

Università degli Studi della Calabria
Dottorato di Ricerca in
Ingegneria dei Materiali e delle Strutture
XIX ciclo
Settore disciplinare ICAR/08

**DEFORMABILITA' DEI PONTI DI GRANDE
LUCE SOGGETTI ALL'AZIONE DI CARICHI
VIAGGIANTI**

Tesi presentata per il conseguimento del titolo di
Dottore di Ricerca in Ingegneria dei Materiali e delle Strutture

da

Daniele V. Cavallaro

Coordinatore del Corso di Dottorato

Prof. Domenico Bruno

Tutor del Candidato

Prof. Domenico Bruno

Dipartimento di Strutture

Novembre 2006

A Nicoletta

Indice

Sommario	xv
1 Introduzione.....	1
1.1 Stato dell'arte.....	2
1.2 Stato attuale della ricerca.....	7
1.3 Obiettivi della tesi.....	11
2 Il carico mobile	13
2.1 Premessa	13
2.2 Sistema continuo	17
2.2.1 Trave percorsa da una forza concentrata	17
2.2.1.1.Massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave.....	17
2.2.1.2.Massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico.....	21
2.2.2 Trave percorsa da un carico uniforme	24
2.2.2.1.Lunghezza del carico pari a 1/4 della luce della trave ($L_p / L = 0.25$)	26
2.2.2.2.Lunghezza del carico pari a metà della luce della trave ($L_p / L = 0.5$)	29
2.2.2.3.Lunghezza del carico pari alla luce della trave ($L_p = L$)	32
3 I ponti strallati.....	37
3.1 Introduzione	37
3.2 Statica dello strallo	38
3.3 Formulazione del problema.....	43
3.3.1 Definizione del carico viaggiante	46
3.3.2 Equilibrio nel piano verticale della travata	47
3.3.3 Flessione delle torri.....	50
3.3.4 Torsione della travata.....	51

3.3.4.1. Pila ad "H"	51
3.3.4.2. Pila ad "A"	53
3.3.5 Torsione delle torri	55
3.3.6 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema	58
3.4 Formulazione adimensionale del problema	60
4 I ponti sospesi	69
4.1 Introduzione	69
4.2 Statica del cavo	69
4.3 Formulazione del problema	75
4.3.1 Interazione tra il cavo e la travata	77
4.3.2 Equilibrio della travata	79
4.3.3 Equilibrio del cavo	80
4.3.4 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema	82
4.4 Formulazione adimensionale del problema	83
5 I ponti misti	89
5.1 Introduzione	89
5.2 Formulazione del problema	90
5.2.1 Azioni sulla travata	94
5.2.2 Equilibrio della travata	96
5.2.3 Equilibrio del cavo	97
5.2.4 Flessioni delle torri	98
5.2.5 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema	99
5.3 Formulazione adimensionale del problema	101
6 Metodo di risoluzione	107
6.1 Introduzione	107
6.2 Il Metodo delle Differenze Finite	109
6.3 Schema di integrazione	111
6.3.1 Stabilità ed accuratezza dello schema	113
6.4 Implementazione della procedura di risoluzione	113
7 Risultati numerici	119
7.1 Introduzione	119

7.2 I ponti strallati.....	120
7.3 I ponti sospesi	128
7.4 I ponti misti	134
8 Conclusioni.....	143
8.1 Osservazioni sui risultati ottenuti.....	146
Bibliografia.....	149

Indice delle figure

Figura 2.1: Sistema ad un grado di libertà a massa variabile.....	14
Figura 2.2: Andamento della massa variabile al variare del tempo	16
Figura 2.3: Andamento della massa mobile al variare del tempo	16
Figura 2.4: Trave semplicemente appoggiata percorsa da una forza F viaggiante	17
Figura 2.5: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nell'ipotesi di massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave	20
Figura 2.6: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α per diversi valori di β nell'ipotesi di massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave.....	21
Figura 2.7: Trave semplicemente appoggiata percorsa da una massa m viaggiante	21
Figura 2.8: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nell'ipotesi di massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico	23
Figura 2.9: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e di $1/\alpha'$ per diversi valori di β nell'ipotesi di massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico	24
Figura 2.10 Trave appoggiata percorsa da un carico uniforme viaggiante.....	25
Figura 2.11: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 0.5$ e $L_p/L = 0.25$	27
Figura 2.12: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 1$ e $L_p/L = 0.25$	28

Figura 2.13: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p/L = 0.25$	29
Figura 2.14: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 0.5$ e $L_p/L = 0.5$	30
Figura 2.15: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 1$ e $L_p/L = 0.5$	31
Figura 2.16: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p/L = 0.5$	32
Figura 2.17: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 0.5$ e $L_p = L$	33
Figura 2.18: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α e β nel caso $p/g = 1$ e $L_p = L$	34
Figura 2.19: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_o al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p = L$	35
Figura 3.1: Uno strallo sotto l'azione del peso proprio per unità di lunghezza in pianta	38
Figura 3.2: Rappresentazione del modulo tangente e secante di Dischinger sulla curva tensione-deformazione fittizia	42
Figura 3.3: Rappresentazione bidimensionale del ponte strallato	44
Figura 3.4: Rappresentazione dei parametri cinematici del ponte strallato	44
Figura 3.5: I parametri che definiscono la deformazione del ponte strallato nel piano xz	47
Figura 3.6: Azioni agenti su un concio di travata del ponte strallato	49
Figura 3.7: Schematizzazione dell'interazione tra le cortine di stralli e la travata.....	50

Figura 3.8: Comportamento di uno strallo della torre di sinistra nel caso di torsione della travata con pila ad “H”	51
Figura 3.9: Forze agenti sulla sezione nel caso di torsione della travata	52
Figura 3.10: Comportamento di uno strallo della torre di sinistra nel caso di torsione della travata con pila ad “A”	53
Figura 3.11: Forze agenti sulla sezione nel caso di torsione della travata.....	54
Figura 3.12: Rappresentazione delle forze che provocano torsione in testa alle pile.....	56
Figura 3.13: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte strallato	61
Figura 4.1: Un cavo sotto l’azione del peso proprio per unità di lunghezza.....	70
Figura 4.2: Cavo sospeso tra due punti A e B	71
Figura 4.3: Un cavo sotto l’azione del proprio peso q e di un carico accidentale p	73
Figura 4.4: I parametri che definiscono la geometria del ponte sospeso	76
Figura 4.5: I parametri che definiscono la deformazione del ponte sospeso	77
Figura 4.6: Schematizzazione dell’interazione tra cavo e travata	78
Figura 4.7: Rappresentazione delle grandezze che intervengono nel calcolo di $q_s(x, t)$	78
Figura 4.8: Azioni agenti su un concio di travata del ponte sospeso	79
Figura 4.9: Risposta di un concio di cavo del ponte sospeso all’azione del carico mobile.....	81
Figura 4.10: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte sospeso	85
Figura 5.1: Definizione dei parametri geometrici del ponte misto	90
Figura 5.2: Ripartizione del peso proprio tra il cavo di sospensione e la strallatura	91
Figura 5.3: Le variabili cinematiche che definiscono la deformazione del ponte misto.....	93
Figura 5.4: Rappresentazione dell’azione sulla travata dovuta ai pendini e alla strallatura	95
Figura 5.5: Azioni agenti su un concio di travata del ponte misto.....	96
Figura 5.6: Azioni a cui è soggetto un concio di cavo del ponte misto	97

Figura 5.7: Forze agenti sulle torri nel caso di ponte misto	98
Figura 5.8: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte misto ..	102
Figura 6.1: Discretizzazione nel dominio del tempo	109
Figura 7.1: <i>FAD</i> dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria al variare del parametro di velocità	121
Figura 7.2: <i>FAD</i> della tensione nello strallo di ormeggio e nello strallo più lungo in campata al variare del parametro di velocità	122
Figura 7.3: <i>FAD</i> dello spostamento verticale nella sezione di mezzeria della travata al variare del parametro di rigidità flessionale e del parametro di efficienza della strallatura	122
Figura 7.4: Andamento dello spostamento verticale e del momento flettente in mezzeria adimensionalizzati al variare del parametro di velocità	123
Figura 7.5: <i>FAD</i> della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di efficienza della strallatura e del parametro di rigidità torsionale	124
Figura 7.6: <i>FAD</i> della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di velocità nel caso di pila ad “H”	125
Figura 7.7: <i>FAD</i> della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di velocità nel caso di pila ad “A”	126
Figura 7.8: Andamento della deformabilità torsionale al variare dei parametri a e ε_T	126
Figura 7.9: <i>FAD</i> dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad 1/4 della campata centrale al variare del parametro di velocità	128
Figura 7.10: <i>FAD</i> della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di velocità	129
Figura 7.11: <i>FAD</i> dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad 1/4 della campata centrale al variare del parametro di rigidità del cavo.....	130
Figura 7.12: <i>FAD</i> della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di rigidità del cavo stesso rispetto a quella dei pendini.....	131

Figura 7.13: <i>FAD</i> dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidezza tra travata e cavo K_F	132
Figura 7.14: <i>FAD</i> della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di rigidezza tra travata e cavo K_F ...	132
Figura 7.15: <i>FAD</i> dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $1/4$ della campata centrale al variare della lunghezza del carico	133
Figura 7.16: <i>FAD</i> della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare della lunghezza del carico.....	134
Figura 7.17: <i>FAD</i> dello spostamento verticale per la sezione di mezzeria e ad $1/4$ della campata centrale al variare del parametro di velocità	135
Figura 7.18: <i>FAD</i> dello spostamento verticale per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidezza tra travata e cavo K_F	136
Figura 7.19: <i>FAD</i> del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidezza tra travata e cavo K_F	136
Figura 7.20: Andamento dell'abbassamento verticale in mezzeria e a $L/4$ al variare del parametro r nel caso statico e per diversi valori di velocità di percorrenza del carico	137
Figura 7.21: Abbassamento verticale in mezzeria della travata durante il passaggio del carico ($\varepsilon_A = 94.12$, $\varepsilon_F = 0.2$, $\bar{p} = 0.001143$, $l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$, $L_p/L = 0.5$, $a = 0.0278$, $\bar{L} = L + 2l$)	138
Figura 7.22: Deformata della travata nell'istante in cui il carico si trova nella campata centrale in posizione simmetrica ($\varepsilon_A = 94.12$, $\varepsilon_F = 0.2$, $\bar{p} = 0.001143$, $l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$, $L_p/L = 0.5$, $a = 0.0278$)	139
Figura 7.23: Confronto tra l'abbassamento verticale in mezzeria della travata durante il passaggio del carico per i tre tipi di ponte analizzati ($\varepsilon_A = 94.12$, $\varepsilon_F = 0.2$, $\bar{p} = 0.001143$, $l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$, $L_p/L = 0.5$, $a = 0.0278$, $\bar{L} = L + 2l$)	140

Figura 7.24: Confronto tra la deformata della travata nell'istante in cui il carico si trova nella campata centrale in posizione simmetrica per i tre tipi di ponte analizzati ($\varepsilon_A = 94.12$, $\varepsilon_F = 0.2$, $\bar{p} = 0.001143$, $l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$, $L_p/L = 0.5$, $a = 0.0278$)	140
Figura 7.25: Quantità di acciaio necessaria al sistema di sospensione al variare del parametro r per diverse lunghezze della campata principale ($l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$)	141

Sommario

L'argomento della presente tesi è la deformabilità dei ponti di grande luce sotto l'azione di un carico viaggiante. Per ponti di grande luce si intendono strutture capaci di raggiungere i 1000 m di lunghezza nella campata centrale, quindi ponti con strallatura a ventaglio, ponti sospesi e ponti misti. Questi ultimi derivano dall'accoppiamento del sistema di sospensione del ponte strallato e di quello sospeso. Il ponte è definito attraverso una formulazione al continuo, usata particolarmente per grandi luci, in cui l'interasse tra gli elementi di sospensione è solitamente molto minore della lunghezza della campata principale. In questo modo si può assumere che l'azione dovuta ai cavi sulla travata sia schematizzabile mediante un carico distribuito. Per quanto riguarda il carico mobile l'analisi è stata condotta considerando casi in cui l'intensità è paragonabile al peso proprio della struttura e la sua distribuzione in lunghezza è confrontabile con la dimensione della campata principale del ponte. In particolare nello studio di tesi si è focalizzata l'attenzione sugli effetti inerziali del carico viaggiante sulla struttura. L'analisi propone un'indagine di natura parametrica in forma adimensionale mediante la quale è possibile valutare la risposta dinamica del ponte definita per tipiche variabili di progetto.

Indice dei simboli più comuni

L	Lunghezza della campata centrale del ponte
l	Lunghezza delle campate laterali del ponte
H	Altezza della torre misurata a partire dalla travata
d	Freccia del cavo di sospensione
A	Area della sezione trasversale della travata
A_s	Area della sezione trasversale degli stralli
A_o	Area della sezione trasversale degli stralli si ormeggio
A_c	Area della sezione trasversale del cavo di sospensione
A_h	Area della sezione trasversale dei pendini
b	Semilarghezza della travata
c	Velocità di transito del carico mobile
e	Eccentricità del carico rispetto all'asse di simmetria della sezione
g	Peso per unità di lunghezza della travata
g_c	Peso per unità di lunghezza del cavo di sospensione
p	Peso per unità di lunghezza del carico mobile
L_p	Lunghezza del carico mobile
μ	Massa per unità di lunghezza della travata
μ_o	Inerzia torsionale per unità di lunghezza della travata
λ	Massa per unità di lunghezza del carico mobile
λ_o	Inerzia torsionale per unità di lunghezza del carico mobile
E	Modulo di Young dell'acciaio
E^*	Modulo di elasticità tangente di Dischinger
E_s^*	Modulo di elasticità secante di Dischinger
H_{t0}	Componente orizzontale del tiro nel cavo dovuto ai carichi permanenti
I_y	Momento d'inerzia della sezione della travata attorno all'asse y
I_z	Momento d'inerzia della sezione della travata attorno all'asse z
C_t	Rigidezza torsionale della travata
K_p	Rigidezza flessionale della pila
M_p	Massa della pila
K_p^t	Rigidezza torsionale della pila

I_p	Inerzia torsionale della pila
$\delta(\bullet)$	Funzione di Dirac
$\bar{H}(\bullet)$	Funzione di Heaviside
$f(\bullet)$	Funzione carico mobile
$\rho(\bullet)$	Funzione massa del carico mobile
σ_g	Tensione corrispondente all'azione del peso proprio
σ_a	Tensione ammissibile del materiale
a	Parametro di efficienza della strallatura
ε_A	Parametro di rigidità assiale della travata
ε_F	Parametro di rigidità flessionale della travata
ε_T	Parametro di rigidità torsionale della travata
θ	Velocità del carico adimensionalizzata
τ	Tempo adimensionalizzato
\bar{p}	Peso per unità di lunghezza del carico mobile adimensionalizzato
ζ	Rapporto tra la massa del carico e quella della travata
ζ_c	Rapporto tra la massa del cavo di sospensione e quella della travata
Ψ_{c0}	Parametro di rigidità iniziale del cavo rispetto ai pendini
Ψ_{ct}	Parametro di rigidità attuale del cavo rispetto ai pendini
r	Parametro di ripartizione tra la strallatura e il cavo per il ponte misto

Capitolo 1

Introduzione

Negli ultimi decenni i ponti di grande luce sono stati oggetto di studio da parte di numerosi ricercatori, ciò in ragione sia delle importanti realizzazioni sviluppate che per le notevoli problematiche strutturali connesse.

Accanto ai classici problemi di deformabilità e resistenza in campo statico, il comportamento dinamico di tali tipologie strutturali è certamente uno degli aspetti più importanti, che necessita quindi di analisi e approfondimenti adeguati rispetto alle condizioni limite e di servizio della struttura. Ciò, con particolare riferimento ai fenomeni di instabilità aerodinamica e alla risposta sotto l'azione di carichi viaggianti.

Il disastro del ponte sospeso sul *Tacoma* del 1940 ha certamente rappresentato un punto chiave per l'approfondimento dei fenomeni di autoeccitazione aerodinamica che erano stati la causa del collasso di quel ponte. Inoltre, a causa della elevata snellezza che caratterizza i ponti di grande luce e della elevata velocità di transito che attualmente può essere raggiunta dai treni di carico, diventa necessario indagare sugli effetti di amplificazione dinamica dei carichi viaggianti.

1.1 Stato dell'arte

Nello stato dell'arte dei ponti di grande luce la maggior parte delle opere sono state realizzate con lo schema di ponte sospeso, come è possibile notare dalle tabelle di seguito riportate.

Nome	Luogo	Campata principale (m)	Anno di completamento
Akashi-Kaikyo Bridge	Kobe-Naruto Route, Japan	1991	1998
Great Belt Bridge	Halsskov-Sprogø, Denmark	1624	1998
Runyang Bridge	Yangtze River, China	1490	2005
Humber Bridge	Barton-upon-Humber, UK	1410	1981
Jiangyin Suspension Bridge	Yangtze River, China	1385	1999
Tsing Ma Bridge	Lantau Island, Hong Kong	1377	1997
Verrazano-Narrows Bridge	N.Y. (Brooklyn–Staten Isl.), USA	1298	1964
Golden Gate Bridge	San Francisco-Marin County, USA	1280	1937
Högakustenbron	Ångermanälven river , Sweden	1210	1997
Mackinac Bridge	Mackinaw City - St. Ignace, USA	1158	1957
Minami Bisan-Seto Bridge	Kojima-Sakaide Route, Japan	1118	1988
Fatih Sultan Mehmet (2 nd Bosphorus)	Istanbul, Turkey	1090	1988
Boğaziçi (1 st Bosphorus)	Istanbul, Turkey	1074	1973
George Washington Bridge	Fort Lee, NJ - New York, USA	1067	1931
Third Kurushima-Kaikyo Bridge	Onomichi-Imabari Route, Japan	1030	1999
Second Kurushima-Kaikyo Bridge	Onomichi-Imabari Route, Japan	1020	1999
Ponte 25 de Abril (Tagus Bridge)	Lisbon, Portugal	1013	1966
Forth Road Bridge	Firth of Forth, United Kingdom	1006	1964
Kita Bisan-Seto Bridge	Kojima-Sakaide Route, Japan	990	1988
Severn Bridge	Bristol Channel, United Kingdom	988	1966
Yichang Bridge	Yichang (Yangtze River), China	960	2001
Shimotsui-Seto Bridge	Kojima-Sakaide Route, Japan	940	1988
Xiling Bridge	Yichang (Yangtze River), China	900	1996
Humen Pearl River Bridge	Dongguan (Pearl River), China	888	1997

Ohnaruto Bridge	Kobe-Naruto Route, Japan	876	1985
Tacoma Narrows Bridge	Tacoma, USA	853	1950
Askøy Bridge	Bergen, Norway	850	1992
Innoshima Bridge	Onomichi-Imabari Route, Japan	770	1983
Akinada Bridge	Akinada Islands, Japan	750	2000
Semipalatinsk Bridge	Semipalatinsk, Kazakhstan	750	2000
Al Zampa Memorial Bridge	Carquinez Strait, USA	728	2003
Hakucho Bridge	Muroran (Hokkaido Pref.), Japan	720	1998
Angostura Bridge	Ciudad Bolivar, Venezuela	712	1967
Kanmonkyo Bridge	Honshu-Kyushu, Japan	712	1973
S. Francisco-Oakland Bay Bridge (Yerba Buena Island to anchorage)	San Francisco - Oakland, USA	704	1936
S. Francisco-Oakland Bay Bridge (San Francisco to anchorage)	San Francisco - Oakland, USA	704	1936
Bronx Whitestone Bridge	New York, USA	701	1939
Stord Bridge	Stord, Norway	677	2001
Pierre Laporte Bridge	Quebec City, Canada	668	1970
Delaware Memorial Bridge I	New Castle - Pennsville, USA	655	1951
Delaware Memorial Bridge II	New Castle - Pennsville, USA	655	1968
Haicang Bridge	Xiamen, Fujian Province, China	648	1999
Gjemnessund Bridge	Kristiansund, Norway	623	1992
Walt Whitman Bridge	Philadelphia, USA	610	1957
Tancarville Bridge	Le Havre, France	608	1959
New Little Belt Bridge	Little Belt, Denmark	600	1970
First Kurushima-Kaikyo Bridge	Onomichi-Imabari Route, Japan	600	1999
E'gongyan Bridge	Chongqing, China (Yangtze River)	600	2000
Bømla Bridge	Bømlo, Norway	577	2001
Rainbow Bridge	Tokyo, Japan	570	1993
Ambassador Bridge	Detroit, USA - Windsor, Canada	564	1929
Hakata-Ohshima Bridge	Onomichi-Imabari Route, Japan	560	1988
Throgs Neck Bridge	New York, NY, USA	549	1961
Benjamin Franklin Bridge	Philadelphia, PA, USA	533	1926
Skjomen Bridge	Narvik, Norway	525	1972
Kvalsund Bridge	Hammerfest, Norway	525	1977

Matadi Bridge	Matadi, Zaire	520	1983
Kleve-Emmerich Bridge	Emmerich, Germany	500	1965
Dazi Bridge	Dazi, Tibet	500	1984
Kwang Ahn Bridge	Pusan, South Korea	500	2002
Bear Mountain Bridge	Peekskill, USA	497	1924
Williamsburg Bridge	New York, USA	488	1903
W. Preston Lane Memorial Bridge I	Chesapeake Bay, USA	488	1952
Newport Bridge	Newport, Rhode Island, USA	488	1969
W. Preston Lane Memorial Bridge II	Chesapeake Bay, USA	488	1973
Brooklyn Bridge	New York, USA	486	1883
Lions' Gate Bridge	Vancouver, Canada	473	1938
Sotra Bridge	Bergen, Norway	468	1971
Hirado Bridge	Hirado Island, Japan	460	1977
Vincent Thomas Bridge	San Pedro, USA	457	1963
Mid-Hudson Bridge	Poughkeepsie, USA	456	1930
Shantou Bay Bridge	Guangdong province, China	452	1996
Fengdu Bridge	Sichuan (Yangtze River), China	450	1996
Manhattan Bridge	New York, USA	448	1909
Lysefjord Bridge	Rogaland, Norway	446	1997
Angus L. Macdonald Bridge	Halifax, Nova Scotia, Canada	441	1955
A. Murray MacKay Bridge	Halifax, Nova Scotia, Canada	427	1970
Triborough Bridge	New York, USA	421	1936
Älvsborg Bridge	Gothenburg, Sweden	417	1966
Thuan Phuoc Bridge	Da Nang, Vietnam (Han River)	405	2005
Hadong Namhae Bridge	Pusan, South Korea	404	1973
Aquitaine Bridge	Bordeaux, France	394	1967
Amu Daria River Bridge	Bukhara, Uzbekistan	390	1964
Cologne Rodenkirchen Bridge	Cologne, Germany	378	1954
St. Johns Bridge	Portland, USA	368	1931
Wakato Narrows Bridge	Kitakyushu, Japan	367	1962
Mount Hope Bridge	Mount Hope Bay, USA	366	1929
Ogdensburg Prescott Int. Bridge	Ogdensburg-Prescott, Canada	351	1960
Hercilio Luz Bridge	Florianopolis Island, Brazil	340	1926
Bidwell Bar Bridge	Oroville, USA	338	1965

Varodd Bridge	Kristiansand, Norway	337	1956
Tamar Bridge	Plymouth-Saltash, UK	335	1961
Deer Isle Bridge	Penobscot Bay, USA	329	1939
Otto Beit Bridge	Chirundu Zambia/Zimbabwe	328	1939
Rombak Bridge	Nordland, Norway	325	1964
Simon Kenton Bridge	Maysville, USA	323	1932
Île d'Orléans Bridge	Quebec City, Canada	323	1936
John A. Roebling Suspension Bridge	Cincinnati, USA	322	1867
Dent Bridge	Orofino, USA	320	1971
Cologne Mulheim Bridge	Cologne, Germany	315	1951
Wheeling Suspension Bridge	Wheeling, USA	308	1849
Konohana Bridge	Osaka, Japan	300	1987
Chavanon Viaduct	Merlines and Messeix, France	300	2000
Yeongjong Grand Bridge	Incheon, South Korea	300	2000
Elizabeth Bridge	Budapest, Hungary	290	1964
Tjeldsund Bridge	Bjerkvik, Norway	290	1967

Tabella 1.1: I maggiori ponti sospesi nel mondo

I ponti strallati hanno avuto un notevole impulso intorno alla metà del secolo scorso grazie agli studi di *Franz Dischinger*. Prima di lui *John Roebling* si era interessato ed aveva realizzato ponti sospesi irrigiditi da stralli; *Roebling* ottenne uno schema di sospensione misto il cui esempio più famoso è indubbiamente il ponte di *Brooklyn* a New York. *Dischinger*, che aveva trovato molto interessante l'idea della pre-tensione di *Eugene Freyssinet* e pensava di applicarla ai ponti stallati, nel suo articolo del 1949 reintroduce le strutture strallate per sostenere i carichi ferroviari. In particolare *Dischinger* sostiene che è possibile costruire ponti con campate molto più lunghe di quelle esistenti e capaci di sostenere gli elevati carichi ferroviari soltanto attraverso una combinazione di cavi e stralli.

Negli ultimi anni si assiste ad un interesse crescente per i ponti strallati nel superamento di grandi luci; ciò principalmente in ragione delle elevate

caratteristiche di rigidità e quindi di sicurezza per il transito di carichi ferroviari pesanti.

Nome	Luogo	Campata principale (m)	Anno di completamento
Tatara Bridge	Seto Inland Sea, Japan	890	1999
Pont de Normandie	Le Havre, France	856	1995
Second Nanjing Yangtze Bridge	Nanjing, Jiangsu, China	628	2001
Skybridge (Vancouver)	Vancouver, Canada	616	1990
Vansu Tilts	Riga, Latvia	595	
Rio-Antirio Bridge	Rio, Greece	560	2004
Skarnsund Bridge	Inderøy, Norway	530	1991
Köhlbrandbrücke	Hamburg, Germany	520	1974
Öresund Bridge	Denmark - Sweden	490	1999
Arthur Ravenel Bridge	Charleston, USA	471	2005
Ting Kau Bridge	Tsing Yi Island, Hong Kong	475	1998
Alex Fraser Bridge	Vancouver, Canada	465	1986
Yokohama Bay Bridge	Yokohama, Japan	460	1989
Vidyasagar Setu	Kolkata, India	457	1992
Second Severn Bridge	Wales-England	456	1996
Rama IX Bridge	Bangkok, Thailand	450	1987
Queen Elizabeth II Bridge	Thurrock, England	450	1991
Vasco da Gama Bridge	Lisbon, Portugal	450	1998
Ing. Carlos Fernández Casado	Barrios de Luna, Spain	440	1983
Kap Shui Mun Bridge	Kowloon - Lantau Isl., Hong Kong	430	1997
Uddevalla Bridge	Uddevalla, Sweden	414	2000
Surgut Bridge	Siberia, Russia	408	2000
Runyang Bridge	Jiangsu Province, China	406	2005
Rande Bridge	Pontevedra, Spain	401	1978
Dames Point Bridge	Jacksonville, Florida, USA	396	1989
Sidney Lanier Bridge	Brunswick, Georgia, USA	381	2003
Fred Hartman Bridge	Baytown, Texas, USA	381	1995
William H. Natcher Bridge	Owensboro, Kentucky, USA	366	2002

Bob Graham Sunshine Skyway	St. Petersburg - Palmetto, USA	366	1987
Freedom Bridge	Novi Sad, Serbia	351	2005
Anzac Bridge	Sydney, Australia	345	1995
Millau Viaduct	Millau, France	342	2004
West Gate Bridge	Melbourne, Australia	336	1978
Talmadge Memorial Bridge	Savannah, Georgia, USA	335	1991
Rosario-Victoria Bridge	Rosario - Victoria, Argentina	330	2002
Zárate-Brazo Largo Bridge	Zárate - Brazo Largo, Argentina	330	1978
Karnali River Bridge	Chisapani Camp, Nepal	325	1993
Willemsbrug	Rotterdam, The Netherlands	318	1981
Nový Most	Bratislava, Slovakia	303	1972
Rama VIII Bridge	Bangkok, Thailand	300	1992
Erasmus Bridge	Rotterdam, Netherlands	280	1996
Kessock Bridge	North Kessock - Inverness, UK	240	1982
General Rafael Urdaneta Bridge	Lake Maracaibo, Venezuela	235	1962
Ed Hendler Memorial Bridge	Kennewick - Pasco, USA	229	1978
Zakim Bunker Hill Bridge	Boston, Massachusetts, USA	227	2003
Penang Bridge	Penang, Malaysia	225	1985
César Gaviria Trujillo Viaduct	Pereira, Colombia	211	1997
Varina-Enon Bridge	Henrico County, Virginia, USA	192	1990
Marcelo Fernan Bridge	Metro Cebu, Cebu, Philippines	185	1999
Boyne River Bridge	County Meath, Ireland	170	2003

Tabella 1.2: I maggiori ponti strallati nel mondo

1.2 Stato attuale della ricerca

Negli ultimi decenni la quantità di ricerche, condotte sulle vibrazioni dei ponti sotto l'azione di carichi mobili, si è andata incrementando a causa dei progetti di treni ad alta velocità portati avanti in Giappone ed in alcuni paesi europei. Per quanto riguarda i periodi precedenti è molto difficile quantificare gli studi su tale argomento. Negli anni '40 del secolo scorso, l'analisi dinamica dei ponti riguardava prevalentemente lo sviluppo di soluzioni analitiche, o approssimate,

di alcuni semplici ma fondamentali schemi. Attualmente vengono impiegati metodi numerici molto efficaci nella risoluzione dei problemi dei ponti di grande luce percorsi da carichi viaggianti senza particolari limiti nella complessità dei modelli implementati.

Nella letteratura tecnica è possibile rintracciare studi che riguardano più o meno da vicino l'argomento della presente tesi.

Fryba (1972) [28] nel suo libro ha affrontato dettagliatamente il problema del carico mobile tanto da poter considerare questo testo come fondamentale nello studio delle strutture soggette all'azione di carichi viaggianti. In questo lavoro viene analizzata una vasta gamma di casi: è trattato il caso di carico mobile concentrato e distribuito, dotato o privo di massa, viene tenuta in considerazione l'interazione tra il carico e la superficie di contatto della struttura.

Bruno (1984) [14] ha studiato la risposta dinamica dei ponti strallati soggetti all'azione di un carico mobile. La struttura è stata modellata attraverso una discretizzazione agli elementi finiti e la non linearità geometrica del cavo è stata tenuta in conto attraverso l'introduzione di un modulo elastico equivalente; la soluzione è stata ottenuta attraverso l'implementazione di un algoritmo di integrazione diretta nel tempo di tipo esplicito. Il carico viaggiante è dotato di massa e la sua cinematica coincide con quella della travata del ponte.

Brancaleoni, Petrangeli e Villatico (1987) [10] hanno analizzato il caso di un ponte con strallatura a ventaglio soggetto al carico prodotto da una locomotiva. Il ponte è stato modellato agli elementi finiti tenendo in conto le non linearità dei cavi. La soluzione è stata ottenuta attraverso una procedura di integrazione diretta nel tempo di tipo esplicito. L'analisi ha focalizzato l'attenzione sull'interazione tra il veicolo e la superficie di contatto e gli effetti inerziali sono stati valutati sia sul ponte che sul veicolo. La struttura di riferimento è di medie dimensioni, campata principale lunga 150 m , e la velocità massima è di 200 km/h .

Wang e Huang (1992) [50] hanno studiato il caso del ponte strallato soggetto ad un carico viaggiante in cui è stata modellata anche la rugosità della

superficie di contatto tra il carico e l'impalcato. Anche in questo caso il ponte è di modeste dimensioni, 128 m di campata centrale. La struttura è stata modellata agli elementi finiti e sono state tenute in conto le non linearità geometriche degli stralli attraverso un modulo di elasticità equivalente. Le equazioni del moto del veicolo sono state risolte attraverso lo schema di integrazione del quarto ordine di *Runge-Kutta*, mentre la soluzione per il ponte è stata ottenuta attraverso la sovrapposizione modale basata sul metodo di iterazione del sottospazio.

Chatterjee, Datta e Surana (1994) [20] si sono occupati della risposta flessor-torsionale di un ponte sospeso soggetto ad un carico mobile mediante un'analisi al continuo. L'analisi tiene conto dell'interazione non lineare ponte-veicolo e della rugosità della superficie di contatto tra carico e struttura. La soluzione delle equazioni del moto è stata ottenuta mediante una procedura iterativa nel dominio del tempo.

Karoumi (1996) [35] ha analizzato la risposta di un ponte strallato soggetto all'azione di un veicolo considerando l'interazione tra il veicolo stesso e la struttura. Il ponte è stato modellato come una trave alla *Bernoulli-Eulero* sostenuta da supporti elastici la cui rigidità variabile simula l'azione degli stralli. L'analisi utilizza per la risoluzione delle equazioni del moto il metodo della sovrapposizione modale. Il veicolo è dotato di due gradi di libertà poiché si è nell'ipotesi di lunghezza del carico trascurabile rispetto alla lunghezza del ponte; vengono tenuti in conto gli effetti inerziali dovuti alla massa del veicolo. La struttura presa in esame ha una campata centrale di 300 m .

Yang e Fonder (1998) [56] hanno trattato il caso del ponte strallato soggetto all'azione di un TGV (treno ad alta velocità francese) con particolare attenzione alla modellazione degli stralli. Il cavo è stato modellato come una catenaria in modo da tener conto della non linearità geometrica dovuta ai grandi spostamenti. I risultati sono stati ottenuti per una struttura di medie dimensioni e il carico mobile è stato modellato con una serie di forze concentrate viaggianti trascurando così i suoi effetti inerziali sul ponte.

Bryja e Sniady (1998) [18] hanno esaminato il problema delle vibrazioni di un ponte sospeso ad una sola campata soggetto all'azione di una striscia di veicoli.

Gli effetti inerziali dei veicoli sono stati tenuti in conto poiché ogni veicolo è stato modellato come un oscillatore visco-elastico. Il modello fa riferimento ad uno schema bidimensionale del ponte e vengono considerate le non linearità geometriche strutturali. La soluzione del problema in termini di abbassamenti e momenti flettenti della travata e di tensioni nei cavi sono stati messi a confronti con il caso in cui ad agire sul ponte fosse stato un treno di carico costituito da sole forze concentrate.

Au, Wang e Cheung (2001) [1] hanno trattato il problema della progettazione dei ponti strallati tenendo conto degli effetti dinamici prodotti da carichi mobili attraverso un fattore di amplificazione che incrementa i carichi nel caso statico. Il loro caso di studio si riferisce ad un ponte con strallatura a ventaglio soggetto all'azione di un carico ferroviario. Il ponte è modellato come struttura piana e viene tenuta in conto la rugosità della superficie di contatto tra il carico e l'impalcato come anche le non linearità geometriche degli stralli. Il treno è costituito da una serie di vagoni ognuno dei quali è sostenuto da due carrelli ferroviari che si connettono con il vagone e con l'impalcato attraverso una molla e un dissipatore. Viene tenuta in conto non solo la massa dei vagoni ma anche quella dei carrelli ferroviari. Il ponte oggetto di studio ha una campata centrale di 430 m e il treno è composto dalla locomotiva e sette vagoni che si muovono ad una velocità di 200 km/h .

Yau e Yang (2004) [58] si sono occupati del problema della riduzione delle oscillazioni nei ponti strallati soggetti al passaggio di treni ad alta velocità. L'analisi si riferisce a strutture bidimensionali; il ponte è stato modellato con elementi trave per quanto riguarda l'impalcato e le torri, mentre gli stralli sono stati modellati con dei pendoli dotati di un modulo elastico equivalente che tiene conto della non linearità geometrica. Il treno è costituito da una serie di masse sostenute da celle visco-elastiche. È stata inoltre prevista l'interazione tra il carico mobile e la travata ed è considerata la rugosità della superficie di contatto tra il treno e l'impalcato. Il sistema di equazioni del moto è stato risolto attraverso il metodo di *Newmark* con l'accelerazione media costante. La struttura oggetto di analisi non è di grandi dimensioni trattandosi di un ponte con strallatura ad arpa con due sole campate simmetriche di 64 m . È stato

assunto un treno costituito da 14 vagoni, ognuno di lunghezza 25 m , con due locomotive agli estremi; la velocità massima di percorrenza è stata di 274 km/h .

1.3 Obiettivi della tesi

Il presente lavoro ha come argomento la deformabilità dei ponti di grande luce sotto l'azione di carichi viaggianti. Gli schemi strutturali studiati si riferiscono a tipologie di ponte strallato, sospeso e misto. L'obiettivo principale di questa tesi è svolgere un'indagine dettagliata del comportamento dinamico del ponte soggetto all'azione del carico mobile e in particolar modo porre l'attenzione sugli effetti inerziali prodotti dalla massa del carico sulla struttura. Per quantificare gli effetti di amplificazione prodotti dal carico mobile viene proposta un'analisi parametrica delle principali variabili di deformabilità e di sollecitazione. L'analisi mette in evidenza l'influenza dei parametri adimensionali tipici per questo tipo di strutture, che tengono conto dell'influenza della rigidità e della geometria del ponte, sulla soluzione dinamica. Il modello di ponte è basato su un metodo di risoluzione al continuo [15][17] che è stato ampiamente usato in letteratura, particolarmente per lunghe campate, in cui l'interasse tra gli elementi di sospensione della travata e la lunghezza della campata principale è molto piccolo (i.e. $\ll 1$). In tal modo si può assumere che l'interazione tra cavi e travata sia schematizzabile mediante una funzione continua. In tale contesto il presente lavoro si pone l'obiettivo di contribuire allo studio della risposta dinamica di questo tipo di struttura soggetta ad un carico mobile. La formulazione del sistema misto strallato-sospeso è facilmente derivabile tramite la combinazione dei problemi dinamici relativi sia al sistema strallato che a quello sospeso. Particolare attenzione è stata rivolta ai termini di accoppiamento tra le vibrazioni del ponte ed il carico mobile, derivanti da contributi di accelerazione non standard.

Capitolo 2

Il carico mobile

2.1 Premessa

La determinazione della risposta dinamica di una trave o di un impalcato da ponte soggetto all'azione di un carico viaggiante è un problema di notevole importanza sia nel campo della progettazione dei sistemi di trasporto che in quello della progettazione strutturale. L'azione del carico mobile infatti produce incrementi di deformazione e di tensione nella struttura, rispetto al caso in cui il carico agisce staticamente, che dipendono dalla velocità di percorrenza del carico. In genere, il problema viene affrontato considerando la massa del carico mobile trascurabile rispetto a quella della struttura, oppure al contrario trascurando quella della struttura rispetto a quella del carico. Le due ipotesi sono attendibili solo in casi particolari (grandi e piccole luci).

Nell'ipotesi di carichi viaggianti inerti, uno degli aspetti importanti che va esaminato riguarda la variabilità nel tempo della distribuzione di massa del sistema complessivo struttura-carico mobile.

Al fine di illustrare tale aspetto si consideri l'oscillatore elementare ad un grado di libertà a massa variabile rappresentato nella figura seguente.

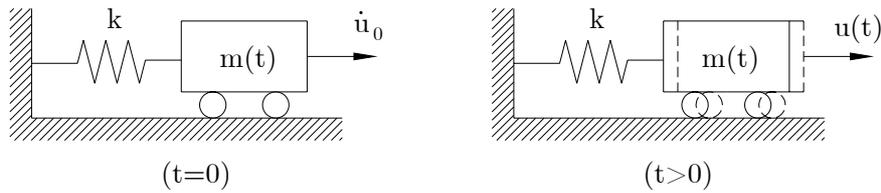


Figura 2.1: Sistema ad un grado di libertà a massa variabile

La massa è vincolata al suolo attraverso una molla di rigidezza k e la sua espressione è pari a:

$$m(t) = m_0 + m_p(t). \quad (2.1)$$

Come condizione iniziale si ha che la massa $m(t)$ ha spostamento nullo ed è dotata di una velocità \dot{u}_0 .

L'equazione del moto per il sistema a massa costante ($m(t) = m_0$) nel caso di oscillazioni libere sarà:

$$m_0 \ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.2)$$

con le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} u(t=0) &= u_0 = 0 \\ \dot{u}(t=0) &= \dot{u}_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'oscillazione libera è una funzione circolare di *periodo* T_0 che è legato alla massa e alla rigidezza dalla seguente relazione:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}}. \quad (2.4)$$

La condizione di equilibrio dinamico nel caso in cui il sistema è a massa variabile è la seguente:

$$\frac{d}{dt}[(m_0 + m_p(t))\dot{u}(t)] + ku(t) = 0 \quad (2.5)$$

ossia

$$(m_0 + m_p(t))\ddot{u}(t) + \dot{m}_p(t)\dot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (2.6)$$

L'equazione del moto (2.6) insieme alla condizione (2.3) sono sufficienti a risolvere il problema del sistema ad un solo grado di libertà.

La prima indagine che è stata condotta riguarda il caso in cui la massa variabile ha un andamento nel tempo di cui alla figura 2.2. Nel primo grafico della figura è illustrato il rapporto m_0/m_p al variare del tempo adimensionalizzato rispetto al periodo T_0 , mentre nel secondo diagramma è stato riportato l'andamento dello spostamento, adimensionalizzato rispetto a ρ_0 , al variare del tempo, anch'esso adimensionalizzato. Il termine ρ_0 rappresenta l'ampiezza massima dell'oscillazione armonica ed è pari a:

$$\rho_0 = \left[u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m_0}} \quad (2.7)$$

in cui ω_0 è la *pulsazione naturale*.

Per quanto riguarda la soluzione in termini di spostamento del sistema sono state diagrammate tre curve: la prima si riferisce al caso di massa costante ($m(t) = m_0$); le altre due si riferiscono al caso di massa variabile distinte a seconda della presenza o meno del termine dm_p/dt . Come è possibile notare dai risultati ottenuti la massa variabile produce una evidente variazione dello spostamento rispetto al caso di massa costante. Con riferimento alla curva in cui $dm_p/dt \neq 0$ inoltre è possibile osservare non solo la variazione di lunghezza d'onda rispetto al caso in cui $m_p = 0$, ma si può notare come l'ampiezza massima dello spostamento sia minore delle altre due curve.

