Wimmer S.A., Karr D.G., 1995]. La presenza di tali microdifetti all'interno della microstruttura influenza anche per i materiali porosi, così come accade nel caso dei materiali fibro-rinforzati a causa dei difetti d'interfaccia tra i costituenti, l'effettivo comportamento meccanico del materiale analizzato. In particolare la formazione e la crescita dei micro-cracks, a partire da pori o vuoti esistenti, conduce ad una progressiva perdita di rigidità a livello macroscopico,

come già osservato nel caso del debonding fibra-matrice, che conduce, quindi, ad un comportamento di tipo non-lineare anche per quei compositi i cui costituenti sono di tipo elastico lineare.

Come alternativa agli approcci disponibili in letteratura, in tale lavoro di tesi si vuole investigare l'influenza dell'evoluzione di fenomeni di micro-frattura sulle effettive proprietà meccaniche di un materiale composito con microstruttura fortemente eterogenea, utilizzando il metodo degli elementi finiti (FEM) accoppiato ai modelli di interfaccia. In particolare, l'obiettivo principale consiste nell'ottenere per i materiali eterogenei dei macrolegami costitutivi che tengano in conto la progressiva evoluzione della configurazione della microstruttura, associata alla crescita dei vari microdifetti. L'evoluzione del danno può essere simulata mediante l'utilizzo della Meccanica della Frattura, che viene ad essere affiancata ai classici approcci micromeccanici. Sono stati investigati proprio i casi del composito fibro-rinforzato interessato dal debonding tra fibra e matrice, e il caso del composito a matrice fragile porosa caratterizzato dalla presenza di micro-cracks a livello della microstruttura. La propagazione dei micro-cracks è stata modellata, in particolare, utilizzando la tecnica dell'integrale J , accoppiata ad un modello di interfaccia in grado di tenere in conto le forze di contatto tra le superfici danneggiate.

I.3 Schema di notazione

Simbolo	Descrizione
d	Dimensione caratteristica della miroskala
D	Dimensione caratteristica della macroskala
ε	Rapporto tra macro e miroskala
\mathbf{X}	Vettore posizione macroscopico
\mathbf{x}	Vettore posizione microscopico
B	Volume occupato dal corpo macroscopico
∂B	Superficie di contorno del corpo macroscopico
V	Volume occupato dall'RVE
∂V	Superficie di contorno dell'RVE
Ω	Unione delle eventuali cavità presenti
M	Volume occupato dalla matrice
\mathbf{n}	Normale esterna al contorno dell'RVE
\mathbf{N}	Normale esterna alle superfici di contorno delle eventuali cavità presenti
$Div(\circ)$	Divergenza del vettore/tensore \circ
$Sym\{\circ\}$	Parte simmetrica del tensore \circ
$\nabla(\circ)$	Gradiente del vettore/tensore \circ
\otimes_s	Parte simmetrica del prodotto tensoriale
∇_s	Parte simmetrica del gradiente
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Prodotto tensoriale tra i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b}
$\nabla_{\mathbf{x}}(\circ) = \frac{\partial \circ}{\partial \mathbf{X}}$	Gradiente di \circ rispetto alla variabile macroscopica \mathbf{X}
$\nabla_{\mathbf{x}}(\circ) = \frac{\partial \circ}{\partial \mathbf{x}}$	Gradiente di \circ rispetto alla variabile microscopica \mathbf{x}
\mathbf{C}	Tensore di elasticità variabile a livello della miroskala
ϕ_V	Funzione peso
\mathbf{u}	Microcampo di spostamento
ε	Microcampo di deformazione

Introduzione

σ	Microcampo di tensione
t	Vettore tensione sul contorno dell'RVE
U	Macrocampo di spostamento
E	Macrocampo di deformazione
Σ	Macrocampo di tensione
u^0	Spostamento assegnato sul contorno
t^0	Vettore tensione assegnato sul contorno dell'RVE
$\langle \varepsilon \rangle_V$	Deformazione media valutata sull'RVE
$\langle \sigma \rangle_V$	Tensione media valutata sull'RVE
\bar{C}	Tensore di elasticità effettivo
\bar{D}	Tensore di deformabilità effettivo
C^M	Tensore di elasticità relativo alla matrice
C^I	Tensore di elasticità relativo ad un'eventuale inclusione
f	Frazione di volume di un'eventuale inclusione
A	Tensore di concentrazione della deformazione per un'eventuale inclusione
$\langle \varepsilon \rangle_M$	Deformazione media all'interno della matrice
$\langle \varepsilon \rangle_I$	Deformazione media all'interno di un'eventuale inclusione
$\bar{\varepsilon}$	Macrodeformazione assegnata
$\bar{\sigma}$	Macrotensione assegnata
ε^Σ	Microcampo di deformazione per tensioni uniformi imposte
ε^G	Microcampo di deformazione per condzioni generali
ε^E	Microcampo di deformazione per spostamenti lineari imposti
$u^\varepsilon \approx \sum_{n=0} \varepsilon^n u^n(X, x)$	Espansione asintotica per il campo di spostamento
χ^I	Tensore del terzo ordine periodico
$\chi^I(x)(\nabla_x u^0(X))$	Campo di fluttuazione

Introduzione

$\mathbf{I}^{(2s)}$	Tensore d'identità simmetrico del secondo ordine
$\mathbf{I}^{(4s)}$	Tensore d'identità simmetrico del quarto ordine
$\dot{\sigma}$	Valore incrementale per il campo di tensione
$\dot{\varepsilon}$	Valore incrementale per il campo di deformazione
$\dot{\mathbf{u}}$	Valore incrementale per il campo di spostamento
δ_{ij}	Delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ per $i=j$, $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$)
ϕ	Micropotenziale elastico
ψ	Micropotenziale elastico complementare
Φ	Macropotenziale elastico
Ψ	Macropotenziale elastico complementare
$\bar{\varepsilon}^c$	Incremento di deformazione associato alla presenza delle cavità
$\bar{\sigma}^c$	Decremento di tensione associato alla presenza delle cavità
$w(\mathbf{x})$	Campo di fluttuazione
l	Lunghezza del crack
$\hat{\varepsilon}$	Direzione dell'assegnata macrodeformazione
G	Energia di rilascio totale
G_c	Energia di frattura critica
β	Fattore di carico critico
k	Parametro di rigidità dell'interfaccia
$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$	Discontinuità negli spostamenti tra le superfici positiva e negativa del crack