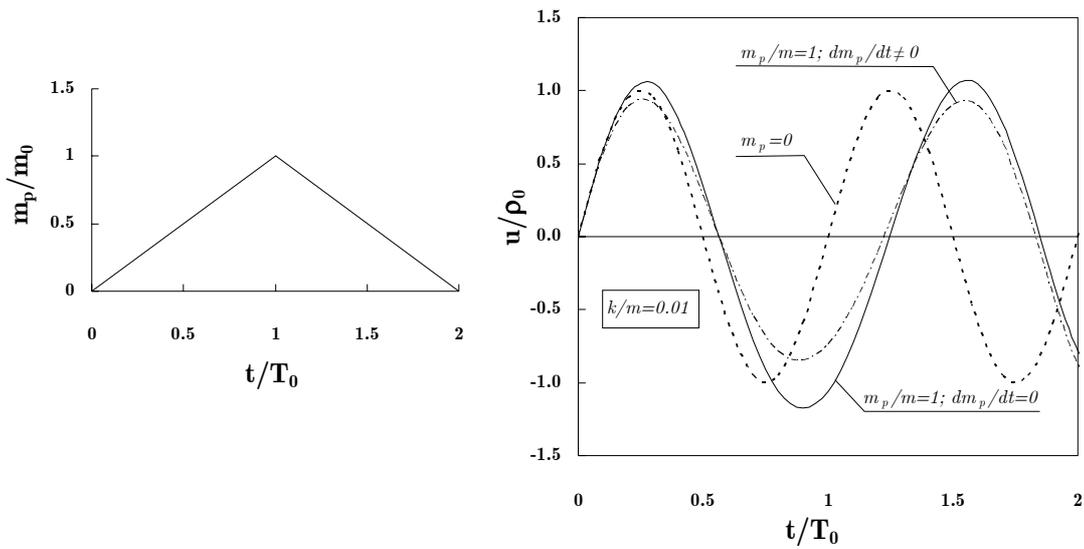


Figura 2.2: Andamento della massa variabile al variare del tempo

Il secondo caso oggetto di indagine si riferisce al caso di massa variabile di cui alla figura seguente. I risultati ottenuti in questo caso confermano quanto detto per il caso precedente riguardo l'amplificazione dinamica dello spostamento.

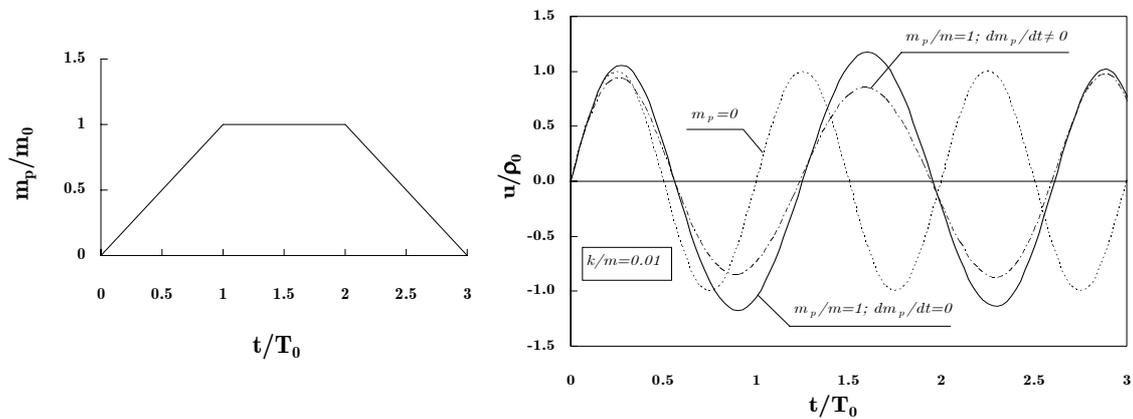


Figura 2.3: Andamento della massa mobile al variare del tempo

2.2 Sistema continuo

La determinazione della risposta dinamica di una trave o di un impalcato da ponte al passaggio di una forza concentrata o di un treno di carichi mobili è un problema di notevole interesse applicativo e, anche se sono note soluzioni analitiche di casi particolari, solo negli ultimi anni grazie alle moderne tecniche numeriche è possibile fare una indagine attendibile degli effetti dei carichi viaggianti.

Nella risoluzione del problema bisogna fare delle assunzioni di base:

- Il comportamento della trave viene descritto attraverso il modello di *Eulero-Bernoulli*. La sezione della trave è costante come lo è la sua massa per unità di lunghezza.
- Il carico si muove a velocità costante.

2.2.1 Trave percorsa da una forza concentrata

Nella grande varietà di problemi che interessano le vibrazioni delle strutture soggette a carichi mobili, la maniera più semplice per affrontare il problema è cominciare dallo studio di una trave semplicemente appoggiata sottoposta all'azione di una forza concentrata costante.

2.2.1.1. Massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave

Si consideri la trave in figura 2.4 soggetta ad una forza F che viaggia a velocità costante c .

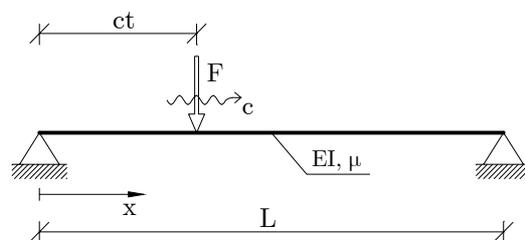


Figura 2.4: Trave semplicemente appoggiata percorsa da una forza F viaggiante

Secondo le ipotesi precedentemente fatte il problema viene descritto dalla seguente equazione:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \delta(x-ct)F \quad (2.8)$$

con le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{aligned} v(0,t) = 0; \quad v(L,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

e condizioni iniziali

$$v(x,0) = 0; \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.10)$$

in cui $v(x,t)$ rappresenta l'abbassamento della trave nel punto di ascissa x all'istante t a partire dalla posizione di equilibrio in cui la trave è soggetta al peso proprio; EI è la rigidezza flessionale della trave, μ è la massa per unità di lunghezza, ω_b è la frequenza circolare dello smorzamento della trave e $\delta(\bullet)$ è la funzione di *Dirac*.

Risolvendo la (2.8) con le condizioni (2.9) e (2.10) è possibile indagare il comportamento del sistema strutturale al variare di alcune grandezze significative.

In particolare, la prima grandezza presa in considerazione è pari al rapporto tra la pulsazione naturale ω della trave, e la pulsazione ω_1 relativa al primo modo di vibrare della trave ($\alpha = \omega/\omega_1$). Essendo ω e ω_1 espresse dalle relazioni seguenti

$$\omega = \frac{\pi \cdot c}{L} \quad (2.11)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (2.12)$$

il rapporto α può essere espresso come

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{c \cdot L}{\pi} \cdot \left(\frac{\mu}{EI}\right)^{1/2} = \frac{c}{c_{cr}}, \quad c_{cr} = \frac{\pi}{L} \cdot \left(\frac{EI}{\mu}\right)^{1/2} \quad (2.13)$$

dove c è la velocità della forza viaggiante e c_{cr} è definita *velocità critica* di percorrenza della trave. La velocità critica è la velocità alla quale la forza viaggiante produce il massimo spostamento nella mezzzeria della trave nell'istante in cui questa lascia la trave stessa, cioè quando F si trova a $x = L$. La seconda grandezza oggetto di indagine è data dal rapporto tra la frequenza circolare dello smorzamento della trave e la pulsazione naturale del primo modo di vibrare ($\beta = \omega_b / \omega_1$).

Il caso $\alpha = 0$ rappresenta la condizione in cui la forza agisce staticamente sulla trave, mentre $\beta = 0$ rappresenta la condizione in cui il sistema è privo di smorzamento. Quando $\alpha < 1$ il massimo spostamento in mezzzeria si ottiene durante il passaggio della forza sulla trave, mentre se $\alpha \geq 1$ l'abbassamento massimo si ha quando il carico ha lasciato la trave.

I risultati ottenuti sono stati diagrammati in termini di spostamento adimensionalizzato rispetto allo spostamento ottenuto nel caso in cui la forza agisce staticamente nella mezzzeria della trave (v_0).

Nell'ipotesi di *massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave*, come si può notare dai diagrammi ottenuti, all'aumentare del valore del parametro α , e quindi della velocità di percorrenza della forza, aumenta il valore del massimo spostamento nella mezzzeria della trave. Incrementando il valore di β , e quindi lo smorzamento delle oscillazioni della trave, si ha una diminuzione del massimo spostamento della struttura.

Il comportamento del sistema può essere osservato meglio diagrammando i risultati in funzione di α per diversi valori di β . Dall'andamento del massimo abbassamento nella mezzzeria della trave al variare di α si nota come,

all'aumentare della velocità di percorrenza, per i sistemi in cui $\beta \geq 1$ si ha un costante decremento del massimo spostamento a partire da v_0 . Le curve che si riferiscono ai sistemi in cui $\beta < 1$ subiscono un incremento anche fino al 75%, nel caso $\beta = 0$, rispetto al massimo spostamento statico quando la velocità c è circa il 60% di quella critica, per poi avvicinarsi alle curve con $\beta \geq 1$ per valori di $\alpha > 1$.

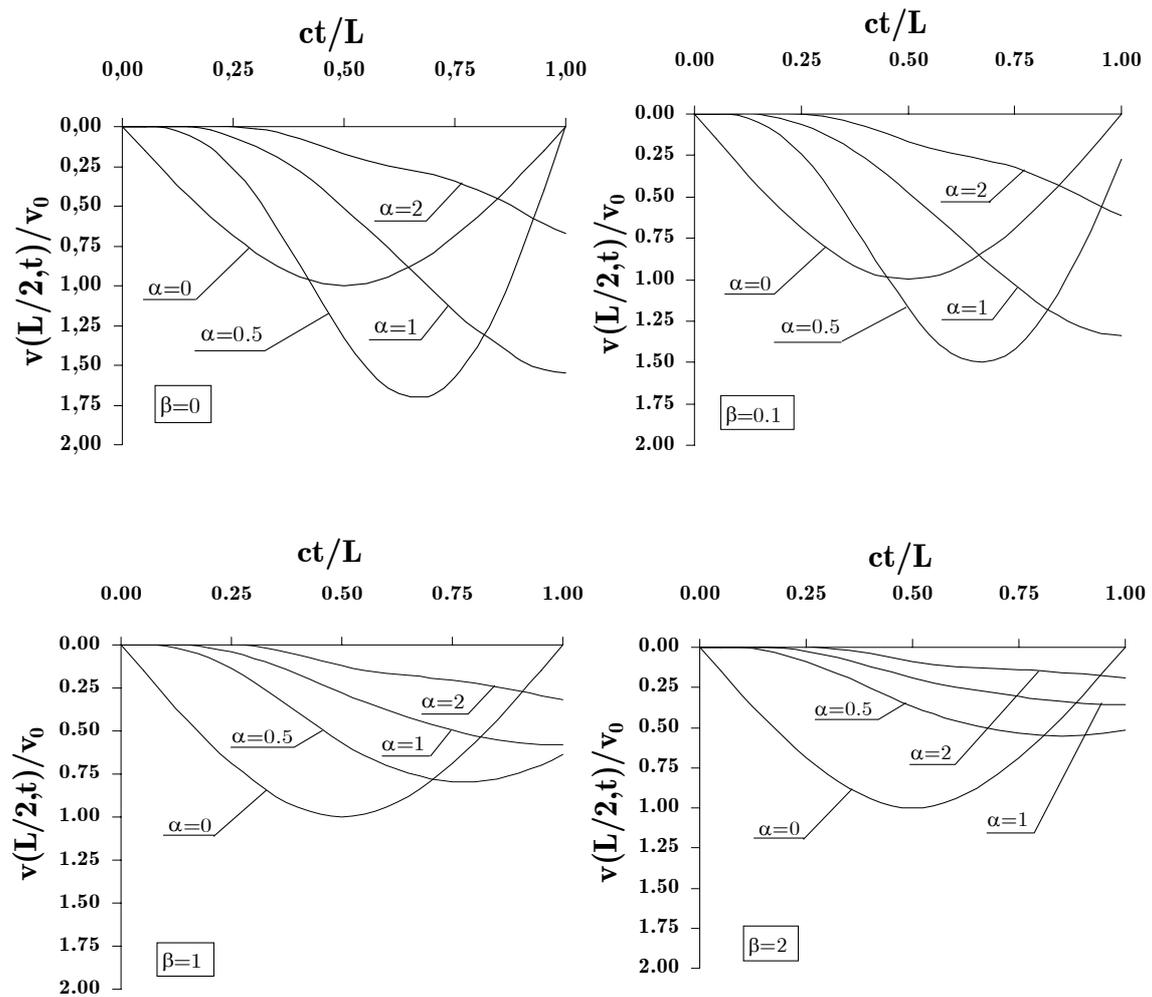


Figura 2.5: Abbassamento dinamico in mezzzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nell'ipotesi di massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave

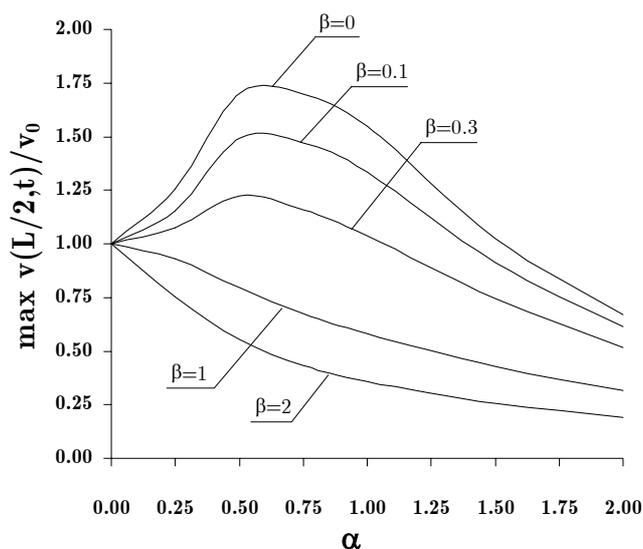


Figura 2.6: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α per diversi valori di β nell'ipotesi di massa del carico trascurabile rispetto a quella della trave

2.2.1.2. Massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico

Si consideri ora una trave di massa trascurabile soggetta ad un carico mobile F dotato di massa $m = F/a_g$, dove a_g è l'accelerazione di gravità.

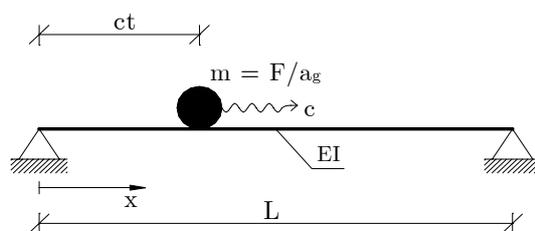


Figura 2.7: Trave semplicemente appoggiata percorsa da una massa m viaggiante

Secondo le ipotesi precedentemente fatte il problema viene descritto dalla seguente equazione:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - ct) \left[F - m \frac{d^2 v(x, t)}{dt^2} \right] \quad (2.14)$$

con le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{aligned} v(0, t) = 0; \quad v(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

e condizioni iniziali

$$v(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

Poiché tra la massa m e la trave c'è perfetta aderenza $v(x, t)$ rappresenta l'abbassamento della trave, uguale a quello della massa, nel punto di ascissa x all'istante t . È utile sottolineare, inoltre, che al secondo membro della (2.14) compare la derivata temporale seconda di una grandezza dipendente sia dallo spazio che dal tempo, pertanto volendo esplicitare tale termine si ottiene:

$$\frac{d^2 v(x, t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.17)$$

Quindi l'accelerazione totale nella direzione ortogonale all'asse della trave è composta da tre termini: il primo è dovuto all'effetto inerziale lungo l'abbassamento della trave, il secondo è dovuto all'accelerazione di *Coriolis* e il terzo è dovuto all'accelerazione centripeta a causa della curvatura della trave durante l'azione del carico.

L'analisi del sistema strutturale è stata condotta in funzione dei parametri α e β introdotti nel paragrafo precedente, ed inoltre è stata valutata l'influenza di un altro parametro, α' , che come α tiene conto della velocità di percorrenza del carico essendo definito come:

$$\alpha' = \frac{12EIg}{FLc^2}. \quad (2.18)$$

Quando la velocità c tende a zero si ottiene che $\alpha' \rightarrow \infty$ mentre se $c \rightarrow \infty$ si ha che $\alpha' \rightarrow 0$.

Come si può notare dai grafici di seguito riportati, nell'ipotesi di *massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico*, incrementando la velocità c lo spostamento della mezzeria della trave non è molto diverso da quello statico nel caso di smorzamento nullo o molto basso.

Nel caso di $\beta \geq 1$ è possibile invece apprezzare un diverso comportamento delle curve al variare di α .

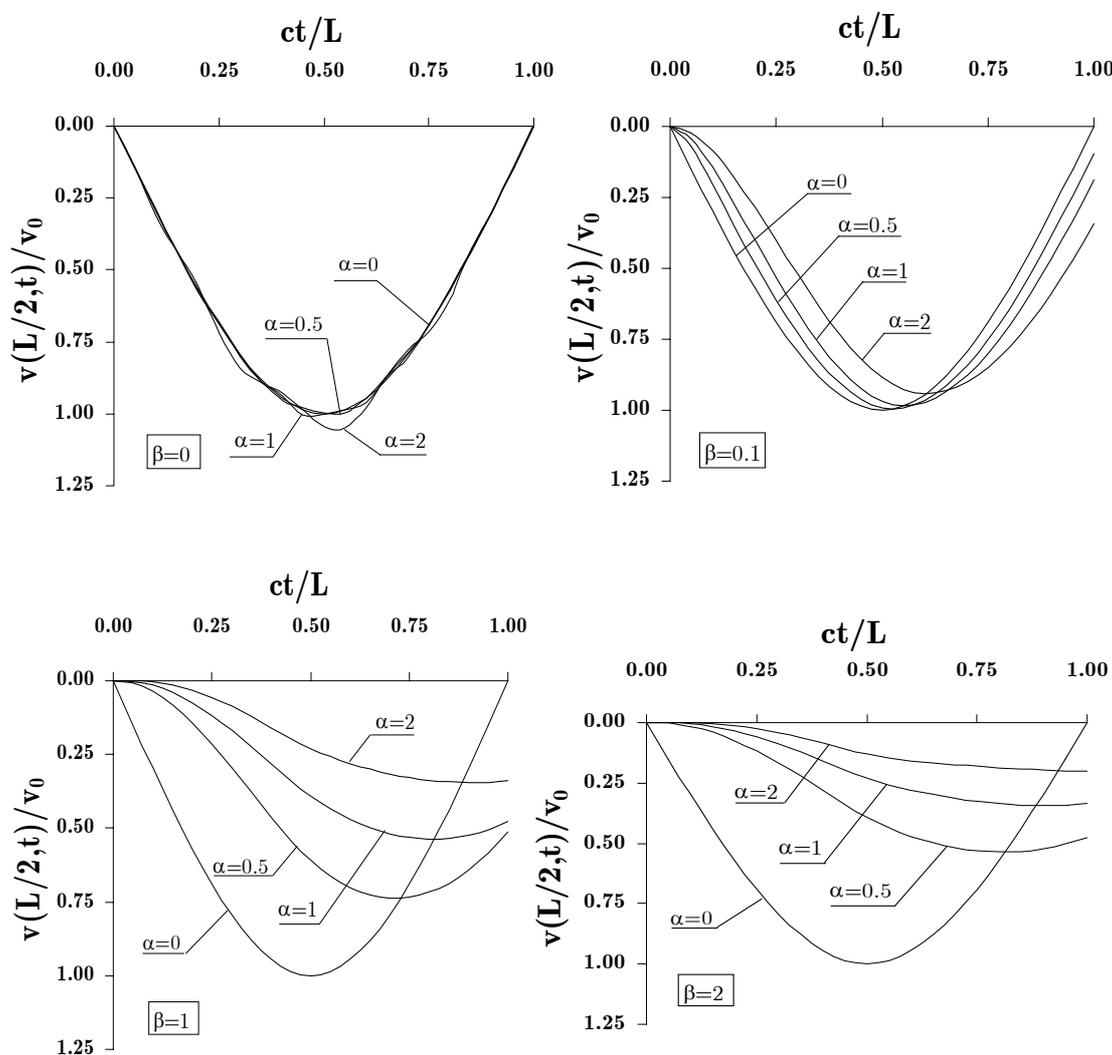


Figura 2.8: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nell'ipotesi di massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico

L'effetto della velocità del carico può essere meglio quantificato attraverso i diagrammi del massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave al variare di α e di $1/\alpha'$ per diversi valori di β . Da entrambi i grafici è possibile rilevare come l'amplificazione dinamica dello spostamento sia inferiore al 10% nel caso $\beta = 0$ mentre non si ha nessuna amplificazione per $\beta > 0$. L'andamento delle curve è molto simile sia nel caso di variabilità di α che di $1/\alpha'$ ma in quest'ultimo grafico lo spostamento decresce più rapidamente quando $c \rightarrow 0$.

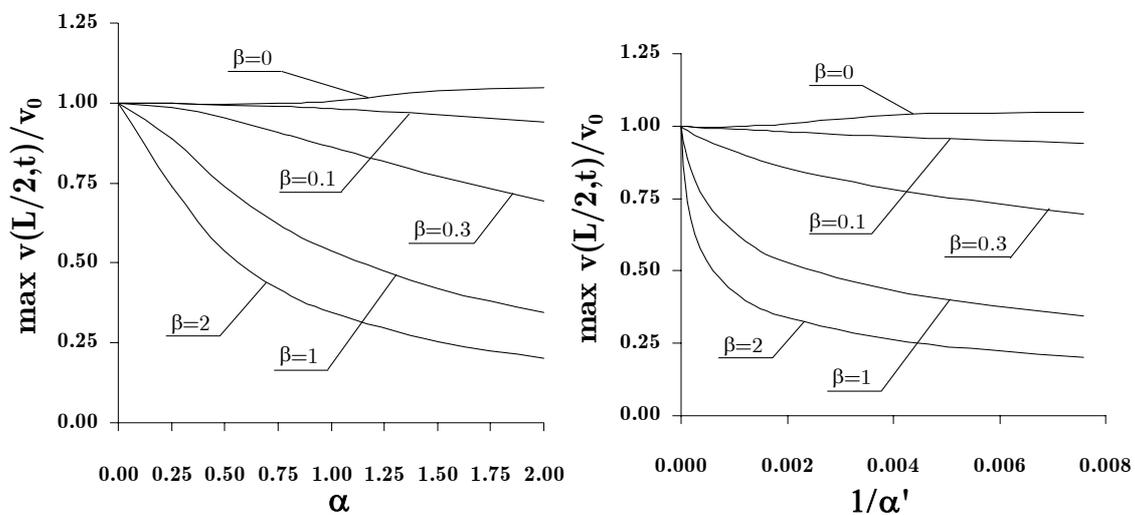


Figura 2.9: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e di $1/\alpha'$ per diversi valori di β nell'ipotesi di massa della trave trascurabile rispetto a quella del carico

2.2.2 Trave percorsa da un carico uniforme

Si consideri ora una trave percorsa da una striscia di carico uniforme di intensità p , di lunghezza L_p e con massa per unità di lunghezza pari a λ .

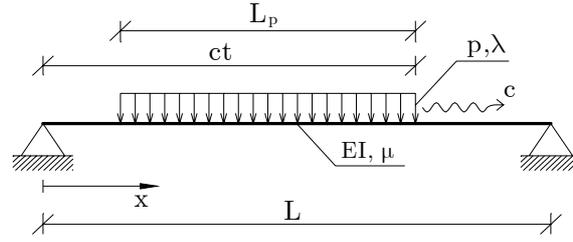


Figura 2.10 Trave appoggiata percorsa da un carico uniforme viaggiante

Se si indica con $f(x,t)$ la funzione carico uniforme viaggiante e con $\rho(x,t)$ la funzione massa del carico viaggiante, l'equazione che governa il problema di una trave semplicemente appoggiata soggetta all'azione di un carico distribuito viaggiante è la seguente:

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \\
 = f(x,t) - \rho(x,t) \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} - \frac{d\rho(x,t)}{dt} \frac{dv(x,t)}{dt}
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Le condizioni al contorno e le condizioni iniziali sono riportate di seguito:

$$\begin{aligned}
 v(0,t) = 0; \quad v(L,t) = 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$v(x,0) = 0; \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (2.21)$$

Il carico mobile è definito da:

$$\begin{cases} f(x,t) = p \cdot \bar{H}(ct-x) \cdot \bar{H}(x+L_p-ct) \\ \rho(x,t) = \lambda \cdot \bar{H}(ct-x) \cdot \bar{H}(x+L_p-ct) \end{cases} \quad (2.22)$$

in cui $\bar{H}(\cdot)$ è la funzione di *Heaviside*.

Inoltre, poiché lo spostamento della trave dipende sia dall'ascissa x che dal tempo t , come si è già visto per il caso della trave soggetta ad una massa viaggiante, la derivata seconda rispetto al tempo che compare nella (2.19) è pari a:

$$\frac{d^2v(x,t)}{dt^2} = \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x^2}. \quad (2.23)$$

Il caso della trave percorsa da un carico uniforme presenta diversi parametri che possono influenzare la soluzione. Come è stato analizzato nei casi precedenti ci sono parametri che tengono conto dell'effetto della velocità del carico (α) e dello smorzamento delle oscillazioni della trave (β), ma in quest'ultimo caso è altrettanto utile indagare l'influenza che hanno, sulla risposta strutturale del sistema, sia la lunghezza del carico rispetto alla lunghezza della trave (L_p/L) che l'intensità del carico rispetto al peso proprio della trave stessa (p/g).

2.2.2.1. Lunghezza del carico pari a 1/4 della luce della trave ($L_p/L = 0.25$)

Il primo caso oggetto di indagine riguarda la condizione in cui il carico mobile ha una lunghezza pari a 1/4 della luce della trave. L'analisi è stata condotta studiando la variabilità dei parametri α e β in due casi: il primo in cui $p/g = 0.5$ e il secondo in cui $p/g = 1$. La risposta strutturale è stata diagrammata in termini di spostamento verticale della mezzera della trave adimensionalizzato rispetto al caso in cui il carico agisce staticamente in modo da produrre il massimo spostamento a $x = L/2$.

Nei grafici di seguito riportati si può notare come il comportamento della trave sia molto simile al caso in cui ad agire sia una forza concentrata viaggiante. Infatti la lunghezza del carico distribuito è molto limitata rispetto alla luce della trave e pertanto anche l'effetto inerziale dovuto alla massa del carico è poco influente sull'amplificazione dinamica dello spostamento.

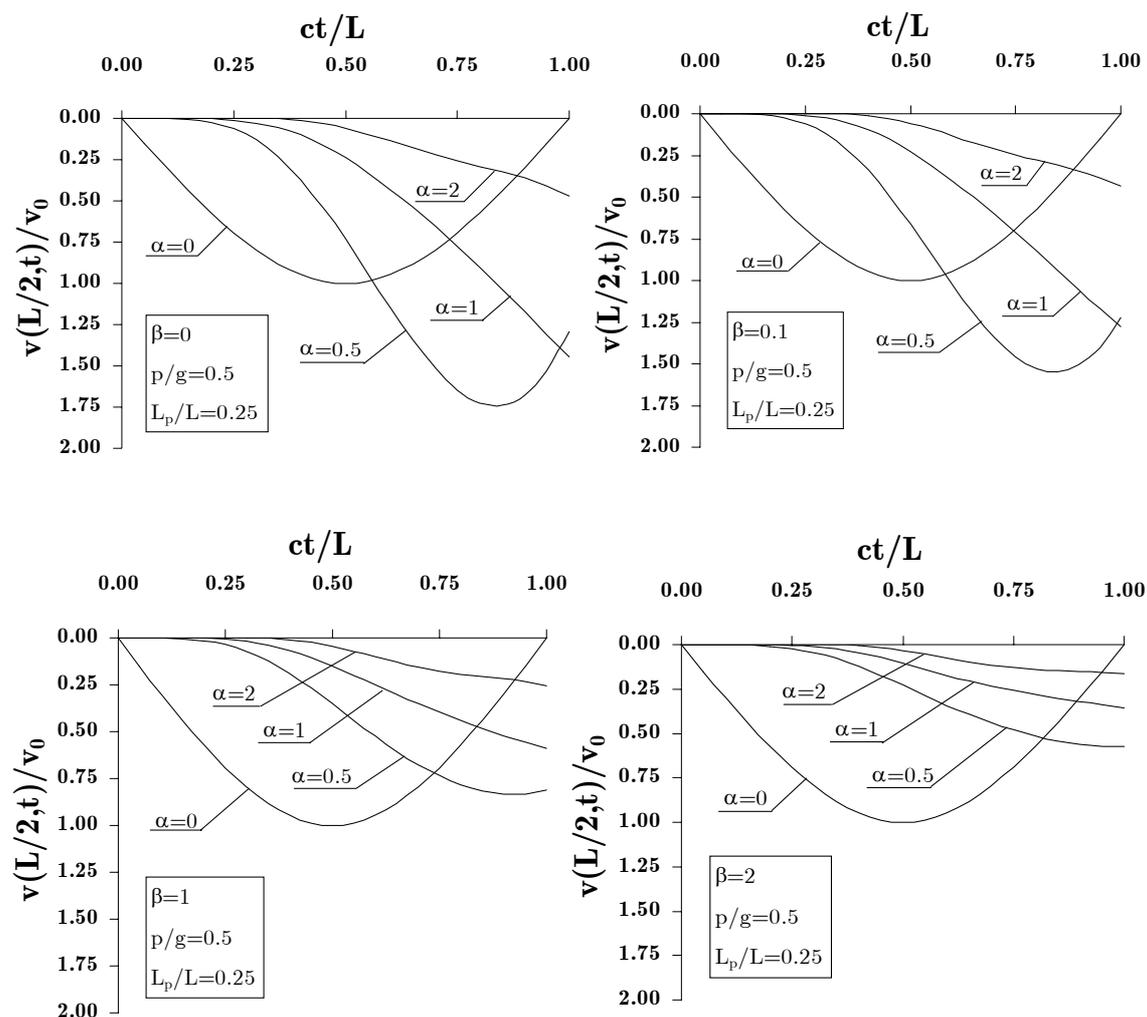


Figura 2.11: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g = 0.5$ e $L_p/L = 0.25$

Il comportamento della trave non sembra essere molto diverso anche nel caso in cui $p/g = 1$, come si può apprezzare dai grafici seguenti. Si può osservare tuttavia un leggero abbassamento della velocità critica, soprattutto per le curve in cui $\alpha = 0.5$, attraverso una traslazione del grafico verso sinistra. Anche nei diagrammi successivi, in cui viene messo in evidenza l'effetto della velocità del carico sulla struttura, si notano piccole variazioni nell'amplificazione dinamica dello spostamento della trave passando da $p/g = 0.5$ a $p/g = 1$; le variazioni sono maggiormente evidenti per i casi di smorzamento molto basso.

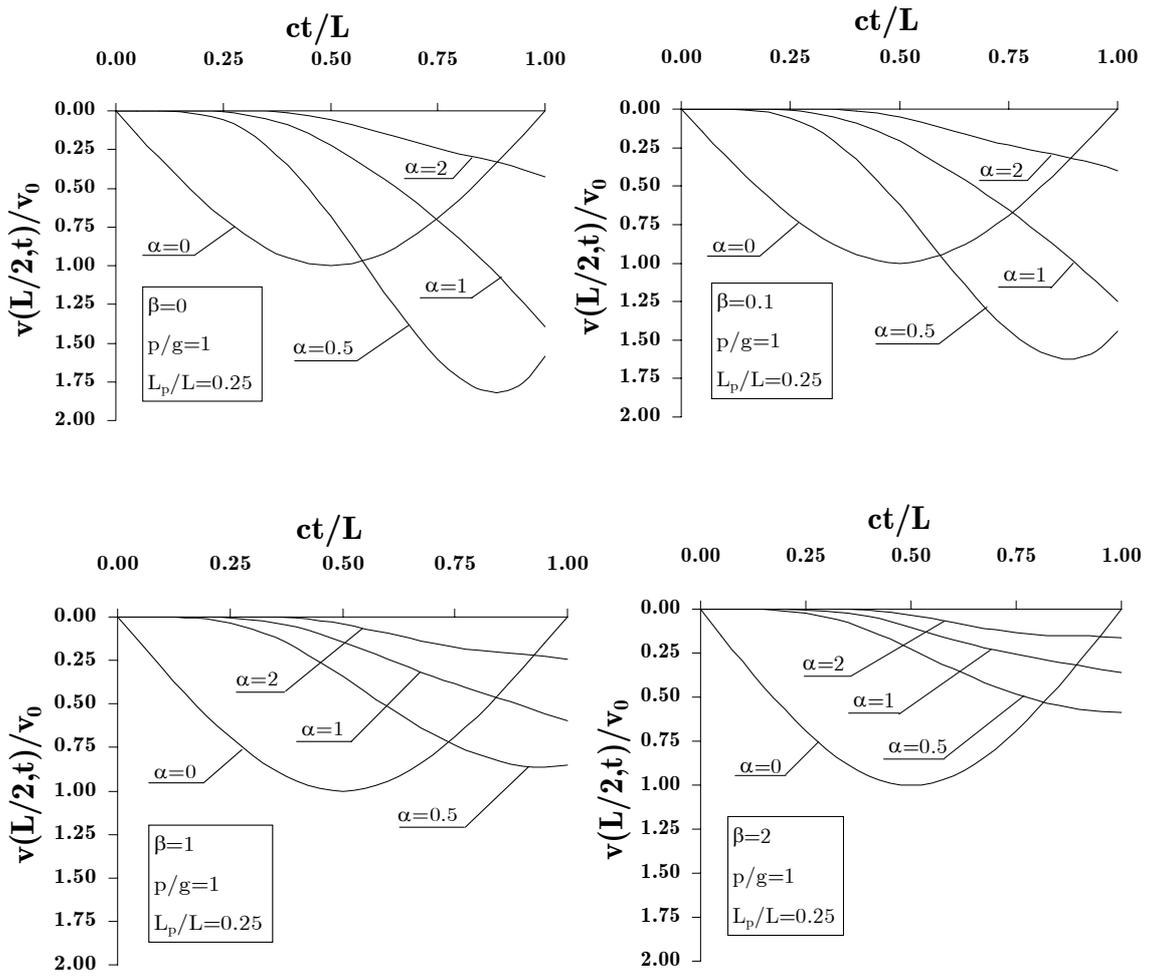


Figura 2.12: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g=1$ e $L_p/L=0.25$

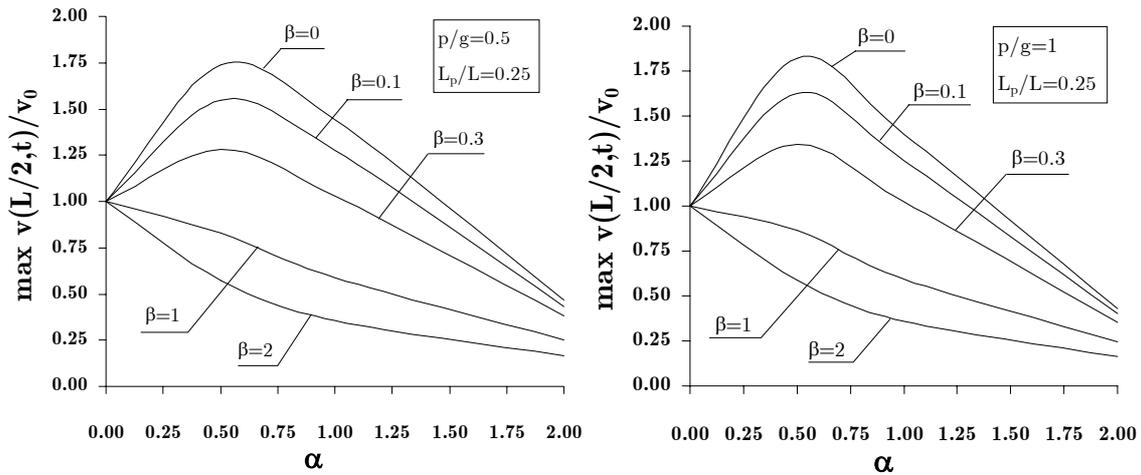


Figura 2.13: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p/L = 0.25$

2.2.2.2. Lunghezza del carico pari a metà della luce della trave ($L_p/L = 0.5$)

Nel caso in cui la lunghezza del carico è pari alla metà della luce della trave si ha una minore amplificazione dello spostamento, rispetto al caso $L_p/L = 0.25$, soprattutto nei casi di smorzamento nullo o molto basso. Si può notare, inoltre, come l'aumento della lunghezza del carico comporta una condizione più gravosa per la struttura in quanto il valore della sua velocità critica è più basso che nel caso precedente.

L'aumento di intensità del carico distribuito rende evidente come la velocità critica venga raggiunta più rapidamente dalla struttura mentre si hanno piccoli incrementi dell'amplificazione dinamica dello spostamento in mezzeria, come è possibile osservare da grafici seguenti. Confrontando i risultati ottenuti con il caso trattato precedentemente sembra essere determinante la lunghezza del carico mobile più che la sua l'intensità per unità di lunghezza.

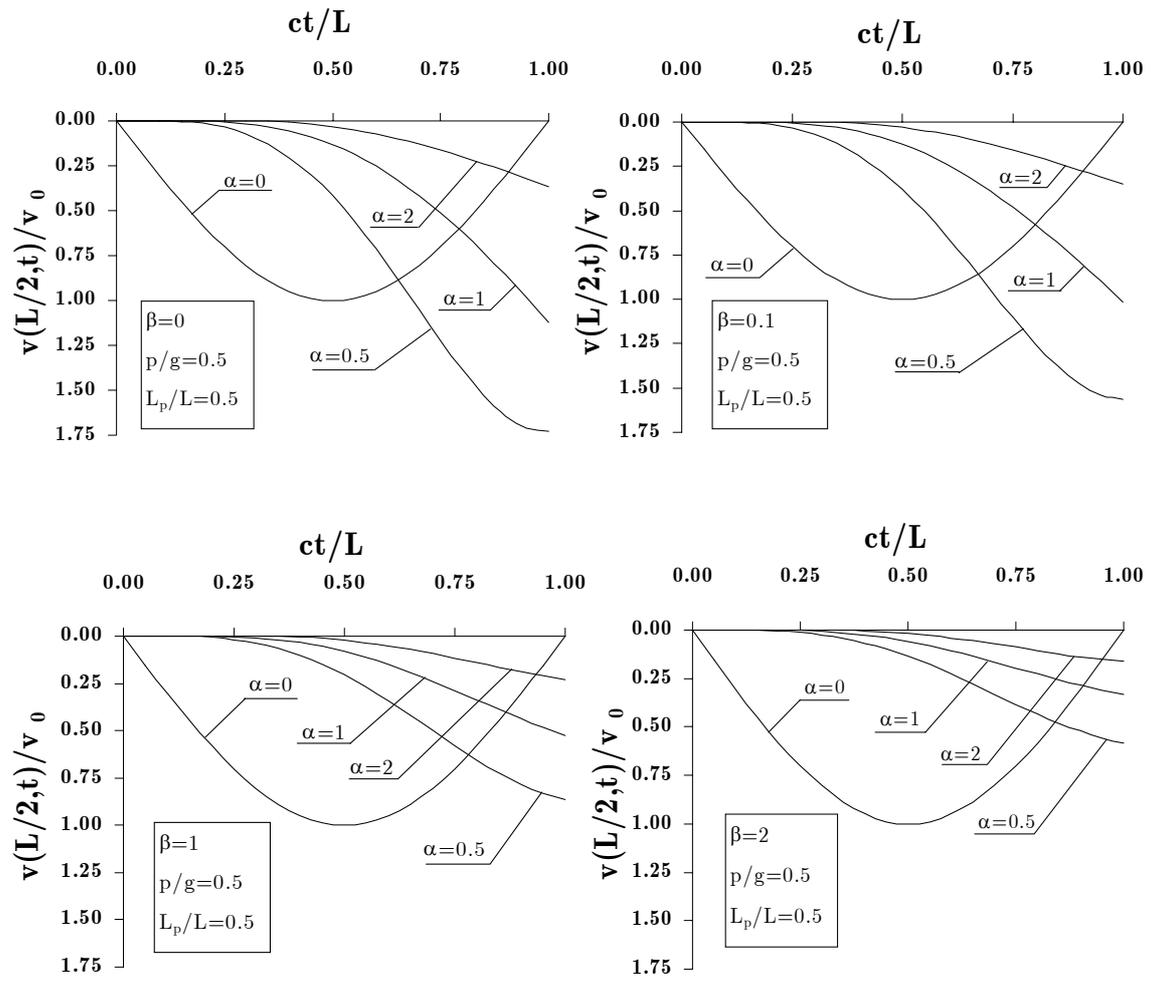


Figura 2.14: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g=0.5$ e $L_p/L=0.5$

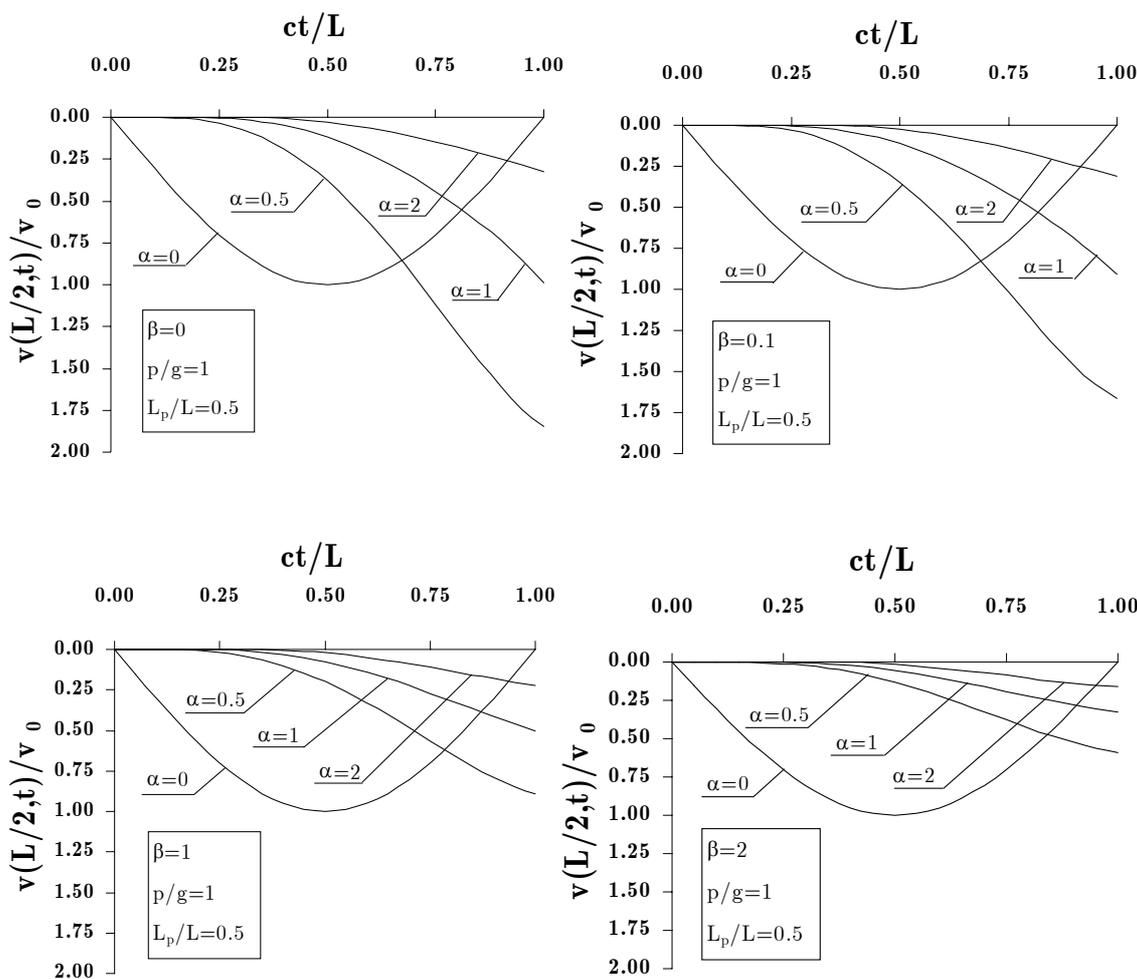


Figura 2.15: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g=1$ e $L_p/L=0.5$

Analizzando i seguenti diagrammi e quelli che si riferiscono al caso $L_p/L=0.25$ è possibile notare come non ci siano rilevanti cambiamenti per quanto riguarda l'amplificazione del massimo spostamento, ma si può osservare una variazione di forma delle curve.

Nel caso $L_p/L=0.5$ si ha un decremento più rapido dell'amplificazione dinamica all'aumentare di α e quindi della velocità di percorrenza del carico.

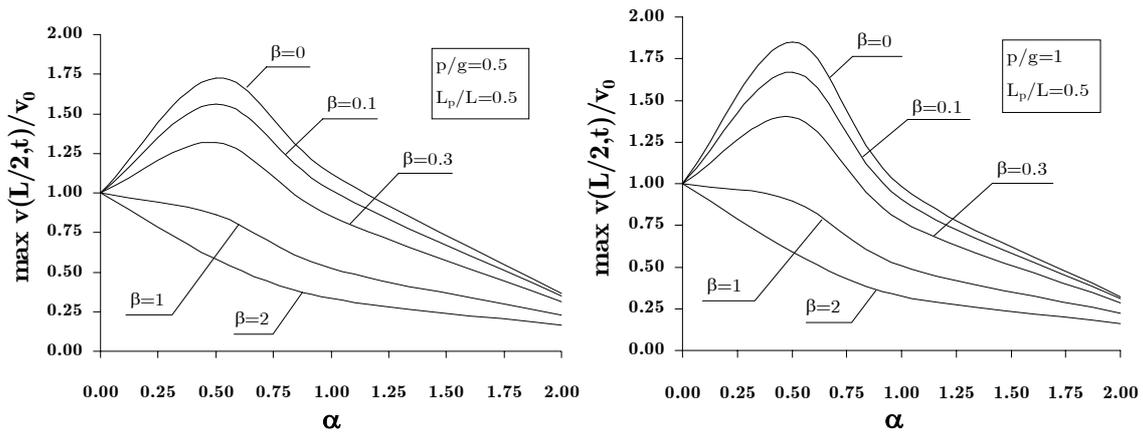


Figura 2.16: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p / L = 0.5$

2.2.2.3. Lunghezza del carico pari alla luce della trave ($L_p = L$)

Il caso in cui $L_p = L$ conferma le considerazioni ricavate dai due casi precedenti. La massima amplificazione dello spostamento, nell'intervallo di osservazione, diminuisce incrementando la lunghezza del carico e il valore critico della sua velocità di percorrenza si abbassa. Anche nella condizione di lunghezza del carico pari a quella della trave l'intensità del carico stesso non sembra essere un parametro significativo per quanto riguarda l'amplificazione degli effetti sulla struttura.

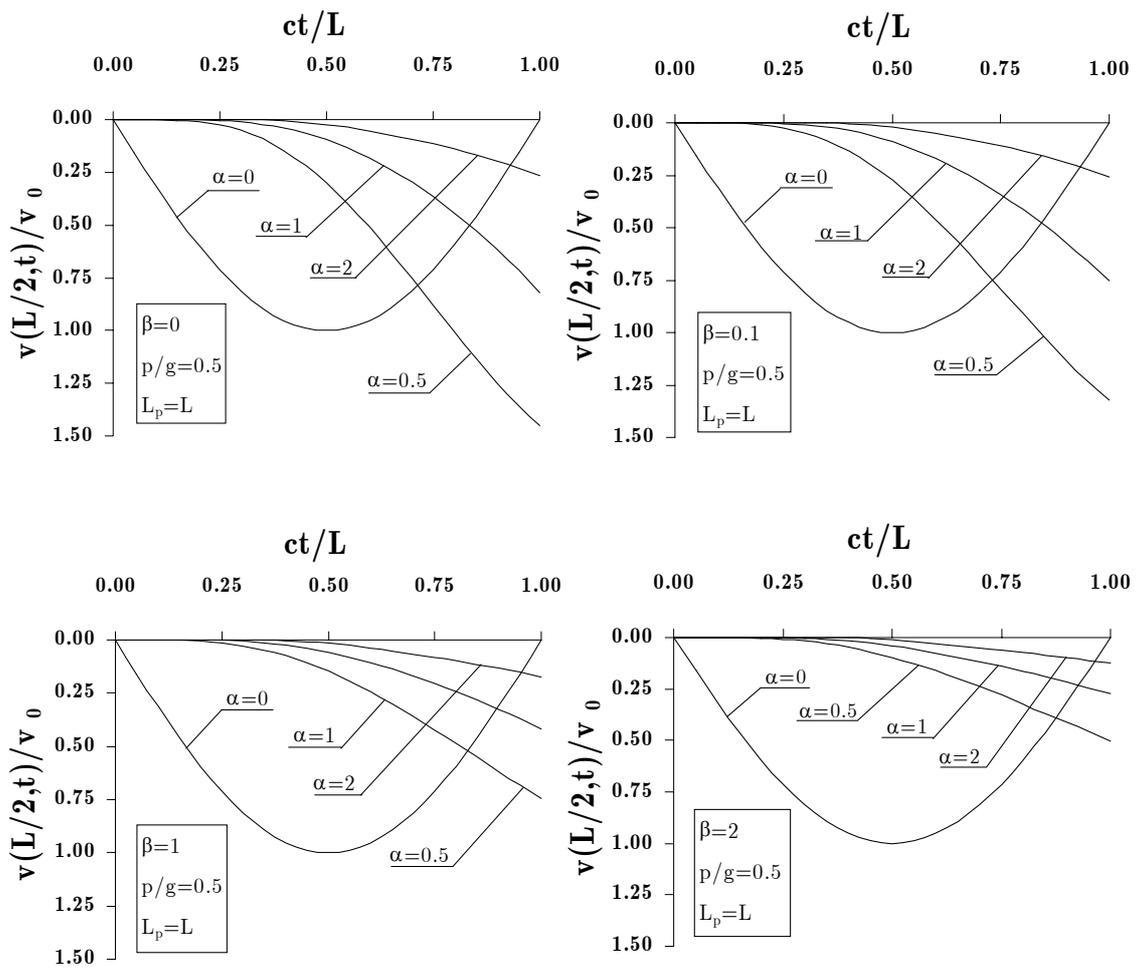


Figura 2.17: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g = 0.5$ e $L_p = L$

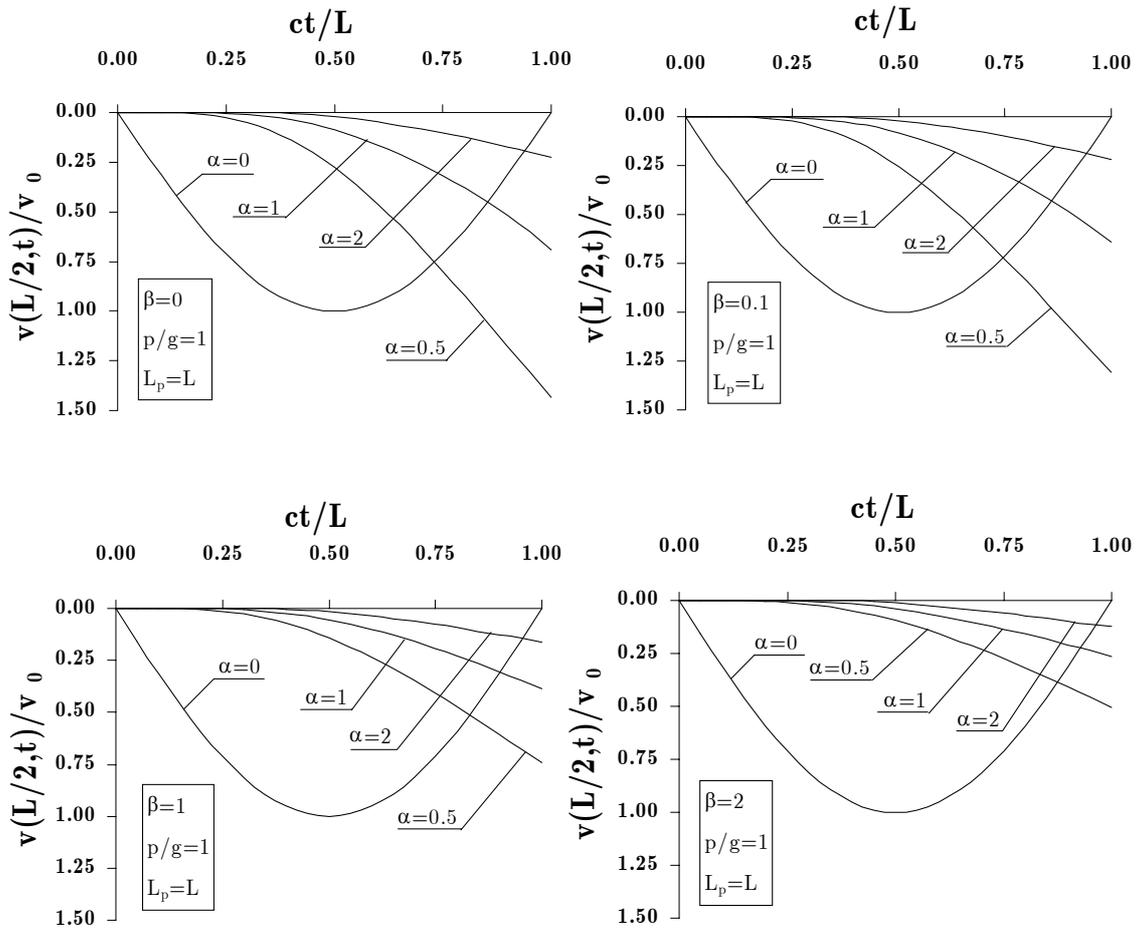


Figura 2.18: Abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α e β nel caso $p/g = 1$ e $L_p = L$

Nelle curve che descrivono l'amplificazione dello spostamento al variare della velocità, riportate di seguito, oltre alla diminuzione dell'incremento dinamico si può osservare una ulteriore variazione di forma nei diagrammi. Il decremento del massimo spostamento in mezzeria della trave rispetto al valore statico avviene sempre più rapidamente con l'aumentare della velocità c .

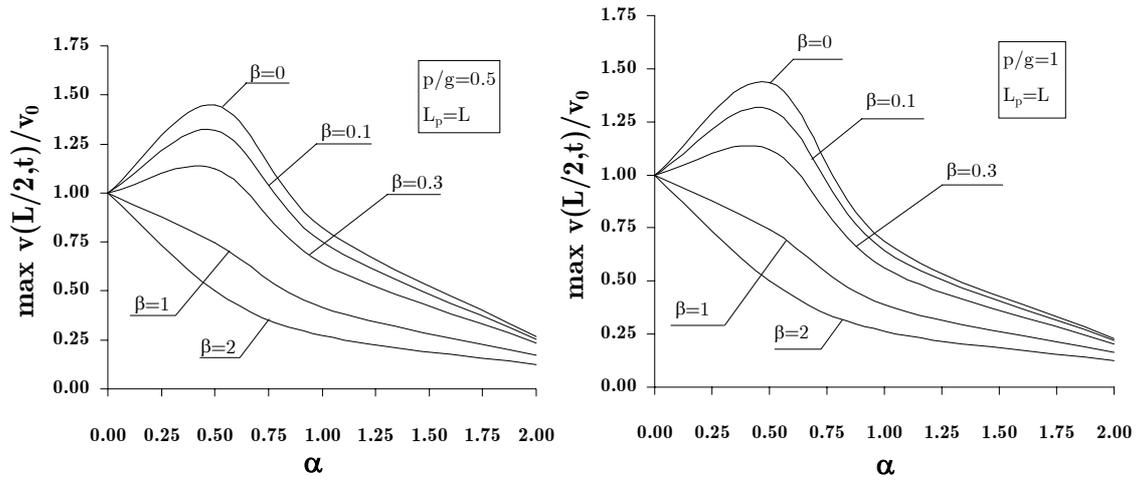


Figura 2.19: Massimo abbassamento dinamico in mezzeria della trave adimensionalizzato rispetto allo spostamento statico v_0 al variare di α per diversi valori di β nel caso $L_p = L$

Capitolo 3

I ponti strallati

3.1 Introduzione

I ponti strallati si suddividono in due classi: i ponti con *strallatura ad arpa*, in cui i cavi che collegano i piloni e la travata sono paralleli tra loro, e i ponti con *strallatura a ventaglio*, in cui i cavi vengono ancorati in un unico punto in cima alla torre. Il ponte con strallatura a ventaglio presenta caratteristiche di rigidità che rendono tale tipologia strutturale consistente con gli usuali carichi ferroviari e i limiti di deformabilità da normativa.

La crescente attenzione degli ultimi anni verso strutture capaci di sostenere i carichi ferroviari e di coprire grandi luci, ha fatto incrementare l'interesse nei riguardi del comportamento dinamico dei ponti strallati sotto l'azione di carichi viaggianti.

3.2 Statica dello strallo

Si consideri un cavo sospeso tra due punti A e B, come riportato nella figura seguente, in configurazione inclinata soggetto all'azione del peso proprio per unità di lunghezza in pianta g_s .

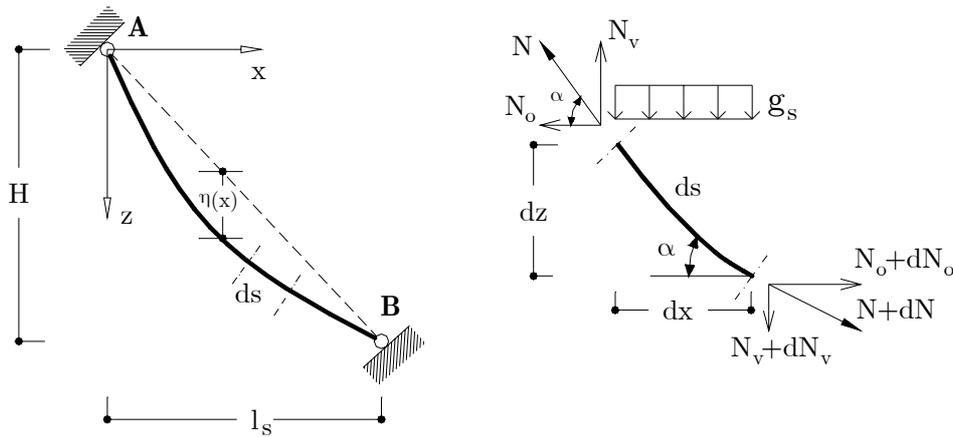


Figura 3.1: Uno strallo sotto l'azione del peso proprio per unità di lunghezza in pianta

Le equazioni di equilibrio, rispettivamente alla traslazione orizzontale e verticale di un elemento di cavo sono:

$$\begin{cases} \frac{dN_o}{dx} = 0 \\ \frac{dN_v}{dz} = -g_s \end{cases} \quad (3.1)$$

e poiché, con approssimazione al primo ordine e quindi nell'ipotesi di piccoli spostamenti, si ha

$$N_v = N_o \cdot z' \quad (3.2)$$

la (3.1) diventa

$$\begin{cases} N_o \approx N = cost \\ N \cdot z'' = -g_s \end{cases} \quad (3.3)$$

cioè la tensione $\sigma = N/A$ e la deformazione $\varepsilon = \sigma/E$ sono costanti lungo lo strallo.

La seconda equazione delle (3.3) è l'equazione differenziale di equilibrio del cavo nell'ipotesi di piccoli spostamenti, a cui vanno associate le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} z(0) = 0 \\ z(l_s) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Integrando l'equazione differenziale, tenendo conto delle condizioni agli estremi, si ottiene la configurazione di equilibrio del cavo rispetto all'asse x

$$z(x) = \frac{g_s x^2}{2N_o} + \left(\frac{H}{l_s} - \frac{g_s l_s}{2N_o} \right) x \quad (3.5)$$

mentre la configurazione a partire dalla retta passante per AB è la seguente

$$\eta(x) = z(x) + \frac{H}{l_s} x = \frac{g_s x^2}{2N_o} + \left(\frac{H}{l_s} - \frac{g_s l_s}{2N_o} \right) x + \frac{H}{l_s} x \quad (3.6)$$

Indicando con L_s la lunghezza dello strallo nella configurazione di equilibrio si ha:

$$\begin{aligned} L_s &= \int_0^{l_s} \sqrt{1 + (z')^2} dx = \\ &= \int_0^{l_s} \left[\frac{l_s^2 + H^2}{l_s^2} \cdot \left(1 - \frac{2H}{l_s} \cdot \eta' \cdot \frac{l_s^2}{l_s^2 + H^2} + (\eta')^2 \cdot \frac{l_s^2}{l_s^2 + H^2} \right) \right]^{1/2} dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

e ponendo

$$L_d = \sqrt{l_s^2 + H^2} \quad (3.8)$$

la lunghezza del segmento AB, si ottiene:

$$L_s = \frac{L_d}{l_s} \int_0^{l_s} \left[1 - \frac{2Hl_s}{L_d^2} \cdot \eta' + \frac{l_s^2}{L_d^2} \cdot (\eta')^2 \right]^{1/2} dx. \quad (3.9)$$

Se la tensione nello strallo è sufficientemente elevata la curva $\eta(x)$ sarà molto vicina al segmento AB, per cui $\eta' \ll 1$. In questo caso la radice quadrata all'interno della (3.9) può essere approssimata in *serie di Taylor* arrestata al primo ordine secondo l'espressione seguente:

$$\left[1 + \left(-\frac{2Hl_s}{L_d^2} \cdot \eta' + \frac{l_s^2}{L_d^2} \cdot (\eta')^2 \right) \right]^{1/2} \approx 1 - \frac{Hl_s}{L_d^2} \cdot \eta' + \frac{1}{2} \cdot \frac{l_s^2}{L_d^2} \cdot (\eta')^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2 l_s^2}{L_d^4} \cdot (\eta')^2$$

e risolvendo l'integrale si ottiene

$$L_s = L_d + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H^2}{L_d^2} - \frac{48N_o^2}{g_s^2 l_s^4 L_d^2} H^4 \right) \left(\frac{g_s}{2N_o} \right)^2 \frac{l_s^3}{3} \frac{l_s}{L_d} \quad (3.10)$$

e poiché con approssimazione al primo ordine si può porre

$$\frac{N_o}{N} \cong \frac{l_s}{L_d} \cong 1 \quad (3.11)$$

si ha la seguente espressione per la lunghezza del cavo

$$L_s = L_d \left(1 + \frac{1}{24} \frac{\gamma_s^2 l_s^2}{\sigma^2} \right) \quad (3.12)$$

dove γ_s è il peso specifico del materiale di cui è composto lo strallo. Se si applica un incremento di tiro dN al cavo, questo assumerà una nuova

configurazione di equilibrio passando dalla lunghezza iniziale L_s alla nuova lunghezza $L_s + dL_s$; di conseguenza anche la distanza l_s assumerà il nuovo valore $l_s + dl_s$. La variazione dL_s può essere valutata come:

$$\begin{aligned} dL_s &= dL_d + \frac{L_d}{24} \left(\frac{\gamma_s}{\sigma^2} \right) 2l_s dl_s + \frac{L_d}{24} \gamma_s^2 l_s^2 \cdot d \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) = \\ &= \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\gamma_s L_d}{\sigma} \right)^2 \right] dL_d - L_d \frac{\gamma_s^2 l_s^2}{12\sigma^3} d\sigma \end{aligned} \quad (3.13)$$

avendo posto $2l_s dl_s = -2L_d dL_d$. Poiché $\gamma_s L_d / \sigma \ll 1$ si ha che essendo ε costante lungo lo strallo, l'incremento $d\varepsilon$ della deformazione può essere valutato nel seguente modo

$$d\varepsilon = \frac{dL_s}{L_s} = \frac{dL_s}{L_d} = \frac{dL_d}{L_d} - \frac{\gamma_s^2 l_s^2}{12\sigma^3} d\sigma$$

da cui si ottiene

$$d\varepsilon = \frac{dL_s}{L_s} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_s^2 l_s^2 E}{12\sigma^3}} \frac{dL_d}{L_d}. \quad (3.14)$$

L'incremento di tensione $d\sigma$ può allora essere espresso dalla formula seguente:

$$d\sigma = E d\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_s^2 l_s^2 E}{12\sigma^3}} \frac{dL_d}{L_d} \quad (3.15)$$

quindi se si considera come parametro della deformazione la quantità dL_d / L_d al posto di dL_s / L_s si dovrà tenere conto di un *modulo fittizio* detto di *Dischinger*

$$E^*(\sigma) = \frac{E}{1 + \frac{\gamma_s^2 l_s^2 E}{12\sigma^3}} \quad (3.16)$$

che permette di riscrivere la (3.15) come

$$d\sigma = E^*(\sigma) \cdot d\varepsilon^* \quad (3.17)$$

in cui $d\varepsilon^* = dL_d / L_d$ rappresenta la variazione di deformazione fittizia ε^* dello strallo.

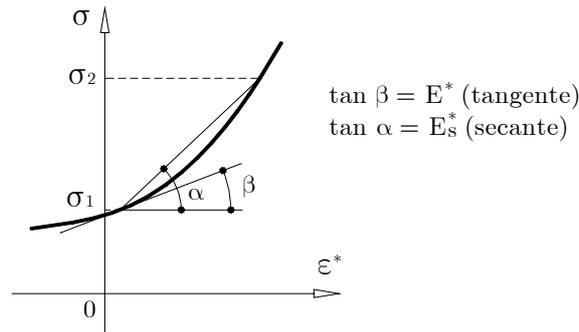


Figura 3.2: Rappresentazione del modulo tangente e secante di Dischinger sulla curva tensione-deformazione fittizia

In questo modo il modulo di elasticità di *Dischinger* può definirsi come il modulo tangente alla curva tensione-deformazione fittizia per un valore assegnato di σ .

Quando però gli incrementi di tensione e deformazione sono finiti si ha

$$\Delta\varepsilon^* = \int_{\varepsilon_1^*}^{\varepsilon_2^*} d\varepsilon^* = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{E^*(\sigma)} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{\gamma_s^2 l_s^2}{24} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \quad (3.18)$$

e quindi

$$\Delta\sigma = E_s^* \cdot \Delta\varepsilon^*$$

dove E_s^* è il *modulo di elasticità secante di Dischinger* ed è pari a:

$$E_s^* = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \frac{E}{1 + \frac{\gamma_s^2 l_s^2 E}{12\sigma^3} \cdot \frac{1 + \beta}{2\beta^2}}, \quad \beta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (3.19)$$

Bisogna notare che per valori elevati di β il modulo secante e il modulo tangente si discostano sensibilmente, perciò quando è possibile stimare a priori la tensione finale σ_2 , l'uso del modulo secante può risultare più adatto di quello tangente per ottenere una approssimazione lineare della risposta dello strallo.

3.3 Formulazione del problema

Il ponte è definito attraverso una formulazione al continuo [14], [15], [16], usata particolarmente per grandi luci, in cui l'interasse tra gli stralli è solitamente molto minore della lunghezza della campata principale ($\Delta/L \ll 1$). In questo modo si può assumere che l'interazione tra gli stralli e la travata sia schematizzabile mediante un carico continuo di tipo distribuito. Il carico mobile esterno è considerato dotato di massa propria e con una distribuzione di peso confrontabile a quella del ponte stesso.

Nello schema strutturale la travata è soggetta ad una distribuzione continua di stralli confluenti in testa alle pile, secondo lo schema a ventaglio. Lo strallo di ancoraggio è fissato all'estremità della travata, secondo lo schema *auto-ancorato*. Si suppone che la realizzazione del ponte determini una distribuzione di tensioni iniziali tale da assicurare una configurazione della travata pressoché rettilinea e priva di momenti flettenti. In questo modo il comportamento del ponte soggetto al carico mobile viene analizzato a partire dalla condizione di equilibrio sotto l'azione del peso proprio della struttura.

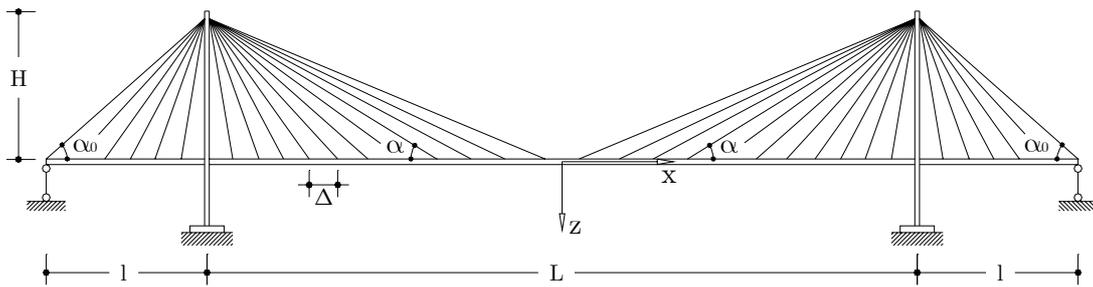


Figura 3.3: Rappresentazione bidimensionale del ponte strallato

Il comportamento strutturale del ponte è stato analizzato sia nel caso di torri con schema ad “H”, che nel caso di torri con schema ad “A”.

Per la tipologia di ponte con pile ad “H” la descrizione cinematica della struttura fa riferimento ai seguenti parametri di spostamento:

- $v(x, t)$ = abbassamento verticale della travata;
- $w(x, t)$ = spostamento orizzontale della travata;
- $\omega(x, t)$ = rotazione torsionale (attorno a x) della travata;
- $u_s(t)$ = spostamento orizzontale in testa del pilone di sinistra;
- $u_D(t)$ = spostamento orizzontale in testa del pilone di destra;
- $\psi_s(t)$ = rotazione torsionale (attorno a z) in testa del pilone di sinistra;
- $\psi_D(t)$ = rotazione torsionale (attorno a z) in testa del pilone di destra.

È possibile quindi valutare i contributi di deformazione flessionale e torsionale per le pile e l’impalcato trascurando le deformazioni assiali delle torri.

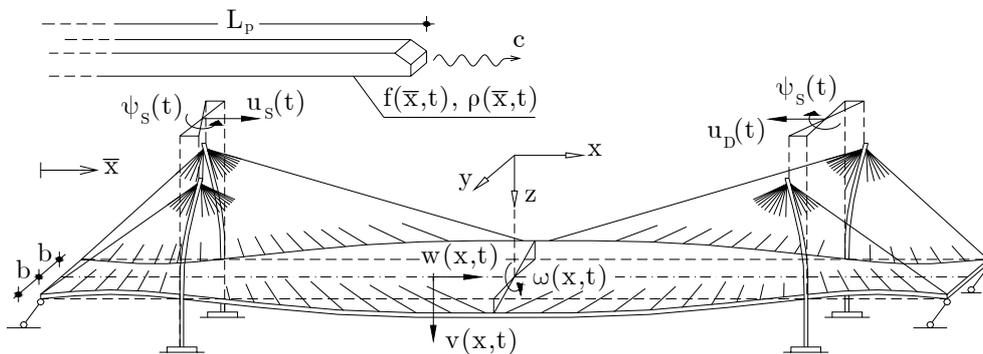


Figura 3.4: Rappresentazione dei parametri cinematici del ponte strallato

La geometria e la rigidità del ponte sono determinate facendo riferimento a formule note in letteratura mediante le quali è possibile dimensionare i diversi elementi strutturali di cui il ponte si compone. In particolare, la sezione trasversale degli stralli A_s viene calcolata in modo da ottenere sotto l'azione del peso proprio g una tensione costante e pari a σ_g . L'area dello strallo di ormeggio A_o viene calcolata, invece, in modo da ottenere all'interno del cavo una tensione pari a σ_{g0} nella condizione statica con il carico accidentale p applicato sulla campata centrale. Conseguentemente il dimensionamento degli stralli distribuiti e di ancoraggio avviene secondo le seguenti espressioni:

$$A_s(x) = \frac{g\Delta}{\sigma_g \sin \alpha}; \quad A_o = \frac{gl}{2\sigma_{g0}} \left[\left(\frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] \sqrt{1 + \left(\frac{l}{H} \right)^2} \quad (3.20)$$

in cui α è l'angolo che il singolo strallo forma con l'asse orizzontale x della travata, mentre con α_o viene indicato l'angolo che lo strallo di ormeggio forma con lo stesso asse. La tensione σ_g è definita in funzione della tensione ammissibile σ_a , del peso proprio g e del carico accidentale p :

$$\sigma_g = \frac{g}{g+p} \sigma_a \quad (3.21)$$

Analogamente può essere definita la tensione σ_{g0} presente negli stralli di riva sotto l'azione del solo peso proprio:

$$\sigma_{g0} = \sigma_a \frac{[L/(2l)]^2 - 1}{[(1+p/g)(L/(2l))^2 - 1]} \quad (3.22)$$

La non linearità di tipo materiale degli stralli viene tenuta in considerazione attraverso l'introduzione del modulo elastico secante di *Dischinger* E_s^* , che varia da uno strallo all'altro in funzione dell'angolo α , della tensione iniziale presente nel cavo, σ_1 , e di quella attuale, σ_2 , secondo la seguente espressione:

$$E_s^* = \frac{E}{1 + \frac{\gamma_s^2 l_s^2 E}{12\sigma^3} \cdot \frac{1 + \beta}{2\beta^2}}, \quad \beta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3.23)$$

dove E è il modulo elastico, γ_s è il peso dell'unità di volume del materiale di cui è costituito lo strallo; l_s è la proiezione orizzontale della lunghezza dello strallo.

3.3.1 Definizione del carico viaggiante

Lo studio del comportamento dinamico viene condotto ipotizzando che il ponte sia percorso da una striscia di carico che si muove con velocità costante c producendo spostamenti e incrementi di tensione a partire dalla configurazione di equilibrio corrispondente all'azione dei carichi fissi.

Il carico viaggiante è modellato come una striscia uniformemente distribuita di lunghezza L_p che si suppone perfettamente connesso con la travata. In particolare, si assume che il carico proceda a velocità costante c e che la cinematica del sistema mobile sia coincidente con quella propria dell'impalcato. Vengono trascurati quindi gli effetti di interazione meccanica del sistema mobile e la rugosità dell'impalcato considerati di ordine superiore rispetto alle vibrazioni globali dei ponti [55]. Tuttavia vengono tenuti in conto i termini di accoppiamento prodotti dai fenomeni di interazione tra carico mobile e deformazione dell'impalcato. In particolare, le forze afferenti al sistema mobile introducono contributi derivanti dall'accelerazione di *Coriolis*, dall'accelerazione centripeta e dal carattere non stazionario della distribuzione di massa del sistema ponte/carico mobile.

In particolare, la descrizione del carico mobile, con riferimento ad un'ascissa \bar{x} rispetto a cui viene valutata la posizione del carico viaggiante, è ottenuta tenendo conto dei contributi *non standard* nelle funzioni di velocità e di accelerazione:

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial \bar{x}} \cdot c, \quad c = \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2v(x,t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial \bar{x} \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial \bar{x}^2}. \quad (3.25)$$

L'accelerazione totale, quindi, si ottiene dalla somma di tre termini: il primo dovuto all'accelerazione nominale (*S.A.*), il secondo dovuto all'accelerazione di *Coriolis* e il terzo dovuto all'accelerazione centripeta.

Infine, la descrizione del carico mobile è ottenuta secondo le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} f(\bar{x},t) = p \cdot \bar{H}(ct - \bar{x}) \cdot \bar{H}(\bar{x} + L_p - ct) \\ \rho(\bar{x},t) = \lambda \cdot \bar{H}(ct - \bar{x}) \cdot \bar{H}(\bar{x} + L_p - ct) \end{cases} \quad (3.26)$$

dove p e λ rappresentano l'entità di carico e di massa del sistema mobile e $\bar{H}(\cdot)$ è la funzione di *Heaviside*.

3.3.2 Equilibrio nel piano verticale della travata

Il comportamento della travata nel piano verticale xz è descritto attraverso una formulazione alla *Eulero-Bernoulli*.

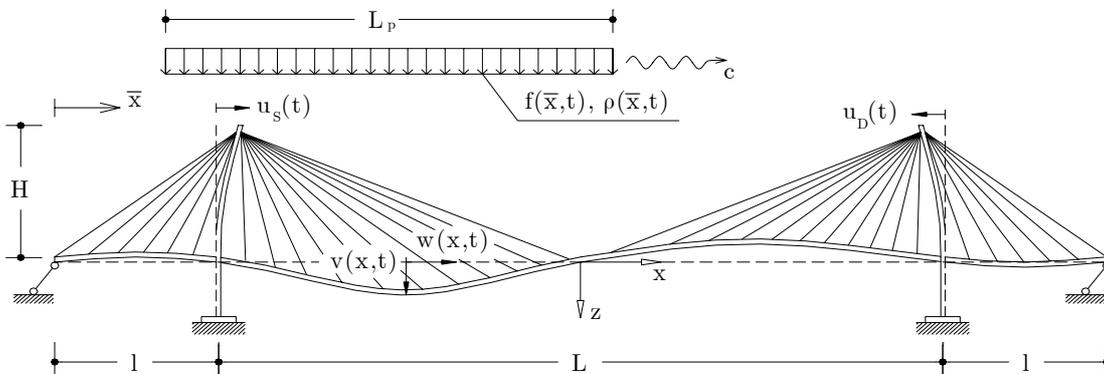


Figura 3.5: I parametri che definiscono la deformazione del ponte strallato nel piano xz

Nella scrittura delle equazioni di equilibrio è di fondamentale importanza la schematizzazione delle forze di interazione che sussistono tra stralli ed impalcato.

La deformazione $\Delta\varepsilon^*$ (considerata positiva se ad essa corrisponde un allungamento) di un generico strallo ancorato alla pila di sinistra è fornita dalla seguente espressione:

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon^{*S} = \frac{v \sin^2 \alpha + (w - u_s) \sin \alpha \cos \alpha}{H} \\ \Delta N_s^S = E_s^* A_s \Delta\varepsilon^{*S} = \frac{E_s^* A_s}{H} [v \sin^2 \alpha + (w - u_s) \sin \alpha \cos \alpha] \end{cases} \quad (3.27)$$

analogamente per quanto riguarda un generico strallo ancorato alla pila di destra:

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon^{*D} = \frac{v \sin^2 \alpha - (w + u_D) \sin \alpha \cos \alpha}{H} \\ \Delta N_s^D = E_s^* A_s \Delta\varepsilon^{*D} = \frac{E_s^* A_s}{H} [v \sin^2 \alpha - (w + u_s) \sin \alpha \cos \alpha] \end{cases} \quad (3.28)$$

Attraverso l'incremento di sforzo nello strallo si ricava l'espressione dell'azione distribuita, lungo la direzione verticale (q_v) e lungo la direzione orizzontale (q_o), sulla travata:

$$\begin{cases} q_v^S = -\frac{\Delta N_s^S}{\Delta} \cdot \sin \alpha = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^3 \alpha + (u_s - w) \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_o^S = -\frac{\Delta N_s^S}{\Delta} \cdot \cos \alpha = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^2 \alpha \cos \alpha + (u_s - w) \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} q_v^D = -\frac{\Delta N_s^D}{\Delta} \cdot \sin \alpha = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^3 \alpha + (u_D + w) \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_o^D = \frac{\Delta N_s^D}{\Delta} \cdot \cos \alpha = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [v \sin^2 \alpha \cos \alpha - (u_D + w) \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases} \quad (3.30)$$

Per quanto riguarda lo strallo di ormeggio, la componente orizzontale dello sforzo nel cavo di sinistra è:

$$S_o^S = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [(u_S - w) \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o] \quad (3.31)$$

mentre la componente orizzontale dello sforzo nel cavo di destra è pari a:

$$S_o^D = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [-(u_D + w) \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o]. \quad (3.32)$$

Preso in considerazione un concio di travata ed esplicitate le azioni che intervengono su di esso è possibile ricavare le seguenti equazioni di equilibrio.

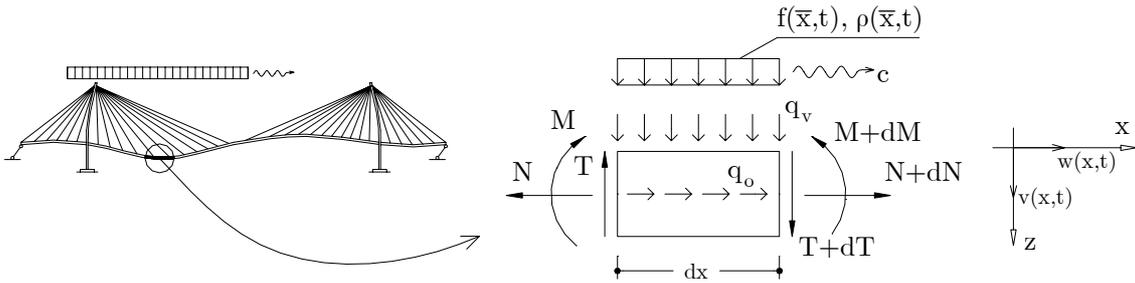


Figura 3.6: Azioni agenti su un conio di travata del ponte strallato

Per quanto riguarda l'equilibrio lungo l'asse z si ha:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \bar{H}(x) \cdot q_v^D + \bar{H}(-x) \cdot q_v^S + \mu \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \\ = f(\bar{x},t) - \rho(\bar{x},t) \cdot \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} - \frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} \cdot \frac{dv(x,t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.33)$$

in cui EI_y è la rigidità flessionale della travata e μ è la sua massa per unità di lunghezza. Come è stato precedentemente trattato, la derivata seconda presente al secondo membro è espressa dalla (3.25).

Per quanto riguarda l'equilibrio lungo l'asse x si ottiene:

$$\begin{aligned}
EA \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \bar{H}(x) \cdot q_o^D - \bar{H}(-x) \cdot q_o^S - \mu \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \\
= \rho(\bar{x},t) \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} \cdot \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

in cui EA è la rigidezza assiale della travata.

3.3.3 Flessione delle torri

Le equazioni di equilibrio delle torri vengono riportate per la pila di sinistra e di destra secondo la direzione orizzontale della travata. Con riferimento alla figura 3.7 si ottengono le seguenti espressioni:

$$K_p u_S + S_o^S + \int_{-l-L/2}^0 q_o^S dx + M_p \frac{\partial^2 u_S}{\partial t^2} = 0 \tag{3.35}$$

per ciò che riguarda il pilone sinistro, mentre per quello di destra si ha:

$$K_p u_D - S_o^D - \int_0^{L/2+l} q_o^D dx + M_p \frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} = 0 \tag{3.36}$$

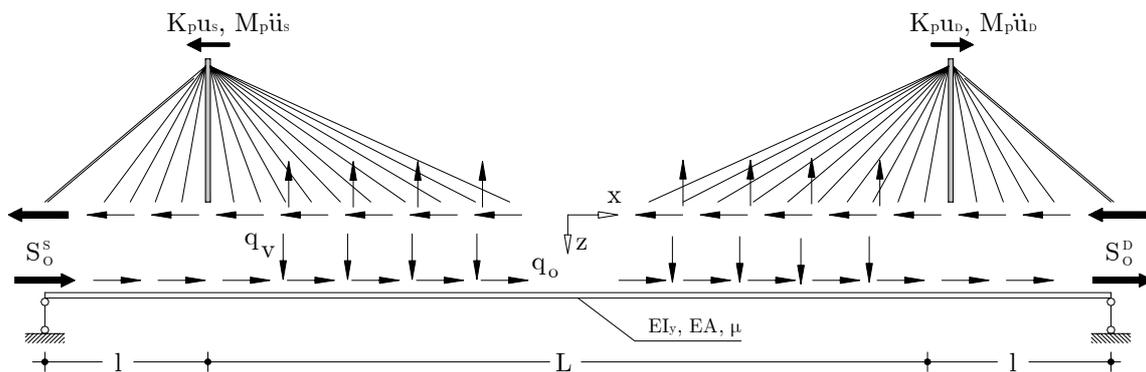


Figura 3.7: Schematizzazione dell'interazione tra le cortine di stralli e la travata

dove K_p rappresenta la rigidezza a flessione della torre e M_p la sua massa, avendo ipotizzato di poterla concentrare in un unico punto nell'estremità della pila.

3.3.4 Torsione della travata

La trattazione viene svolta sia nel caso di torri con schema strutturale a portale, o ad "H", che nel caso di torri con schema ad "A"; inoltre durante l'analisi si assume che l'asse z sia asse di simmetria della sezione trasversale della travata.

3.3.4.1. Pila ad "H"

Si assume che la torsione nella travata sia causata dal carico mobile che si muove sulla carreggiata con un'eccentricità e rispetto all'asse di simmetria della sezione.

Le azioni che intervengono nell'equilibrio della sezione sono legate al cambiamento di configurazione degli stralli durante il passaggio del carico.

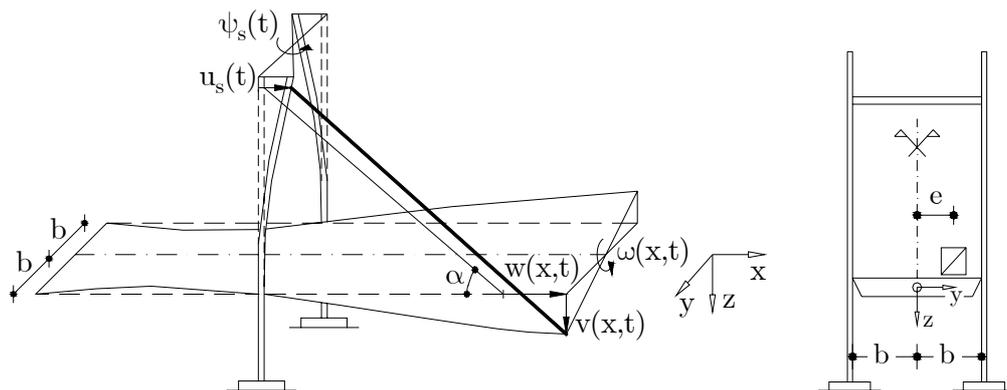


Figura 3.8: Comportamento di uno strallo della torre di sinistra nel caso di torsione della travata con pila ad "H"

Nel caso di pila ad “H” il comportamento dello strallo è quello descritto in precedenza nelle (3.27) e (3.28) a cui bisogna aggiungere i contributi dovuti alla rotazione torsionale della sezione $\omega(x,t)$ e delle torri $\psi_s(t)$ e $\psi_D(t)$.

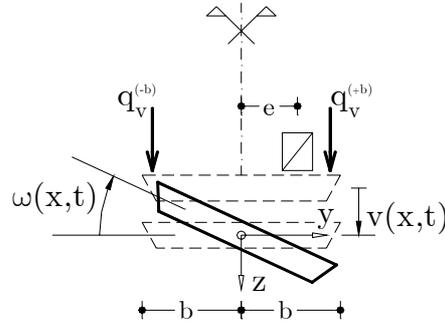


Figura 3.9: Forze agenti sulla sezione nel caso di torsione della travata

L'equazione di equilibrio è di seguito riportata:

$$C_t \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} - \bar{H}(x) \cdot m_\omega^D - \bar{H}(-x) \cdot m_\omega^S + \\ - [\mu_o + \rho_o(\bar{x},t)] \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + f(\bar{x},t) \cdot e = 0 \quad (3.37)$$

in cui C_t è la rigidezza torsionale della travata, μ_o è l'inerzia rotazionale, per unità di lunghezza, dell'impalcato e $\rho_o(\bar{x},t)$ è la funzione inerzia torsionale del carico viaggiante. L'espressione di $\rho_o(\bar{x},t)$ è la seguente:

$$\rho_o(\bar{x},t) = \lambda_o \cdot H(ct - \bar{x}) \cdot H(\bar{x} + L_p - ct) \quad (3.38)$$

dove λ_o rappresenta l'inerzia rotazionale, per unità di lunghezza, del carico.

I momenti torcenti m_ω^S e m_ω^D rappresentano rispettivamente l'azione che gli stralli della cortina sinistra e della cortina destra esercitano sulla travata:

$$\begin{cases} m_{\omega}^S = [q_v^{S(-b)} - q_v^{S(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} [-\omega \sin^3 \alpha + \psi_s \sin^2 \alpha \cos \alpha] b^2 \\ m_{\omega}^D = [q_v^{D(-b)} - q_v^{D(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} [-\omega \sin^3 \alpha + \psi_D \sin^2 \alpha \cos \alpha] b^2 \end{cases} \quad (3.39)$$

essendo

$$\begin{cases} q_v^{S(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} [-(v + \omega b) \sin^3 \alpha + [(u_s - w) + \psi_s b] \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_v^{D(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} [-(v + \omega b) \sin^3 \alpha + [(u_D + w) + \psi_D b] \sin^2 \alpha \cos \alpha] \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} q_v^{S(+b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} [-(v - \omega b) \sin^3 \alpha + [(u_s - w) - \psi_s b] \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_v^{D(+b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} [-(v - \omega b) \sin^3 \alpha + [(u_D + w) - \psi_D b] \sin^2 \alpha \cos \alpha] \end{cases} \quad (3.41)$$

3.3.4.2. Pila ad “A”

Per tipologie di ponti con pila ad “A” l’equazione di equilibrio della travata è analoga a quella con lo schema in cui la torre è ad “H”, ma il momento torcente dovuto all’azione degli stralli ha un’espressione diversa in conseguenza del fatto che la rotazione torsionale in testa alla pila è praticamente nulla.

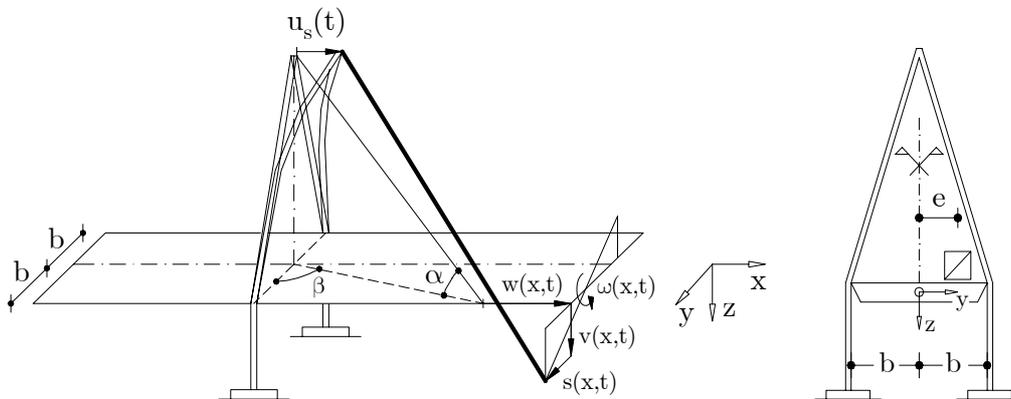


Figura 3.10: Comportamento di uno strallo della torre di sinistra nel caso di torsione della travata con pila ad “A”

A tal fine la descrizione cinematica per lo schema con pila ad “A” rende necessaria l’introduzione di una nuova variabile cinematica $s(x,t)$, identificata dallo spostamento trasversale della travata lungo l’asse y .

In questo caso, infatti, gli stralli presentano una configurazione inclinata rispetto all’asse verticale z e lo sforzo al loro interno ha una componente lungo y che può causare lo spostamento $s(x,t)$. Nel caso di pila ad “H” tale spostamento non può verificarsi se non per azione diretta di un carico esterno agente trasversalmente alla sezione della travata.

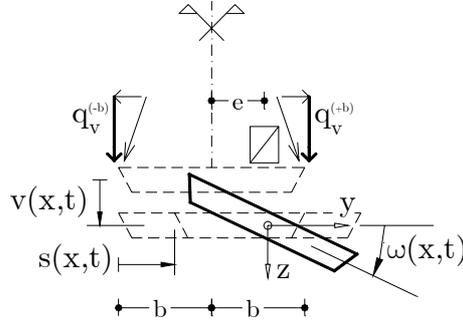


Figura 3.11: Forze agenti sulla sezione nel caso di torsione della travata

L’equazione della torsione della travata, analogamente al caso precedente, è:

$$C_t \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} - \bar{H}(x) \cdot m_\omega^D - \bar{H}(-x) \cdot m_\omega^S +$$

$$- [\mu_o + \rho_o(\bar{x},t)] \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + f(\bar{x},t) \cdot e = 0 \quad (3.42)$$

ma nell’espressione dei momenti torcenti m_ω^S e m_ω^D ottenuti dall’interazione strallo/travata compare la nuova variabile $s(x,t)$:

$$\begin{cases} m_\omega^S = [q_v^{S(-b)} - q_v^{S(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} \left[-\omega b \sin^3 \alpha - \frac{\partial s}{\partial x} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta - s \sin^3 \alpha \cos \beta \right] \\ m_\omega^D = [q_v^{D(-b)} - q_v^{D(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} \left[\omega b \sin^3 \alpha + \frac{\partial s}{\partial x} \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta + s \sin^3 \alpha \cos \beta \right] \end{cases} \quad (3.43)$$

essendo

$$\begin{cases} q_v^{S(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} \left[-(v + \omega b) \sin^3 \alpha - \left[(w - u_s) - \frac{\partial s}{\partial x} \right] \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta - s \sin^3 \alpha \cos \beta \right] \\ q_v^{D(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H\Delta} \left[-(v + \omega b) \sin^3 \alpha - \left[-(w + u_D) + \frac{\partial s}{\partial x} \right] \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin \beta - s \sin^3 \alpha \cos \beta \right] \end{cases} \quad (3.44)$$

Quindi nel caso di pila ad “A” la risoluzione del problema del ponte percorso da un carico viaggiante, che si muove in posizione eccentrica rispetto all’asse di simmetria della sezione trasversale della travata, necessita di un’ulteriore equazione fornita dall’equilibrio dell’impalcato nella direzione dell’asse y . Tale equazione è riportata di seguito:

$$EI_z \frac{\partial^4 s(x, t)}{\partial x^4} + \bar{H}(x) \cdot \left[q_s^D + \frac{\partial m_s^D}{\partial x} \right] + \bar{H}(-x) \cdot \left[q_s^S + \frac{\partial m_s^S}{\partial x} \right] + \mu \cdot \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.45)$$

in cui

$$\begin{cases} m_s^S = [q_s^{S(-b)} + q_s^{S(+b)}] \cdot \frac{\partial s}{\partial x} b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} [-v \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta - (w - u_s) \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta] \\ m_s^D = [q_s^{D(-b)} + q_s^{D(+b)}] \cdot \frac{\partial s}{\partial x} b = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} [-v \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta + (w + u_D) \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta] \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} q_s^S = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} \left[(\omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta - \frac{\partial s}{\partial x} \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + s \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \cos \alpha \right] \\ q_s^D = \frac{2E_s^* A_s}{H\Delta} \left[(\omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos \beta + \frac{\partial s}{\partial x} \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + s \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \cos \alpha \right] \end{cases} \quad (3.47)$$

3.3.5 Torsione delle torri

Per quanto riguarda l’equilibrio alla rotazione della testa delle torri, nel caso di schema ad “H”, bisogna tener conto del contributo fornito dalla componente orizzontale degli stralli in campata e di quello dovuto a quelli di ormeggio. In particolare, con riferimento alla cinematica di cui alla figura 3.12, se si

considera la pila di sinistra l'equazione della torsione (rispetto all'asse z) presenta la seguente forma:

$$K_p^t \psi_S + \int_{-l-L/2}^0 m_{\psi_S} dx + M_o^S - I_p \frac{\partial^2 \psi_S}{\partial t^2} = 0 \quad (3.48)$$

in cui K_p^t rappresenta la rigidezza torsionale della pila e I_p la sua inerzia rotazionale.

Il termine m_{ψ_S} rappresenta la coppia torcente dovuta all'azione della componente orizzontale degli stralli in campata; M_o^S è il momento torcente dovuto alla componente orizzontale dello sforzo negli stralli di ormeggio.

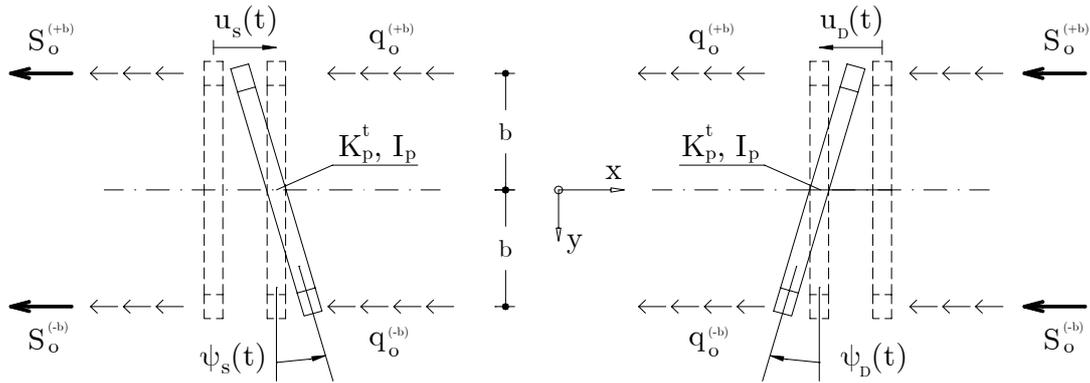


Figura 3.12: Rappresentazione delle forze che provocano torsione in testa alle pile

L'espressione di m_{ψ_S} è:

$$m_{\psi_S} = [q_o^{S(-b)} - q_o^{S(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H \Delta} [\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha - \psi_S \sin \alpha \cos^2 \alpha] b^2 \quad (3.49)$$

essendo

$$\begin{cases} q_o^{S(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-(v + \omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha + [(u_S - w) + \psi_S b] \sin \alpha \cos^2 \alpha] \\ q_o^{S(+b)} = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-(v - \omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha + [(u_S - w) - \psi_S b] \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases}; \quad (3.50)$$

per quanto riguarda gli stralli di riva si ha:

$$M_o^S = [S_o^{S(-b)} - S_o^{S(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_o}{H} [-\psi_S \sin \alpha \cos^2 \alpha] b^2 \quad (3.51)$$

essendo

$$\begin{cases} S_o^{S(-b)} = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [(u_S - w) + \psi_S b] \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o \\ S_o^{S(+b)} = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [(u_S - w) - \psi_S b] \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o \end{cases} \quad (3.52)$$

Se si considera invece la pila di destra si ha:

$$K_p^t \psi_D + \int_0^{L/2+l} m_{\psi_D} dx + M_o^D - I_p \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial t^2} = 0 \quad (3.53)$$

in cui m_{ψ_D} è pari a:

$$m_{\psi_D} = [q_o^{D(-b)} - q_o^{D(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_s}{H \Delta} [-\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \psi_D \sin \alpha \cos^2 \alpha] b^2 \quad (3.54)$$

essendo

$$\begin{cases} q_o^{D(-b)} = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-(v + \omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha + [(u_D - w) + \psi_D b] \sin \alpha \cos^2 \alpha] \\ q_o^{D(+b)} = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-(v - \omega b) \sin^2 \alpha \cos \alpha + [(u_D - w) - \psi_D b] \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases} \quad (3.55)$$

mentre

$$M_o^D = [S_o^{D(-b)} - S_o^{D(+b)}] \cdot b = \frac{2E_s^* A_o}{H} [\psi_D \sin \alpha \cos^2 \alpha] b^2 \quad (3.56)$$

essendo

$$\begin{cases} S_o^{D(-b)} = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [-(u_D + w) + \psi_D b] \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o \\ S_o^{D(+b)} = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [-(u_D + w) - \psi_D b] \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o \end{cases} \quad (3.57)$$

3.3.6 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema

Il problema dell'analisi del comportamento dinamico di un ponte strallato soggetto all'azione di un carico viaggiante è descritto dal sistema di equazioni integro-differenziali (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.48), (3.53) nel caso di pile ad "H", e dal sistema (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.42) nel caso di pile ad "A". Tale sistema per la sua risoluzione necessita di condizioni al contorno e di condizioni iniziali.

Le condizioni agli estremi per ciò che riguarda la flessione della travata sono date dallo spostamento e dal momento flettente nullo in corrispondenza degli appoggi:

$$\begin{aligned} v(-l - L/2, t) = 0 & \quad v(l + L/2, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=-l-L/2} = 0 & \quad \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l+L/2} = 0; \end{aligned} \quad (3.58)$$

per quel che concerne l'equilibrio assiale si deve avere che in corrispondenza dello strallo di ormeggio lo sforzo nella travata deve essere pari al tiro del cavo stesso:

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=-l-L/2} = -\frac{S_o^S}{EA} \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l+L/2} = -\frac{S_o^D}{EA}; \quad (3.59)$$

per la torsione della travata si deve avere rotazione nulla nelle estremità della travata in corrispondenza del vincolo torsionale:

$$\omega(-l - L/2, t) = 0 \quad \omega(l + L/2, t) = 0. \quad (3.60)$$

Le condizioni iniziali invece sono date da spostamento e velocità nulle lungo tutta la travata nella direzione dell'asse z

$$v(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.61)$$

spostamento e velocità nulle lungo tutta la travata nella direzione dell'asse x

$$w(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.62)$$

spostamenti e velocità nulle in testa alle pile

$$u_S(0) = 0 \quad \left. \frac{\partial u_S(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.63)$$

$$u_D(0) = 0 \quad \left. \frac{\partial u_D(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.64)$$

rotazione torsionale e velocità di rotazione nulle lungo tutta la travata

$$\omega(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3.65)$$

rotazione torsionale e velocità di rotazione nulle in testa alle pile

$$\psi_S(0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi_S(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.66)$$

$$\psi_D(0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi_D(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.67)$$

3.4 Formulazione adimensionale del problema

Al fine di ottenere una trattazione generalizzata del problema è conveniente utilizzare una formulazione adimensionale. Attraverso tale formulazione è possibile individuare dei parametri che tengono conto delle caratteristiche geometriche e meccaniche che influenzano la deformabilità del ponte strallato percorso da un carico viaggiante.

In particolare per quanto riguarda le caratteristiche della travata sono state individuate le seguenti quantità adimensionali:

$$\varepsilon_F = \left[\frac{4I_y \sigma_g}{H^3 g} \right]^{\frac{1}{4}} \quad \varepsilon_A = \frac{A \sigma_g}{Hg} \quad \varepsilon_T = \left[\frac{C_t \sigma_g}{Eb^2 Hg} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

rispettivamente parametri di rigidezza flessionale, assiale e torsionale. Il sistema di sospensione degli stralli è descritto dal parametro a , di seguito riportato, che rappresenta un parametro di luce del ponte:

$$a = \frac{\gamma_s H^2 E}{12 \sigma_g^3}. \quad (3.69)$$

Le caratteristiche di rigidezza dei piloni e le loro proprietà inerziali sono tenute in conto attraverso le seguenti quantità:

$$\eta_p = \frac{K_p \sigma_g}{Eg} \quad \zeta_p = \frac{M_p}{\mu H} \quad (3.70)$$

I parametri che si riferiscono alle caratteristiche inerziali del carico mobile e della travata sono:

$$\zeta = \frac{\lambda}{\mu} \quad \zeta_o = \frac{\mu_o}{\mu b^2} \quad (3.71)$$

mentre per quanto riguarda le caratteristiche del carico viaggiante, la sua intensità e la sua velocità di percorrenza sono tenuti in conto dalle seguenti quantità:

$$\bar{p} = \frac{p\sigma_g}{Eg} \quad \bar{e} = \frac{e}{b} \quad \theta = c \left(\frac{\mu\sigma_g}{EgH} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tau = t \left(\frac{Eg}{\mu H\sigma_g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.72)$$

La cinematica del problema viene descritta attraverso le quantità riportate di seguito:

$$V = \frac{v}{H} \quad W = \frac{w}{H} \quad U_s = \frac{u_s}{H} \quad U_D = \frac{u_D}{H}. \quad (3.73)$$

Una rappresentazione dei parametri ottenuti attraverso la formulazione adimensionale è riportata nella figura seguente:

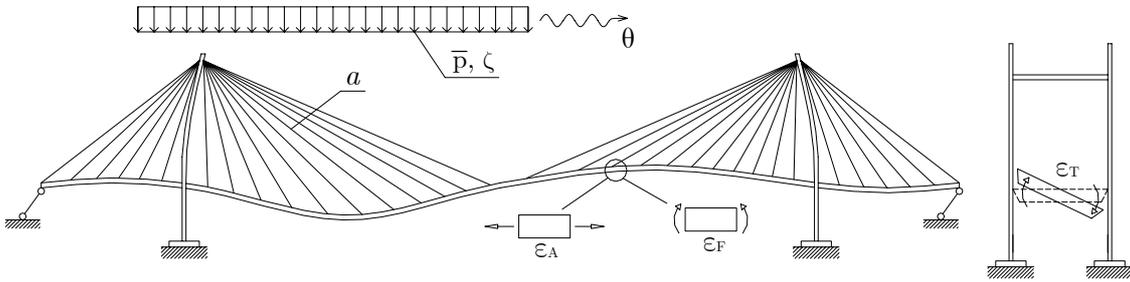


Figura 3.13: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte strallato

La formulazione in termini di variabili adimensionali, per quanto riguarda l'*equilibrio della travata*, assume quindi la seguente forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varepsilon_F^4}{4} \right) \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \varphi V - \left[\varphi_1 (\bar{H}_1 (U_s - W) + \bar{H}_2 (U_D + W)) \right] + \\ & - \bar{p} f_1 + \zeta \theta f_2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \zeta f_1 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + 2\theta \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + \theta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right] + \\ & + k_v \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \right] V = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_A \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \bar{H}_1 (\varphi_1 V + \varphi_2 (W - U_s)) + \\ - \bar{H}_2 (-\varphi_1 V + \varphi_2 (W + U_D)) - \zeta \theta f_2 \frac{\partial W}{\partial \tau} - \zeta f_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_T \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} - \zeta_o \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} - \varphi \omega + \varphi_1 (\bar{H}_1 \psi_s + \bar{H}_2 \psi_D) + \\ + \frac{H}{b} \bar{p} f_1 \bar{e} - \zeta_o \theta f_2 \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \zeta_o f_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

in cui $X = x/H$, $\bar{H}_1 = \bar{H}(-X)$, $\bar{H}_2 = \bar{H}(X)$. Il termine k_v è un parametro di penalizzazione dello spostamento verticale della travata che serve a riprodurre il vincolo di appoggio in corrispondenza delle pile. Le funzioni $f_1(\bar{X}, \tau)$, $f_2(\bar{X}, \tau)$, $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$, dove $\bar{X} = \bar{x}/H$, sono riportate di seguito:

$$f_1(\bar{X}, \tau) = \bar{H}(\tau\theta - \bar{X}) \cdot \bar{H}\left(\bar{X} + \frac{L_p}{H} - \tau\theta\right) \quad (3.77)$$

$$f_2(\bar{X}, \tau) = \delta(\tau\theta - \bar{X}) \cdot \bar{H}\left(\bar{X} + \frac{L_p}{H} - \tau\theta\right) - \delta\left(\bar{X} + \frac{L_p}{H} - \tau\theta\right) \cdot \bar{H}(\tau\theta - \bar{X}) \quad (3.78)$$

$$\varphi(X) = \begin{cases} \frac{1}{1+aX^2} \frac{1}{1+X^2} & \frac{l}{H} - \frac{L}{2H} \leq X \leq 0 \\ \frac{1}{1+a\left(\frac{L}{2H} - X\right)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{L}{2H} - X\right)^2} & 0 \leq X \leq \frac{L}{2H} + \frac{l}{H} \end{cases} \quad (3.79)$$

$$\varphi_1(X) = \begin{cases} \frac{1}{1+aX^2} \frac{X}{1+X^2} & \frac{l}{H} - \frac{L}{2H} \leq X \leq 0 \\ \frac{1}{1+a\left(\frac{L}{2H} - X\right)^2} \frac{\left(\frac{L}{2H} - X\right)}{1+\left(\frac{L}{2H} - X\right)^2} & 0 \leq X \leq \frac{L}{2H} + \frac{l}{H} \end{cases} \quad (3.80)$$

$$\varphi_2(X) = \begin{cases} \frac{1}{1+aX^2} \frac{X^2}{1+X^2} & \frac{l}{H} - \frac{L}{2H} \leq X \leq 0 \\ \frac{1}{1+a\left(\frac{L}{2H}-X\right)^2} \frac{\left(\frac{L}{2H}-X\right)^2}{1+\left(\frac{L}{2H}-X\right)^2} & 0 \leq X \leq \frac{L}{2H} + \frac{l}{H} \end{cases} \quad (3.81)$$

Nell'ipotesi di schema ad "H", per quanto riguarda l'*equilibrio della pila sinistra* si ha:

$$\int_{-l/H-L/(2H)}^0 [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W - U_s)] dX + \left(\eta_p U_s + \zeta_p \frac{\partial^2 U_s}{\partial \tau^2} \right) - \chi (W - U_s) = 0 \quad (3.82)$$

$$\zeta_p \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \tau^2} + (\eta_p + \chi) \psi_s + \int_{-l/H-L/(2H)}^0 (\varphi_1 \theta - \varphi_2 \psi_s) dX = 0 \quad (3.83)$$

dove

$$\chi = \frac{E_s^* A_o}{E} \frac{\sigma_g}{gH} \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o. \quad (3.84)$$

Per l'*equilibrio della pila destra*, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ottiene:

$$\int_0^{L/(2H)+l/H} [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W + U_D)] dX + \left(\eta_p U_D + \zeta_p \frac{\partial^2 U_D}{\partial \tau^2} \right) - \chi (W + U_D) = 0 \quad (3.85)$$

$$\zeta_p \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \tau^2} + (\eta_p + \chi) \psi_D + \int_0^{L/(2H)+l/H} (\varphi_1 \theta - \varphi_2 \psi_D) dX = 0. \quad (3.86)$$

Nel caso di pila ad “A” nelle equazioni di equilibrio non compaiono quelle relative alla torsione in testa alle torri ma soltanto quelle che si riferiscono alla flessione, in conseguenza del fatto che $\psi_s = \psi_D = 0$.

Il sistema ottenuto, composto dalle (3.74), (3.75), (3.76), (3.82), (3.83), (3.85), (3.86), è un sistema in cui le equazioni che si riferiscono all’equilibrio della travata sono in forma differenziale mentre quelle relative all’equilibrio delle pile sono in forma integrale. La risoluzione analitica di un tale sistema non è affatto agevole, pertanto si è scelto di percorrere la strada della risoluzione numerica. Per poter risolvere il problema attraverso l’utilizzo di un metodo numerico bisogna ricondurre il sistema di equazioni integro-differenziali ad un sistema di equazioni alle derivate parziali. Bisogna quindi trasformare le equazioni di equilibrio delle pile in equazioni differenziali in cui le variabili adimensionali siano dipendenti sia dallo spazio che dal tempo. Attraverso l’introduzione di parametri di penalizzazione relativi agli spostamenti orizzontali e alle rotazioni torsionali in testa alle pile (k_U, k_ψ) è possibile riprodurre la dipendenza di tali variabili dallo spazio, in questo modo si possono scrivere le seguenti equazioni di equilibrio in termini differenziali:

$$\bar{H}_1 [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W - U_s)] + \delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) \left(\eta_p U_s + \zeta_p \frac{\partial^2 U_s}{\partial \tau^2} \right) + k_U \frac{\partial^2 U_s}{\partial X^2} = 0 \quad (3.87)$$

$$\bar{H}_1 (\varphi_1 \theta - \varphi_2 \psi_s) + \delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) \left(\eta_p \psi_s + \zeta_p \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \tau^2} \right) + k_\psi \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial X^2} = 0 \quad (3.88)$$

per quanto riguarda la pila sinistra; equazioni analoghe si ottengono per la pila destra:

$$-\bar{H}_2 [\varphi_1 V - \varphi_2 (W + U_D)] + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \left(\eta_p U_D + \zeta_p \frac{\partial^2 U_D}{\partial \tau^2} \right) + k_U \frac{\partial^2 U_D}{\partial X^2} = 0 \quad (3.89)$$

$$-\bar{H}_2 (\varphi_1 \theta - \varphi_2 \psi_D) + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \left(-\eta_p \psi_D + \zeta_p \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \tau^2} \right) + k_\psi \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial X^2} = 0. \quad (3.90)$$

Il sistema così ottenuto, composto dalle (3.74), (3.75), (3.76), (3.87), (3.88), (3.89), (3.90), è un sistema di equazioni alle derivate parziali retto dai parametri di penalizzazione k_V , k_U e k_ψ ; il primo si riferisce allo spostamento verticale della travata e ha lo scopo di vincolare l'abbassamento in corrispondenza della connessione della travata con la pila, il secondo riguarda gli spostamenti orizzontali in testa alle pile e serve ad introdurre la dipendenza di tali variabili dallo spazio, il terzo serve ad introdurre la dipendenza dallo spazio delle rotazioni torsionali in cima alle torri. I parametri di penalizzazione devono assumere valori abbastanza elevati in modo da imporre le condizioni di vincolo desiderate ma non troppo per non incorrere in instabilità numeriche durante l'analisi.

Le *condizioni al contorno* secondo la formulazione adimensionale sono:

$$\begin{aligned} V\left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) &= 0 & V\left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau\right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= 0 & \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= \frac{\chi}{\varepsilon_A} (W - U_s) \\ \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= -\frac{\chi}{\varepsilon_A} (W + U_D) \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\omega\left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) = 0 \quad \omega\left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau\right) = 0 \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= -\frac{\chi}{k_U} (W - U_s) \\ \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=-\frac{l}{H}-\frac{L}{2H}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L}{2H}+\frac{l}{H}} &= \frac{\chi}{k_U} (W + U_D) \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_s(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=-\frac{l}{H}-\frac{L}{2H}} &= \frac{\chi}{k_\psi} \\ \left. \frac{\partial \psi_s(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L}{2H}+\frac{l}{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=-\frac{l}{H}-\frac{L}{2H}} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \psi_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L}{2H}+\frac{l}{H}} &= \frac{\chi}{k_\psi} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Le *condizioni iniziali* vengono riportate di seguito:

$$V(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial V(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.98)$$

$$W(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.99)$$

$$\omega(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \omega(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.100)$$

$$U_s(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.101)$$

$$U_D(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.102)$$

$$\psi_S(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi_S(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (3.103)$$

$$\psi_D(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi_D(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (3.104)$$

Capitolo 4

I ponti sospesi

4.1 Introduzione

Il problema del carico mobile viene affrontato nell'ambito dei ponti sospesi. L capitolo presenta inizialmente concetti e schematizzazioni attinenti alla statica del cavo. Successivamente le problematiche vengono generalizzate nell'ambito dei ponti sospesi valutando il loro comportamento dinamico in presenza di carichi viaggianti mediante un approccio al continuo.

Le equazioni del problema vengono prodotte in forma adimensionale introducendo particolari parametri strettamente connessi con le caratteristiche geometriche e di rigidezza dei diversi elementi strutturali di cui il ponte si compone.

4.2 Statica del cavo

Si consideri un cavo perfettamente flessibile sospeso tra i punti A e B soggetto unicamente al peso proprio; il carico per unità di lunghezza lungo la luce l_c è pari a $q(x)dx = g_c(s)ds$ essendo $g_c(s)$ il peso del cavo per unità di lunghezza.

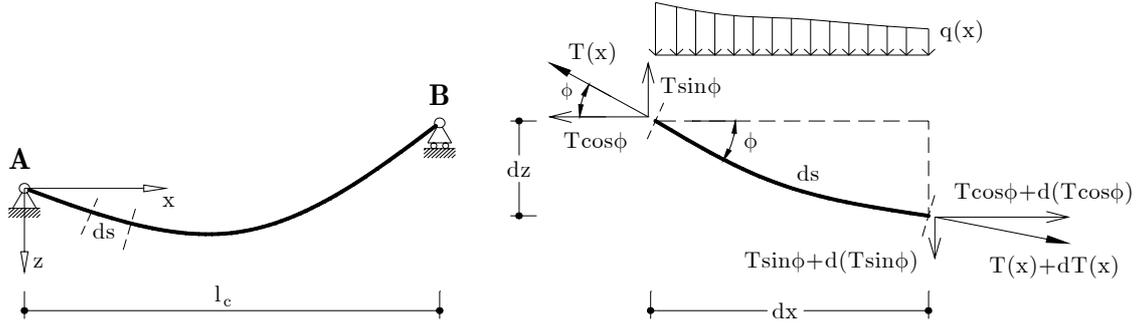


Figura 4.1: Un cavo sotto l'azione del peso proprio per unità di lunghezza

Il cavo è privo di rigidità flessionale e quindi l'unica forza agente al suo interno è una forza di trazione T variabile lungo il cavo stesso. La retta d'azione del tiro è tangente alla curva che rappresenta la deformata di equilibrio del cavo. Se si considera un elemento di lunghezza ds le tensioni ai due estremi sono $T(x)$ e $T(x)+dT(x)$; le due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale sono rispettivamente:

$$-T \cos \phi + T \cos \phi + \frac{\partial(T \cos \phi)}{\partial x} dx = 0 \quad (4.1)$$

$$-T \sin \phi + q dx + T \sin \phi + \frac{\partial(T \sin \phi)}{\partial x} dx = 0. \quad (4.2)$$

Secondo la prima equazione, la componente orizzontale del tiro nel cavo, indicata con H_{t0} , è costante:

$$\frac{\partial(T \cos \phi)}{\partial x} dx = 0 \Rightarrow T \cos \phi = \text{cost} = H_{t0} \quad (4.3)$$

e sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_{t0} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = -q \quad (4.4)$$

essendo $\tan \phi = dz / dx$.

Nel caso di *cavo ribassato* si ha $dx / ds \approx 1$, quindi il peso per unità di lunghezza lungo x è uguale al peso per unità di lunghezza lungo il cavo ($q(x) = g_c(s)$). In questa condizione lo studio del cavo soggetto all'azione del proprio peso equivale allo studio del cavo sotto l'azione di un carico distribuito uniformemente lungo la luce l_c .

Quando un cavo è soggetto ad un carico uniformemente distribuito $q(x)$ lungo la luce assume la configurazione di una parabola ad asse verticale la cui equazione è la seguente:

$$z = -\frac{1}{2} \frac{q}{H_{10}} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (4.5)$$

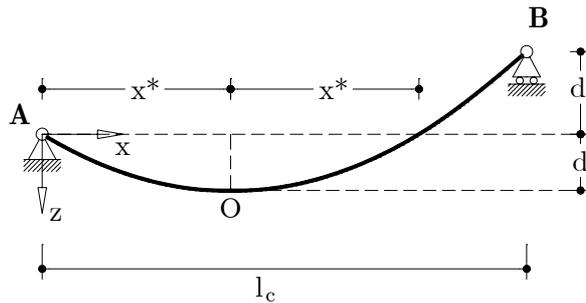


Figura 4.2: Cavo sospeso tra due punti A e B

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 possono essere facilmente annullate ponendo l'origine del sistema di riferimento in O, il punto più basso, nonché vertice, della parabola; la sua lunghezza è data da:

$$s = \int_0^{l_c} ds = \int_0^{l_c} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.6)$$

La componente orizzontale del tiro può essere facilmente determinata a partire dalla geometria del cavo; con riferimento alla figura precedentemente riportata si ha:

$$x^* = \frac{l_c}{d'} \left[\sqrt{d(d+d')} - d \right] \quad (4.7)$$

$$H_{t_0} = \frac{q(x^*)^2}{2d}. \quad (4.8)$$

Nel caso particolare in cui gli estremi A e B sono allo stesso livello $x^* = l_c/2$ e quindi si ottiene:

$$H_{t_0} = \frac{ql_c^2}{8d} \quad (4.9)$$

Una forma più agevole per la lunghezza s può essere ottenuta espandendo in serie la (4.6), dopo aver sostituito a dz/dx l'espressione che si ottiene derivando la (4.5):

$$s = l_c \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d}{l_c} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{d}{l_c} \right)^4 + \frac{256}{7} \left(\frac{d}{l_c} \right)^6 - \dots \right\}.$$

Nella condizione di cavo ribassato, che può essere espressa tramite $d/l_c \leq 1/10$, è sufficiente considerare i primi due termini della serie ottenendo così:

$$\tilde{l}_c = l_c \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{d}{l_c} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

avendo indicato con \tilde{l}_c la lunghezza effettiva del cavo.

Si consideri ora il caso in cui il cavo, oltre ad essere soggetto all'azione del peso proprio q , deve sostenere un carico distribuito p .

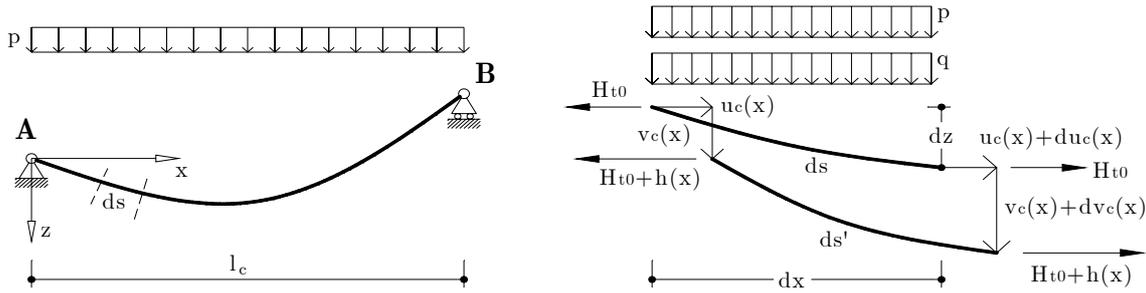


Figura 4.3: Un cavo sotto l'azione del proprio peso q e di un carico accidentale p

In seguito all'applicazione del carico p la componente orizzontale del tiro subisce un incremento passando da H_{t0} a $H_{t0} + h(x)$ e i punti del cavo si abbassano lungo z secondo la funzione $v_c(x)$ e traslano lungo x secondo la funzione $u_c(x)$. L'equazione di *equilibrio lungo x* , analogamente a quanto visto in precedenza, fornisce la seguente relazione:

$$T \cos \phi = \text{cost} = H_{t0} + h(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} h(x) = 0. \quad (4.11)$$

L'*equilibrio lungo z* porta all'equazione seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(H_{t0} + h(x)) \cdot \left(\frac{dz}{dx} + \frac{\partial v_c(x)}{\partial x} \right) \right] = -(q + p). \quad (4.12)$$

Tenendo presente la (4.4), dopo semplici passaggi, l'equilibrio del cavo in direzione verticale può essere espresso nel seguente modo:

$$H_{t0} \frac{\partial^2 v_c(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} h(x) \left(\frac{dz}{dx} + \frac{\partial v_c(x)}{\partial x} \right) + h(x) \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 v_c(x)}{\partial x^2} \right) = -p. \quad (4.13)$$

Poiché la soluzione del problema del cavo soggetto ad un carico accidentale richiede la conoscenza di tre variabili, date dalla componente orizzontale dell'incremento di tiro $h(x)$ e dagli spostamenti $v_c(x)$ e $u_c(x)$ prodotti dall'applicazione del carico p , la terza equazione viene fornita dalla condizione

di *congruenza del cavo*. Per la condizione di congruenza l'allungamento elastico, dovuto all'incremento di tiro, e l'allungamento dovuto agli spostamenti devono essere uguali. Con riferimento ad un elemento di lunghezza ds si ha:

$$ds'^2 = (ds + \Delta ds)^2 \quad (4.14)$$

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 \quad (4.15)$$

$$ds'^2 = (dx + du_c)^2 + (dz + dv_c)^2. \quad (4.16)$$

Dal confronto tra la (4.14) e la (4.16), sviluppando i quadrati, si ottiene:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial u_c}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial v_c}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial s} \right)^2 \quad (4.17)$$

in cui si è trascurato il termine $(\Delta ds)^2$ essendo l'allungamento $\Delta ds/ds$ in genere molto piccolo (i.e. $\ll 1$). Per lo stesso motivo, e per il fatto di essere nell'ipotesi di profilo del cavo ribassato, si è trascurato anche il termine $(du_c)^2$. L'allungamento elastico del cavo è pari a:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{E_c A_c} \frac{ds}{dx} \quad (4.18)$$

avendo indicato con E_c il modulo elastico e con A_c l'area della sezione del cavo. Dall'uguaglianza tra la (4.17) e la (4.18), moltiplicando per ds^2/dx^2 , si giunge alla seguente condizione di congruenza:

$$\frac{h}{E_c A_c} \left(\frac{ds}{dx} \right)^3 = \frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{dz}{dx} \frac{\partial v_c}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_c}{\partial x} \right)^2. \quad (4.19)$$

La configurazione assunta da un cavo sospeso tra due punti in seguito all'applicazione di un carico distribuito p viene pertanto definita attraverso le tre equazioni (4.11), (4.13), per quanto riguarda la condizione di equilibrio, e (4.19), per ciò che concerne la condizione di congruenza del cavo.

4.3 Formulazione del problema

Lo schema adottato per il ponte sospeso è un modello piano in cui viene usata la formulazione di *Eulero-Bernoulli* per descrivere il comportamento della travata e dei piloni. Si fa riferimento ad uno schema in cui il cavo è ancorato a terra, mentre le estremità della travata sono vincolate lungo la direzione verticale. Il cavo principale è stato modellato mediante un'approssimazione parabolica, che fornisce risultati accurati quando i rapporti tra freccia e proiezione orizzontale risultano molto minori rispetto all'unità (i.e. $d/L \leq 1/10$). Inoltre, si assume che il comportamento del cavo e dei pendini a sostegno dell'impalcato risultino perfettamente flessibili e quindi privi di momenti flettenti.

Nel modello strutturale preso in considerazione si ipotizza una distribuzione uniforme dei pendini lungo la travata con interasse Δ piccolo rispetto alla luce centrale del ponte. La deformazione dei pendini viene tenuta in conto, in quanto la cinematica di riferimento prevede differenze di spostamento verticale tra cavo principale e travata.

Si suppone che la realizzazione del ponte determini una distribuzione di tensioni iniziali tale da assicurare una configurazione della travata pressoché rettilinea e priva di momenti flettenti; nel cavo principale invece si genera uno stato di trazione mentre è di compressione nei piloni. In questo modo il comportamento del ponte soggetto al carico mobile viene analizzato a partire dalla condizione di equilibrio sotto l'azione del peso proprio della struttura.

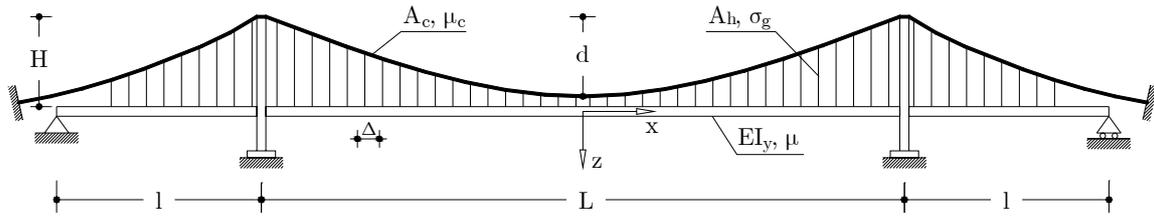


Figura 4.4: I parametri che definiscono la geometria del ponte sospeso

Per quanto riguarda le dimensioni degli elementi strutturali, la sezione trasversale del cavo, A_c , viene calcolata supponendo agente sul ponte, oltre al peso proprio g , il carico accidentale p distribuito sulla campata centrale in modo da produrre nel cavo al massimo una tensione pari a quella ammissibile, σ_a . Le aree dei pendini di sospensione, A_h , sono calcolate in modo da ottenere una tensione costante, pari a σ_g , in tutti i cavi sotto l'azione del peso proprio. In particolare il dimensionamento degli elementi di sospensione e del cavo principale avviene secondo le seguenti espressioni:

$$A_c = \frac{(g+p)L\sqrt{L^2+16d^2}}{8\sigma_a d - \gamma_c L\sqrt{L^2+16d^2}}; \quad A_h = \frac{g\Delta}{\sigma_g} \quad (4.20)$$

in cui la tensione σ_g è definita in funzione della tensione ammissibile σ_a , del peso proprio g e del carico accidentale p :

$$\sigma_g = \frac{g}{p+g}\sigma_a. \quad (4.21)$$

La configurazione iniziale del cavo viene descritta, con buona approssimazione, attraverso una funzione parabolica in quanto nel caso dei ponti sospesi di grande luce si ricade frequentemente nell'ipotesi di cavo ribassato, cioè $d/L \leq 1/10$. In questo modo si può assumere che la componente orizzontale del tiro dovuto ai soli carichi fissi sia costante lungo l'intero cavo e pari alla seguente espressione:

$$H_{i0} = \frac{(g + g_c)L^2}{8d} \quad (4.22)$$

dove g_c è il peso proprio del cavo per unità di lunghezza. Tale ipotesi è giustificata dal fatto che il cavo può scorrere in testa ai piloni assumendo quindi vincoli di collegamento senza attrito.

I parametri che caratterizzano la deformazione del ponte sotto l'azione del carico viaggiante p sono:

$v(x,t)$ = funzione degli abbassamenti verticali della travata;

$v_c(x,t)$ = spostamento verticale del cavo di sospensione;

$u_c(x,t)$ = spostamento orizzontale del cavo di sospensione.

Il carico viaggiante è modellato analogamente a quanto visto per il caso del ponte strallato, come riportato nel § 3.3.1. L'analisi tiene in considerazione, oltre alla massa della travata e del cavo di sospensione, anche la massa del carico mobile; tuttavia non viene tenuta in conto la massa dei pendini di sospensione tra la travata e il cavo perchè ritenuta trascurabile.

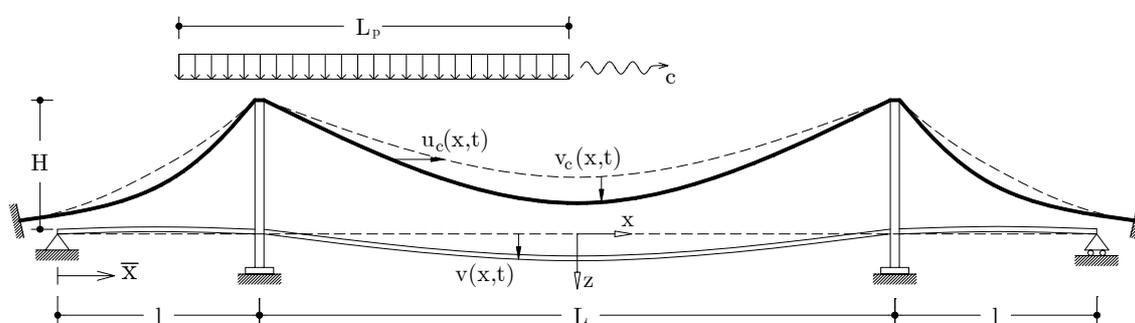


Figura 4.5: I parametri che definiscono la deformazione del ponte sospeso

4.3.1 Interazione tra il cavo e la travata

Il cavo di sospensione e la travata hanno la possibilità di interagire attraverso i pendini di sospensione. Il passaggio del carico determina un cambiamento di configurazione sia al cavo che alla travata che subiscono uno spostamento $v_c(x,t)$ il primo e $v(x,t)$ la seconda.

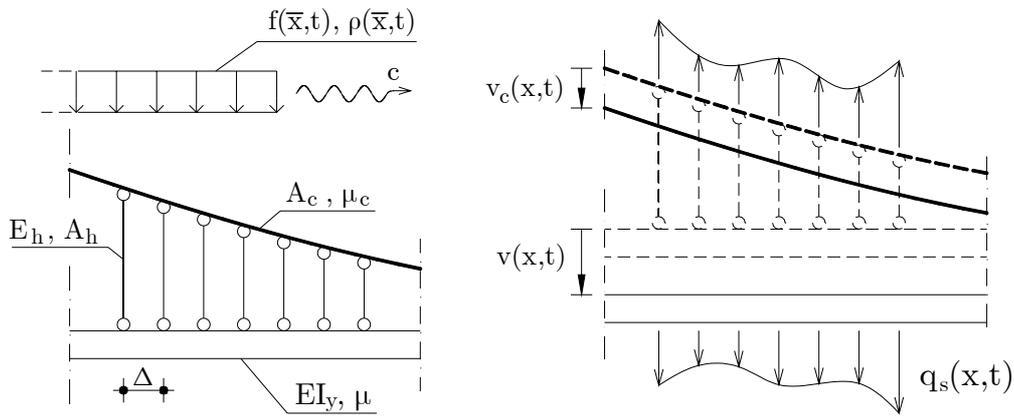


Figura 4.6: Schematizzazione dell'interazione tra cavo e travata

Se si considera una porzione di ponte, nell'ipotesi in cui gli elementi di collegamento tra cavo e travata possono essere assunti uniformemente distribuiti, si può ricavare l'azione che i pendini esercitano sulla travata a causa della loro deformazione elastica. In particolare, indicando con Δ l'interasse dei pendini, l'azione distribuita sulla travata è pari a:

$$q_s(x, t) = \frac{E_h A_h}{\Delta} \frac{[v(x, t) - v_c(x, t)]}{[H - \bar{z}(x)]} \tag{4.23}$$

in cui $\bar{z}(x)$ è l'ordinata dei punti con cui è stato descritto il profilo assunto dal cavo di sospensione.

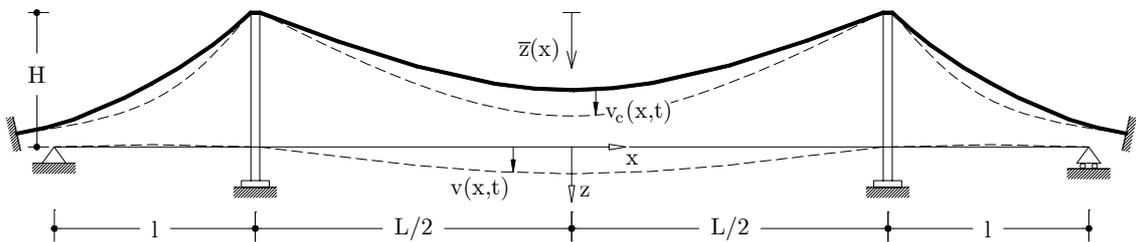


Figura 4.7: Rappresentazione delle grandezze che intervengono nel calcolo di $q_s(x, t)$

L'espressione che $\bar{z}(x)$ assume nelle tre campate del ponte viene riportata di seguito:

$$\bar{z}(x) = \begin{cases} \frac{g + g_c}{2H_{t_0}} x^2 + \left[\frac{g + g_c}{2H_{t_0}l} (l^2 + lL) + \frac{H}{l} \right] x + \\ \quad + \frac{g + g_c}{8H_{t_0}l} [2l^2L + lL^2] + \frac{H(L + 2l)}{2l} & -l - \frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{L}{2} \\ \frac{g + g_c}{2H_{t_0}} x^2 & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{g + g_c}{2H_{t_0}} x^2 - \left[\frac{g + g_c}{2H_{t_0}l} (l^2 + lL) + \frac{H}{l} \right] x + \\ \quad + \frac{g + g_c}{8H_{t_0}l} [2l^2L + lL^2] + \frac{H(L + 2l)}{2l} & \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + l \end{cases} \quad (4.24)$$

È importante notare che è stato trascurato il contributo dello spostamento orizzontale del cavo $u_c(x,t)$ nel calcolo di $q_s(x,t)$ perché ritenuto ininfluenza nei riguardi della soluzione generale.

4.3.2 Equilibrio della travata

Le equazioni di equilibrio dinamico sono ricavate tenendo in conto l'azione verticale prodotta dal carico mobile e le forze di interazione tra cavo e travata dovuta ai pendini di sospensione.

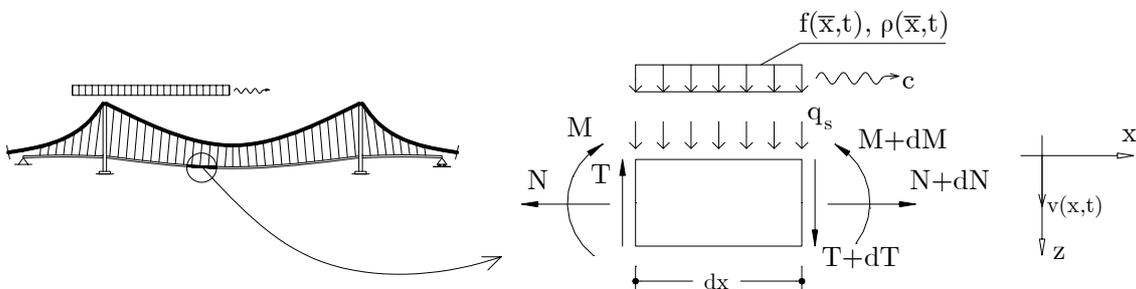


Figura 4.8: Azioni agenti su un conio di travata del ponte sospeso

Se si considera un concio di travata e si esplicitano le azioni che intervengono su di esso è possibile ricavare l'equazione di equilibrio della travata secondo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - q_s(x,t) + \mu \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \\ = f(\bar{x},t) - \rho(\bar{x},t) \cdot \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} - \frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} \cdot \frac{dv(x,t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.25)$$

in cui EI_y è la rigidezza flessionale della travata e μ è la sua massa per unità di lunghezza; $q_s(x,t)$ rappresenta l'interazione tra cavo e travata. Inoltre le funzioni $f(\bar{x},t)$ e $\rho(\bar{x},t)$ descrivono le funzioni di carico e di massa dell'ente viaggiante, mentre le derivate totali presenti nell'equazione di equilibrio seguono le precedenti espressioni ottenute dalla descrizione del carico mobile nell'ambito del ponte strallato (i.e. eq.(3.24) e eq.(3.25)).

4.3.3 Equilibrio del cavo

La posizione del cavo di sospensione durante il passaggio del carico è data da un contributo iniziale afferente alla configurazione da peso proprio ed una quantità incrementale derivante dall'azione del carico mobile:

$$\bar{z}_c(x,t) = \bar{z}(x) + v_c(x,t). \quad (4.26)$$

Le equazioni di equilibrio dinamico si possono ottenere a partire dalle equazioni di equilibrio statico (eq.(4.12)) mettenendo in conto i contributi inerziali di massa propria del ponte.

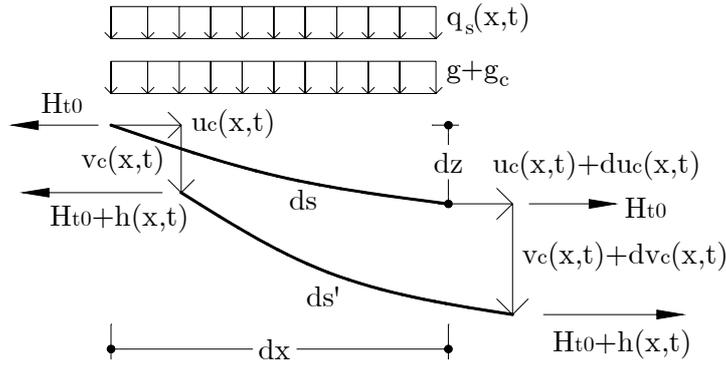


Figura 4.9: Risposta di un concio di cavo del ponte sospeso all'azione del carico mobile

Per effetto del carico viaggiante lo stato tensionale all'interno del cavo subisce delle variazioni rispetto alla condizione in cui ad agire sono soltanto i carichi fissi $(g + g_c)$. In particolare, la componente orizzontale del tiro ad un generico passo di carico è dato da un contributo costante di H_{t0} e da una quantità variabile secondo la seguente espressione:

$$H_t(x, t) = H_{t0} + h(x, t) \tag{4.27}$$

in cui $h(x, t)$ è l'incremento di tiro dovuto all'azione del carico. L'equazione di equilibrio dinamico lungo z del cavo soggetto all'azione dei carichi permanenti ed al carico mobile è fornita dalla seguente espressione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_t(x, t) \cdot \frac{\partial \bar{z}_c}{\partial x} \right) - \mu_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} = -(g + g_c) - q_s(x, t) \tag{4.28}$$

in cui μ_c indica la massa del cavo per unità di lunghezza.

La (4.28) può essere espressa in termini di variabili incognite sostituendo le (4.27), (4.26) nella equazione di equilibrio statico del cavo sotto l'azione di $(g + g_c)$ ottenendo l'equazione generale di equilibrio dinamico del cavo parabolico lungo la direzione verticale:

$$\begin{aligned}
& [H_{i0} + h(x,t)] \frac{\partial^2 v_c(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t) \frac{\partial^2 \bar{z}(x)}{\partial x^2} + \\
& + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \left[\frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_c(x,t)}{\partial x} \right] - \mu_c \frac{\partial^2 v_c(x,t)}{\partial t^2} = -q_s(x,t)
\end{aligned} \quad (4.29)$$

Inoltre, l'equilibrio dinamico lungo l'asse x fornisce la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x,t) \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial x} \right] - \mu_c \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.30)$$

La risoluzione del problema generale del ponte sospeso, oltre alle (4.29) e (4.30), necessita di una equazione aggiuntiva che viene fornita dalla congruenza tra l'allungamento elastico del cavo e quello dovuto al cambiamento di configurazione per l'azione del carico. In analogia alla (4.19), l'equazione di compatibilità cinematica del cavo presenta la seguente espressione:

$$\frac{h(x,t)}{E_c A_c} \left(1 + \frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial x} \frac{\partial v_c(x,t)}{\partial x}. \quad (4.31)$$

4.3.4 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema

Il problema dell'analisi del comportamento dinamico del ponte sospeso soggetto all'azione di un carico viaggiante è descritto dal sistema di equazioni (4.25), (4.29), (4.30), (4.31). Tale sistema per la sua risoluzione necessita di condizioni al contorno e di condizioni iniziali.

Le condizioni agli estremi per ciò che riguarda la flessione della travata sono date dallo spostamento e dal momento flettente nullo in corrispondenza degli appoggi:

$$\begin{aligned}
v(-l - L/2, t) &= 0 & v(l + L/2, t) &= 0 \\
\left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=-l-L/2} &= 0 & \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l+L/2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Per quel che riguarda l'equilibrio del cavo si devono avere spostamenti nulli in corrispondenza dell'ancoraggio a terra:

$$v_c(-l - L/2, t) = 0 \quad v_c(l + L/2, t) = 0 \tag{4.33}$$

$$u_c(-l - L/2, t) = 0 \quad u_c(l + L/2, t) = 0. \tag{4.34}$$

Le condizioni iniziali invece sono date da spostamento e velocità nulle lungo tutta la travata nella direzione dell'asse z e da spostamento e velocità nulle lungo tutto il cavo nelle direzioni verticali e orizzontali:

$$v(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{4.35}$$

$$v_c(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{4.36}$$

$$u_c(x, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial u_c(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{4.37}$$

4.4 Formulazione adimensionale del problema

Il problema dell'analisi dinamica del ponte sospeso percorso da un carico viaggiante può essere trattato più convenientemente in forma adimensionale in modo da ottenere una descrizione generalizzata del fenomeno.

Secondo tale formulazione le grandezze cinematiche del problema sono le seguenti:

$$V = \frac{v}{H} \quad V_c = \frac{v_c}{H} \quad U_c = \frac{u_c}{H} \quad (4.38)$$

mentre le caratteristiche della travata sono tenute in conto dal parametro ε_F di seguito riportato:

$$\varepsilon_F = \left[\frac{4I_y \sigma_g}{H^3 g} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (4.39)$$

Le proprietà del cavo vengono descritte attraverso tre quantità, che si riferiscono alle caratteristiche di rigidezza ed inerziali:

$$\Psi_{c0} = \frac{H_{t0} \sigma_g}{E_h g} \quad \Psi_{ct} = \frac{E_c A_c \sigma_g}{E_h g H} \quad \zeta_c = \frac{\mu_c}{\mu}. \quad (4.40)$$

In particolare, Ψ_{c0} è un parametro che tiene conto della rigidezza iniziale del cavo rispetto a quella dei pendini, Ψ_{ct} è il parametro di rigidezza corrente del cavo rispetto a quella dei pendini mentre ζ_c è il rapporto tra la massa per unità di lunghezza del cavo e quella della travata.

Le caratteristiche del carico mobile, analogamente al caso del ponte strallato, vengono tenute in conto attraverso i seguenti parametri:

$$\bar{p} = \frac{p \sigma_g}{Eg} \quad \zeta = \frac{\lambda}{\mu} \quad \theta = c \left(\frac{\mu \sigma_g}{EgH} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tau = t \left(\frac{Eg}{\mu H \sigma_g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.41)$$

Per meglio chiarire l'interpretazione strutturale dei parametri sopra introdotti viene riportata di seguito una rappresentazione del ponte con le quantità adimensionali.

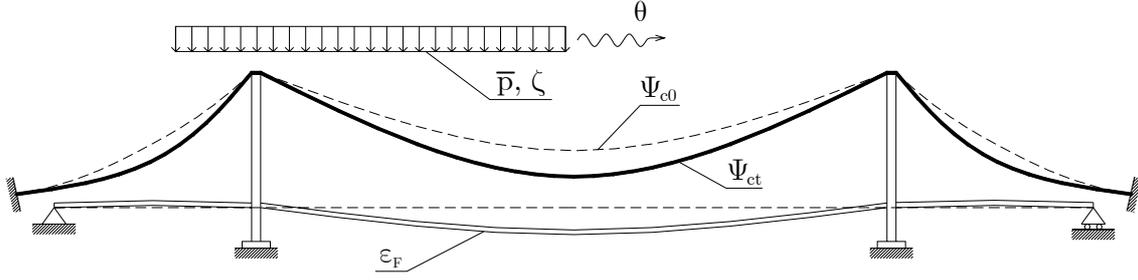


Figura 4.10: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte sospeso

La formulazione in termini di variabili adimensionali, per quanto riguarda l'*equilibrio della travata*, assume quindi la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\varepsilon_F^4}{4} \right) \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \frac{V - V_c}{1 - Z} - \bar{p} f_1 + \zeta \theta f_2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \\
 & + \zeta f_1 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + 2\theta \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + \theta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right] + \\
 & + k_v \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \right] V = 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

in cui $X = x/H$ e $Z = z/H$. Il termine k_v è un parametro di penalizzazione dello spostamento verticale della travata che serve a riprodurre il vincolo di appoggio in corrispondenza delle pile. Le funzioni $f_1(\bar{X}, \tau)$, $f_2(\bar{X}, \tau)$, dove $\bar{X} = \bar{x}/H$, sono quelle già utilizzate per il caso dei ponti strallati e la loro espressione è riportata nelle (3.77) e (3.78).

Per quanto riguarda l'*equilibrio del cavo* si ha:

$$-\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} - \zeta_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial \tau^2} = 0 \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi_{c0} \frac{\partial^2 V_c}{\partial X^2} + \zeta_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial \tau^2} - \frac{V - V_c}{1 - Z} + \\
& - \frac{\Psi_{ct}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 V_c}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 Z_c}{\partial X^2} \right] + \\
& - \Psi_{ct} \left(\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial V_c}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] + \\
& + k_{V_c} \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \right] V_c = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Il termine k_{V_c} rappresenta un parametro di penalizzazione riferita allo spostamento verticale del cavo che ha lo scopo di simulare il vincolo offerto dalle selle in testa alle pile.

Le corrispondenti *condizioni al contorno* secondo la formulazione adimensionale sono riportate di seguito:

$$\begin{aligned}
V \left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau \right) &= 0 & V \left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau \right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X = -\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= 0 & \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X = \frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$V_c \left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau \right) = 0 \quad V_c \left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau \right) = 0 \tag{4.46}$$

$$U_c \left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau \right) = 0 \quad U_c \left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau \right) = 0. \tag{4.47}$$

Le *condizioni iniziali* sono le seguenti:

$$V(X,0) = 0 \quad \left. \frac{\partial V(X,\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (4.48)$$

$$V_c(X,0) = 0 \quad \left. \frac{\partial V_c(X,\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (4.49)$$

$$U_c(X,0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_c(X,\tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (4.50)$$

Capitolo 5

I ponti misti

5.1 Introduzione

Il progetto di un ponte con sistema di sospensione misto strallato-sospeso, nonostante sia stato applicato in pochissime realizzazioni, ricorre spesso quando si tratta di proporre nuove idee per i ponti di grande luce. In particolare tale tipologia rispetto allo schema di ponte sospeso permette di impiegare molto meno materiale incrementando le proprietà di lunghezza della struttura, a parità di carico sostenuto.

Il ponte combinato incrementa sensibilmente le caratteristiche di rigidità della struttura per la presenza nel sistema di sospensione di stralli aggiuntivi mediante i quali è possibile rispettare i limiti di deformabilità imposti in ambito ferroviario dalla normativa vigente.

Inoltre, i ponti combinati riducono notevolmente le problematiche connesse con la messa in opera del ponte con sistema strallato per la presenza del cavo principale che rende più stabile il processo di realizzazione della struttura.

Nel presente capitolo si rinnova la formulazione analitica di tale tipologia di ponte, ottenuta combinando la formulazione esistente in precedenza per gli

schemi sospeso e strallato. Si propone infine una formulazione generalizzata introducendo opportuni parametri adimensionali che identificano la risposta strutturale del ponte misto ed il comportamento di interazione tra lo schema strallato e sospeso.

5.2 Formulazione del problema

Il modello strutturale si basa sull'accoppiamento dello schema strallato autoancorato e dello schema sospeso ancorato a terra. Gli stralli sono fissati alla testa delle pile secondo una strallatura con schema a ventaglio mentre il cavo di sospensione può scorrere longitudinalmente in corrispondenza dei punti di connessione con le pile senza forze di attrito. Si suppone che la messa in opera della struttura sia tale da determinare una configurazione indeformata della travata, sotto l'azione del peso proprio, e quindi priva di momenti flettenti. L'azione dei carichi permanenti generano tensioni di trazione nel cavo e negli stralli e tensioni di compressione nelle pile. Gli effetti dovuti all'azione del carico viaggiante, pertanto, vengono valutati a partire dalla configurazione iniziale in cui agiscono solo i carichi fissi.

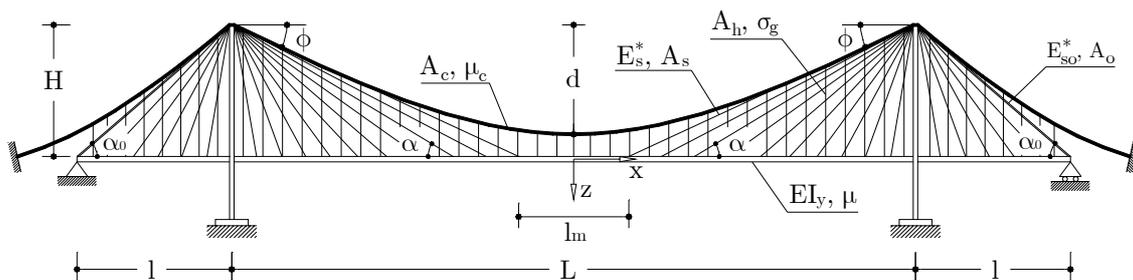


Figura 5.1: Definizione dei parametri geometrici del ponte misto

Il peso proprio della travata viene sostenuto sia dal cavo di sospensione che dalla strallatura e la sua distribuzione è regolata mediante l'introduzione di un parametro r . In particolare, il peso della travata afferente alla strallatura è ottenuto dalla seguente espressione:

$$g_{st} = (1 - r) \cdot g \tag{5.1}$$

mentre il peso sostenuto dal cavo è dato da:

$$g_{sp} = r \cdot g. \tag{5.2}$$

La geometria degli elementi strutturali viene determinata a partire da i carichi fissi. L'area della sezione trasversale degli stralli, A_s , e dei pendini, A_h , viene calcolata in modo che in tutti gli elementi sia presente una tensione costante pari a σ_g :

$$A_s = \frac{g_{st} \Delta}{\sigma_g \sin \alpha}; \quad A_h = \frac{g_{sp} \Delta}{\sigma_g}. \tag{5.3}$$

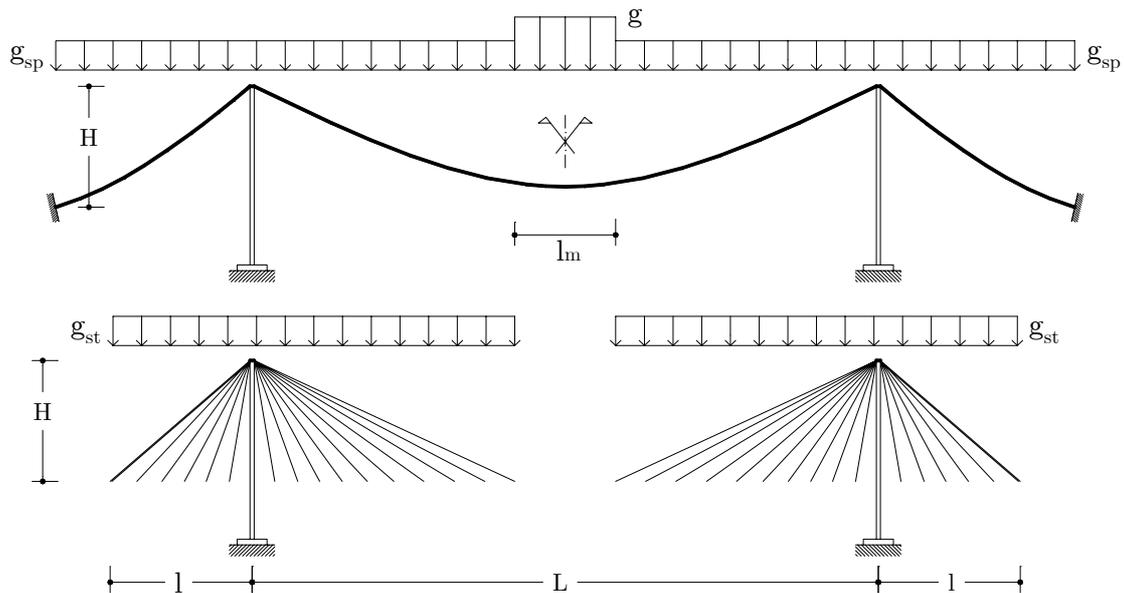


Figura 5.2: Ripartizione del peso proprio tra il cavo di sospensione e la strallatura

Quindi in pratica il parametro r è proporzionale alla quantità di acciaio del sistema di sospensione. In particolare, nel caso in cui $r = 0$ il sistema misto degenera nello schema strallato, mentre per $r = 1$ si ottiene lo schema sospeso.

L'area della sezione dello strallo di ormeggio si determina in modo da ottenere al suo interno una tensione pari a σ_{g_0} quando il carico accidentale p viene applicato staticamente sulla campata centrale:

$$A_o = \frac{gl}{2\sigma_{g_0}} \left[\left(\frac{L}{2l} \right)^2 - 1 \right] \sqrt{1 + \left(\frac{l}{H} \right)^2}. \quad (5.4)$$

Le relazioni che legano le tensioni σ_g e σ_{g_0} alla tensione ammissibile sono riportate di seguito:

$$\sigma_g = \frac{g}{g+p} \sigma_a; \quad \sigma_{g_0} = \sigma_a \frac{[L/(2l)]^2 - 1}{[(1+p/g)(L/(2l))^2 - 1]}. \quad (5.5)$$

La strallatura, nel caso di ponti di grandi luci, subisce sensibili riduzioni di rigidità nella zona centrale della campata principale a causa dell'effetto *Dischinger*. Per questo motivo gli stralli vengono distribuiti lungo la travata per una lunghezza pari a $(2l+L)-l_m$ dove l_m è la lunghezza della porzione di travata priva di strallatura. Tale lunghezza, simmetrica rispetto al punto di mezzeria, viene valutata attraverso la seguente relazione:

$$l_m = L \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{(g_{sp} + g_c)/g}} \right) \quad (5.6)$$

dove g_c è il peso del cavo di sospensione.

Analogamente a quanto fatto per il ponte sospeso, anche nel caso di ponte misto è lecito approssimare il profilo del cavo, nella configurazione iniziale sotto l'azione dei carichi permanenti, mediante una funzione parabolica. In questa condizione la componente orizzontale del tiro nel cavo è pari a:

$$H_{t_0} = \frac{1}{d} \left[(g_c + g_{sp}) \frac{L^2}{8} + g_{st} \frac{l_m}{4} \left(L - \frac{l_m}{2} \right) \right]. \quad (5.7)$$

L'area della sezione trasversale del cavo viene determinata sulla base del massimo sforzo assiale ammissibile:

$$A_c = \frac{H_{tp}}{\sigma_a \cos \phi} \quad (5.8)$$

in cui H_{tp} è la componente orizzontale del tiro in conseguenza dell'applicazione statica del carico accidentale nella campata centrale, ϕ è l'angolo formato dalla tangente alla curva del cavo in prossimità della testa della pila e l'orizzontale.

Il modello analizzato nella presente tesi è costituito da uno schema piano in cui è stata usata una formulazione alla *Eulero-Bernoulli* per la descrizione del comportamento sia della travata che delle pile. Le non linearità geometriche degli stralli sono state tenute in conto attraverso il modulo di elasticità fittizio di *Dischinger* in accordo con la (3.23). La descrizione cinematica del modello è rappresentata dai seguenti parametri:

- $v(x,t)$ = abbassamento verticale della travata;
- $w(x,t)$ = spostamento orizzontale della travata;
- $v_c(x,t)$ = spostamento verticale del cavo di sospensione;
- $u_c(x,t)$ = spostamento orizzontale del cavo di sospensione.
- $u_s(t)$ = spostamento orizzontale in testa del pilone di sinistra;
- $u_D(t)$ = spostamento orizzontale in testa del pilone di destra.

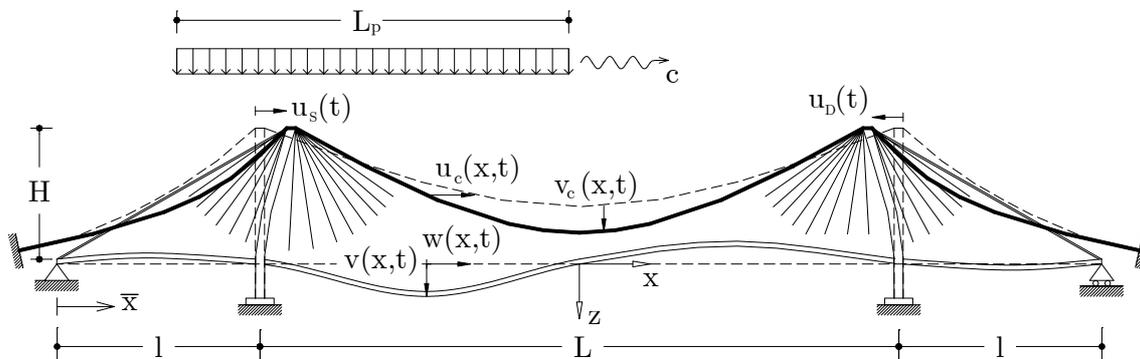


Figura 5.3: Le variabili cinematiche che definiscono la deformazione del ponte misto

Tale cinematica permette di descrivere le deformazioni flessionali della travata e delle pile, di analizzare gli effetti dovuti alla sollecitazione assiale della travata.

La modellazione del *carico viaggiante* è stata fatta analogamente a quanto visto in precedenza per il ponte strallato e il ponte sospeso. Il carico viene descritto come una striscia uniformemente distribuita di lunghezza L_p che viene applicato istantaneamente alla travata in perfetta adesione. Si assume che il carico proceda a velocità costante c e che la cinematica del sistema mobile sia coincidente con quella propria dell'impalcato. Vengono trascurati quindi gli effetti di interazione meccanica del sistema mobile e la rugosità dell'impalcato ma vengono tenuti in conto i termini di accoppiamento prodotti dai fenomeni di interazione tra carico mobile e deformazione dell'impalcato. La sua descrizione avviene attraverso le funzioni riportate nella (3.26).

5.2.1 Azioni sulla travata

La travata è sostenuta da un sistema misto strallato-sospeso perciò è soggetta alle azioni dovute agli stralli e a quelle dovute ai pendini di sospensione.

Per quanto riguarda la strallatura, ipotizzando l'interasse Δ molto minore della luce della campata centrale, l'azione che questa esercita sulla travata è espressa dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} q_v^S(x, t) = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^3 \alpha + (u_s - w) \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_o^S(x, t) = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^2 \alpha \cos \alpha + (u_s - w) \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} q_v^D(x, t) = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [-v \sin^3 \alpha + (u_D + w) \sin^2 \alpha \cos \alpha] \\ q_o^D(x, t) = \frac{E_s^* A_s}{H \Delta} [v \sin^2 \alpha \cos \alpha - (u_D + w) \sin \alpha \cos^2 \alpha] \end{cases} \quad (5.10)$$

dove l'apice S o D si riferisce rispettivamente alla cortina di sinistra o alla cortina di destra. Le componenti orizzontali dello sforzo nello strallo di ormeggio sono:

$$S_o^S(x, t) = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [(u_S - w) \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o] \quad (5.11)$$

$$S_o^D(x, t) = \frac{E_{so}^* A_o}{H} [-(u_D + w) \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o]. \quad (5.12)$$

Per quel che riguarda l'azione trasmessa dai pendini, anche in questo attraverso l'ipotesi di distribuzione continua degli elementi sulla travata, questa può essere espressa attraverso la seguente funzione:

$$q_s(x, t) = \frac{E_h A_h}{\Delta} \frac{[v(x, t) - v_c(x, t)]}{[H - \bar{z}(x)]} \quad (5.13)$$

in cui $\bar{z}(x)$ è l'ordinata dei punti del cavo di sospensione nelle tre campate, come riportato nella (4.24).

Con riferimento ad una porzione di ponte, di seguito viene riportata una illustrazione delle azioni a cui è soggetta la travata per effetto del carico mobile.

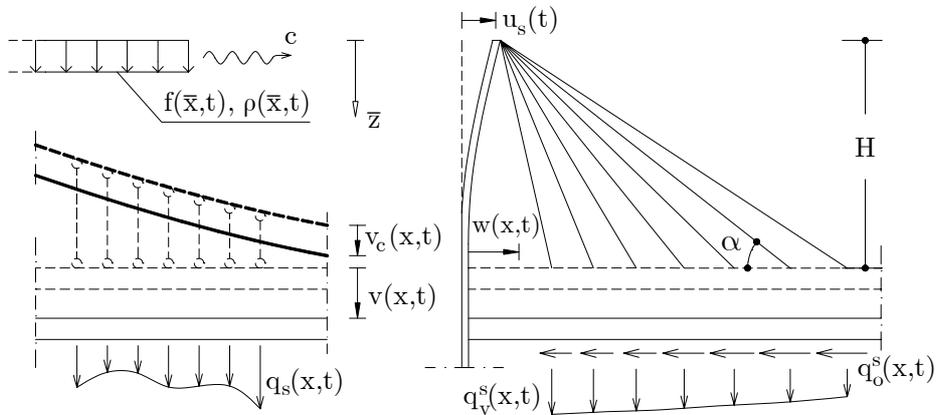


Figura 5.4: Rappresentazione dell'azione sulla travata dovuta ai pendini e alla strallatura

È utile sottolineare che la ripartizione del peso proprio della travata g è già implicita nelle azioni sopra riportate in quanto le aree degli stralli, A_s , e dei pendini, A_h , vengono dimensionate in base all'aliquota di carico permanente relativo rispettivamente alla strallatura o al sistema dovuto al cavo di sospensione.

5.2.2 Equilibrio della travata

Ricavate le azioni a cui è soggetta la travata è possibile scrivere, secondo un approccio al continuo, le equazioni di equilibrio dinamico della travata.

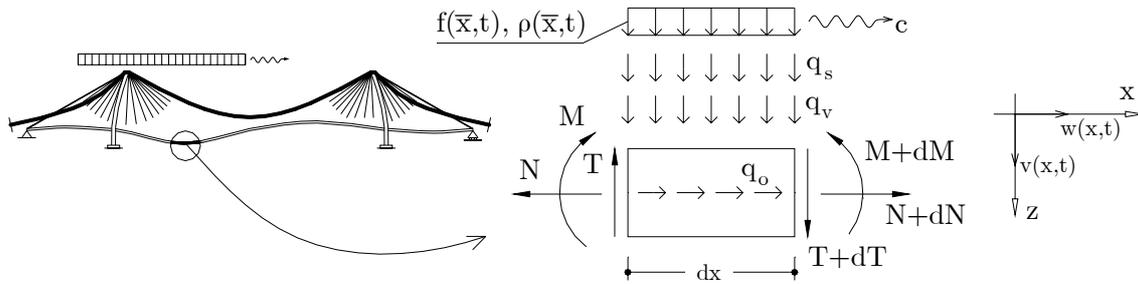


Figura 5.5: Azioni agenti su un conio di travata del ponte misto

Se si considera un conio di travata e si mettono in evidenza i carichi a cui è sottoposto si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 EI_y \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \bar{H}(x) \cdot q_v^D + \bar{H}(-x) \cdot q_v^S - q_s(x,t) + \mu \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \\
 = f(\bar{x},t) - \rho(\bar{x},t) \cdot \frac{d^2 v(x,t)}{dt^2} - \frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} \cdot \frac{dv(x,t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

per quanto riguarda l'equilibrio lungo z , mentre lungo x si ha:

$$\begin{aligned}
 EA \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \bar{H}(x) \cdot q_o^D - \bar{H}(-x) \cdot q_o^S - \mu \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \\
 = \rho(\bar{x},t) \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{d\rho(\bar{x},t)}{dt} \cdot \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

nelle quali è stata adottata la notazione simbolica già utilizzata in precedenza. Come si può facilmente osservare, le equazioni di equilibrio della travata per il ponte misto degenerano nelle equazioni precedentemente trattate per quel che riguarda il ponte strallato e il ponte sospeso. In particolare, per $r=1$ dalla (5.14) si ottiene la (4.25), se $r=0$ dalle (5.14) e (5.15) si ricade nel caso delle (3.33) e (3.34).

5.2.3 Equilibrio del cavo

L'equilibrio dinamico lungo z del cavo soggetto all'azione del carico viaggiante, come si è visto in precedenza, è fornito dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_t(x,t) \cdot \frac{\partial \bar{z}_c}{\partial x} \right) - \mu_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} = -(g_{sp} + g_c) - q_s(x,t) \tag{5.16}$$

avendo indicato con \bar{z}_c la posizione dei punti del cavo di sospensione durante il passaggio del carico, come riportato nella (4.26); μ_c indica la massa del cavo per unità di lunghezza. Il termine $H_t(x,t)$ è la componente orizzontale del tiro nel cavo, quando il ponte è percorso dal carico mobile, ed è espressa dalla (4.27).

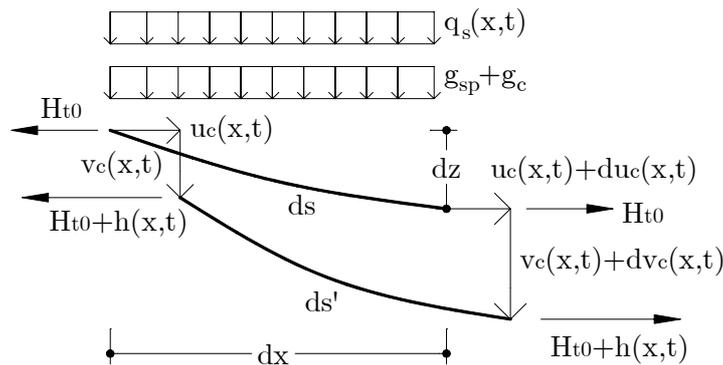


Figura 5.6: Azioni a cui è soggetto un cono di cavo del ponte misto

Esprimendo la (5.16) in termini di variabili cinematiche si ottiene:

$$\begin{aligned}
& [H_{i0} + h(x,t)] \frac{\partial^2 v_c(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t) \frac{\partial^2 \bar{z}(x)}{\partial x^2} + \\
& + \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \left[\frac{\partial \bar{z}(x)}{\partial x} + \frac{\partial v_c(x,t)}{\partial x} \right] - \mu_c \frac{\partial^2 v_c(x,t)}{\partial t^2} = -q_s(x,t) .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

L'equilibrio dinamico lungo x fornisce la seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x,t) \frac{\partial u_c(x,t)}{\partial x} \right] - \mu_c \frac{\partial^2 u_c(x,t)}{\partial t^2} = 0 . \tag{5.18}$$

La relazione che lega $h(x,t)$ alle variabili $u_c(x,t)$ e $v_c(x,t)$ viene fornita dalla condizione di congruenza del cavo tra l'allungamento elastico e quello dovuto al cambiamento di configurazione per l'azione del carico. Tale condizione è riportata nella (4.31).

5.2.4 Flessioni delle torri

Lo spostamento orizzontale in testa alle torri è dovuto unicamente alla strallatura, pertanto le equazioni che esprimono l'equilibrio alla flessione delle pile sono del tutto analoghe a quelle utilizzate nel caso del ponte strallato.

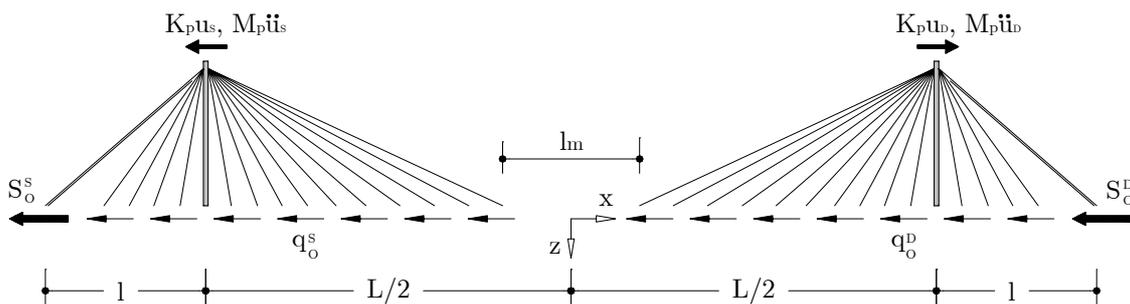


Figura 5.7: Forze agenti sulle torri nel caso di ponte misto

Per ciò che riguarda il pilone sinistro si ha:

$$K_p u_S + S_o^S + \int_{-l-L/2}^{-l_m/2} q_o^S dx + M_p \frac{\partial^2 u_S}{\partial t^2} = 0 \quad (5.19)$$

dove K_p rappresenta la rigidezza a flessione della torre e M_p la sua massa. Un'equazione analoga si ottiene per il pilone di destra:

$$K_p u_D - S_o^D - \int_{l_m/2}^{L/2+l} q_o^D dx + M_p \frac{\partial^2 u_D}{\partial t^2} = 0. \quad (5.20)$$

5.2.5 Condizioni al contorno e condizioni iniziali del problema

Il problema dell'analisi di un ponte misto strallato-sospeso soggetto all'azione di un carico viaggiante è descritto dal sistema di equazioni integro-differenziali (5.14), (5.15), (5.17), (5.18), (5.19) e (5.20). Tale sistema per la sua risoluzione necessita di condizioni al contorno e di condizioni iniziali.

Le condizioni agli estremi per ciò che riguarda la flessione della travata sono date dallo spostamento e dal momento flettente nullo in corrispondenza degli appoggi:

$$\begin{aligned} v(-l-L/2, t) &= 0 & v(l+L/2, t) &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=-l-L/2} &= 0 & \left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l+L/2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

In corrispondenza dello strallo di ormeggio lo sforzo nella travata deve essere pari al tiro del cavo stesso:

$$\left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=-l-L/2} = -\frac{S_o^S}{EA} \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l+L/2} = -\frac{S_o^D}{EA}. \quad (5.22)$$

Gli spostamenti del cavo di sospensione devono essere nulli in corrispondenza dell'ancoraggio a terra:

$$v_c(-l - L/2, t) = 0 \qquad v_c(l + L/2, t) = 0 \qquad (5.23)$$

$$u_c(-l - L/2, t) = 0 \qquad u_c(l + L/2, t) = 0. \qquad (5.24)$$

Le condizioni iniziali invece sono date da spostamento e velocità nulle lungo tutta la travata nella direzione dell'asse z

$$v(x, 0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \qquad (5.25)$$

spostamento e velocità nulle lungo tutta la travata nella direzione dell'asse x

$$w(x, 0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \qquad (5.26)$$

spostamenti e velocità nulle in testa alle pile

$$u_s(0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial u_s(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \qquad (5.27)$$

$$u_D(0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial u_D(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \qquad (5.28)$$

spostamento e velocità nulle lungo tutto il cavo nelle direzioni verticali e orizzontali:

$$v_c(x, 0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial v_c(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \qquad (5.29)$$

$$u_c(x, 0) = 0 \qquad \left. \frac{\partial u_c(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \qquad (5.30)$$

5.3 Formulazione adimensionale del problema

Al fine di ottenere una trattazione generalizzata del problema anche in questo caso, come per il ponte strallato e sospeso, è conveniente utilizzare una formulazione adimensionale.

In particolare, si riportano in forma sintetica i parametri, precedentemente introdotti per lo schema strallato e sospeso, mediante i quali è possibile rappresentare le equazioni di equilibrio per i ponti combinati in forma adimensionale:

$$\varepsilon_F = \left[\frac{4I_y \sigma_g}{H^3 g} \right]^{\frac{1}{4}} \quad \varepsilon_A = \frac{A \sigma_g}{Hg} \quad (5.31)$$

$$a = \frac{\gamma_s H^2 E}{12 \sigma_g^3} \quad (5.32)$$

$$\Psi_{c0} = \frac{H_{t0} \sigma_g}{E_h g} \quad \Psi_{ct} = \frac{E_c A_c \sigma_g}{E_h g H} \quad \zeta_c = \frac{\mu_c}{\mu} \quad (5.33)$$

$$\eta_p = \frac{K_p \sigma_g}{Eg} \quad \zeta_p = \frac{M_p}{\mu H}. \quad (5.34)$$

$$\bar{p} = \frac{p \sigma_g}{Eg} \quad \zeta = \frac{\lambda}{\mu} \quad \theta = c \left(\frac{\mu \sigma_g}{EgH} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \tau = t \left(\frac{Eg}{\mu H \sigma_g} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.35)$$

La cinematica del problema viene descritta attraverso le quantità riportate di seguito:

$$V = \frac{v}{H} \quad W = \frac{w}{H} \quad U_s = \frac{u_s}{H} \quad U_D = \frac{u_D}{H} \quad V_c = \frac{v_c}{H} \quad U_c = \frac{u_c}{H}. \quad (5.36)$$

Una rappresentazione dei parametri ottenuti attraverso la formulazione adimensionale è riportata nella figura seguente:

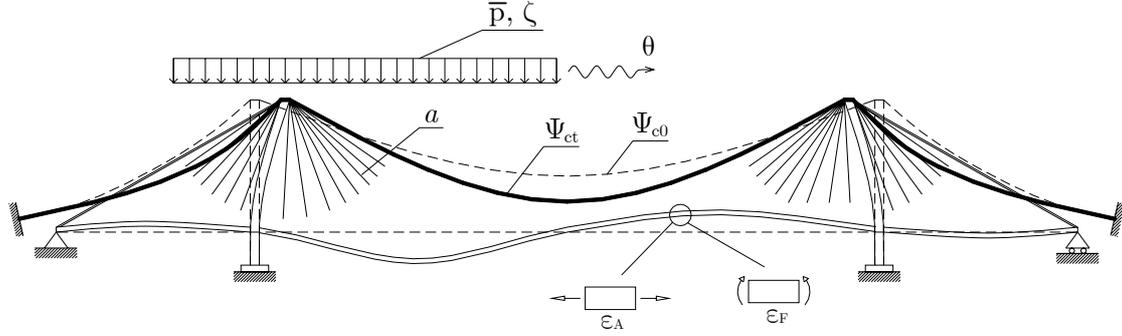


Figura 5.8: Rappresentazione dei parametri adimensionali del ponte misto

La formulazione in termini di variabili adimensionali, per quanto riguarda l'*equilibrio della travata*, assume quindi la seguente forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\varepsilon_F^4}{4} \right) \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \frac{V - V_c}{1 - Z} - \bar{p}f_1 + \zeta\theta f_2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \\
& + \left\{ \varphi V - \left[\varphi_1 (\bar{H}_1 (U_s - W) + \bar{H}_2 (U_D + W)) \right] \right\} + \\
& + \zeta f_1 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + 2\theta \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + \theta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right] + \\
& + k_v \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \right] V = 0
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_A \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \zeta\theta f_2 \frac{\partial W}{\partial \tau} - \zeta f_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \\
& - \left[\bar{H}_1 (\varphi_1 V + \varphi_2 (W - U_s)) + \bar{H}_2 (-\varphi_1 V + \varphi_2 (W + U_D)) \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.38}$$

in cui $X = x/H$, $\bar{H}_1 = \bar{H}(-X)$, $\bar{H}_2 = \bar{H}(X)$. Il termine k_v è il parametro di penalizzazione dello spostamento verticale della travata che serve a riprodurre il vincolo di appoggio in corrispondenza delle pile.

Le funzioni $f_1(\bar{X}, \tau)$, $f_2(\bar{X}, \tau)$, $\varphi(X)$, $\varphi_1(X)$, $\varphi_2(X)$, dove $\bar{X} = \bar{x}/H$, sono riportate rispettivamente nelle (3.77), (3.78), (3.79), (3.80), (3.81).

Per quanto riguarda l'*equilibrio del cavo* si ha:

$$\begin{aligned}
& -\Psi_{c0} \frac{\partial^2 V_c}{\partial X^2} + \zeta_c \frac{\partial^2 V_c}{\partial \tau^2} - \frac{V - V_c}{1 - Z} + \\
& - \frac{\Psi_{ct}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X}\right) \frac{\partial^2 V_c}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X}\right) \frac{\partial^2 Z_c}{\partial X^2} \right] + \\
& -\Psi_{ct} \left(\frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial V_c}{\partial X}\right) \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] + \\
& + k_{V_c} \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H}\right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H}\right) \right] V_c = 0
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$-\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\left(\frac{\partial U_c}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial V_c}{\partial X}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right] - \zeta_c \frac{\partial^2 U_c}{\partial \tau^2} = 0. \tag{5.40}$$

Il termine k_{V_c} è la costante di penalizzazione riferita allo spostamento verticale del cavo che ha lo scopo di simulare il vincolo offerto dalle selle in testa alle pile.

L'*equilibrio della pila sinistra* è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\int_{-l/H-L/(2H)}^{-l_m/(2H)} [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W - U_s)] dX + \left(\eta_p U_s + \zeta_p \frac{\partial^2 U_s}{\partial \tau^2} \right) - \chi (W - U_s) = 0 \tag{5.41}$$

dove

$$\chi = \frac{E_s^* A_o}{E} \frac{\sigma_g}{gH} \sin \alpha_o \cos^2 \alpha_o. \quad (5.42)$$

Per l'*equilibrio della pila destra*, analogamente a quanto fatto in precedenza, si ottiene:

$$\int_{l_m/(2H)}^{L/(2H)+1/H} [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W + U_D)] dX + \left(\eta_p U_D + \zeta_p \frac{\partial^2 U_D}{\partial \tau^2} \right) - \chi (W + U_D) = 0. \quad (5.43)$$

Il sistema ottenuto, composto dalle (5.37), (5.38), (5.39), (5.40), (5.41), (5.43), è un sistema in cui le equazioni che si riferiscono all'equilibrio della travata e del cavo sono in forma differenziale mentre quelle relative all'equilibrio delle pile sono in forma integrale. Per poter risolvere il problema attraverso l'utilizzo di un metodo numerico bisogna ricondurre il sistema di equazioni integro-differenziali ad un sistema di equazioni alle derivate parziali. Bisogna quindi trasformare le equazioni di equilibrio delle pile in equazioni differenziali in cui le variabili adimensionali siano dipendenti sia dallo spazio che dal tempo. Attraverso l'introduzione del parametro di penalizzazione k_U è possibile riprodurre la dipendenza di tali variabili dallo spazio. In particolare, le equazioni di equilibrio assumono le seguenti espressioni:

$$\bar{H}_1 [-\varphi_1 V - \varphi_2 (W - U_s)] + \delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) \left(\eta_p U_s + \zeta_p \frac{\partial^2 U_s}{\partial \tau^2} \right) + k_U \frac{\partial^2 U_s}{\partial X^2} = 0 \quad (5.44)$$

$$-\bar{H}_2 [\varphi_1 V - \varphi_2 (W + U_D)] + \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \left(\eta_p U_D + \zeta_p \frac{\partial^2 U_D}{\partial \tau^2} \right) + k_U \frac{\partial^2 U_D}{\partial X^2} = 0. \quad (5.45)$$

Il sistema così ottenuto è un sistema di equazioni alle derivate parziali strettamente dipendente dai parametri di penalizzazione k_V , k_V , k_U ; il primo si riferisce allo spostamento verticale della travata e ha lo scopo di vincolare l'abbassamento in corrispondenza della connessione della travata con la pila, il secondo ha lo scopo di simulare il vincolo offerto dalle selle in testa alle pile, il

terzo riguarda gli spostamenti orizzontali in testa alle pile. I parametri di penalizzazione devono assumere valori abbastanza elevati in modo da imporre le condizioni di vincolo desiderate ma non troppo per non incorrere in instabilità numeriche durante il processo di soluzione.

Le *condizioni al contorno* secondo la formulazione adimensionale sono:

$$\begin{aligned} V\left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) &= 0 & V\left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau\right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= 0 & \frac{\partial^2 V(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= \frac{\chi}{\varepsilon_A} (W - U_s) \\ \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= -\frac{\chi}{\varepsilon_A} (W + U_D) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$V_c\left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) = 0 \quad V_c\left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau\right) = 0 \quad (5.48)$$

$$U_c\left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) = 0 \quad U_c\left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau\right) = 0. \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}} &= -\frac{\chi}{k_U} (W - U_s) \\ \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=-\frac{l}{H}-\frac{L}{2H}} &= 0 \\
\left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L}{2H}+\frac{l}{H}} &= \frac{\chi}{k_U} (W + U_D)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Le *condizioni iniziali* vengono riportate di seguito:

$$V(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial V(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \tag{5.52}$$

$$W(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \tag{5.53}$$

$$V_c(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial V_c(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \tag{5.54}$$

$$U_c(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_c(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \tag{5.55}$$

$$U_s(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_s(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \tag{5.56}$$

$$U_D(X, 0) = 0 \quad \left. \frac{\partial U_D(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \tag{5.57}$$

Capitolo 6

Metodo di risoluzione

6.1 Introduzione

Il problema dell'analisi del comportamento dinamico di un ponte di grande luce percorso da un carico viaggiante prevede la risoluzione di un sistema in cui compaiono equazioni alle derivate parziali di ordine superiore al I°. Queste ultime possono essere ricondotte alla classe delle equazioni alle derivate parziali secondo la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u - e(\underline{x}, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = d(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathcal{B}u = h(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(\underline{x}, 0) = k(\underline{x}) & \underline{x} \in \bar{\Omega} \\ \frac{\partial u(\underline{x}, 0)}{\partial t} = l(\underline{x}) & \underline{x} \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

in cui u è la variabile da calcolare, \underline{x} sono le funzioni spaziali da cui dipende u , t è il tempo; \mathcal{L} è un operatore non lineare del secondo ordine e \mathcal{B} è un operatore del primo ordine che si riferisce alle condizioni al contorno. Il

dominio dell'equazione viene indicato con Ω e $\partial\Omega$ indica la sua frontiera; la parte di dominio vincolato è indicato con $\bar{\Omega}$.

Inoltre, nel caso del ponte strallato e del ponte misto il sistema è costituito da equazioni che esprimono l'equilibrio in forma integrale ed equazioni in cui l'equilibrio è descritto in forma differenziale. Come si è visto nei capitoli precedenti, attraverso una riformulazione adimensionale del problema, e grazie all'introduzione di alcuni parametri di penalizzazione relativi alle variabili cinematiche, è possibile riprodurre la dipendenza di alcune variabili dallo spazio in modo da ricondurre le equazioni integrali ad equazioni alle derivate parziali.

Tuttavia la risoluzione di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine è ancora un problema difficile da trattare. Il sistema, pertanto, viene trasformato in un altro equivalente costituito da equazioni alle derivate parziali del primo ordine. La conversione di tutte le variabili al I° ordine porta all'introduzione di nuove equazioni nel sistema corrispondenti alle nuove derivate dipendenti dallo spazio e dal tempo.

Il problema riportato nella (6.1) può essere così riproposto nella seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\underline{x}, t, u) \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} + b(\underline{x}, t, u) \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} = c(\underline{x}, t, u) & \underline{x} \in \Omega, t > 0 \\ \left[\frac{\partial u(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}, \frac{\partial u(\underline{x}, t)}{\partial t} \right] = \underline{v}(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathcal{B} \underline{v} = h(\underline{x}, t) & \underline{x} \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = k(\underline{x}) & \underline{x} \in \bar{\Omega} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

La risoluzione analitica del sistema risolvete il problema di un ponte di grande luce soggetto ad un carico mobile non è per nulla agevole anche a causa dell'elevato numero delle variabili. Pertanto si è scelto di percorrere la via della risoluzione numerica di tale sistema.

6.2 Il Metodo delle Differenze Finite

Nel campo delle approssimazioni numeriche è possibile individuare due diversi modi di procedere. Il primo è rappresentato dal *Metodo degli Elementi Finiti (MEF)* e il secondo è il *Metodo delle Differenze Finite (MDF)*. Sebbene la sua applicabilità sia ormai molto ridotta, il metodo delle differenze finite fornisce una formulazione molto semplice per ciò che riguarda l'approssimazione di diversi tipi di equazioni alle derivate parziali. Attraverso tale metodo il valore della derivata della funzione in un punto viene approssimato da un'espressione in cui compare il valore della funzione in un numero finito di punti, trasformando un'equazione alle derivate parziali in un problema algebrico. In particolare, il dominio in cui è definita la funzione da approssimare viene discretizzato in modo da valutare le sue derivate per mezzo di differenze finite tra i valori che la stessa funzione assume nei punti della discretizzazione. Di seguito è riportata una rappresentazione della suddivisione in intervalli del dominio del tempo.

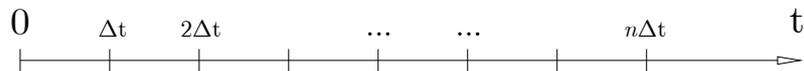


Figura 6.1: Discretizzazione nel dominio del tempo

Il problema oggetto della presente tesi è descritto attraverso un sistema costituito da equazioni differenziali di tipo iperbolico riconducibili al primo ordine. Nell'ambito delle differenze finite il metodo più usato per l'approssimazione al primo ordine è il *Metodo α* dal quale discendono le procedure di soluzione più comunemente utilizzate. Con riferimento ad una funzione u dipendente dal tempo, lo schema d'integrazione è il seguente:

$$(1 - \alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_s + \alpha \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+1} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta t_{s+1}} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (6.3)$$

dove $\{u\}_s$ si riferisce al tempo $t = t_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ e $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$ rappresenta l'intervallo s -esimo. Se l'intero tempo di osservazione del problema viene suddiviso in intervalli uguali in modo che $t_s = s \cdot \Delta t$ l'equazione (6.3) può essere interpretata come:

$$\begin{aligned} \{u\}_{s+1} &= \{u\}_s + \Delta t \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+\alpha} \\ \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+\alpha} &= (1 - \alpha) \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_s + \alpha \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+1} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

A seconda dei valori che assume α si ottengono diversi schemi di calcolo:

$\alpha = 0$ Schema delle differenze in avanti o di Eulero esplicito;

$\alpha = \frac{1}{2}$ Schema di *Crank-Nicholson* o delle differenze centrate;

$\alpha = \frac{2}{3}$ Metodo di *Galerkin*;

$\alpha = 1$ Schema delle differenze all'indietro o di Eulero implicito.

Come si può notare dalle precedenti definizioni, esistono diverse classificazioni di uno schema a seconda delle proprietà fondamentali.

Uno schema può essere definito *esplicito* oppure *implicito*. È esplicito quando la determinazione della soluzione ad un dato istante richiede la valutazione della funzione integranda solo ad istanti precedenti; si definisce implicito quando nell'espressione dell'algoritmo di calcolo l'incognita compare sia al primo che al secondo membro, e quindi non può essere valutata direttamente.

Un criterio di classificazione di un metodo di approssimazione numerica è la *stabilità* o l'*instabilità* dello schema di calcolo. L'applicazione di un algoritmo di approssimazione della soluzione introduce un errore nella valutazione della stessa ad ogni passo dell'integrazione. Poiché il calcolo dell'incognita al passo successivo dipende dal valore assunto al passo precedente, l'errore può crescere durante la procedura di valutazione. Se l'errore aumenta senza limiti lo schema è definito instabile, mentre se l'errore rimane contenuto entro un valore

limitato, cioè cresce in un passo d'integrazione e decresce in quello successivo senza superare un valore di controllo, lo schema si definisce stabile. Quindi, la *stabilità* dello schema numerico si misura dalla limitatezza con cui varia l'errore da un intervallo d'integrazione ad un altro.

Inoltre, uno schema può essere definito *condizionatamente stabile* o *incondizionatamente stabile*. Un metodo è condizionatamente stabile se la sua stabilità è garantita solo per passi d'integrazione appartenenti ad un certo intervallo; è incondizionatamente stabile se la sua stabilità è garantita indipendentemente dalla lunghezza del passo d'integrazione.

Una caratteristica importante dei metodi di approssimazione della soluzione è l'*accuratezza*. L'accuratezza di una procedura numerica si misura da quanto la soluzione approssimante si avvicina alla soluzione esatta del problema che si sta esaminando.

6.3 Schema di integrazione

La risposta strutturale del ponte soggetto ad un carico mobile è non lineare poiché la rigidezza e la massa dell'insieme *ponte-carico mobile* possono modificarsi ad ogni istante. Nel caso di problemi lineari l'integrazione nel tempo attraverso il metodo della *sovrapposizione modale* risulta molto efficace poiché durante l'analisi non è necessario prendere in considerazione tutti modi di vibrare della struttura. Nel caso di problema non lineare tale metodo non è praticabile poiché si richiede l'aggiornamento della rigidezza e della massa della struttura ad ogni passo d'integrazione; tale aggiornamento comporta il calcolo dei modi di vibrare della struttura ad ogni intervallo Δt in cui si è suddiviso l'intero tempo di osservazione del problema. Si è scelto, pertanto, di integrare le equazioni del moto attraverso l'*integrazione diretta* nel tempo più efficiente in questo caso della *sovrapposizione modale*.

L'introduzione dello schema (6.3) nella risoluzione del problema produce un errore di approssimazione nel calcolo della soluzione $\{u\}_{s+1}$ ad ogni intervallo di tempo. Inoltre, poiché la soluzione al tempo t_{s+1} dipende dalla soluzione t_s

l'errore può crescere col tempo. Se l'errore cresce senza limiti lo schema viene definito instabile, mentre se l'errore non supera mai un valore finito fissato lo schema di soluzione viene definito stabile. Inoltre, in relazione all'ampiezza dell'intervallo di tempo Δt lo schema di approssimazione viene definito condizionatamente stabile o incondizionatamente stabile. Lo schema di Crank-Nicholson è definito incondizionatamente stabile, vale a dire è indipendente dall'ampiezza dell'intervallo di tempo scelto, ed ha un'accuratezza pari al secondo ordine di Δt ($O((\Delta t)^2)$).

Tale schema, inoltre, si definisce implicito; infatti, quando $\alpha \neq 0$ la determinazione della soluzione ad un dato istante richiede la valutazione della funzione che si vuole integrare sia ad istanti precedenti che ad istanti successivi, come si può notare dalla (6.4).

Un approccio classico nell'approssimazione numerica delle soluzioni delle equazioni di governo di un problema strutturale con modellazione al continuo è dato dall'impiego del metodo delle differenze finite.

Come si è visto in precedenza, il problema di un ponte di grande luce soggetto all'azione di un carico mobile è descritto da un sistema di equazioni differenziali di ordine superiore al primo; tuttavia il sistema può essere ricondotto ad un sistema equivalente in cui le derivate sono del primo ordine. Pertanto anche nel dominio dello spazio è possibile utilizzare l'approssimazione al primo ordine mediante il *Metodo* α descritto nel § 6.2.

Con riferimento alla procedura di approssimazione riportata nella (6.4), discretizzando l'asse x attraverso intervalli uguali Δx e ponendo $\alpha = 1/2$ si ottiene lo schema di Crank-Nicholson meglio noto come schema alle *differenze centrate*. La definizione di tale schema dipende dal fatto che i valori che si considerano nella procedura di calcolo vengono valutati perfettamente al centro dell'intervallo di discretizzazione. Indicando con $\{\bullet\}_s$ la posizione $x_s = \sum_{i=1}^s \Delta x_i$ e con $\Delta x = x_s - x_{s-1}$ l'intervallo spaziale s -esimo, lo schema d'integrazione utilizzato per valutare la derivata al centro dell'intervallo è il seguente:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\}_{s+\frac{1}{2}} = \frac{\{u\}_{s+1} - \{u\}_s}{\Delta x}. \quad (6.5)$$

Come si può notare dalla precedente relazione, analogamente a quanto già detto, lo schema d'integrazione alle differenze centrate può essere definito implicito in quanto nella (6.5) il calcolo della derivata al centro dell'intervallo richiede la valutazione della funzione nell'estremo precedente e in quello successivo dello stesso intervallo.

6.3.1 Stabilità ed accuratezza dello schema

L'approssimazione utilizzata nel dominio dello spazio è analoga a quella utilizzata nel tempo, pertanto lo schema di calcolo presenta una stabilità incondizionata. La procedura, infatti, non richiede che l'intervallo di discretizzazione spaziale Δx abbia un'ampiezza limitata entro un'ampiezza critica, Δx_{cr} , per poter garantire la stabilità della soluzione.

L'ampiezza Δx_{cr} dipende dalle caratteristiche di massa e di rigidità della struttura che si sta analizzando.

Per quanto riguarda l'accuratezza dello schema, anche in questo caso come nell'approssimazione nel dominio del tempo, si può asserire che l'errore commesso approssimando la derivata prima con la (6.5) è un $O((\Delta x)^2)$, vale a dire che l'errore fra la soluzione del problema e quella approssimata è del secondo ordine.

6.4 Implementazione della procedura di risoluzione

La risoluzione del sistema di equazioni è stata implementata nel software per la manipolazione matematica MAPLE.

Se si considera il caso del ponte misto percorso dal carico mobile l'implementazione del sistema risolvente assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{a}_{[20 \times 20]}(X, \tau) \frac{\partial \underline{y}_{[20 \times 1]}}{\partial X} + \mathfrak{b}_{[20 \times 20]}(X, \tau) \frac{\partial \underline{y}_{[20 \times 1]}}{\partial \tau} + \\
& + \mathfrak{c}_{[20 \times 20]}(X, \tau) \frac{\partial \underline{y}_{[20 \times 1]}}{\partial X} \cdot \underline{y}_{[1 \times 20]}^T = \mathfrak{t}_{[20 \times 1]}(\underline{y}, X, \tau)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

in cui il vettore delle variabili \underline{y} è riportato di seguito:

$$\underline{y}_{[1 \times 20]}^T(X, \tau) = \left\{ V, \frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \frac{\partial^3 V}{\partial X^3}, \frac{\partial V}{\partial \tau}, W, \frac{\partial W}{\partial X}, \frac{\partial W}{\partial \tau}, V_c, \frac{\partial V_c}{\partial X}, \right. \\
\left. \frac{\partial V_c}{\partial \tau}, U_c, \frac{\partial U_c}{\partial X}, \frac{\partial U_c}{\partial \tau}, U_s, \frac{\partial U_s}{\partial X}, \frac{\partial U_s}{\partial \tau}, U_D, \frac{\partial U_D}{\partial X}, \frac{\partial U_D}{\partial \tau} \right\}. \tag{6.7}$$

I termini delle matrici $\mathfrak{a}_{[20 \times 20]}$, $\mathfrak{b}_{[20 \times 20]}$, $\mathfrak{c}_{[20 \times 20]}$ sono tutti nulli tranne quelli di seguito riportati:

$$a_{1,4} = \left(\frac{\varepsilon_F^4}{4} \right) \tag{6.8}$$

$$a_{2,7} = \varepsilon_A \tag{6.9}$$

$$a_{3,10} = -\Psi_{c0} - \Psi_{ct} \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right) / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{6.10}$$

$$a_{3,13} = -\Psi_{ct} \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 1 / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{6.11}$$

$$a_{4,10} = -\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right) / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \tag{6.12}$$

$$a_{4,13} = -\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 1 / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (6.13)$$

$$a_{5,16} = k_U \quad (6.14)$$

$$a_{6,19} = k_U \quad (6.15)$$

$$b_{1,5} = 1 + \zeta f_1 \quad (6.16)$$

$$b_{2,8} = -1 - \zeta f_1 \quad (6.17)$$

$$b_{3,11} = \zeta_c \quad (6.18)$$

$$b_{4,14} = -\zeta_c \quad (6.19)$$

$$b_{5,17} = \zeta_p \cdot \delta \left(X + \frac{L}{2H} \right) \quad (6.20)$$

$$b_{6,20} = \zeta_p \cdot \delta \left(X - \frac{L}{2H} \right) \quad (6.21)$$

$$c_{10,10} = -\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right) / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} - \frac{\Psi_{ct}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]} \frac{\partial Z}{\partial X} \quad (6.22)$$

$$c_{10,13} = -\Psi_{ct} \frac{\partial}{\partial X} \left\{ 1 / \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (6.23)$$

$$c_{13,10} = -\frac{\Psi_{ct}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.24)$$

Per il vettore $t_{[20 \times 1]}$ i termini diversi da zero sono i seguenti:

$$t_1 = -\frac{y_1 - y_9}{1 - Z} + \bar{p}f_1 - \zeta\theta f_2 \cdot y_5 + \left[\varphi_1 (\bar{H}_1 (y_{15} - y_6) + \bar{H}_2 (y_{18} + y_6))\right] + \\ -\varphi \cdot y_1 - \zeta f_1 \left[2\theta \frac{\partial}{\partial X} (y_5) + \theta^2 y_3\right] - k_v \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H}\right) + \delta \left(X - \frac{L}{2H}\right)\right] y_1 \quad (6.25)$$

$$t_2 = \zeta\theta f_2 \cdot y_8 + \left[\bar{H}_1 (\varphi_1 \cdot y_1 + \varphi_2 (y_6 - y_{15})) + \bar{H}_2 (-\varphi_1 \cdot y_1 + \varphi_2 (y_6 - y_{18}))\right] \quad (6.26)$$

$$t_3 = \frac{y_1 - y_9}{1 - Z} + \frac{\Psi_{ct}}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \left[\left(y_{13} + \frac{\partial Z}{\partial X} y_{10}\right) \frac{\partial^2 Z_c}{\partial X^2}\right] + \\ + \Psi_{ct} \left(\frac{\partial Z}{\partial X} + y_{10}\right) \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{\left(y_{13} + \frac{\partial Z}{\partial X} y_{10}\right)}{\left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \right\} - k_{v_c} \left[\delta \left(X + \frac{L}{2H}\right) - \delta \left(X - \frac{L}{2H}\right)\right] y_9 \quad (6.27)$$

$$t_5 = -\bar{H}_1 [-\varphi_1 \cdot y_1 - \varphi_2 (y_6 - y_{15})] - \delta \left(X + \frac{L}{2H}\right) (\eta_p \cdot y_{15}) \quad (6.28)$$

$$t_6 = \bar{H}_2 [\varphi_1 \cdot y_1 - \varphi_2 (y_6 + y_{18})] - \delta \left(X - \frac{L}{2H}\right) (\eta_p \cdot y_{18}). \quad (6.29)$$

Le condizioni al contorno vengono implementate nel seguente modo:

$$\underline{\mathbb{B}}_{[20 \times 20]}^{(X)} \cdot \underline{y}_{[20 \times 1]} \left(-\frac{l}{H} - \frac{L}{2H}, \tau\right) = \bar{\underline{y}}_{[20 \times 1]}^{(X^-)} \quad (6.30)$$

$$\underline{\mathbb{B}}_{[20 \times 20]}^{(X)} \cdot \underline{y}_{[20 \times 1]} \left(\frac{L}{2H} + \frac{l}{H}, \tau \right) = \underline{\bar{y}}_{[20 \times 1]}^{(X+)} \quad (6.31)$$

in cui $\underline{\bar{y}}^{(X^-)}$ e $\underline{\bar{y}}^{(X^+)}$ sono i vettori che fissano le condizioni delle variabili rispetto allo spazio; i termini non nulli sono i seguenti:

$$\underline{\bar{y}}_7^{(X^-)} = \frac{\chi}{\varepsilon_A} (y_6 - y_{15}) \quad (6.32)$$

$$\underline{\bar{y}}_7^{(X^+)} = -\frac{\chi}{\varepsilon_A} (y_6 + y_{18}) \quad (6.33)$$

$$\underline{\bar{y}}_{16}^{(X^-)} = -\frac{\chi}{k_U} (y_6 - y_{15}) \quad (6.34)$$

$$\underline{\bar{y}}_{19}^{(X^+)} = \frac{\chi}{k_U} (y_6 + y_{18}). \quad (6.35)$$

I termini diversi da zero della matrice $\underline{\mathbb{B}}^{(X)}$ sono i seguenti:

$$B_{1,1}^{(X)} = B_{3,3}^{(X)} = B_{7,7}^{(X)} = B_{9,9}^{(X)} = B_{12,12}^{(X)} = B_{16,16}^{(X)} = B_{19,19}^{(X)} = 1. \quad (6.36)$$

Le condizioni iniziali possono essere espresse attraverso la seguente forma:

$$\underline{\mathbb{B}}_{[20 \times 20]}^{(\tau)} \cdot \underline{y}_{[20 \times 1]}(X, 0) = \underline{\bar{y}}_{[20 \times 1]}^{(\tau)} \quad (6.37)$$

in cui $\underline{\bar{y}}^{(\tau)}$ è il vettore che fissa le condizioni delle variabili rispetto al tempo; in questo caso tutte le variabili del problema per $\tau = 0$ sono nulle.

La matrice $\underline{\mathbb{B}}^{(\tau)}$ ha tutti i termini uguali a zero tranne i seguenti:

$$\begin{aligned}
B_{1,1}^{(\tau)} &= B_{5,5}^{(\tau)} = B_{6,6}^{(\tau)} = B_{8,8}^{(\tau)} = B_{9,9}^{(\tau)} = B_{11,11}^{(\tau)} = \\
&= B_{12,12}^{(\tau)} = B_{14,14}^{(\tau)} = B_{15,15}^{(\tau)} = B_{17,17}^{(\tau)} = B_{18,18}^{(\tau)} = B_{20,20}^{(\tau)} = 1.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Introducendo il sistema di equazioni nel software di calcolo i domini del tempo e dello spazio vengono discretizzati in una serie di intervalli in modo da cogliere i rapidi cambiamenti delle variabili del problema. Tra i valori appartenenti alla griglia di discretizzazione è prevista una interpolazione della soluzione che si avvale di quattro suddivisioni per quel che riguarda lo spazio e tre suddivisioni nel dominio del tempo.

L'integrazione della soluzione viene affrontata controllando l'errore commesso sia nella variabile spaziale che in quella temporale attraverso l'introduzione di specifiche tolleranze. In particolare, la stima dell'errore nello spazio è calcolata confrontando due soluzioni, ottenute per uno stesso intervallo di tempo, una con una discretizzazione grossolana e l'altra ricavata attraverso una discretizzazione più fitta. Allo stesso modo, la stima dell'errore nel tempo viene calcolata confrontando una soluzione con un'altra ottenuta in un intervallo temporale più elevato, a parità di discretizzazione nel dominio dello spazio.

La soluzione numerica viene ottenuta a partire da un intervallo temporale di primo tentativo che viene ridotto successivamente attraverso una procedura che verifica che le condizioni di *convergenza* della soluzione siano soddisfatte. La discretizzazione spaziale, invece, non subisce variazioni durante il calcolo, quindi per minimizzare gli errori ne è stata adottata una che prevede più di 10000 suddivisioni sull'intera lunghezza del ponte. L'intervallo iniziale d'integrazione viene assunto almeno 1/1000 dell'intero tempo di osservazione del problema, pari al tempo necessario al carico viaggiante per percorrere l'intero ponte.

Capitolo 7

Risultati numerici

7.1 Introduzione

Lo studio del comportamento dinamico del ponte soggetto a carichi viaggianti è condotto attraverso analisi parametriche valutando gli effetti di amplificazione dinamica per determinate caratteristiche della struttura e dell'ente viaggiante. I risultati ottenuti sono stati elaborati in modo da evidenziare gli effetti di amplificazione prodotti dal carico mobile rispetto al caso in cui quest'ultimo agisca staticamente. In particolare, la maggior parte dei diagrammi di seguito riportati si riferiscono al *Fattore di Amplificazione Dinamica (FAD)* definito come il rapporto tra il massimo valore assunto dalla variabile che si sta osservando, durante il passaggio del carico, rispetto al massimo valore che questa assume quando il carico agisce staticamente; entrambi i valori massimi vengono valutati nella stessa sezione. Se si indica con X la variabile da indagare, l'espressione del *FAD* è la seguente:

$$\phi_X = \frac{\max(X)_{t=0..\bar{T}}}{\max(X)_{st}} \quad (7.1)$$

in cui \bar{T} indica il tempo di osservazione.

L'analisi viene svolta al variare dell'intensità del carico, e quindi anche della sua massa, del parametro di luce del ponte, delle caratteristiche di rigidezza del cavo di sospensione e della travata. In questo modo sarà possibile effettuare una stima dell'amplificazione dinamica delle principali variabili di deformabilità del ponte in funzione delle caratteristiche sia del carico viaggiante che della struttura. La geometria del ponte, la rigidezza delle torri, la tensione ammissibile negli stralli, o nei pendini, e le proprietà del carico sono tenuti in conto da parametri adimensionali individuati mediante criteri di progetto ed in modo da rientrare nella pratica comune per questo tipo di strutture. I valori assunti da tali parametri sono di seguito riportati:

$$\frac{L}{H} = 5 \quad \frac{l}{H} = \frac{5}{3} \quad \frac{d}{L} = \frac{1}{10} \quad \frac{K_p}{g} = 50 \quad \frac{\sigma_a}{E} = \frac{7200}{2.1 \cdot 10^6}. \quad (7.2)$$

In alcuni casi, inoltre, è stata condotta un'indagine sull'influenza del carico mobile sulla risposta strutturale al variare della modellazione dell'azione inerziale da esso introdotta. Più precisamente, con riferimento alla (3.25), l'effetto prodotto dalla massa ($\lambda \neq 0$) è stato valutato in un caso considerando soltanto il contributo dell'accelerazione nominale (*S.A.*), enfatizzando l'effetto prodotto dai contributi non standard di accelerazione centripeta e di *Coriolis*.

7.2 I ponti strallati

Nei seguenti diagrammi viene riportato l'andamento del *FAD* relativo allo spostamento verticale e al momento flettente, della sezione di mezzeria della travata, al variare del parametro di velocità. Le diverse curve diagrammate si riferiscono ai seguenti casi: in una è stato considerato un carico di massa uguale a quella del ponte stesso, in un'altra il carico è stato considerato privo di massa e in ultimo è stato considerato un caso in cui l'effetto inerziale della massa del carico fosse dovuta soltanto all'accelerazione nominale (*S.A.*).

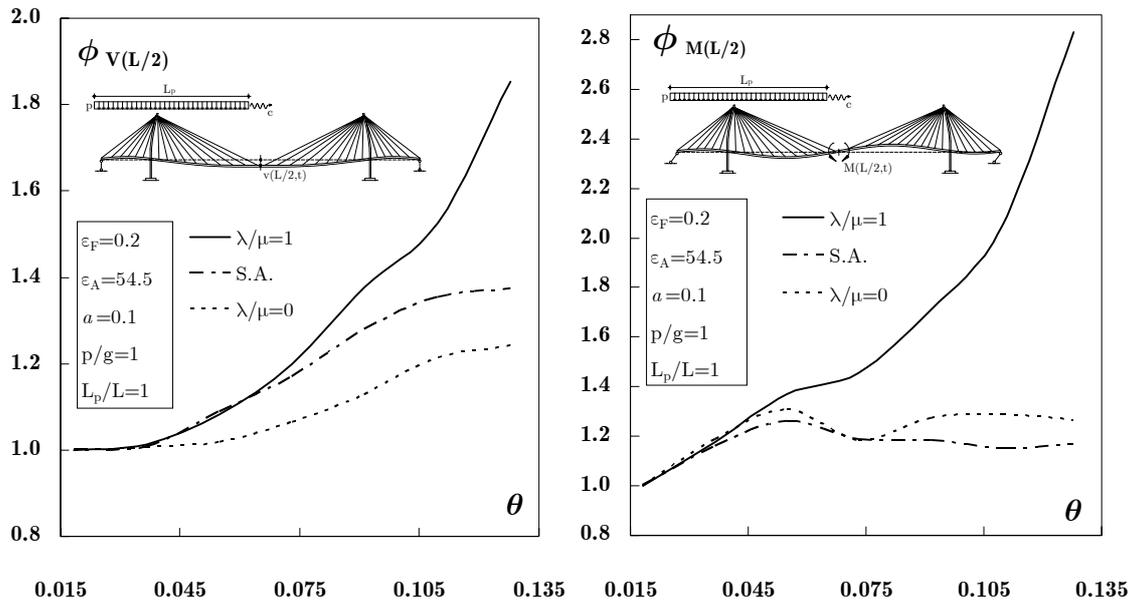


Figura 7.1: *FAD* dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria al variare del parametro di velocità

Il confronto delle tre curve mette in evidenza il notevole contributo della massa del carico, rispetto al caso in cui questa venga trascurata, ma si può notare anche il contributo delle accelerazioni di *Coriolis* e centripeta rispetto all'accelerazione nominale, principalmente per alte velocità di transito dell'ente viaggiante.

Considerazioni analoghe a quanto visto in precedenza possono essere fatte anche per i diagrammi del *FAD* relativo alla tensione nello strallo di ormeggio o nello strallo più lungo in campata, riportati nella figura 7.2.

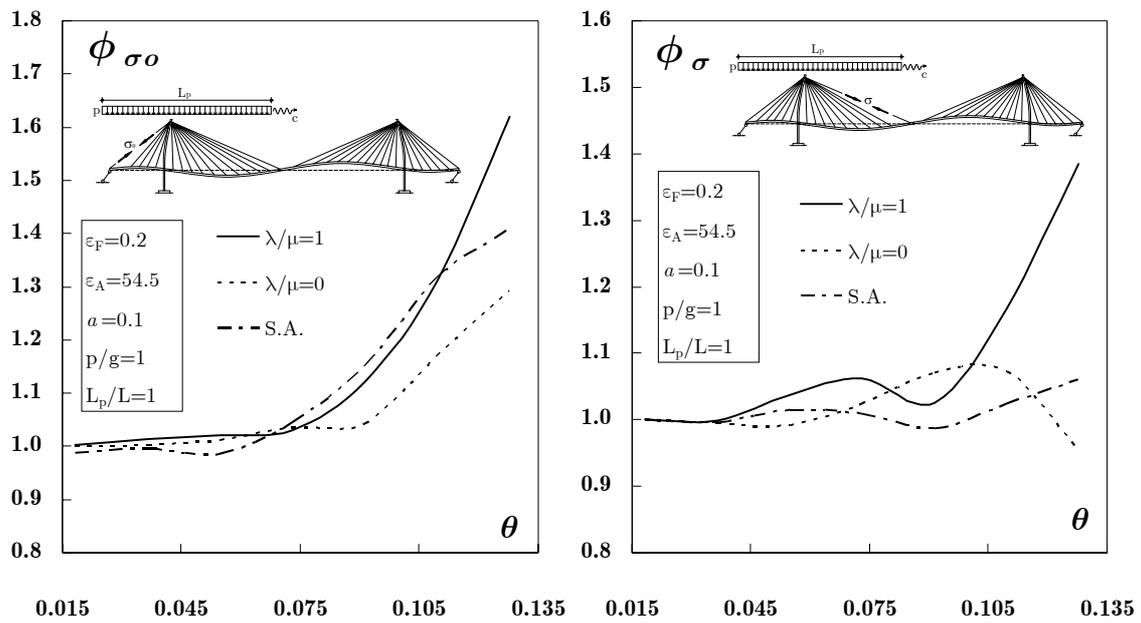


Figura 7.2: FAD della tensione nello strallo di ormeggio e nello strallo più lungo in caminata al variare del parametro di velocità

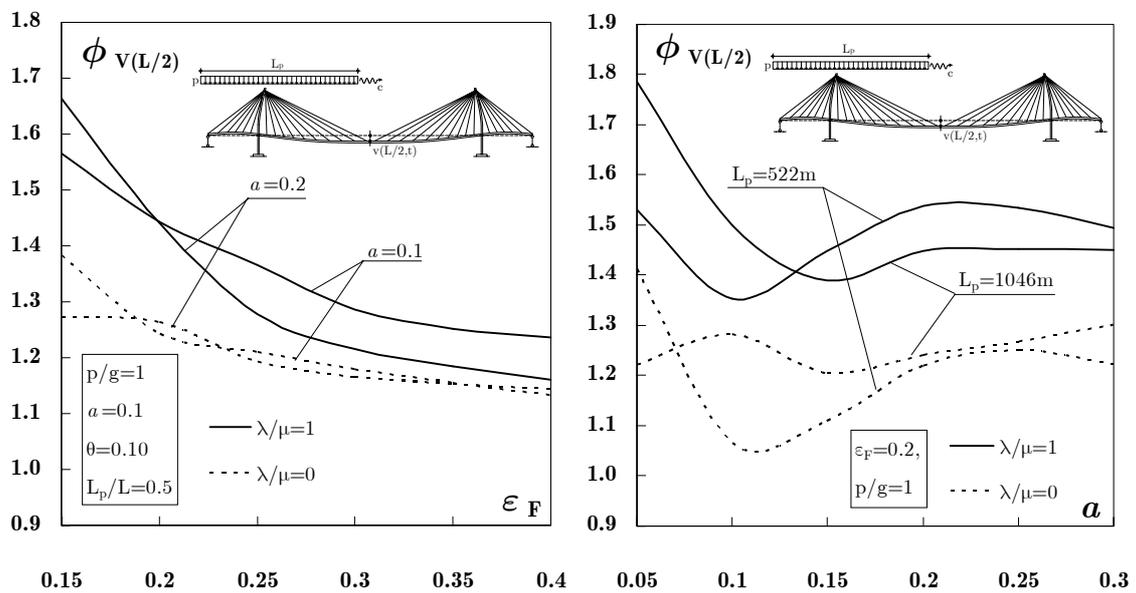


Figura 7.3: FAD dello spostamento verticale nella sezione di mezzera della travata al variare del parametro di rigidezza flessionale e del parametro di efficienza della strallatura

Il *FAD* dello spostamento verticale in mezzeria è stato diagrammato al variare del parametro di rigidezza flessionale ε_F e del parametro a che rappresenta un parametro strettamente connesso con le dimensioni del ponte. L'analisi al variare di a , mantenuto in un intervallo dettato dalla pratica delle costruzioni esistenti, è stata condotta per diverse lunghezze del carico mobile. In entrambi i diagrammi risulta significativo il contributo inerziale della massa del carico sul *FAD*. Inoltre si osserva che gli effetti di amplificazione sono molto maggiori per bassi valori dei parametri di rigidezza in corrispondenza di strutture più flessibili.

Di seguito sono riportati dei diagrammi che non fanno riferimento al *FAD*. Nel primo grafico è stato rappresentato il comportamento di \bar{v} , definito come lo spostamento verticale in mezzeria adimensionalizzato rispetto alla lunghezza della campata centrale ($\bar{v} = v_{(L/2)}/L$). Nel secondo grafico è stato riportato l'andamento di \bar{M} , definito come il momento flettente in mezzeria adimensionalizzato ($\bar{M} = M_{(L/2)}/(pH^2)$).

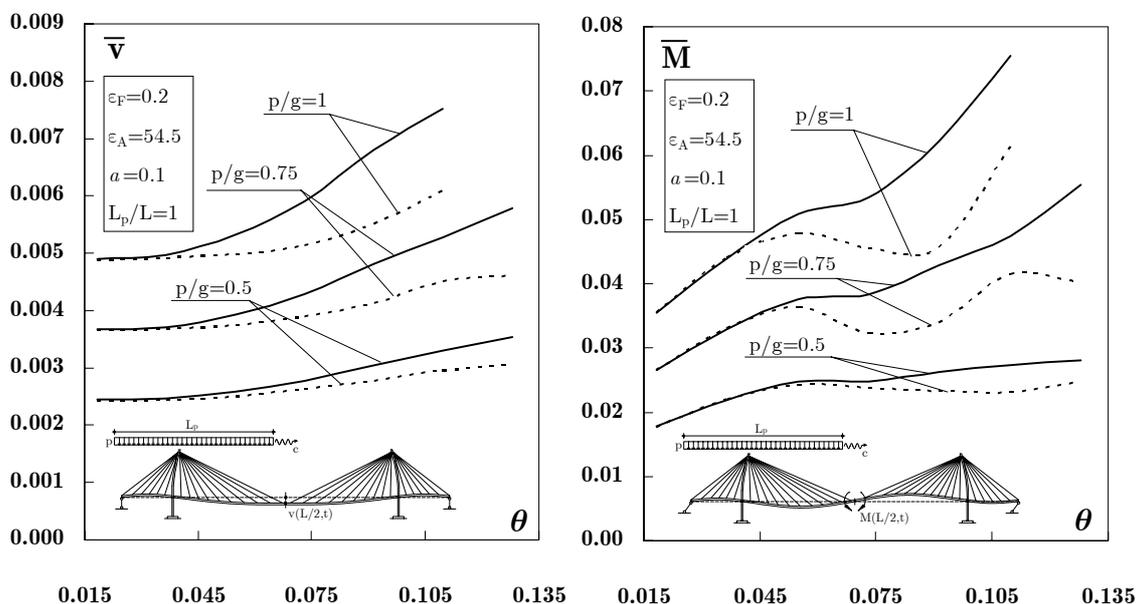


Figura 7.4: Andamento dello spostamento verticale e del momento flettente in mezzeria adimensionalizzati al variare del parametro di velocità

L'andamento all'aumentare della velocità di percorrenza del carico denota un costante incremento sia dello spostamento che del momento, nel caso di carico dotato di massa; nel caso in cui viene trascurata l'inerzia del carico l'entità di spostamento e momento diminuisce con tendenze ad un comportamento oscillante per \bar{M} quando l'intensità del carico aumenta rispetto al peso proprio del ponte.

I diagrammi riportati in figura 7.5 si riferiscono al FAD della rotazione torsionale della sezione di mezzeria al variare dei parametri di rigidezza della struttura. L'analisi è stata eseguita sia nel caso di pila ad "H" che nel caso di pila ad "A" e per diversi valori del rapporto tra l'inerzia torsionale del carico e quella della travata. Entrambi i grafici denotano una minore rigidezza dello schema con pila ad "A" evidenziata dal valore di ϕ_ω quasi sempre maggiore di quello relativo alla pila ad "H". Inoltre, in entrambi i diagrammi è possibile notare come all'aumentare della rigidezza torsionale della travata il FAD della rotazione torsionale diminuisce e l'influenza della tipologia della torre per il comportamento dinamico della struttura è praticamente trascurabile.

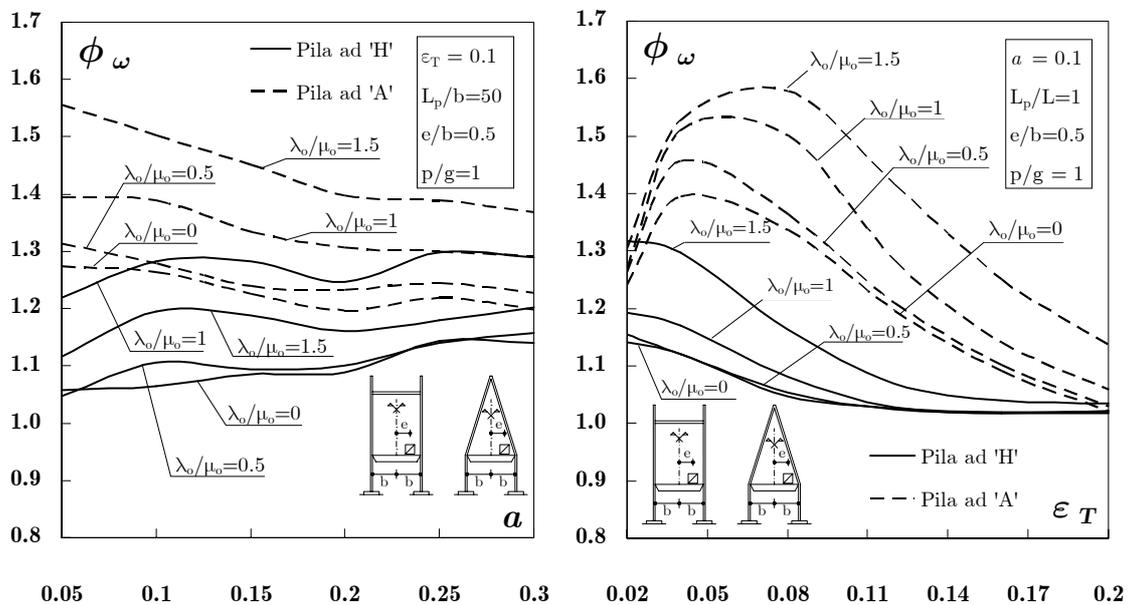


Figura 7.5: FAD della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di efficienza della strallatura e del parametro di rigidezza torsionale

Nelle figure 7.6 e 7.7 vengono riportati i diagrammi del FAD della rotazione torsionale al variare del parametro di velocità sia per quanto riguarda il caso della pila ad “H” che per il caso della pila ad “A”.

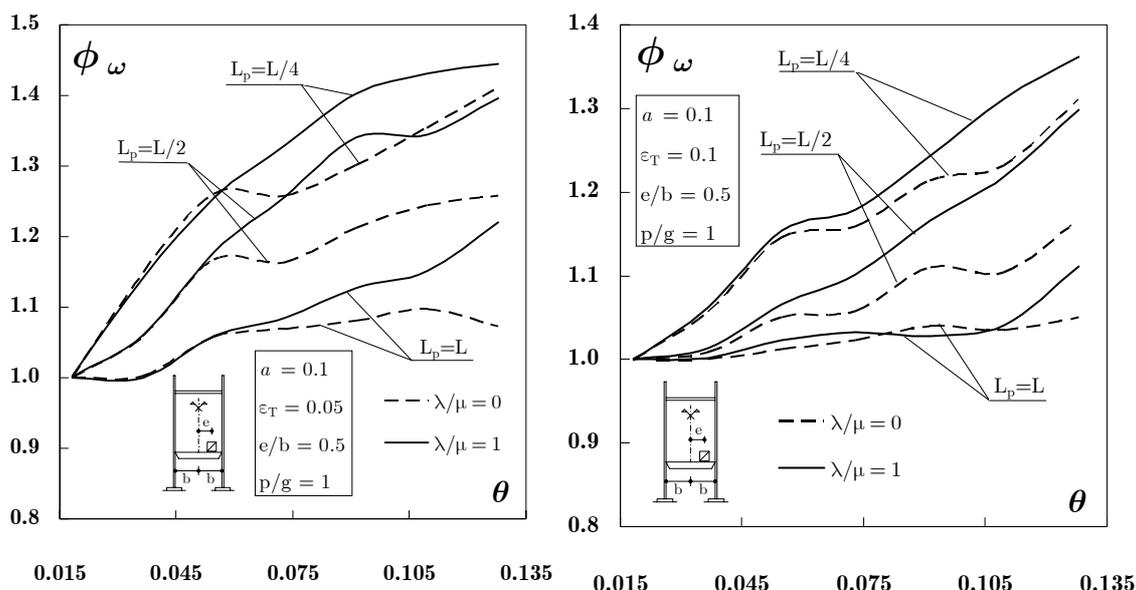


Figura 7.6: FAD della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di velocità nel caso di pila ad “H”

Il confronto viene proposto secondo una diversa schematizzazione degli effetti inerziali del carico mobile e per diversi rapporti di lunghezza tra la luce della campata principale del ponte e quella dell’ente viaggiante. I risultati evidenziano valori del FAD crescenti all’aumentare del parametro di velocità adimensionale; inoltre a parità di luce, gli schemi di ponte con pile ad “A” rispetto ai corrispondenti ad “H” presentano FAD maggiori.

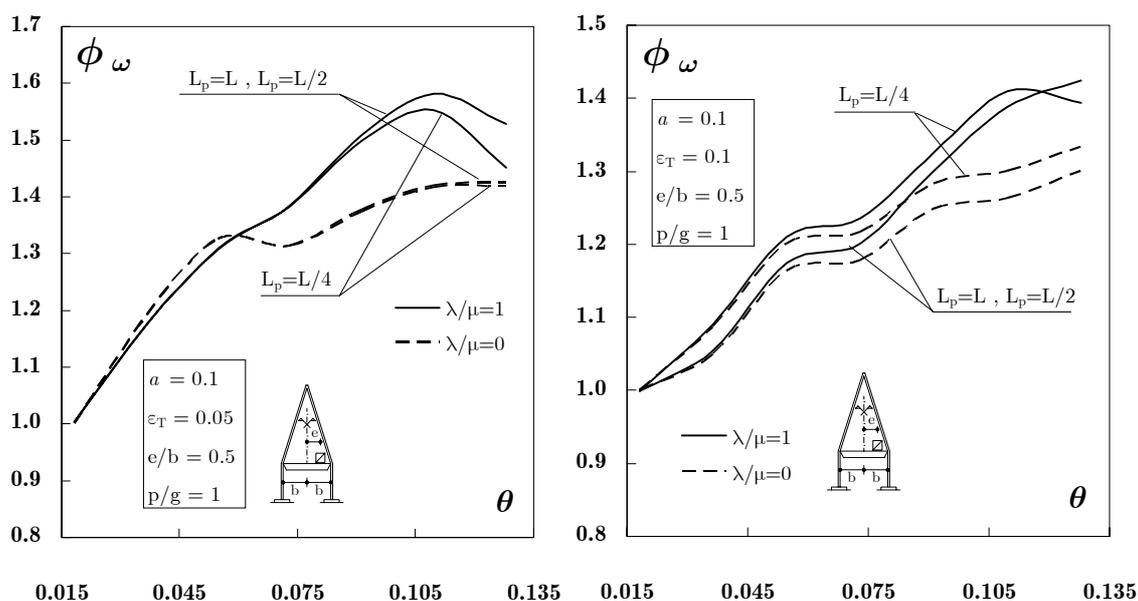


Figura 7.7: FAD della rotazione torsionale della travata al variare del parametro di velocità nel caso di pila ad “A”

Nei diagrammi proposti in figura 7.8 è stata riportata la curva di variabilità della rotazione torsionale in mezzeria normalizzata, i.e. $\bar{\omega} = \omega / \bar{p} \cdot \bar{e}$ in cui $\bar{e} = e/b$, al variare dei parametri adimensionali a e ϵ_T .

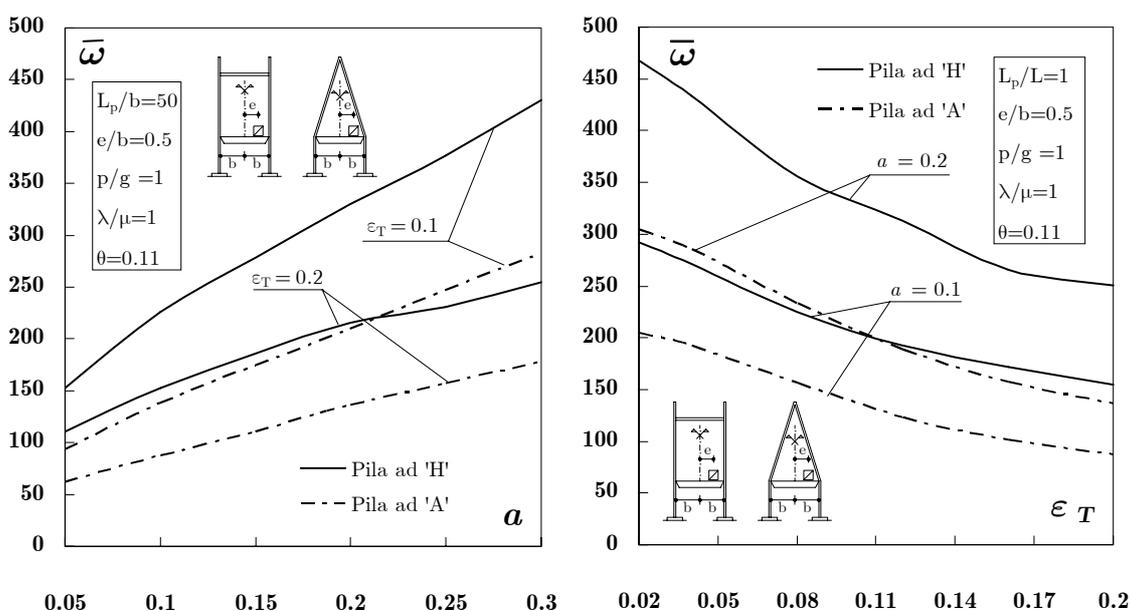


Figura 7.8: Andamento della deformabilità torsionale al variare dei parametri a e ϵ_T

L'analisi è stata condotta sia per quanto riguarda la torre con schema ad "H", più deformabile a torsione, che con schema ad "A". È possibile osservare una forte influenza della forma delle torri nella deformabilità torsionale all'aumentare sia dell'effetto *Dischinger* negli stralli che della rigidezza torsionale della travata.

L'indagine tridimensionale del problema ha permesso anche di mettere a fuoco alcuni dettagli nella modellazione del comportamento della struttura sotto l'azione del carico mobile. In particolare, per quanto riguarda la torsione della travata, nel caso di schema con pila ad "A", è stato possibile quantificare il contributo offerto dallo spostamento trasversale $s(x,t)$ lungo y alla rotazione torsionale. Di seguito viene riportata una tabella in cui è stata valutata la rotazione torsionale adimensionalizzata $\bar{\omega}$, per diversi valori del parametro a e del parametro di rigidezza torsionale ε_T , calcolata in un caso con una modellazione in cui $s(x,t)$ viene tenuto in conto e nell'altro con una modellazione in cui $s(x,t)$ viene ritenuto trascurabile.

		$\bar{\omega}$		
		$a \backslash \varepsilon_T$	0.05	0.1
$s(x,t) \neq 0$	0.1	181.44	136.08	86.44
	0.2	270.41	209.97	135.73
	0.3	376.18	279.59	176.48
$s(x,t) = 0$	0.1	183.78	137.35	86.82
	0.2	271.76	210.71	135.97
	0.3	377.06	280.07	176.61

Tabella 7.1: Confronto fra i valori di $\bar{\omega}$ per pila ad "A" ottenuti col modello in cui è presente lo spostamento trasversale lungo y ($s(x,t) \neq 0$) e il modello in cui questo non è presente ($s(x,t) = 0$) ($L_p = 750m$; $p/g = 1$; $\bar{p} = 0.0017$; $\bar{e} = 0.5$)

Dal confronto dei risultati ottenuti in tabella si può notare come la differenza tra il caso in cui $s(x,t) = 0$ e il caso in cui $s(x,t) \neq 0$ si aggira intorno all'1% quando la struttura è più flessibile a torsione, vale a dire per bassi valori di a e di ε_T , mentre si mantiene abbondantemente sotto tale soglia per $a > 0.1$ e per

$\varepsilon_T > 0.05$. Si può concludere, quindi, che la variabile spostamento trasversale della travata lungo y è ininfluyente sulla risposta torsionale del ponte soggetto all'azione di un carico mobile eccentrico.

7.3 I ponti sospesi

Nei grafici riportati in figura 7.11 è stato diagrammato l'andamento del FAD al variare del parametro θ che tiene conto della velocità del carico. Le curve nei grafici si riferiscono a due sezioni caratteristiche della travata, la sezione di mezzeria e la sezione a un quarto della campata centrale. I diagrammi sono relativi al FAD dello spostamento verticale e del momento flettente.

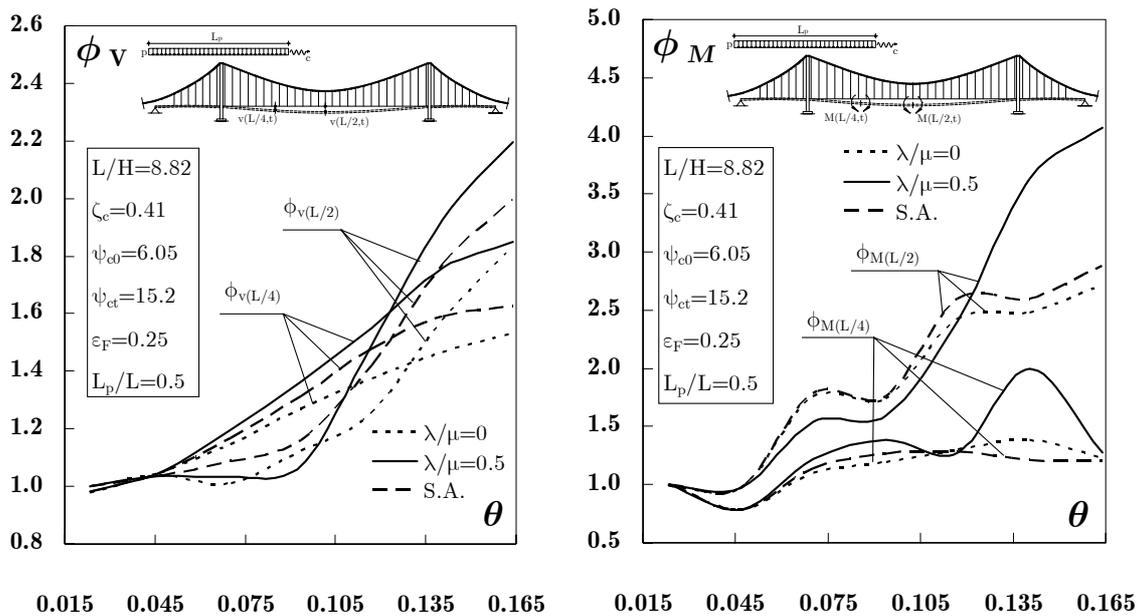


Figura 7.9: FAD dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $1/4$ della campata centrale al variare del parametro di velocità

Per ogni grafico sono state condotte diverse analisi, in particolare sono state diagrammate tre curve per ogni sezione. Una si riferisce al caso in cui il carico è stato considerato privo di massa, l'altra in cui viene tenuta in conto la massa

del carico ed infine la terza si riferisce all'analisi in cui l'effetto inerziale della massa del carico è stato valutato considerando solo l'accelerazione standard (S.A.) trascurando il termine di accelerazione di *Coriolis* e l'accelerazione centripeta.

Si nota che l'effetto della massa del carico, durante il suo passaggio sul ponte, contribuisce in maniera significativa all'amplificazione dinamica delle variabili osservate. Anche il contributo delle accelerazioni di *Coriolis* e centripeta, ritenute spesso di secondaria importanza, non è affatto trascurabile.

Nella figura 7.12 è stata condotta la stessa analisi precedentemente descritta per lo spostamento verticale e il momento flettente con riferimento questa volta alla componente orizzontale del tiro nel cavo di sospensione nella sezione di mezzeria. Come si può osservare dal grafico, all'aumentare della velocità di percorrenza del carico le tre curve si distinguono nettamente e i contributi inerziali del carico mobile determinano incrementi nel *FAD*.

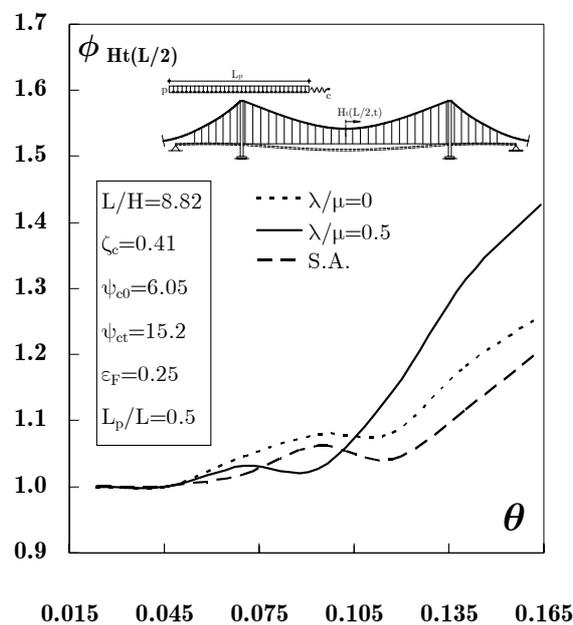


Figura 7.10: *FAD* della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di velocità

Nelle figure 7.13 e 7.14 l'analisi del comportamento delle principali variabili deformative del ponte sospeso è stata condotta anche con riferimento al parametro Ψ_{ct} di rigidezza del cavo rispetto a quella dei pendini di sospensione.

Per bassi valori di Ψ_{ct} il cavo è molto flessibile pertanto nelle curve può essere riscontrato un comportamento oscillatorio del *FAD* sia dello spostamento verticale, sia del momento flettente che del tiro nel cavo. Inoltre è evidente il diverso comportamento tra il caso in cui la massa del carico è ritenuta trascurabile e il caso in cui questa è diversa da zero.

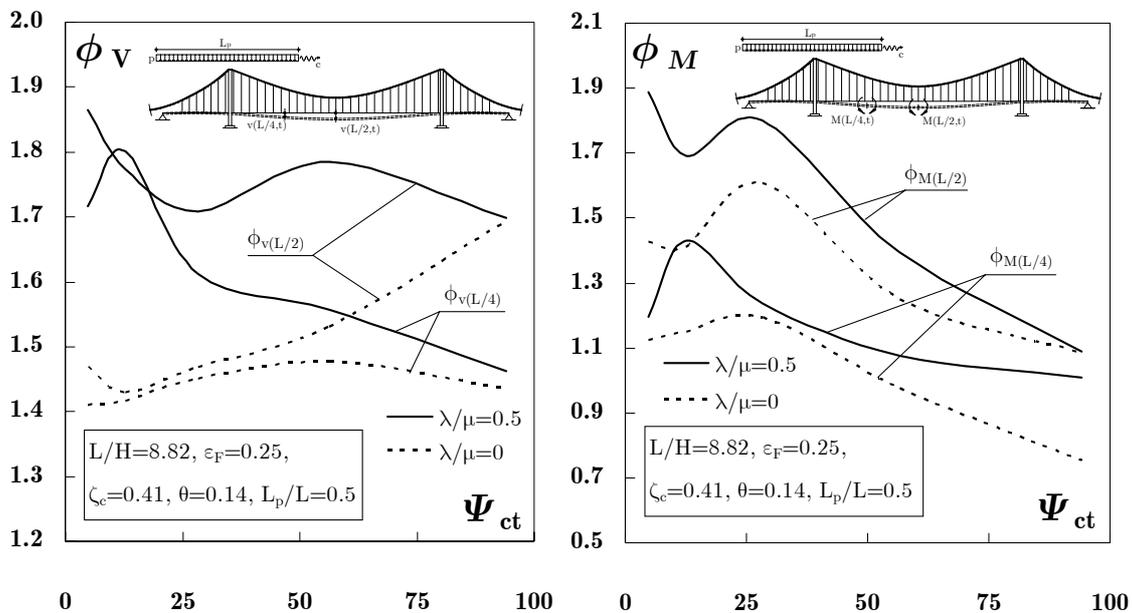


Figura 7.11: *FAD* dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad 1/4 della campata centrale al variare del parametro di rigidezza del cavo

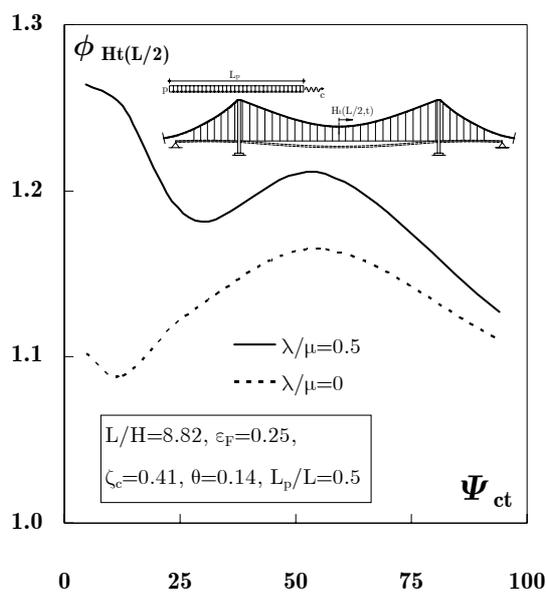


Figura 7.12: *FAD* della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di rigidità del cavo stesso rispetto a quella dei pendini

L'analisi di deformabilità è stata condotta anche al variare della rigidità della travata oltre che al variare di Ψ_{ct} . In particolare è stato definito un ulteriore parametro pari a:

$$K_F = \frac{gL^3}{EI_y} \tag{7.3}$$

che può essere interpretato come il rapporto tra la rigidità di forma del cavo di sospensione e la rigidità flessionale della travata. Facendo variare K_F in un intervallo tipico per il tipo di struttura oggetto dell'indagine è stato diagrammato nelle figure 7.15 e 7.16 il *FAD* relativo allo spostamento verticale, al momento flettente e al tiro nel cavo.

Come si può notare dai diagrammi di seguito riportati per bassi valori di K_F i *FAD* sono molto vicini all'unità e quindi sono indipendenti da una diversa schematizzazione del carico mobile.

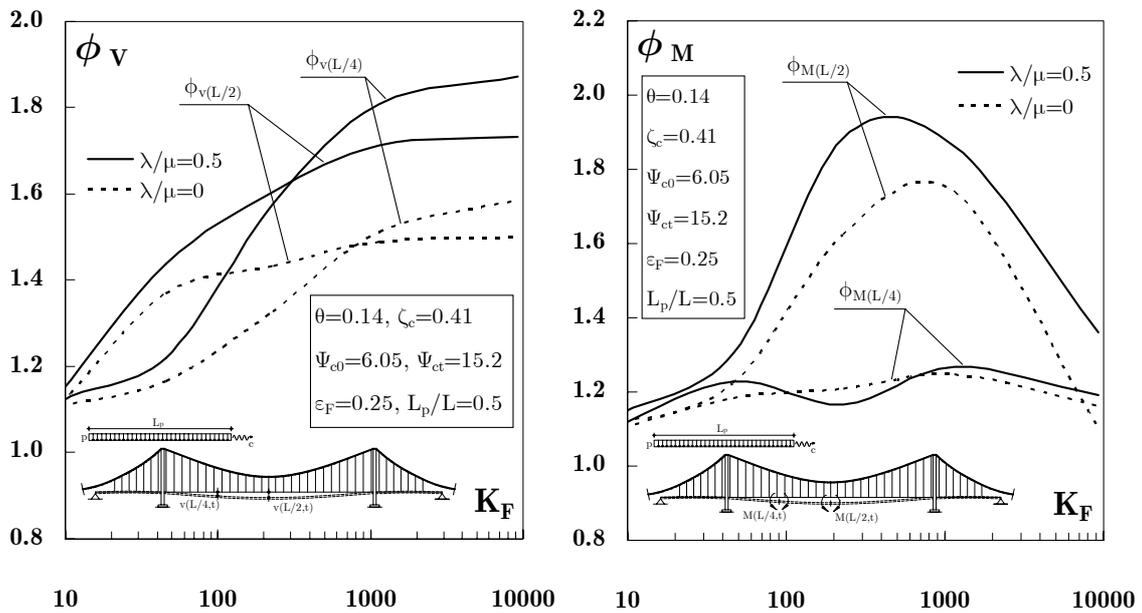


Figura 7.13: FAD dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidità tra travata e cavo K_F

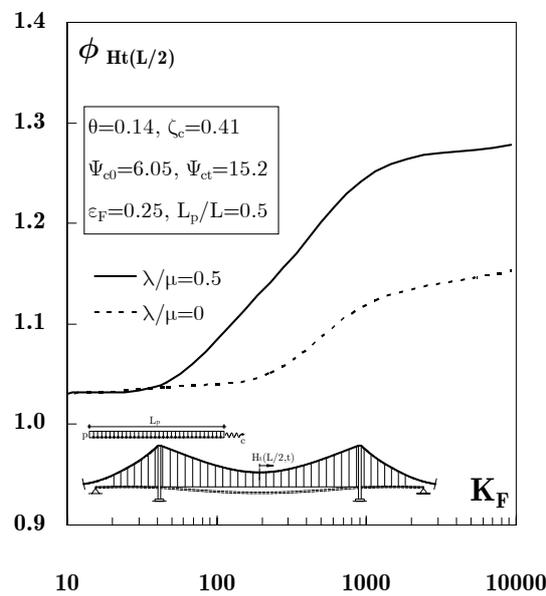


Figura 7.14: FAD della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare del parametro di rigidità tra travata e cavo K_F

Per valori elevati di K_F la rigidezza del cavo prevale nettamente su quella della travata e l'intera struttura è molto deformabile. In questo caso il FAD presenta un comportamento di evoluzione distinto tra la curva corrispondente al caso di massa del carico nulla e il caso in cui questa è assunta diversa da zero.

Un altro aspetto della deformabilità del ponte sospeso percorso da un carico ad elevata velocità è l'influenza della lunghezza del carico viaggiante. Nelle figure 7.17 e 7.18 vengono riportati i risultati dell'analisi del comportamento della struttura al variare della lunghezza del carico rispetto a quella della campata centrale.

Per bassi valori di L_p/L l'inerzia del carico è poco influente, pertanto il FAD assume un valore molto simile sia per le curve rappresentative del caso in cui il carico è dotato di massa che per quelle in cui la massa del carico è trascurabile.

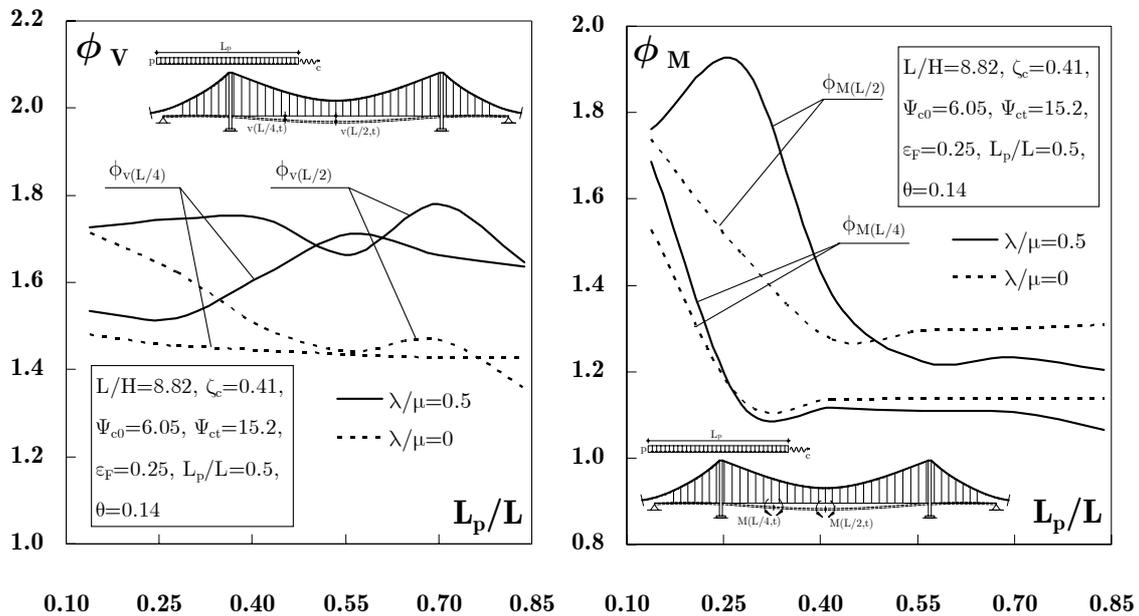


Figura 7.15: FAD dello spostamento verticale e del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad 1/4 della campata centrale al variare della lunghezza del carico

Per quanto riguarda il momento flettente incrementando L_p/L il FAD diminuisce mantenendosi pressochè costante per una lunghezza del carico maggiore della metà della campata centrale. Il FAD del tiro nel cavo manifesta un comportamento analogo per valori di L_p/L molto bassi e molto elevati ed assume il massimo valore in corrispondenza del rapporto tra la lunghezza del carico e quella della campata principale pari a $1/2$. Inoltre si nota come la soluzione in termini di spostamento dipende in modo significativo dalla schematizzazione del carico mobile.

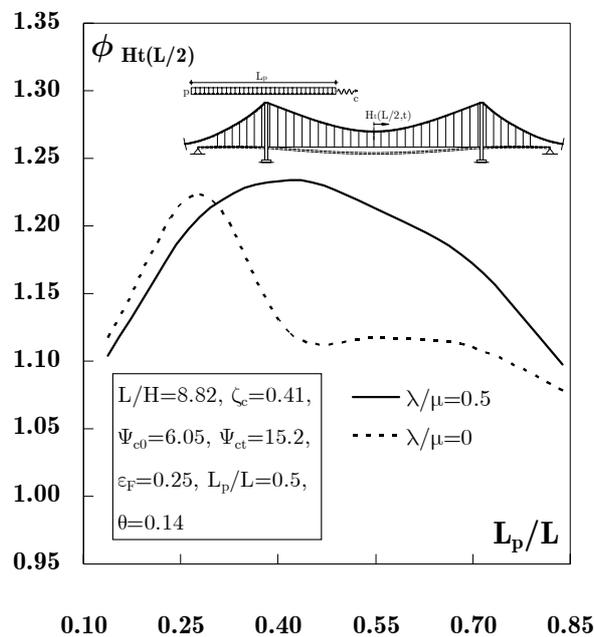


Figura 7.16: FAD della componente orizzontale di tiro nel cavo nella sezione di mezzeria al variare della lunghezza del carico

7.4 I ponti misti

Si propongono confronti tra risultati ottenuti per i ponti misti e risultati afferenti a tipologie di ponte sospeso e strallato.

Di seguito sono riportati i diagrammi relativi al FAD dello spostamento verticale in mezzeria della travata e ad un quarto della campata principale al

variare del parametro di velocità. Per ogni grafico sono state diagrammate cinque curve: due sono relative allo schema strallato e sospeso e le altre si riferiscono allo schema misto nel caso in cui il parametro di interazione viene particolarizzato a $r = 0.25$, $r = 0.5$ e $r = 0.75$. Il FAD aumenta all'aumentare del parametro θ sia per gli schemi misti che gli schemi strallato e sospeso. Nel caso dello spostamento in mezzeria il valore più elevato è assunto dal ponte strallato, mentre il ponte sospeso denota un comportamento oscillatorio. Per quanto riguarda lo spostamento in $L/4$ il FAD più elevato si riferisce al ponte sospeso, mentre la curva relativa al ponte strallato è compresa tra quelle che si riferiscono allo schema misto.

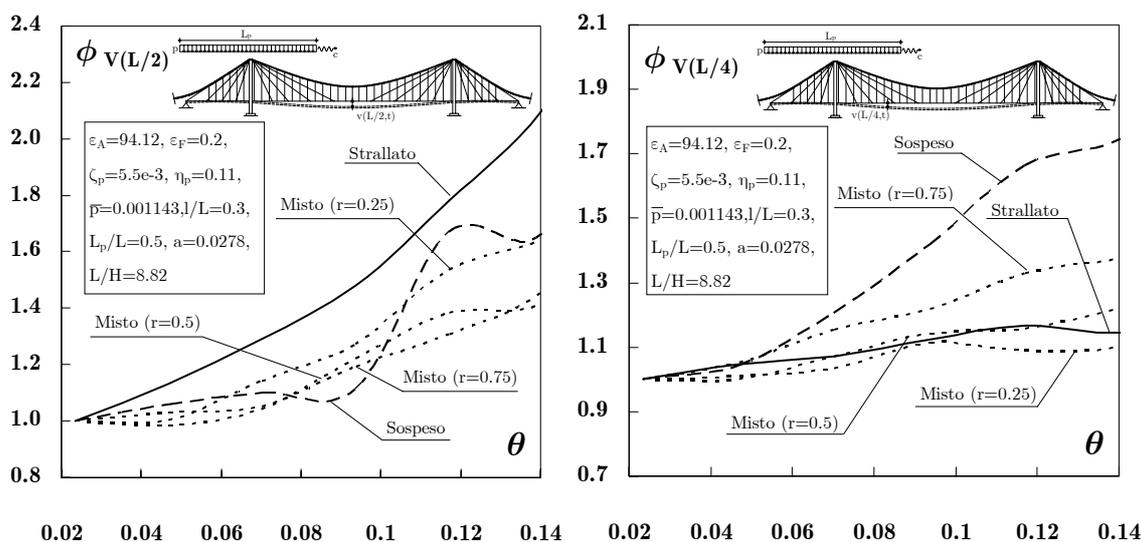


Figura 7.17: FAD dello spostamento verticale per la sezione di mezzeria e ad $1/4$ della campata centrale al variare del parametro di velocità

Nelle figure 7.20 e 7.21 sono proposte analisi di sensitività al variare del parametro di rigidezza relativa tra impalcato e sistema di sospensione. In particolare si nota come la variazione di K_F sia meno influente sullo schema misto di quanto non lo sia per gli altri due schemi. Nel diagramma del FAD dello spostamento ad un quarto della campata centrale sono ben distinguibili tutte le curve. Il ponte sospeso manifesta il comportamento più flessibile e le

curve relative allo schema misto sono meno ripide man mano che il parametro r diminuisce avvicinandosi allo schema strallato.

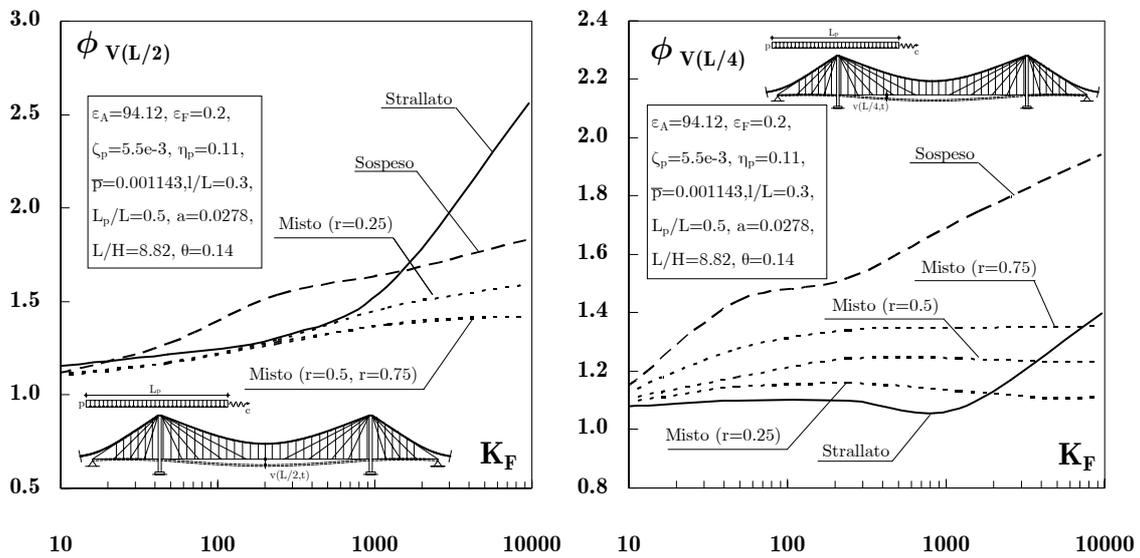


Figura 7.18: FAD dello spostamento verticale per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidità tra travata e cavo K_F

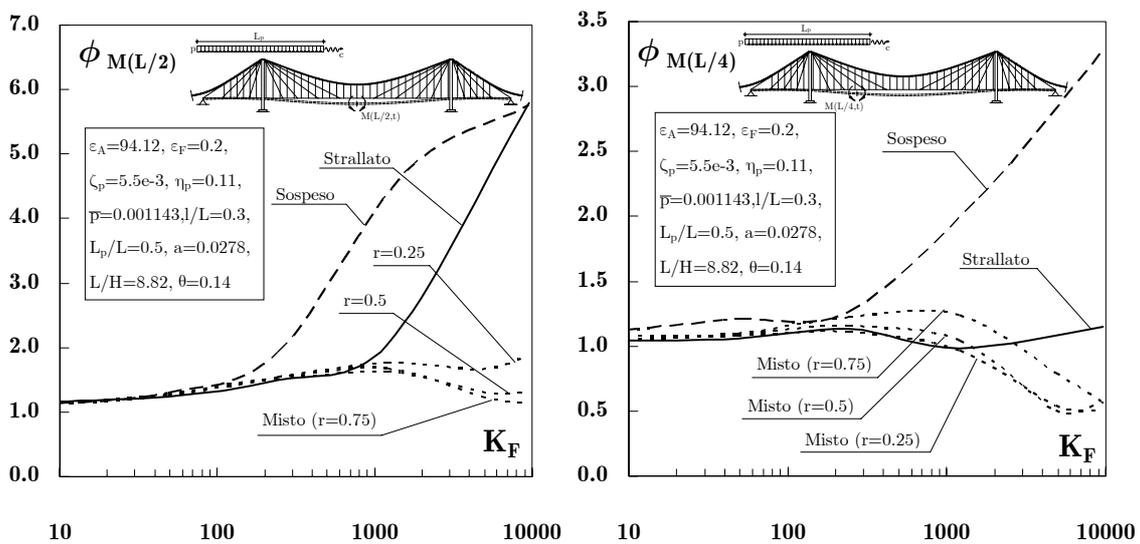


Figura 7.19: FAD del momento flettente per la sezione di mezzeria e ad $L/4$ al variare del parametro di rigidità tra travata e cavo K_F

I diagrammi del FAD del momento flettente hanno andamento analogo sia per la sezione di mezzeria che per quella a $L/4$ per quanto riguarda lo schema misto. Il ponte sospeso naturalmente è lo schema che risente maggiormente dell'incremento della rigidezza del cavo che porta ad un comportamento strutturale più deformabile.

Nella figura 7.22 sono riportati i diagrammi degli spostamenti della travata per la sezione di mezzeria e per la sezione posta a $L/4$ della campata centrale al variare di r . Le curve diagrammate per ogni grafico sono quattro: una si riferisce allo spostamento nel caso statico, mentre le altre si riferiscono a velocità di percorrenza del carico crescenti fino ad arrivare al caso in cui $\theta = 0.163$.

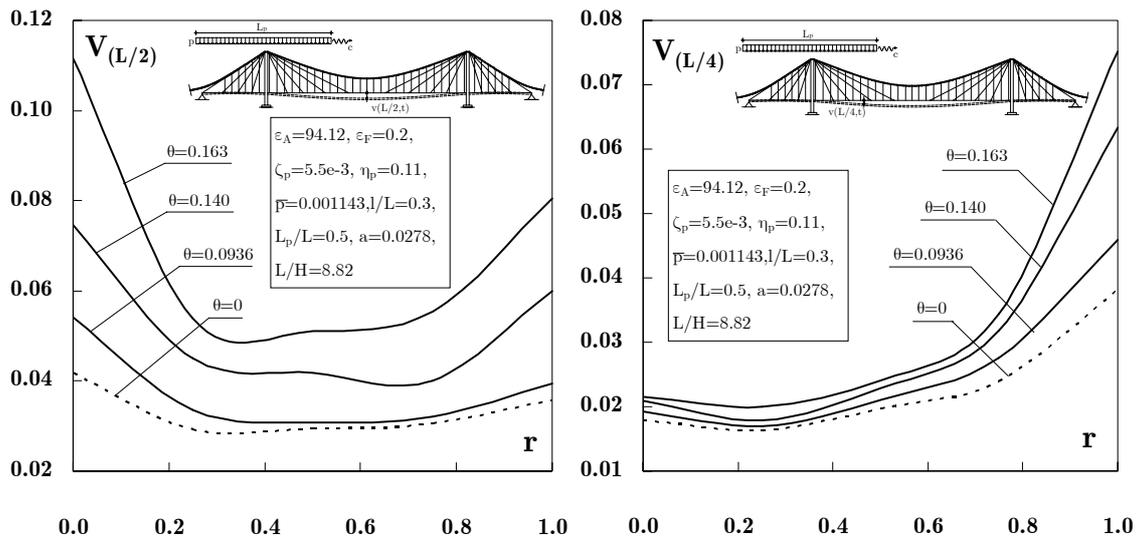


Figura 7.20: Andamento dell'abbassamento verticale in mezzeria e a $L/4$ al variare del parametro r nel caso statico e per diversi valori di velocità di percorrenza del carico

Come si può notare dal diagramma $V_{(L/2)} - r$ lo spostamento in mezzeria relativo allo schema strallato ($r = 0$) non solo è più elevato dello schema misto ma è maggiore anche di quello ottenuto per lo schema sospeso ($r = 1$). Tale comportamento vale sia nel caso statico ($\theta = 0$) che all'aumentare della velocità del carico mobile. Nel caso del diagramma dello spostamento a $L/4$ i valori

ottenuti per il ponte strallato sono molto simili a quelli relativi allo schema misto, mentre i risultati ottenuti per il ponte sospeso denotano una maggiore deformabilità di tale schema sia per $\theta = 0$ che per $\theta > 0$.

In figura 7.23 viene riportato l'andamento dello spostamento verticale della travata in mezzeria durante il passaggio del carico. Sono stati diagrammati due casi: uno relativo al caso $\theta = 0.0936$, pari a $c = 80 \text{ m/s}$, e l'altro relativo a $\theta = 0.14$, pari a $c = 120 \text{ m/s}$. Per ogni grafico sono state diagrammate tre curve al variare del parametro r .

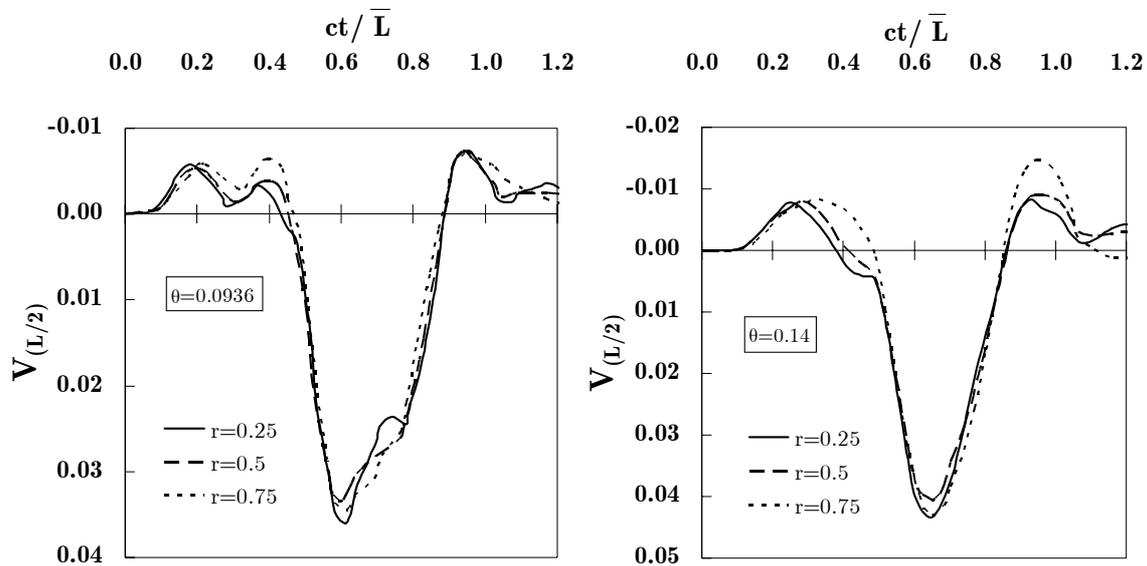


Figura 7.21: Abbassamento verticale in mezzeria della travata durante il passaggio del carico ($\varepsilon_A = 94.12$, $\varepsilon_F = 0.2$, $\bar{p} = 0.001143$, $l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$, $L_p/L = 0.5$, $a = 0.0278$, $\bar{L} = L + 2l$)

Dall'osservazione dei diagrammi sopra proposti si può notare come sia maggiore lo spostamento relativo alla velocità di percorrenza più elevata e come la condizione migliore in termini di deformabilità sia il caso in cui $r = 0.5$, vale a dire la condizione di minore flessibilità di ottiene esattamente dalla combinazione intermedia dei due schemi strallato e sospeso.

I diagrammi seguenti si riferiscono alla deformata della travata nell'istante in cui il carico si trova esattamente in posizione simmetrica nella campata

centrale. Le curve si riferiscono alle velocità di percorrenza del carico precedentemente descritte.

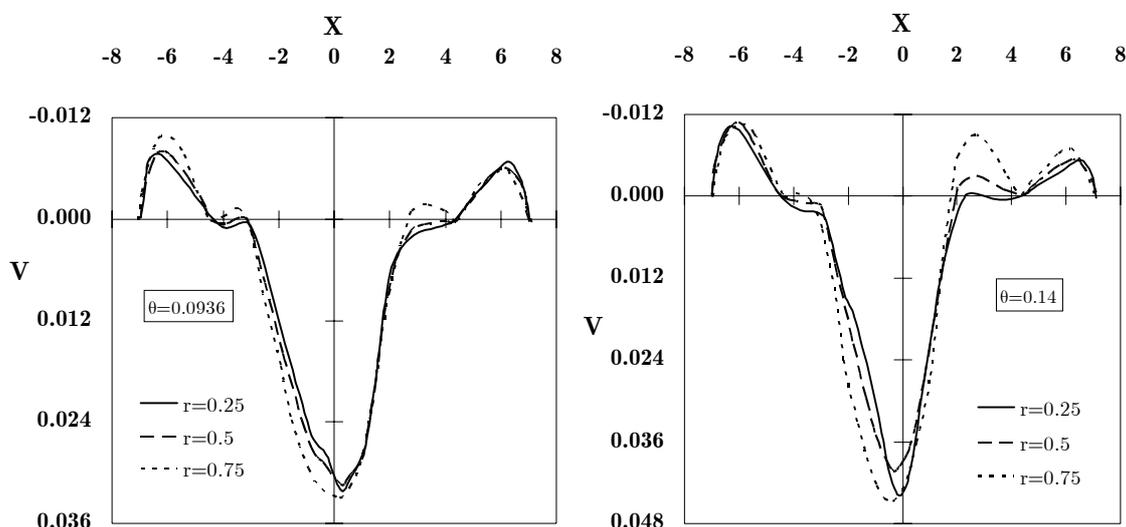


Figura 7.22: Deformata della travata nell'istante in cui il carico si trova nella campata centrale in posizione simmetrica

$$(\varepsilon_A = 94.12, \varepsilon_F = 0.2, \bar{p} = 0.001143, l/L = 0.3, L/H = 8.82, L_p/L = 0.5, a = 0.0278)$$

La stessa analisi sopra descritta è stata condotta con l'obiettivo di confrontare il comportamento dello schema misto con quello strallato e quello sospeso.

Di seguito vengono proposti i risultati ottenuti sia in termini di comportamento della variabile oggetto d'indagine al variare del tempo di percorrenza del carico, che in termini di deformata della struttura nella condizione più gravosa per la stessa variabile che si sta osservando.

Dai grafici ricavati si può notare come la deformabilità del ponte misto sia minore di entrambi gli schemi da cui viene ottenuto; il ponte strallato è più deformabile del ponte sospeso per quanto riguarda la sezione di mezzeria dove gli stralli sono più inclinati e meno efficaci. Inoltre, dai diagrammi relativi alla deformata della struttura si può osservare come il comportamento del ponte sospeso sia fortemente condizionato dal cavo di sospensione; la deformata, infatti, è molto più simile a quella del cavo che non a quella di una trave.

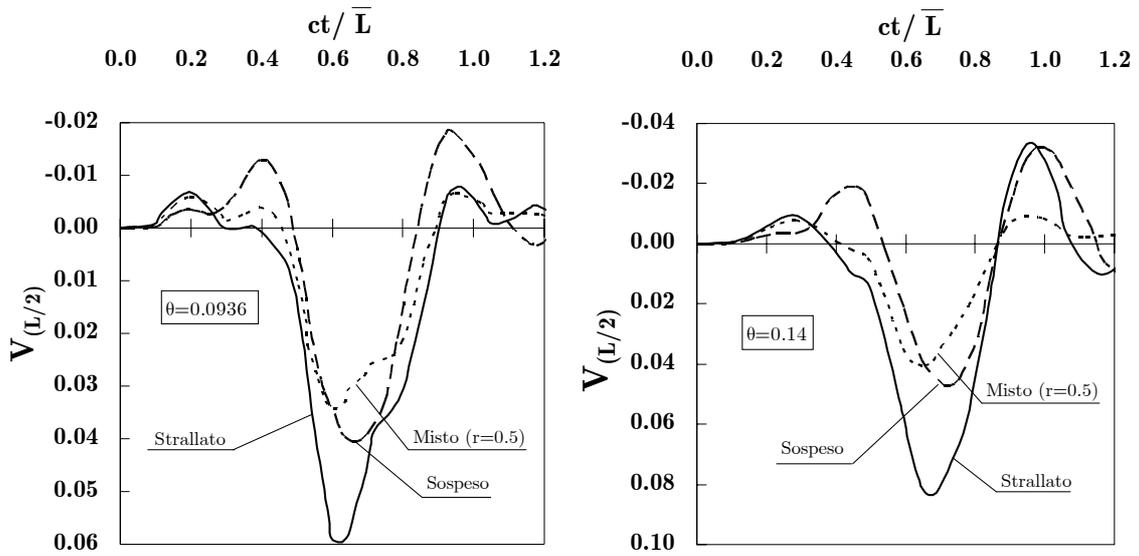


Figura 7.23: Confronto tra l'abbassamento verticale in mezzeria della travata durante il passaggio del carico per i tre tipi di ponte analizzati
 $(\varepsilon_A = 94.12, \varepsilon_F = 0.2, \bar{p} = 0.001143, l/L = 0.3, L/H = 8.82, L_p/L = 0.5, a = 0.0278, \bar{L} = L + 2l)$

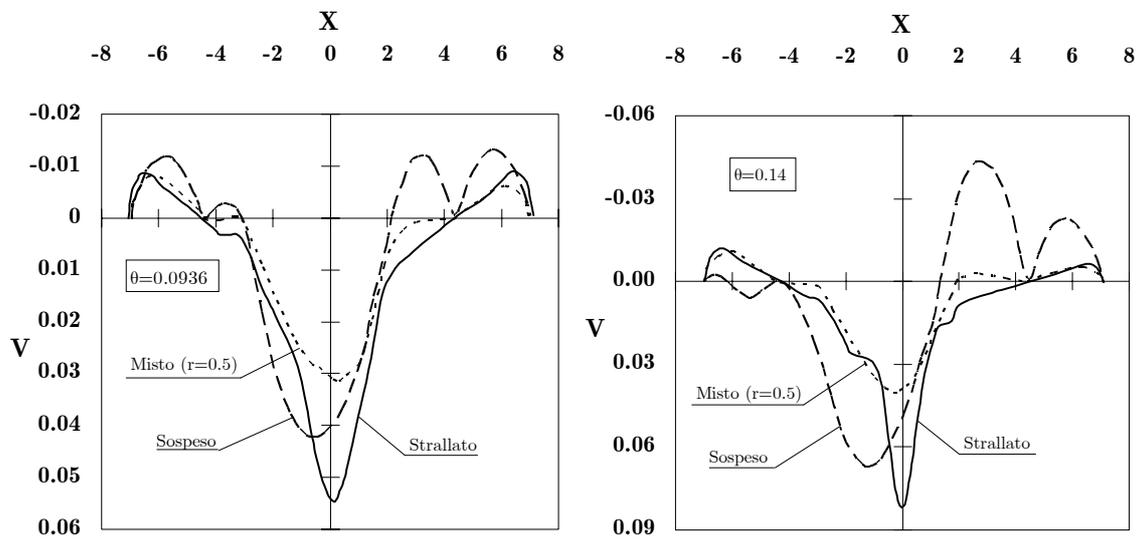


Figura 7.24: Confronto tra la deformata della travata nell'istante in cui il carico si trova nella campata centrale in posizione simmetrica per i tre tipi di ponte analizzati
 $(\varepsilon_A = 94.12, \varepsilon_F = 0.2, \bar{p} = 0.001143, l/L = 0.3, L/H = 8.82, L_p/L = 0.5, a = 0.0278)$

Infine è stata realizzata un'indagine, a sfondo economico, sulla quantità di acciaio (Q_s), espressa in tonnellate, necessaria al sistema di sospensione della travata partendo dallo schema strallato passando per lo schema misto e arrivando al caso sospeso.

Nel caso del ponte strallato Q_s comprende l'acciaio utilizzato per la strallatura, compresi i cavi di ancoraggio; per il ponte sospeso è stato considerato l'acciaio impiegato per il cavo di sospensione e per i pendini di collegamento tra cavo e travata.

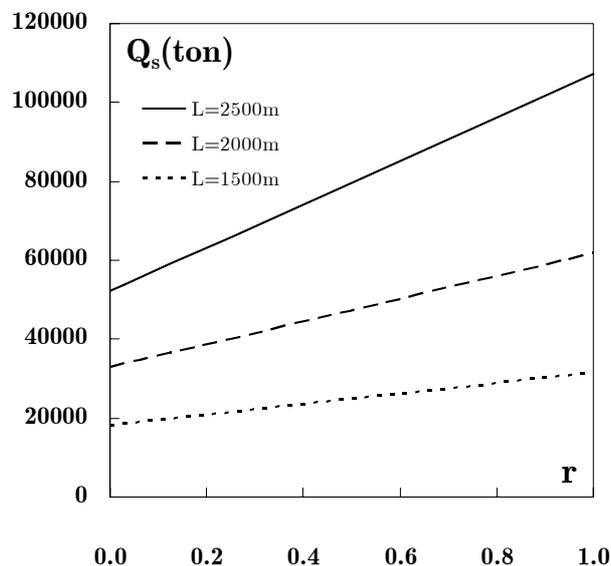


Figura 7.25: Quantità di acciaio necessaria al sistema di sospensione al variare del parametro r per diverse lunghezze della campata principale ($l/L = 0.3$, $L/H = 8.82$)

L'analisi è stata svolta per tre lunghezze di riferimento della campata principale a partire da 1500 m, dimensioni consuete per un ponte di grande luce. I risultati ottenuti nel diagramma denotano il buon comportamento dello schema misto anche dal punto di vista economico rispetto allo schema strallato e sospeso. Il ponte misto, benché costituito dall'assemblaggio della strallatura e del cavo di sospensione, grazie alla sua maggiore rigidità necessita di elementi

strutturali di dimensioni più contenute rispetto al caso del ponte sospeso o del ponte strallato, a parità di lunghezza della campata principale.

Capitolo 8

Conclusioni

Nella presente tesi inizialmente lo studio è stato rivolto all'analisi degli aspetti essenziali relativi al problema del carico mobile, ponendo particolare attenzione ai risultati ed alle formulazioni esistenti in letteratura. In particolare, lo studio dei fenomeni di interazione dinamica prodotta dal traffico veicolare o ferroviario per alte velocità di transito è stato principalmente sviluppato per tipologie di ponti semplici facenti riferimento a schemi di tipo appoggiato. Per queste ultime sono stati condotti diversi studi al fine di valutare la risposta strutturale mediante formule semplici di tipo analitico e/o numerico, in cui il carico veicolare si basa su una descrizione cinematica semplificata. Sono stati rivisitati esempi classici relativi a tipologie di ponti semplici, valutando gli effetti prodotti dal carico esterno sui parametri di tensione e deformazione della struttura. In particolare, la schematizzazione usuale riscontrata in letteratura, prescinde da contributi di accoppiamento strettamente connessi con la descrizione inerziale del carico mobile. Si sono sviluppate analisi parametriche mediante le quali è stato possibile determinare l'influenza di tali contributi su grandezze tipiche del comportamento dinamico, valutando gli effetti di amplificazione dinamica su parametri caratteristici di oscillazione del ponte. Sono state altresì sviluppate analisi di confronto,

considerando diverse tipologie del carico mobile, parametrizzando l'influenza della massa del carico viaggiante sul comportamento dinamico della struttura. I risultati evidenziano come termini derivanti da contributi di accelerazione non standard e quelli indotti da una distribuzione non stazionaria del carico mobile possono in particolari condizioni influenzare in modo significativo il comportamento dinamico di ponti.

Successivamente, lo studio è stato indirizzato su tipologie di ponte di grande luce, analizzando i problemi di deformabilità strutturale indotti dai carichi viaggianti. In particolare, le usuali tipologie di ponti utilizzati nel superamento di grandi luci fanno riferimento a schemi di tipo strallato, sospeso e misto. Nell'ambito del presente lavoro di tesi si è realizzato uno studio di valutazione degli effetti prodotti dalle vibrazioni eccitate dai carichi esterni, al fine di fornire una dettagliata analisi di caratterizzazione del comportamento dinamico dei ponti di grande luce. In letteratura, l'analisi dei fenomeni di interazione dinamica nelle tipologie di ponte di grande luce risulta descritta in modo non esaustivo, in relazione agli elevati effetti di amplificazione che solitamente tali strutture esibiscono se soggette a carichi di tipo dinamico. Una breve disamina della letteratura in argomento evidenzia che il comportamento dinamico per strutture sono state analizzati fattori di impatto per tipologie di tipo strallati di medie dimensioni ([4], [5], [51]), mentre per le tipologie di ponti sospesi, comportamenti di interazione dinamica sono stati studiati principalmente per condizioni di carico veicolare ([18], [20]). Infine, l'analisi di tipologie misti strallato-sospeso risultano scarsamente visibile nel contesto letterario.

L'analisi è stata indirizzata all'identificazione dei parametri ingegneristici fondamentali che governano la deformabilità strutturale del ponte. Inizialmente, si è utilizzato un approccio di tipo analitico al fine di modellare gli aspetti essenziali che governano la risposta dinamica della struttura. In particolare, la formulazione si basa su un approccio al continuo, solitamente utilizzato in letteratura per lo studio di tipologie di ponti di grande luce. In tali tipologie di ponte le strutture risultano verosimilmente snelle determinando elevati rapporti tra i pesi propri ed i carichi esterni con valori

prossimi all'unità, specie nei ponti ad uso ferroviario. Il lavoro di tesi è stato quindi indirizzato verso lo studio del comportamento dinamico determinando condizioni critiche di carico e valutando i fattori di amplificazione rispetto allo stato di deformazione e di tensione.

Il modello di ponte è stato sviluppato coerentemente con un approccio al continuo utilizzato in letteratura in modo efficace al fine di simulare la risposta dinamica di tipologie di ponti di grande luce. In particolare, le assunzioni di base sono consistenti con precedenti lavori ([12], [14]). La cinematica del ponte e le corrispondenti distribuzioni delle forze inerziali sono state accuratamente valutate nelle equazioni di equilibrio dinamico mediante contributi di accelerazione di tipo non standard. Inoltre, la risposta elastica del ponte sotto i carichi mobili è stata studiata valutando gli incrementi di spostamento e di tensione a partire dalla configurazione iniziale sotto peso proprio secondo una procedura di tipo incrementale. La risposta strutturale dei ponti soggetti a carichi viaggianti è strettamente connessa con lo schema di interazione tra ponte e carichi esterni. Il modello di treno fa riferimento ad un sistema di tipo continuo dotato di propria massa e rigidezza, uniformemente distribuite lungo la propria lunghezza. La zona di contatto treno/impalcato è stata inoltre descritta ipotizzando un contatto bilaterale tra treno di carico e impalcato. Le equazioni del problema dinamico sono state introdotte in coerenza con il modello di trave secondo *Eulero-Bernoulli* e la formulazione di cavo con approssimazione parabolica valutando accuratamente la cinematica dei diversi elementi strutturali costituenti il ponte.

Le equazioni di equilibrio dinamico introducono per i diversi schemi di ponte un problema non-lineare differenziale, che nella seguente trattazione è stato risolto numericamente. La soluzione è stata ottenuta mediante il metodo alle differenze finite, secondo uno schema di integrazione centrato di tipo implicito, che utilizza un approssimazione del secondo ordine sia nella variabile temporale che spaziale. In particolare, le equazioni differenziali sono convertite nella forma ordinaria utilizzando una discretizzazione del secondo ordine. La soluzione è stata opportunamente studiata stimando l'errore nella variabile temporale e spaziale e introducendo opportuni zone di infittimento dove la

soluzione presenta gradienti elevati. Inoltre, al fine di integrare in modo accurato le equazioni di equilibrio, il passo di integrazione è stato scelto in forma dinamica, ottimizzando quindi il processo di calcolo e quindi la determinazione della soluzione.

I risultati sono descritti mediante analisi di sensitività in funzione delle grandezze fondamentali del ponte per diversi valori di velocità di transito e di lunghezza di carico. I risultati riportano una serie di confronti numerici espressi in termini di coefficienti di amplificazione legati a quantità di tipo statico/cinematico. Si è potuto notare come il comportamento dinamico sotto carichi viaggianti acquisti particolare rilevanza nel caso di carichi di consistente inerzia e con elevate velocità di transito. Per i diversi schemi di ponte le formulazioni sono state ottenute in forma adimensionale introducendo opportune grandezze caratteristiche, in funzione delle quali la risposta strutturale risulta maggiormente evidente. In particolare, sono state sviluppate analisi di sensitività per differenti condizioni di carico e diverse caratteristiche fisiche/geometriche del ponte, mettendo in luce gli effetti di amplificazione prodotti dall'azione dinamica. Lo studio è stato inoltre esteso alle tipologie di ponte miste strallato/sospeso valutando l'interazione tra i diversi schemi ed il loro comportamento in ambito dinamico. I risultati evidenziano come la presenza del sistema strallato nei ponti misti tende a ridurre i fattori di amplificazione migliorando quindi il comportamento strutturale del ponte soggetto a carichi viaggianti.

Le velocità prese in considerazione durante l'analisi sono andate ben oltre i 300 km/h.

8.1 Osservazioni sui risultati ottenuti

Dai risultati numerici ottenuti è possibile trarre alcune conclusioni. Innanzitutto l'ipotesi di trascurabilità dell'effetto inerziale del carico non è affatto realistica soprattutto per elevate velocità di percorrenza, indipendentemente dal tipo di ponte analizzato. Inoltre, lo studio dell'effetto

prodotto dalle accelerazioni *non standard* del carico, accelerazioni di *Coriolis* e centripeta, ha permesso di concludere che anche il loro contributo non può essere trascurato, come si è potuto notare dai diagrammi relativi al *FAD*.

L'analisi ha evidenziato l'influenza dei parametri adimensionali, relativi alle caratteristiche strutturali, sulla deformabilità dei diversi tipi di ponte.

In particolare, per quanto riguarda il ponte strallato si sono dimostrati significativi i parametri ε_F e a per la flessione della travata, ε_T per la torsione. L'analisi tridimensionale ha potuto evidenziare l'influenza della forma delle torri sulla deformabilità torsionale della travata. Inoltre lo spostamento trasversale della travata si è dimostrato influente sulla rotazione torsionale dello schema strallato con pila ad "A".

Per quanto riguarda il ponte sospeso i parametri particolarmente significativi sono stati Ψ_{ct} e K_F , vale a dire i parametri di rigidezza del cavo di sospensione e di rigidezza relativa tra cavo e travata. Si è potuto notare, infatti, dai diagrammi che al diminuire della rigidezza della travata il comportamento dell'intera struttura tende a coincidere con quello del solo cavo.

Per quel che concerne il ponte misto si è potuto osservare un comportamento a deformabilità migliore dei due schemi da cui viene assemblato. Tale schema sembra avere i pregi sia del ponte strallato che di quello sospeso manifestando poca sensibilità a subire elevati spostamenti sia al variare della velocità di percorrenza del carico che al diminuire della rigidezza della travata rispetto a quella del cavo di sospensione.

Bibliografia

- [1] AA.VV., *Encyclopedia of Computational Mechanics Vol.1*, John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [2] Abdel-Ghaffar A.M., *Free Lateral Vibrations of Suspension Bridges*, Journal of the Structural Division, March 1978.
- [3] *ANSYS Documentation*, ANSYS, Inc. 1998.
- [4] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K., *Impact study of Cable-Stayed bridge under railway traffic using various models*, Journal of Sound and Vibration (2001) 240(3), pp. 447-465.
- [5] Au F.T.K., Wang J.J., Cheung Y.K., *Impact study of Cable-Stayed railway bridges with random rail irregularities*, Engineering Structures (2002) 24, pp. 529-541.
- [6] Bathe K-J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- [7] Bilello C., *Effects of damage on the response of Euler-Bernoulli beams traversed by a moving mass*, Dip. di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Palermo, Palermo 2002.

-
- [8] Billington D.P., *History and Aesthetics in Suspension Bridges*, Journal of the Structural Division, August 1977.
- [9] Billington D.P., Nazmy A., *History and Aesthetics of Cable-Stayed Bridges*, Journal of Structural Engineering, vol.117, n.10, October 1990.
- [10] Brancaleoni F., Petrangeli M.P., Villatico C., *Train Structure Interaction in Railway Cable Stayed Bridge Dynamics*, Proc. Int. Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Nov. 1987, pp. 452-463.
- [11] Bruno D., Grimaldi A., Leonardi A., *Sul comportamento non lineare dei ponti strallati di grande luce*, VI Congresso AIMETA, Genova, Ottobre 1982.
- [12] Bruno D., Grimaldi A., *An analysis of the non linear behaviour of long-span cable-stayed bridges*, Dept. of structures, University of Calabria, Report N.52 May 1983.
- [13] Bruno D., Leonardi A., *Non linear analysis of long-span cable-stayed bridges eccentrically loaded*, Dept. of structures, University of Calabria, Report N.53 June 1983.
- [14] Bruno D., *On the dynamical behaviour of long-span cable-stayed bridges under moving loads*, Dept. of structures, University of Calabria, Report N.75 September 1984.
- [15] Bruno D., *On the dynamical behaviour of long-span cable-stayed bridges under moving loads*, Cstruzioni Metalliche, n.2, 1985.

-
- [16] Bruno D., Leonardi A., *Sul comportamento statico dei ponti strallati di grande luce con pile ad A*, Giornale del Genio Civile, Gennaio-Marzo 1988.
- [17] Bruno D., Leonardi A., *Natural periods of Long Span Cable-Stayed Bridges*, Journal of Bridge Engineering vol.2, n.3, August 1997.
- [18] Bryja D., Sniady P., *Stochastic Non-Linear Vibrations of Highway Suspension Bridge Under Inertial Sprung Moving Load*, Journal of Sound and Vibration (1998) 216(3), pp. 507-519.
- [19] Buckland P.G., Hooley R., Morgenstern B.D., Rainer J.H., van Selst A.M., *Suspension Bridge Vibrations: Computed and Measured*, Journal of the Structural Division, May 1979.
- [20] Chatterjee P.K., Datta T.K., Surana C.S., *Vibration of Suspension Bridges under Vehicular Movement*, J. Struct. Eng., ASCE, Vol.120, n.3, Marzo 1994, pp. 681-703.
- [21] Chatterjee P.K., Datta T.K., Surana C.S., *Dynamic response of trussed bridges for moving loads*, Computer & Structures vol.46, n.6, pp. 1085-1093, 1993.
- [22] Chen D.W., Au F.T.K., Tham L.G., Lee P.K.K., *Determination of initial cable forces in prestressed concrete cable-stayed bridges for given design deck profiles using the force equilibrium method*, Dept. of Bridge Engineering, Tonji University, Shanghai, Dept. of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong November 1998.
- [23] Crisfield M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol.1-Vol.2*, John Wiley & Sons, 1997.

-
- [24] De Miranda F., Grimaldi A., Maceri F., Como M., *Basic problems in long-span cable-stayed bridges*, Internal Report, Dept. of structures, University of Calabria, September 1979.
- [25] De Miranda F., *I ponti strallati di grande luce*, Ed. Scientifiche A. Cremonese, Roma 1980.
- [26] Dym C.L., Shames I.H., *Solid Mechanics, A Variational Approach*, Intern. Student Edition, 1973.
- [27] Finzi L., Castellani A., Bascialla E., *Cable stays comply with runnability requirements in long span suspension bridges*, Int. Conference on cable-stayed bridges, Bangkok, November 18-20, 1987.
- [28] Fryba L., *Vibration of solids and structures under moving loads*, Noordhoff International Publishing, Gronigen. Academia, House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1972.
- [29] Giangreco E., Baldacci R., Ceradini G., *Dinamica e stabilità, Vol. II.B*, Italsider, Genova 1971.
- [30] Giangreco E., *Ingegneria delle strutture, Vol. 2° Metodi di analisi*, Utet, Torino 2003.
- [31] Gimsing N.J., *Cable supported bridges. Concept and design*, John Wiley & Sons Ltd., 1983.
- [32] Green M.F., Cebon D., *Dynamic interaction between heavy vehicles and highway bridges*, Computer & Structures vol.62, n.2, pp. 253-264, 1997.
- [33] Irvine H.M., *Cable Structures*, MIT Press, 1981.

-
- [34] Irvine H.M., Griffin J.H., *On the dynamic response of suspended cable*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.4 (1976), pp. 389-402.
- [35] Karoumi R., *Dynamic Response of Cable-Stayed Bridges Subjected to Moving Vehicles*, IABSE 15th Congress, Denmark, June 1996, pp. 87-92.
- [36] Karoumi R., *Response of Cable-Stayed and Suspension Bridges to moving vehicles*, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, 1998.
- [37] Lei X., Noda N.A., *Analyses Of Dynamic Response Of Vehicle And Track Coupling System with Random Irregularity of Track Vertical Profile*, Journal of Sound and Vibration (2002) 258(1), pp. 147–165.
- [38] Li R., Chen Z., Wu W., *Generalized Difference Methods for Differential Equations*, Marcel Dekker Inc., New York 2000.
- [39] Mahmoud M.A., Aboud Zaid M.A., *Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass*, Journal of Sound and Vibration (2002) 256(4), pp. 591-603.
- [40] *MAPLE User Manual*, MapleSoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2005.
- [41] Martin T.M., Barton F.W., McKeel W.T., Gomez J.P., Massarelli P.J., *Effect of design parameters on the dynamic response of bridges*, Virginia Transportation Research Council, Charlottesville, Virginia, June 2000.
- [42] Michaltsos G.T., *Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds*, Journal of Sound and Vibration (2002) 258(2), pp. 359-372.

- [43] Michaltsos G.T., *The influence of centripetal and Coriolis forces on the dynamic response of light bridges under moving vehicles*, Journal of Sound and Vibration (2001) 247(2), pp. 261-277.
- [44] Michaltsos G., Sophianopoulos D., Kounadis A.N., *The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam*, Journal of Sound and Vibration (1996) 191(3), pp. 357-362.
- [45] Muscolino G., *Dinamica delle strutture*, McGraw-Hill, Milano 2002.
- [46] Ogden R.W., *Non-Linear Elastic Deformations*, Dover Publications, Mineola, New York 1997.
- [47] Pugsley A., *The Theory of Suspension Bridges*, Edward Arnold Ltd., London 1968.
- [48] Reddy J.N., *An introduction to finite element method*, McGraw-Hill, 1993.
- [49] Wang P.H., Tseng T.C., Yang C.G., *Initial shape of cable-stayed bridges*, Dept. of Civil Engineering, Chung-Yuan Christian University, Chung-Li, Taiwan, Republic of China, 1991.
- [50] Wang T.L., Huang D., *Cable-Stayed Bridge Vibration due to road surface roughness*, J. Struct. Eng., ASCE, Vol.118, n.5, Maggio 1992, pp. 1354-1374.
- [51] Wang T.L., Huang D., *Impact analysis of Cable-Stayed bridges*, Computer & Structures vol.43, n.5, pp. 897-908, 1992.

-
- [52] Wang T.L., Huang D., *Dynamic response of multigirder bridges*, Journal of Structural Engineering vol.118, n.8, August, 1992.
- [53] Wang J.F., Lin C.C., Chen B.L., *Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers*, Int. Journal of Solids and Structures 40 (2003), pp. 465-491.
- [54] Wang P-H., Tang T-Y., Zheng H-N., *Analysis of cable-stayed bridges during construction by cantilever methods*, Computer & Structures 82 (2004), pp. 329-346.
- [55] Xia H., Xu YL, And Chan THT, *Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains*, Journal of Sound and Vibration, 237 (2), 19, 263-280, 2000.
- [56] Yang F., Fonder G.A., *Dynamic Response of Cable-Stayed Bridges under moving loads*, J. Eng. Mech., Luglio 1998, pp. 741-747.
- [57] Yau J-D., Yang Y-B., Kuo S-R., *Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars*, Engineering Structures 21 (1999), pp. 836-844.
- [58] Yau J-D., Yang Y-B., *Vibration reduction for Cable-Stayed bridges travelled by high-speed trains*, Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004), pp. 341-359.
- [59] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method Vol.1*, Butterworth-Heinemann, 2000.